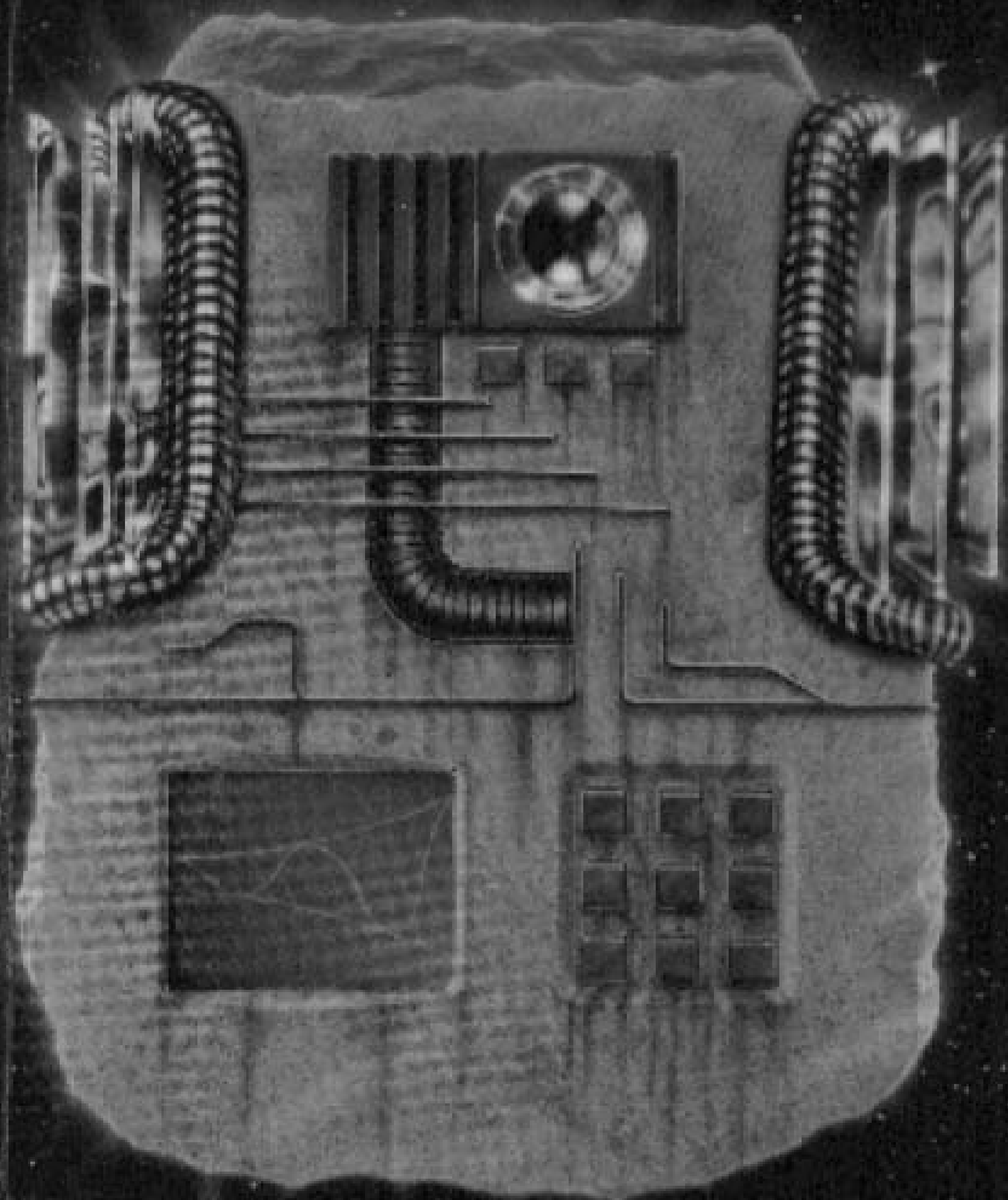
EC7
LEITHOLD



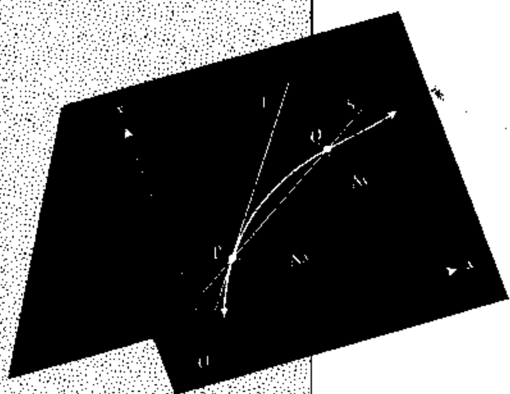
EL CÁLCULO - 7 ed.



EL CÁLCULO

7 ed.

Louis Leithold
Pepperdine University





Oxford University Press

México • Argentina • Colombia • Chile • Ecuador • Guatemala • Venezuela

DISEÑO PARA LA CUBIERTA

Dan Douke, pintor del Sur de California y actualmente profesor de arte en *California State University* de los Angeles, exhibe su obra de manera regular en *Tortue Gallery*, en Santa Mónica, y en *O. K. Harris Works of Art* en Nueva York. El profesor Douke redactó la siguiente declaración de acuerdo con el cuadro reproducido en la cubierta:

> "El enorme avance de la tecnología en la década final del siglo XX, alentada por los utópicos de la sociedad del Oeste que creen en un paraíso de información electrónica, motivó esta pintura especialmente creada para *EC7*, la cual surge directamente de mi trabajo reciente sobre objetos futuristas. En este cuadro busco mostrar un encuentro con la imagen y la imaginación al borde de la idea fugaz hacia una forma tangible. Deseo que el trabajo tenga un aspecto extrañamente familiar, tal vez como parte de algo más grande, más poderoso y futurista, pero a la vez que parezca usado. El cuadro es de hecho una metáfora que representa el deseo del individuo de buscar y experimentar la adquisición del conocimiento".

Edición:	Fidencio Mata González
	Alfredo Pérez Guarneros
Producción:	Antonio Figueredo Hurtado
Supervisión:	Rosario López Santiago
Formación:	E. G. Corporación de Servicios Editoriales y Gráficos

EL CÁLCULO. Séptima Edición

OXFORD UNIVERSITY PRESS - HARLA MÉXICO, S.A. de C.V.
Antonio Caso 142, Col. San Rafael, Delegación Cuauhtémoc, C. P. 06470, México, D.F. Tel. 5 92 42 77
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, número de registro 723.

ISBN 970-613-182-5

Traducido de la séptima edición en inglés de:
THE CALCULUS 7

Publicado por acuerdo con Louis Leithold e Interests International, Inc.
ISBN 0-673-46913-1

Impreso en México — *Printed in Mexico*
10 9 8 7 6 5 4 3 2

Esta obra se terminó de imprimir en mayo de 1998
en GRUPO MEXICANO MAPASA, S.A. de C.V.
Emiliano Zapata No. 93
Col. San Juan Ixhuatepec
Tlalnepantla, Edo. de México
C.P. 54180

Se imprimieron 21,000 ejemplares.

CONTENIDO

PRÓLOGO

" Todo debe hacerse tan simple como sea posible, pero sin excederse en ello."

Albert Einstein

El Cálculo 7 (de aquí en adelante abreviado como *EC7*) es una obra diseñada tanto para los cursos de especialización en matemáticas como para los estudiantes cuyo interés primario radica en la ingeniería, las ciencias física y sociales, o los campos no técnicos. La exposición está adecuada a la experiencia y madurez del principiante. Las explicaciones detalladas, los abundantes ejemplos desarrollados así como la gran variedad de ejercicios, continúan siendo las características distintivas del texto.

En ningún otro tiempo entre ediciones sucesivas han ocurrido tantos cambios en la enseñanza del Cálculo como en el periodo entre las ediciones sexta y séptima de este texto. Muchos de estos cambios son el resultado de la disponibilidad de la tecnología moderna en la forma de calculadora gráfica o graficadora manual. Algunos otros cambios se deben al movimiento denominado *reforma del Cálculo.* He invitado a seguir este movimiento observando el principio: REFORMA CON RAZÓN. Con el fin de apegarme a este principio, he aplicado las siguientes guías:

1. La tecnología debe incorporarse para mejorar la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo, *no* para reemplazar las matemáticas o restar importancia a los temas teóricos.
2. Las definiciones y teoremas deben establecerse formalmente, *no* informalmente.
3. Los estudiantes deben estar concientes de que las demostraciones de los teoremas son necesarias.
4. Cuando se presenta una demostración, debe ser bien motivada y cuidadosamente explicada, de modo que sea entendible para cualquiera que haya alcanzado un dominio promedio de las secciones anteriores del libro.
5. Cuando se establece un teorema sin demostración, la discusión debe aumentarse mediante figuras y ejemplos; en tales casos, debe enfatizarse el hecho de que lo que se presenta es un ejemplo ilustrativo de la proposición del teorema y *no* una demostración del mismo.
6. Debe darse importancia a los modelos matemáticos de las aplicaciones de la vida real.
7. Debe destacarse la redacción en matemáticas.

Los catorce capítulos de *EC7* pueden clasificarse en dos partes: capítulos 1–9, en los que se estudian funciones de una variable y series infinitas; capítulos 10–14, en los que se tratan vectores y funciones de más de una variable. En *EC7* se han realizado cambios en las dos partes. En todo el libro se mantiene un sano equilibrio entre un estudio riguroso y un punto de vista intuitivo, incluso en las modificaciones.

Con objeto de alcanzar los objetivos planteados, se han incorporado las siguientes características:

GRAFICADORA "ACTIVA"

A lo largo de la presentación, *EC7* utiliza la calculadora gráfica o graficadora manual no sólo como un poderoso y fascinante instrumento para el aprendizaje, sino como un instrumento fundamental en la solución de problemas. Se ha integrado la graficadora directamente a la exposición de acuerdo a la filosofía que he aprendido en mis tres veranos con TICAP (Technology Intensive Calculus for Advanced Placement) la cual se resume como sigue:

1. Trabajar *analíticamente* (con papel y lápiz); después **apoyar** *numérica* y *gráficamente* (con la graficadora).
2. Trabajar *numérica* y *gráficamente*; después **confirmar** *analíticamente.*
3. Trabajar *numérica* y *gráficamente* debido a que otros métodos *no son prácticos* o *posibles.*

MODELOS MATEMÁTICOS Y PROBLEMAS VERBALES

Los modelos matemáticos de situaciones prácticas presentadas como problemas verbales surgen en diversos campos como física, química, ingeniería, administración, economía, psicología, sociología, biología y medicina. Las funciones como modelos matemáticos se introducen primero en la sección 1.3 y aparecen con frecuencia en el resto del texto. La sección 1.3 contiene sugerencias para obtener una función como modelo matemático paso a paso.

REDACCIÓN EN MATEMÁTICAS

A fin de completar la solución de cada ejemplo de un problema verbal, se presenta una *conclusión* que responde a las preguntas de éste. El estudiante debe redactar una conclusión semejante, que consista en una o más oraciones completas, para cada ejercicio similar. Al final de cada grupo de ejercicios hay uno o dos de redacción los cuales pueden preguntar sobre *cómo* o *por qué* funciona un procedimiento determinado, o bien, pueden pedirle al estudiante que *describa*, *explique* o *justifique* un proceso particular.

EJERCICIOS

Los ejercicios, revisados de las ediciones anteriores y ordenados por grados de dificultad, proporcionan una gran variedad de tipos de problemas que van desde cálculos y aplicaciones hasta problemas teóricos para la calculadora y ejercicios de redacción, como los mencionados anteriormente. Éstos aparecen al final de cada sección y como ejercicios de repaso al final de cada capítulo.

EJEMPLOS Y EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Los *ejemplos*, cuidadosamente seleccionados, habilitan a los estudiantes en la resolución de los ejercicios, y además sirven como modelos para sus soluciones. Se utiliza un *ejemplo ilustrativo* a fin de mostrar un concepto, definición o teorema particular; es un prototipo de la idea expuesta.

PROGRAMA DE ARTE VISUAL (FIGURAS)

Todas las figuras se han vuelto a trazar para *EC7*. Las gráficas trazadas en la graficadora se muestran en una pantalla de graficadora enmarcada por un borde de color más oscuro a diferencia de las gráficas dibujadas a mano. Todas

las figuras tridimensionales se han generado mediante computadora con el fin de obtener precisión matemática. Estas figuras, que son más vívidas que en las ediciones anteriores, fueron creadas con la ayuda de *Matemática*® y *Adobe Illustrator*®.

ASPECTOS PEDAGÓGICOS

Cada capítulo comienza con una introducción titulada *VISIÓN PRELIMINAR*. Al final de cada capítulo se muestra una lista de sugerencias para su revisión. Juntos, estos aspectos sirven como una reseña, de principio a fin del capítulo, cuando el estudiante se prepara para un examen.

DESCRIPCIÓN DE CADA CAPÍTULO

Capítulo 1 Funciones, límites y continuidad

Los tres temas del título de este capítulo conforman la base de cualquier primer curso de Cálculo. Se exponen todos los teoremas de límites incluyendo algunas demostraciones en el texto, mientras que otras se esbozan en los ejercicios. La sección 1.3, nueva en esta edición, presenta las funciones como modelos matemáticos anticipadamente de su uso posterior en aplicaciones. En consecuencia, estos modelos proporcionan al estudiante una vista preliminar de cómo se aplica el Cálculo en situaciones reales. La sección 1.4, también nueva, utiliza la graficadora para introducir el concepto de límite de una función.

Capítulo 2 Derivada y diferenciación

En la sección 2.1 se define la recta tangente a la gráfica de una función antes de estudiar la derivada, esto con el propósito de mostrar un avance de la interpretación geométrica de este concepto. Las aplicaciones físicas de la derivada en el estudio del movimiento rectilíneo se presentan sólo después de haber demostrado los teoremas sobre diferenciación, de modo que dichos teoremas pueden emplearse en estas aplicaciones. En la sección 2.7 se estudian las derivadas de las seis funciones trigonométricas y después se emplean como ejemplos para la presentación inicial de la regla de la cadena en la siguiente sección. La derivada numérica, tema nuevo en esta edición y presentado en la sección 2.3, se utiliza junto con la graficadora para aproximar derivadas y para trazar sus gráficas. En la sección 2.4 se simula el movimiento de una partícula sobre una línea recta.

Capítulo 3 Comportamiento de las funciones y sus gráficas, valores extremos y aproximaciones

En este capítulo se presentan las aplicaciones tradicionales de la derivada que implican máximos y mínimos así como el trazado de una curva. Los límites al infinito y sus aplicaciones para determinar asíntotas horizontales se han cambiado a este capítulo donde se aplican a fin de dibujar gráficas. La graficadora se utiliza frecuentemente con el objeto de apoyar los resultados obtenidos de forma analítica así como para conjeturar propiedades de las funciones, las cuales se confirman después analíticamente. Un aspecto nuevo de esta edición está relacionado con los ejercicios, donde se le pide al estudiante que dibuje

la gráfica de una función a partir de la gráfica de su derivada y viceversa. En la sección final del capítulo se presenta la aproximación mediante la recta tangente junto con el método de Taylor y el de diferenciales.

Capítulo 4 Integral definida e integración

Las dos primeras secciones tratan sobre antiderivación (o antidiferenciación). Se utiliza el término antiderivación en lugar de *integración indefinida*, sin embargo, se conserva la notación estándar $\int f(x)\,dx$. Esta notación sugerirá que debe existir alguna relación entre integrales definidas y antiderivadas, pero no veo perjuicio alguno en lo anterior, en tanto la presentación proporcione un panorama teóricamente apropiado de la definición de la integral definida como un límite de sumas. Dichos límites se aplican primero para definir el área de una región plana y después se utilizan en la definición de la integral definida. La capacidad de la graficadora para aproximar el valor de una integral definida se presenta antes de la demostración del segundo teorema fundamental del Cálculo, utilizado para obtener valores de integrales analíticamente. Esta capacidad permite demostrar propiedades de la integral definida en una graficadora tal como se desarrollan. La sección 4.3, sobre ecuaciones diferenciales separables, presenta aplicaciones sobre el movimiento rectilíneo, donde el movimiento se simula en la graficadora. Otras aplicaciones de los conceptos de este capítulo incluyen el estudio completo del área de una región plana así como el volumen de sólidos, presentados posteriormente en la edición anterior. La sección 4.9 se inicia con el cálculo de volúmenes mediante el método de rebanado, se continúa con la determinación de volúmenes de sólidos de revolución mediante los métodos de discos y de arandelas, considerados como casos especiales del método de rebanado. En la sección 4.10 se determinan los volúmenes de sólidos de revolución mediante el método de capas cilíndricas.

Capítulo 5 Funciones logarítmicas, exponenciales, trigonométricas inversas e hiperbólicas

En la primera sección se tratan las funciones inversas, y las cinco secciones siguientes se dedican a las funciones logarítmica y exponencial. Primero se define la función logarítmica natural y después la función exponencial natural como su inversa. Este procedimiento permite dar un significado preciso de un exponente irracional de un número positivo. Posteriormente se define la función exponencial de base *a*, donde *a* es positivo. Las aplicaciones de estas funciones incluyen las leyes naturales de crecimiento y decaimiento, el crecimiento limitado implica la curva de aprendizaje, y la función de densidad de probabilidad normal estandarizada. Las tres últimas secciones se dedican a las funciones trascendentes (no algebraicas) restantes: las funciones trigonométricas inversas y las funciones hiperbólicas.

Capítulo 6 Aplicaciones adicionales de la integral definida

En este capítulo se presentan las aplicaciones de la integral definida, no sólo las técnicas de manipulación sino también los principios fundamentales involucrados. La longitud de arco, una aplicación geométrica, se trata en la sección 6.1. Las otras cuatro secciones están dedicadas a aplicaciones físicas, las cuales incluyen centro de masa de una barra y de regiones planas, trabajo y fuerza ejercida por la presión de un líquido. En cada aplicación, se motivan

y explican intuitivamente las definiciones de los términos nuevos. Se han vuelto a escribir todas las secciones y se han agregado ejemplos, en algunos de ellos se utiliza la graficadora para aproximar el valor de la integral definida.

Capítulo 7 Técnicas de integración, formas indeterminadas e integrales impropias

Las técnicas de integración constituyen uno de los aspectos más importantes de las operaciones del Cálculo. Estas técnicas se estudian en las primeras cinco secciones, tratadas en ocho en la edición anterior. Después de una motivación introductoria, se explican los fundamentos teóricos de cada uno de los métodos. El dominio de las técnicas de integración depende de los ejemplos, y se han utilizado como problemas ilustrativos que, seguramente, el estudiante enfrentará en la práctica. En la sección 7.4 se presentan otras dos aplicaciones de la integración: crecimiento logístico, que surge en economía, biología y sociología; y la ley química de acción de masas. En la sección 7.6 se estudian dos métodos numéricos para aproximar integrales definidas. Estos procedimientos son importantes debido a que resultan muy adecuados para el uso de computadoras y graficadoras. Los temas sobre aproximación de integrales definidas incluyen el establecimiento de teoremas acerca de las cotas para el error implicado en estas aproximaciones. Las cuatro secciones restantes, que tratan acerca de las formas indeterminadas e integrales impropias, se han reubicado en esta edición; preceden inmediatamente a los temas de series, en donde se aplican muchos de los resultados obtenidos. Las aplicaciones de las integrales impropias incluyen la función de densidad de probabilidad así como algunas otras relacionadas con geometría y economía.

Capítulo 8 Aproximaciones polinomiales, sucesiones y series infinitas

Las secciones acerca de sucesiones y series se han considerado en un solo capítulo y no en dos como en la edición anterior. Todos los temas se incluyen, pero algunas de las discusiones se han acortado sin sacrificar la integridad matemática. Este capítulo es independiente y puede estudiarse en cualquier momento después de completar los primeros siete capítulos. La primera sección trata acerca de aproximaciones polinomiales mediante la fórmula de Taylor. Esta fórmula se generaliza a la serie de Taylor en la sección 8.9. Las secciones 8.2–8.6 se han dedicado a las sucesiones y series infinitas de términos constantes, y en la sección 8.6 se presenta un resumen de los criterios de convergencia para series infinitas. En las secciones 8.7–8.10 se estudian las series de términos variables denominadas series de potencias. Los temas de este capítulo conducen por sí mismos a la incorporación de la graficadora, no sólo para facilitar el estudio sino que permite a los estudiantes examinar e investigar la convergencia o divergencia de una serie infinita y de aproximaciones polinomiales.

Capítulo 9 Ecuaciones paramétricas, curvas planas y gráficas polares

Los tres temas de este capítulo se han agrupado para completar el estudio del cálculo de una variable. Las dos primeras secciones tratan sobre ecuaciones paramétricas y curvas planas, constituyen un requisito previo para el estudio de vectores. En las dos secciones siguientes se estudian gráficas polares, mientras que en la sección final se presenta un tratamiento unificado de las secciones cónicas y las ecuaciones polares de las cónicas. La discusión de

las secciones cónicas en coordenadas rectangulares ahora se estudian por lo general en un curso previo al Cálculo, en esta edición se tratan en el apéndice.

Capítulo 10 Vectores, rectas, planos y superficies en el espacio

En esta edición, los vectores bidimensionales y tridimensionales se estudian en el mismo capítulo y no en forma separada como en ediciones anteriores. En la sección 10.1 se definen los vectores en el plano. En la sección 10.2, antes de definir un vector tridimensional, se presenta el espacio numérico tridimensional, el cual se denota por R^3. En el capítulo también se proporciona una introducción vectorial a la geometría analítica sólida al estudiar, en la sección 10.4, rectas y planos en R^3, y superficies en la sección 10.6.

Capítulo 11 Funciones vectoriales

De igual manera que con los vectores en el capítulo 10, en este capítulo se estudian las funciones vectoriales tanto en el plano como en el espacio tridimensional. Las curvas en los dos espacios, definidas mediante una función vectorial o por medio de un conjunto de ecuaciones paramétricas, así como sus propiedades también se estudian simultáneamente. Las aplicaciones de este capítulo tratan acerca de geometría, física e ingeniería. En la sección 11.5, sobre movimiento curvilíneo, se utiliza la graficadora para simular en movimiento de un proyectil en un plano.

Capítulo 12 Cálculo diferencial de funciones de más de una variable

Los temas contenidos en este capítulo se han reunido y condensado de dos capítulos de las ediciones anteriores, otra vez sin afectar la integridad matemática. En las primeras cinco secciones se estudian límites, continuidad, derivadas parciales, diferenciabilidad y la regla de la cadena para funciones de más de una variable. Las aplicaciones de estas secciones incluyen la determinación de tasas de variación y el cálculo de aproximaciones. La sección 12.6, sobre derivadas direccionales y gradientes, precede a una sección que muestra la aplicación del gradiente en la determinación de planos tangentes y rectas normales a superficies. Otras aplicaciones de las derivadas parciales se presentan en las dos últimas secciones y tratan sobre problemas de extremos y multiplicadores de Lagrange.

Capítulo 13 Integración múltiple

El Cálculo integral de funciones de más de una variable, contenido en las secciones 13.2–13.6, es precedido por una sección en la que se estudian coordenadas cilíndricas y esféricas, reubicadas en esta edición, de modo que estén más cerca a los temas en que se aplican. Las integrales dobles de las funciones de dos variables se estudian en la sección 13.2 y en las dos secciones siguientes se aplican a la física, ingeniería y geometría.

Capítulo 14 Introducción al Cálculo de campos vectoriales

En las seis secciones de este capítulo final se presenta un estudio amplio del Cálculo vectorial. Este estudio incluye campos vectoriales, integrales de línea,

el teorema de Green, el teorema de la divergencia de Gauss y el teorema de Stokes. La presentación de estos temas es intuitiva y las aplicaciones son acerca de física e ingeniería.

Apéndice

Los temas de álgebra, trigonometría y geometría analítica, por lo común se estudian en cursos previos al Cálculo, ahora se presentan en el apéndice, dejando así el cuerpo principal del texto para temas estrictamente de Cálculo. Esta modificación tiene como consecuencia el hecho de que las palabras *con geometría analítica* no aparecen en el título de esta edición. Las secciones del apéndice pueden cubrirse en detalle, como un repaso o pueden omitirse por completo, dependiendo de la preparación de los estudiantes de cada grupo.

Secciones suplementarias

Las secciones suplementarias se encuentran después del apéndice; estas secciones contienen temas que pueden ser cubiertos u omitidos sin afectar la comprensión del material subsecuente. Estas secciones designadas mediante el número de la sección del cuerpo principal del texto, contienen discusiones teóricas y algunas de las demostraciones más difíciles.

LOUIS LEITHOLD

RECONOCIMIENTOS

REVISORES

Benita Albert, Oak Ridge High School
Daniel D. Anderson, University of Iowa
Richard Armstrong, Saint Louis Community College at Florissant Valley
Carole A. Bauer, Triton College
Jack Berman, Northwestern Michigan College
Michael L. Berry, West Virginia Wesleyan College
James F. Brown, Midland College
Phillip Clarke, Los Angeles Valley College
Charles Coppin, University of Dallas
Larry S. Dilley, Central Missouri State University
Peter Embalabala, Linclon Land Community College
Leon Gerber, Saint John's University
Ronald E. Goetz, Saint Louis Community College at Maramac
William L. Grimes, Central Missouri State University
Kay Hodge, Midland College
Charles S. Johnson, Los Angeles Valley College
John E. Kinikin, Arcadia High School
Stephen Kokoska, Bloomsburg University of Pennsylvania Ron Lancaster
Benny Lo, Ohlone College
Miriam Long, Madonna University
Robert McCarthy, Community College of Allegheny County
Lawrence P. Merbach, North Dakota State College of Science
Janet Mills, Seattle University
James M. Parks, State University of New York College at Potsdam
Terry Reeves, Red Rock Community College
William H. Richardson, Wichita State University
Ricardo A. Salinas, San Antonio College
Lillian Seese, Saint Louis Community College at Maramac
Luzviminda Villar Shin, Los Angeles Valley College
Lawrence Small, Los Angeles Pierce College
James Smolko, Lakeland Community College
Armond E. Spencer, State University of New York College at Potsdam
Anthony E. Vance, Austin Community College
Jan Vandever, South Dakota State University
Gerald L. White, Western Illinois University
Douglas Wilberscheid, Indian River Community College
Don Williams, Brazosport College
Andre L. Yandl, Seattle University

PREPARACIÓN DE SOLUCIONES Y RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS

Leon Gerber, Saint John's University, asistido por Samuel Gerber

REVISORES DE LAS RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS

Ronald E. Goetz, Saint Louis Community College at Maramac
Charles S. Johnson, Los Angeles Valley College
Robert McCarthy, Community College of Allegheny County
Lawrence P. Merbach, North Dakota State College of Science
Luzviminda Villar Shin, Los Angeles Valley College
Armond E. Spencer, State University of New York College at Potsdam

DISEÑO DE LA CUBIERTA

Dan Douke, cortesía de Tortue Gallery, Santa Mónica

Para estas personas, para el cuerpo técnico de HarperCollins College Publishers y todos los usuarios de las seis ediciones anteriores ofrezco mi más profundo reconocimiento. Deseo agradecer especialmente a Leon Gerber, Saint John's University, y Lawrence Small, Los Angeles Pierce College, por sus esfuerzos diligentes en la revisión del manuscrito en sus diferentes versiones antes de la publicación así como por sus contribuciones significativas a los ejercicios nuevos de esta edición. También agradezco a mi editor, Kevin Connors, HarperCollins College Publishers, por su firme dedicación, coraje y apoyo para este proyecto

L.L.

MATERIAL SUPLEMENTARIO PARA EL CÁLCULO*

Para el estudiante

An Outline for the Study of Calculus (**Un esbozo para el estudio del Cálculo**) por Leon Gerber, de Saint John's University y John Minnick, de DeAnza College.

Para ayudar a los estudiantes en su estudio de *EC7*, este manual, en tres volúmenes, contiene las soluciones detalladas paso a paso de todos los ejercicios cuyo número es divisible entre 4. Los manuales también contienen todos los teoremas y definiciones importantes así como exámenes simples con sus soluciones para cada capítulo.

Para el profesor

Instructor's Solutions Manual for THE CALCULUS 7 (**Manual de soluciones para el profesor**) por Leon Gerber, de Saint John's University.

Este manual, en dos volúmenes, contiene las soluciones para todos los ejercicios de *EC7*.

Test Generator/Editor with Quizmaster (**Generador de exámenes/Editor con Quizmaster**)

Este banco de exámenes computarizado está disponible en versiones para DOS y Macintosh, y puede trabajarse completamente en redes. El *Generador de Exámenes*, escrito para *EC7*, puede emplearse para seleccionar problemas y preguntas al elaborar exámenes ya preparados. El *Editor* permite a los profesores editar cualesquiera datos preexistentes o crear sus propias preguntas. *Quizmaster* permite a los instructores crear exámenes y cuestionarios del *Generador de Exámenes* y almacenarlos en discos de modo que puedan ser utilizados por los estudiantes en computadoras personales o en una red.

También está disponible un banco de exámenes impresos que incluye todos los problemas y preguntas del banco de exámenes computarizado.

Libros auxiliares de interés para estudiantes y profesores de Cálculo publicados por Oxford University Press, Harla, México

Estos materiales se encuentran listados en la tercera de forros de este libro.

* **N. del E.** Este material sólo está disponible en inglés. En un futuro próximo esta editorial tendrá el "Manual de resoluciones para el profesor".

ASPECTOS HISTÓRICOS DEL CÁLCULO

Algunas de los ideas fundamentales del Cálculo se remontan a los antiguos matemáticos griegos del tiempo de **Arquímedes** (287-212 a.C.) así como a los trabajos de los primeros años del siglo XVII realizados por **René Descartes** (1596-1650), **Pierre de Fermat** ((1601-1665), **John Wallis** (1616-1703) e **Isaac Barrow** (1630-1677). Sin embargo, la invención del Cálculo se atribuye a **Sir Isaac Newton** (1642-1727) y **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) debido a que ellos iniciaron la generalización y unificación de estos conceptos matemáticos. Asimismo, otros matemáticos de los siglos XVII y XVIII intervinieron en el desarrollo del Cálculo, algunos de ellos fueron: **Jakob Bernoulli** (1654-1705), **Johann Bernoulli** (1667-1748), **Leonhard Euler** (1707-1783) y **Joseph L. Lagrange** (1736-1813). No obstante, no fue sino hasta el siglo XIX en que se establecieron los fundamentos de las nociones y de los procesos del Cálculo por matemáticos tales como **Bernhard Bolzano** (1781-1848), **Augustin L. Cauchy** (1789-1857), **Karl Weierstrass** (1815-1897) y **Richard Dedekin** (1831-1916).

PREPARACIÓN PARA EL ESTUDIO DEL CÁLCULO

Aprender Cálculo puede ser una de las experiencias educacionales más estimulantes y excitantes. Para que esto sea así, usted debe iniciar su curso de Cálculo con el conocimiento de ciertos conceptos de matemáticas concernientes a álgebra, geometría, trigonometría y geometría analítica.

Los temas de álgebra, trigonometría y geometría analítica de especial importancia se presentan en las secciones A.1–A.11 del apéndice al final del libro. Las propiedades específicas de los números reales así como algunas notaciones básicas se presentan en la sección A.1. Debe familiarizarse con estos temas antes de iniciar el capítulo 1. Refiérase a las secciones A.2–A.8 y A.10 para revisar los temas de geometría analítica. En la sección A.9 se estudian las funciones trigonométricas. Tal vez necesite estudiar la sección A.11, donde se presentan las fracciones parciales, antes de tratar la sección 7.4 sobre integración de funciones racionales.

La visualización mediante gráficas juega un papel importante en el estudio del Cálculo. Estas gráficas se obtendrán en dos formas: a mano y mediante un dispositivo de graficación automático de alta velocidad como las graficadoras y computadoras con el *software* apropiado. Estos dispositivos funcionan de manera similar, pero para el estudiante resultará más práctico utilizar una graficadora que una computadora personal. En consecuencia, en el texto se empleará la graficadora.

Cuando se trate de una gráfica realizada a mano se usará la terminología *dibuje la gráfica*, y cuando deba emplear un dispositivo electrónico en su elaboración se indicará *trace la gráfica*. Las gráficas trazadas en una graficadora están representadas por figuras que muestran una pantalla de graficadora enmarcada por un rectángulo y las ecuaciones de las gráficas mostradas se indican en la parte inferior de la pantalla. Las graficadoras no son estrictamente automáticas debido a que requieren de un operador (una persona que las haga funcionar) que presione teclas específicas; sin embargo, como estas teclas dependen del fabricante y del modelo de la graficadora, deberá consultar el manual de funcionamiento para obtener información sobre cómo realizar operaciones específicas.

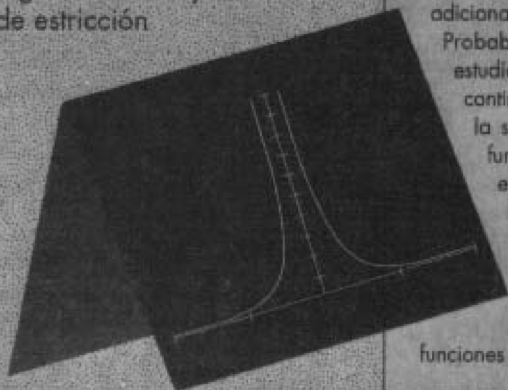
Con los conocimientos básicos preliminares, está usted preparado para iniciar su curso de Cálculo, que es el fundamento para muchas de las ramas matemáticas y para la mayoría de los conocimientos del mundo moderno.

Capítulo

1

Funciones, límites y continuidad

VISIÓN PRELIMINAR



Indudablemente habrá tratado funciones en sus cursos anteriores de matemáticas, y debido a que son fundamentales en Cálculo y sirven como un concepto unificador a lo largo de este texto, se dedicarán las dos primeras secciones a su estudio. La sección 1.3 está designada para proporcionarle práctica en la obtención de funciones como modelos matemáticos de situaciones del mundo real así como para mostrarle algunas aplicaciones del Cálculo.

Las dos operaciones matemáticas fundamentales en Cálculo son la *diferenciación* y la *integración*. Estas operaciones implican la determinación de la *derivada* y de la *integral definida*, cada una con base en la noción de *límite*, probablemente el concepto más importante en Cálculo. Se inicia el estudio de límites en la sección 1.4 mediante una introducción gráfica a los límites de funciones. Primero se proporciona una fundamentación paso a paso de la noción de límite, la cual comienza con el cálculo del valor de una función que se aproxima a un número y termina desarrollando una noción intuitiva del proceso de límite. La definición formal de límite y los teoremas sobre límites se introducen el la sección 1.5 para simplificar cálculos de límites de funciones algebraicas elementales. En las secciones 1.6 y 1.7, se extiende el concepto de límite para incluir tipos de funciones adicionales y límites infinitos.

Probablemente la clase de funciones más importante estudiados en Cálculo sean las *funciones continuas*. La continuidad de una función en un número se define en la sección 1.8 mientras que la continuidad de una función compuesta, la continuidad en un intervalo y el teorema del valor intermedio son temas de la sección 1.9. *El teorema de estricción* se presenta en la sección 1.10 y se aplica ahí para determinar el límite del cociente de sen t conforme t se aproxima a cero. Este resultado es importante al estudiar la continuidad de las funciones trigonométricas en esta misma sección.

1.1 FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

Con frecuencia, en las aplicaciones prácticas el valor de una variable depende del valor de otra. Por ejemplo, el salario de una persona puede depender del número de horas que trabaje; la producción total de una fábrica puede depender del número de máquinas que se utilicen; la distancia recorrida por un objeto puede depender del tiempo transcurrido desde que salió de un punto específico; el volumen del espacio ocupado por un gas a presión constante depende de su temperatura; la resistencia de un cable eléctrico de longitud fija depende de su diámetro; etc. La relación entre este tipo de cantidades suele expresarse mediante una *función*. Para fines exclusivos de este texto, las cantidades involucradas en estas relaciones son números reales.

Una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto X de números reales x a un conjunto Y de números reales y, donde el número y es único para cada valor específico de x.

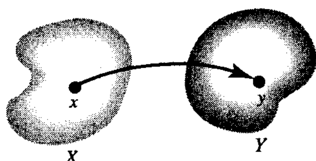


FIGURA 1

En la figura 1 se muestra la representación de una correspondencia de este tipo. Se puede establecer el concepto de función de otra manera: considere intuitivamente que el número real y del conjunto Y es una *función* del número x del conjunto X, si existe una regla mediante la cual se asocia un solo valor de y a un valor x. Esta regla se expresa frecuentemente por medio de una ecuación. Por ejemplo, la ecuación

$$y = x^2$$

Tabla 1

x	$y = x^2$
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
4	16
0	0
−1	1
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
−4	16

define una función para la cual X es el conjunto de todos los números reales y Y es el conjunto de los números no negativos. El valor de y asignado al valor de x se obtiene al multiplicar x por sí mismo. La tabla 1 proporciona algunos de estos valores y la figura 2 ilustra la correspondencia de los números de la tabla.

Para denotar funciones se utilizan símbolos como f, g y h. El conjunto X de los números reales indicado anteriormente es el *dominio* de la función y el conjunto Y de números reales asignados a los valores de x en X es el *contradominio* de la función. El dominio y el contradominio suelen expresarse en la notación de intervalos descrita en la sección A.1 del apéndice.

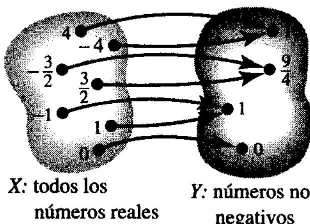


FIGURA 2

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Con notación de intervalos, el dominio y contradominio de la función definida por la ecuación

$$y = x^2$$

es $(-\infty, +\infty)$ y el contradominio es $[0, +\infty)$. ◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Sea f la función definida por la ecuación

$$y = \sqrt{x - 2}$$

Como los números se han restringido a los números reales, y es una función de x sólo si $x - 2 \geq 0$ debido a que para cualquier x que satisfaga esta desigualdad, se determina un solo valor de y. Sin embargo, si $x < 2$, se

tiene la raíz cuadrada de un número negativo, y en consecuencia, no se obtendrá un número real y. Por tanto, se debe restringir x de manera que $x \geq 2$. De este modo, el dominio de f es el intervalo $[2, +\infty)$, y su contradominio es $[0, +\infty)$. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Sea g la función definida por la ecuación

$$y = \sqrt{x^2 - 9}$$

Se observa que y es una función de x sólo para $x \geq 3$ o $x \leq -3$ (o simplemente, $|x| \geq 3$); para cualquier x que satisfaga alguna de estas desigualdades, se determinará un solo valor de y. No se determinará ningún valor real de y si x está en el intervalo abierto $(-3, 3)$, ya que para estos valores de x se obtiene la raíz cuadrada de un número negativo. Por tanto, el dominio de g es $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, y el contradominio es $[0, +\infty)$. ◀

Se puede considerar una función como un conjunto de *pares ordenados*. Por ejemplo, la función definida por la ecuación $y = x^2$ consta de todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen la ecuación. Los pares ordenados de esta función proporcionados por la tabla 1 son $(1, 1)$, $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$, $(4, 16)$, $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ y $(-4, 16)$. Por supuesto, existe un número ilimitado de pares ordenados de esta función, algunos otros son $(2, 4)$, $(-2, 4)$, $(5, 25)$, $(-5, 25)$, $(\sqrt{3}, 3)$, etcétera.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** La función f del ejemplo ilustrativo 2 es el conjunto de pares ordenados (x, y) para los cuales $y = \sqrt{x - 2}$. En símbolos esto se expresa como

$$f = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x - 2}\}$$

Algunos de los pares ordenados de f son $(2, 0)$, $(\frac{9}{4}, \frac{1}{2})$, $(3, 1)$, $(4, \sqrt{2})$, $(5, \sqrt{3})$, $(6, 2)$, $(11, 3)$. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** La función g del ejemplo ilustrativo 3 es el conjunto de pares ordenados (x, y) para los cuales $y = \sqrt{x^2 - 9}$; es decir,

$$g = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 9}\}$$

Algunos de los pares ordenados de g son $(3, 0)$, $(4, \sqrt{7})$, $(5, 4)$, $(-3, 0)$, $(-\sqrt{13}, 2)$. ◀

A continuación se establecerá formalmente la definición de función como un conjunto de pares ordenados. Al definir una función de esta manera, y no como una regla de correspondencia, se hace más preciso su significado.

1.1.1 Definición de función

Una función es un conjunto de pares ordenados de números (x, y) en los que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer

número. El conjunto de todos los valores admisibles de x se denomina **dominio** de la función, y el conjunto de todos los valores resultantes de y recibe el nombre de **contradominio*** de la función.

En esta definición, la restricción de que dos pares ordenados no pueden tener el mismo primer número asegura que y es único para cada valor específico de x. Los símbolos x y y denotan **variables.** Debido a que el valor de y depende de la elección de x, x denota a la **variable independiente** mientras que y representa a la **variable dependiente.**

Si f es la función tal que los elementos de su dominio se representan por x, y los elementos de su contradominio se denotan por y, entonces el símbolo $f(x)$ (léase "f de x") denota el valor particular de y que corresponde al valor de x. La notación $f(x)$, denominada **valor de función,** se debe al matemático y físico suizo **Leonhard Euler** (1707-1783).

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 6** En el ejemplo ilustrativo 2, $f = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x-2}\}$. De modo que

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

A continuación se calculará $f(x)$ para algunos valores específicos de x.

$$\begin{aligned} f(3) &= \sqrt{3-2} \\ &= 1 \\ f(6) &= \sqrt{6-2} \\ &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(5) &= \sqrt{5-2} \\ &= \sqrt{3} \\ f(9) &= \sqrt{9-2} \\ &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

◀

Cuando se define una función, debe indicarse el dominio implícita o explícitamente. Por ejemplo, si f está definida por

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2$$

la función tiene un valor si x es cualquier número real; por tanto, el dominio es el conjunto de todos los números reales. Sin embargo, si f está definida por

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2 \qquad 1 \leq x \leq 10$$

entonces el dominio de f consta de todos los números reales entre 1 y 10, incluidos éstos.

De manera semejante, si g está definida por la ecuación

$$g(x) = \frac{5x-2}{x+4}$$

está implícito que $x \neq -4$, debido a que el cociente no está definido para $x = -4$; en consecuencia, el dominio de g es el conjunto de todos los números reales excepto -4.

Si h está definida por la ecuación

$$h(x) = \sqrt{4-x^2}$$

el dominio de h es el intervalo cerrado $[-2, 2]$ porque $\sqrt{4-x^2}$ no es un número real para $x > 2$ o $x < -2$. El contradominio de h es $[0, 2]$.

* **N. del T.** La palabra inglesa *range* se ha traducido generalmente como *rango*, y corresponde al nombre del conjunto de valores asignados a la variable dependiente de una función. Otros nombres para este conjunto son: recorrido (poco empleado en cálculo); ámbito (término muy reciente para este concepto); imagen (muy empleado en álgebra y teoría de conjuntos); rango (muy empleado en cálculo).

EJEMPLO 1 Dado que f es la función definida por

$$f(x) = x^2 + 3x - 4$$

determine: **(a)** $f(0)$; **(b)** $f(2)$; **(c)** $f(h)$; **(d)** $f(2h)$; **(e)** $f(2x)$; **(f)** $f(x + h)$; **(g)** $f(x) + f(h)$

Solución

(a) $f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 - 4$
$= -4$

(b) $f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 4$
$= 6$

(c) $f(h) = h^2 + 3h - 4$

(d) $f(2h) = (2h)^2 + 3(2h) - 4$
$= 4h^2 + 6h - 4$

(e) $f(2x) = (2x)^2 + 3(2x) - 4$
$= 4x^2 + 6x - 4$

(f) $f(x + h) = (x + h)^2 + 3(x + h) - 4$
$= x^2 + 2hx + h^2 + 3x + 3h - 4$
$= x^2 + (2h + 3)x + (h^2 + 3h - 4)$

(g) $f(x) + f(h) = (x^2 + 3x - 4) + (h^2 + 3h - 4)$
$= x^2 + 3x + (h^2 + 3h - 8)$ ◀

Compare los cálculos del inciso (f) y (g) del ejemplo 1. En el inciso (f) se realiza el cálculo de $f(x + h)$, que es el valor de la función para la suma de x y h. En el inciso (g), en donde se calcula $f(x) + f(h)$, se obtiene la suma de los dos valores de la función $f(x)$ y $f(h)$.

En el capítulo 2 se requerirá calcular cocientes de la forma

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad h \neq 0$$

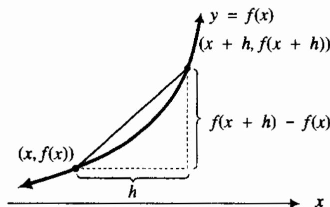


FIGURA 3

Este cociente se presenta como la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x + h, f(x + h))$ de la gráfica de la función definida por $y = f(x)$. Consulte la figura 3. En caso de que al efectuar el cálculo aparezca en el numerador la diferencia de dos radicales, se racionaliza el numerador como en el inciso (b) del ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Determine

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

donde $h \neq 0$, si **(a)** $f(x) = 4x^2 - 5x + 7$; **(b)** $f(x) = \sqrt{x}$.

Solución

(a)
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{4(x+h)^2 - 5(x+h) + 7 - (4x^2 - 5x + 7)}{h}$$
$$= \frac{4x^2 + 8hx + 4h^2 - 5x - 5h + 7 - 4x^2 + 5x - 7}{h}$$
$$= \frac{8hx - 5h + 4h^2}{h}$$
$$= 8x - 5 + 4h$$

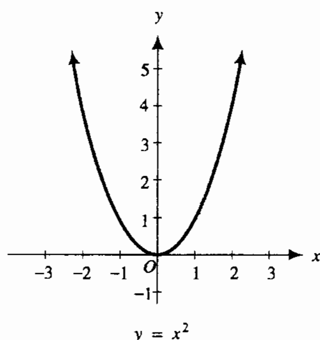


FIGURA 4

(b)
$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\\ &= \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

En el segundo paso del inciso (b) de esta solución, se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del numerador para racionalizar el numerador, de donde se obtiene un factor común de h en el numerador y en el denominador. ◀

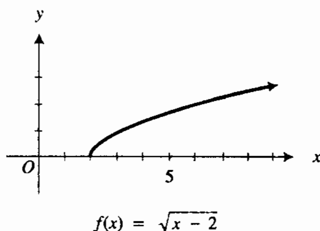


FIGURA 5

El concepto de función como un conjunto de pares ordenados permite enunciar la siguiente definición de *gráfica de una función.*

1.1.2 Definición de gráfica de una función

Si f es una función, entonces la **gráfica de** f es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano R^2 para los cuales (x, y) es un par ordenado de f.

De esta definición, se deduce que la gráfica de una función f es la misma que la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

La gráfica de la función del ejemplo ilustrativo 1 es la parábola dibujada en la figura 4. La gráfica de la función f de los ejemplos ilustrativos 2 y 4 y dibujada en la figura 5 es la mitad superior de la parábola. La gráfica de la función g de los ejemplos ilustrativos 3 y 5 está dibujada en la figura 6; está gráfica es la mitad superior de una hipérbola.

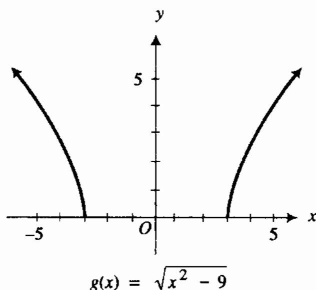


FIGURA 6

Recuerde que en una función existe un solo valor de la variable dependiente para cada valor de la variable independiente del dominio de la función. En términos geométricos, esto significa que:

Una recta vertical intersecta la gráfica de una función a lo más en un punto.

Observe que en las figuras 4, 5 y 6, cualquier recta vertical intersectará a cada gráfica cuanto más en un punto.

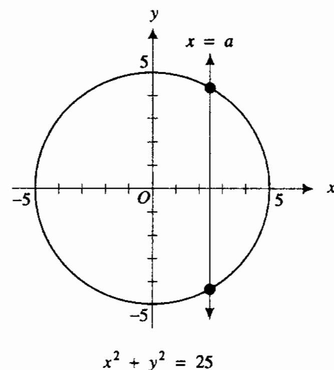


FIGURA 7

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 7** Considere el conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$, cuya gráfica es la circunferencia, de radio 5 y centro en el origen, dibujada en la figura 7. Este conjunto de pares ordenados no es una función porque para cualquier x en el intervalo $(-5, 5)$, dos pares ordenados diferentes tienen a x como primer número. Por ejemplo, $(3, 4)$ y $(3, -4)$ son dos pares ordenados del conjunto dado. Además, observe que cualquier recta vertical cuya ecuación sea $x = a$, donde $-5 < a < 5$, intersecta a la circunferencia en dos puntos. ◀

EJEMPLO 3 Determine el dominio de la función g definida por

$$g(x) = \sqrt{x(x-2)}$$

Apoye la respuesta trazando la gráfica en la graficadora.

Solución Como $\sqrt{x(x-2)}$ no es un número real cuando $x(x-2) < 0$, el dominio de la función g consta de los valores de x para los cuales $x(x-2) \geq 0$. Esta desigualdad se satisface cuando se tiene alguno de los dos casos siguientes: $x \geq 0$ y $x - 2 \geq 0$; o si $x \leq 0$ y $x - 2 \leq 0$.

Caso 1: $x \geq 0$ y $x - 2 \geq 0$. Esto es,

$$x \geq 0 \quad \text{y} \quad x \geq 2$$

Ambas desigualdades se cumplen si $x \geq 2$, lo cual equivale a que x esté en el intervalo $[2, +\infty)$.

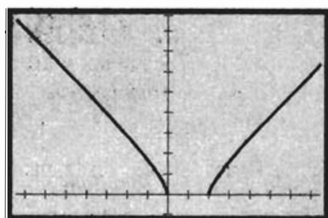
Caso 2: $x \leq 0$ y $x - 2 \leq 0$. Esto es,

$$x \leq 0 \quad \text{y} \quad x \leq 2$$

Las dos desigualdades se cumplen si $x \leq 0$, lo cual equivale a que x pertenezca al intervalo $(-\infty, 0]$.

Las soluciones de estos dos casos se combinan para obtener el dominio de g, el cual es $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.

La gráfica de g se muestra en la figura 8. Esta gráfica desciende desde la izquierda hasta $x = 0$, asciende hacia la derecha a partir de $x = 2$, y no contiene puntos cuando x está en el intervalo abierto $(0, 2)$. Por tanto, la gráfica apoya la respuesta. ◀



$[-7.5, 7.5]$ por $[-1, 9]$

$g(x) = \sqrt{x(x-2)}$

FIGURA 8

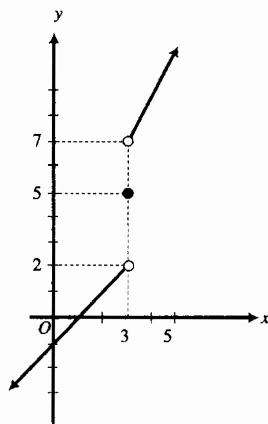
Como se vio, el dominio de una función puede determinarse mediante la definición de la función. Con frecuencia se determina el contradominio a partir de la gráfica de la función, como en el ejemplo siguiente en el que se trata una *función definida a trozos*, la cual se define empleando más de una expresión.

EJEMPLO 4 Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \\ 2x + 1 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

Determine el dominio y el contradominio de f, y dibuje su gráfica.

Solución El dominio de f es $(-\infty, +\infty)$. La figura 9 muestra la gráfica de f; consta de la porción de la recta $y = x - 1$ para la cual $x < 3$, el punto $(3, 5)$ y la parte de la recta $y = 2x + 1$ para la cual $3 < x$. Los valores de la función son números menores que 2, el número 5 o números mayores que 7. Por tanto, el contradominio de f es el número 5 y aquellos números en $(-\infty, 2) \cup (7, +\infty)$. ◀



$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \\ 2x + 1 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

FIGURA 9

Las funciones definidas a trozos serán de gran utilidad en el estudio de límites, continuidad y derivada, como ejemplos y contra-ejemplos de funciones que poseen ciertas propiedades. En el caso de la gráfica de la función del ejemplo 4, se rompe en el punto donde $x = 3$ lo que, como aprenderá en la

sección 1.8, muestra que la función es *discontinua* para ese valor de x. En el ejemplo siguiente se tiene una función definida a trozos cuya gráfica no se rompe en el valor de x, en el que cambian las expresiones que la definen, en este caso en $x = 1$.

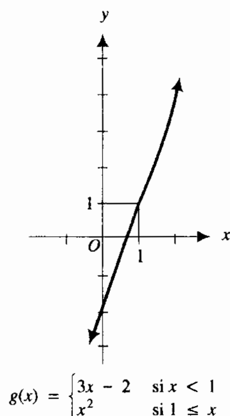


FIGURA 10

EJEMPLO 5 Sea g la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Determine el dominio y el contradominio de g, y dibuje su gráfica.

Solución El dominio de g es $(-\infty, +\infty)$. La gráfica contiene la parte de la recta $y = 3x - 2$ para la cual $x < 1$ y la porción de la parábola $y = x^2$ para la cual $1 \leq x$. La gráfica se muestra en la figura 10. El contradominio es $(-\infty, +\infty)$. ◀

EJEMPLO 6 La función h está definida por

$$h(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Determine el dominio y el contradominio de h, y dibuje su gráfica.

Solución Como $h(x)$ está definida para todo x, excepto 3, el dominio de h es el conjunto de números reales excepto 3. Cuando $x = 3$, tanto el numerador como el denominador son cero y $0/0$ no está definido.

Al factorizar el numerador como $(x - 3)(x + 3)$ se obtiene

$$h(x) = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$$

o $h(x) = x + 3$, teniendo en cuenta que $x \neq 3$. En otras palabras, la función h puede definirse por

$$h(x) = x + 3 \qquad \text{si } x \neq 3$$

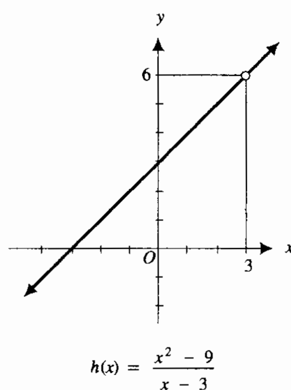


FIGURA 11

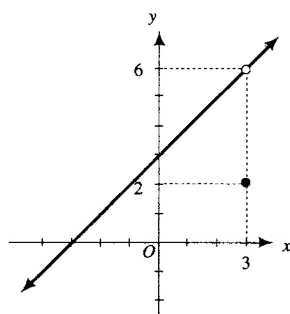
La gráfica de h consta de todos los puntos de la recta $y = x + 3$ excepto el punto (3, 6), y se muestra en la figura 11. El contradominio de h es el conjunto de todos los números reales excepto 6. ◀

En el ejemplo 6, la gráfica tiene un "hoyo" o "agujero" en $x = 3$, donde $h(3)$ no está definido. En el ejemplo siguiente, también la gráfica tiene un agujero en $x = 3$, pero el valor de la función en 3 sí está definido.

EJEMPLO 7 Sea H la función definida por

$$H(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Determine el dominio y el contradominio de H y dibuje su gráfica.



$H(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

FIGURA 12

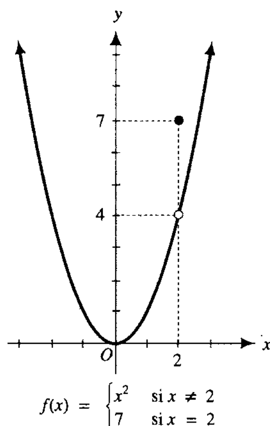
Solución Como H está definida para todo x, su dominio es $(-\infty, +\infty)$. La gráfica de H se muestra en la figura 12. El contradominio de H es el conjunto de todos los números reales, diferentes de 6. ◀

▶ ***EJEMPLO 8*** La función f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 7 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Determine el dominio y el contradominio de f y dibuje su gráfica.

Solución Como f está definida para todo x, su dominio es $(-\infty, +\infty)$. La gráfica, mostrada en la figura 13, consta del punto (2, 7) y todos los puntos sobre la parábola $y = x^2$ excepto (2, 4). El contradominio de f es $[0, +\infty)$. ◀



$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 7 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

FIGURA 13

La función del ejemplo siguiente se denomina **función valor absoluto.**

▶ ***EJEMPLO 9*** Determine el dominio y el contradominio de la función f para la cual

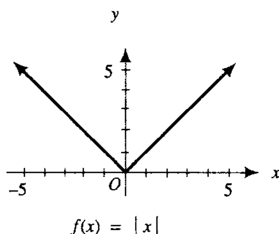
$$f(x) = |x|$$

y dibuje su gráfica.

Solución De la definición de $|x|$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El dominio es $(-\infty, +\infty)$. La gráfica de f consta de dos semirectas que pasan por el origen y están por arriba del eje x; una tiene pendiente 1 y la otra tiene pendiente -1. Consulte la figura 14. El contradominio de f es $[0, +\infty)$. ◀



$f(x) = |x|$

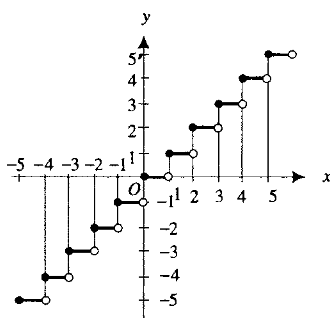
FIGURA 14

La función valor absoluto se ha implementado en las graficadoras y usualmente se denota por *ABS*. Otra función con que cuenta la graficadora es la **función máximo entero** cuyos valores de función se denotan por $[\![x]\!]$ y están definidos por

$$[\![x]\!] = n \qquad \text{si } n \leq x < n + 1, \text{ donde } n \text{ es un entero}$$

Esto es, $[\![x]\!]$ es el máximo entero menor o igual que x. En particular, $[\![1]\!] = 1$, $[\![1.3]\!] = 1$, $[\![0.5]\!] = 0$, $[\![-4.2]\!] = -5$ y $[\![-8]\!] = -8$.

La gráfica de la función máximo entero está dibujada en la figura 15. Su dominio es el conjunto de todos los números reales y su contradominio consiste de todos los números enteros. En muchas graficadoras se denota la función máximo entero por *INT*.



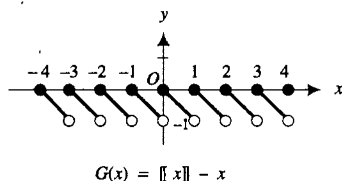
Función máximo entero

FIGURA 15

▶ ***EJEMPLO 10*** Dibuje la función G definida por

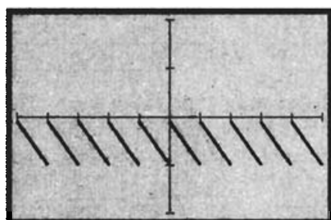
$$G(x) = [\![x]\!] - x$$

y determine su dominio y su contradominio. Apoye su respuesta trazando su gráfica en la graficadora.



$G(x) = [\![x]\!] - x$

FIGURA 16



[-5, 5] por [-2, 2]

$G(x) = INT(x) - x$

FIGURA 17

Solución Como G está definida para todos los valores de x, su dominio es $(-\infty, +\infty)$. A partir de la definición de $[\![x]\!]$ se obtiene lo siguiente:

si $-2 \le x < -1$,	$[\![x]\!] = -2$;	por tanto, $G(x) = -2 - x$,
si $-1 \le x < 0$,	$[\![x]\!] = -1$;	por tanto, $G(x) = -1 - x$,
si $0 \le x < 1$,	$[\![x]\!] = 0$;	por tanto, $G(x) = -x$,
si $1 \le x < 2$,	$[\![x]\!] = 1$;	por tanto, $G(x) = 1 - x$,
si $2 \le x < 3$,	$[\![x]\!] = 2$;	por tanto, $G(x) = 2 - x$,

y así sucesivamente. De modo más general, si n es cualquier número entero, entonces

$$\text{si } n \le x < n + 1,\ [\![x]\!] = n; \qquad \text{por tanto, } G(x) = n - x$$

Con estos valores de función se puede dibujar la gráfica de G, mostrada en la figura 16. A partir de la gráfica se observa que el contradominio es $(-1, 0]$. Al trazar la gráfica de $G(x) = INT(x) - x$ se obtiene la figura 17, lo cual apoya la respuesta. ◀

EJERCICIOS 1.1

En los ejercicios 1 a 4, determine si el conjunto es una función. Si es una función determine su dominio.

1. **(a)** $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x - 4}\}$
(b) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 4}\}$
(c) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{4 - x^2}\}$
(d) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$

2. **(a)** $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x + 1}\}$
(b) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 1}\}$
(c) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{1 - x^2}\}$
(d) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

3. **(a)** $\{(x, y) \mid y = x^2\}$ **(b)** $\{(x, y) \mid x = y^2\}$
(c) $\{(x, y) \mid y = x^3\}$ **(d)** $\{(x, y) \mid x = y^3\}$

4. **(a)** $\{(x, y) \mid y = (x - 1)^2 + 2\}$
(b) $\{(x, y) \mid x = (y - 2)^2 + 1\}$
(c) $\{(x, y) \mid y = (x + 2)^3 - 1\}$
(d) $\{(x, y) \mid x = (y + 1)^3 - 2\}$

5. Dada $f(x) = 2x - 1$, determine
(a) $f(3)$; **(b)** $f(-2)$; **(c)** $f(0)$; **(d)** $f(a + 1)$; **(e)** $f(x + 1)$; **(f)** $f(2x)$; **(g)** $2\,f(x)$; **(h)** $f(x + h)$; **(i)** $f(x) + f(h)$;
(j) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}, h \neq 0$.

6. Dada $f(x) = \dfrac{3}{x}$, calcule **(a)** $f(1)$; **(b)** $f(-3)$; **(c)** $f(6)$;
(d) $f(\frac{1}{3})$; **(e)** $f\left(\dfrac{3}{a}\right)$; **(f)** $f\left(\dfrac{3}{x}\right)$; **(g)** $\dfrac{f(3)}{f(x)}$; **(h)** $f(x - 3)$;
(i) $f(x) - f(3)$; **(j)** $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}, h \neq 0$.

7. Dada $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$, determine **(a)** $f(-2)$; **(b)** $f(-1)$; **(c)** $f(0)$; **(d)** $f(3)$; **(e)** $f(h + 1)$; **(f)** $f(2x^2)$; **(g)** $f(x^2 - 3)$; **(h)** $f(x + h)$; **(i)** $f(x) + f(h)$;
(j) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}, h \neq 0$.

8. Dada $g(x) = 3x^2 - 4$, calcule **(a)** $g(-4)$; **(b)** $g(\frac{1}{2})$; **(c)** $g(x^2)$; **(d)** $g(3x^2 - 4)$; **(e)** $g(x - h)$; **(f)** $g(x) - g(h)$;
(g) $\dfrac{g(x + h) - g(x)}{h}, h \neq 0$.

9. Dada $F(x) = \sqrt{x + 9}$, encuentre **(a)** $F(x + 9)$; **(b)** $F(x^2 - 9)$; **(c)** $F(x^4 - 9)$; **(d)** $F(x^2 + 6x)$;
(e) $F(x^4 - 6x^2)$; **(f)** $\dfrac{F(x + h) - F(x)}{h}, h \neq 0$.

10. Dada $G(x) = \sqrt{4 - x}$, determine **a)** $G(4 - x)$; (**(b)** $G(4 - x^2)$; **(c)** $G(4 - x^4)$; **(d)** $G(4x - x^2)$;
(e) $G(-x^4 - 4x^2)$; **(f)** $\dfrac{G(x + h) - G(x)}{h}, h \neq 0$.

En los ejercicios 11 a 46, dibuje a mano la gráfica de la función y determine su dominio y su contradominio.

11. $f(x) = 3x - 1$	**12.** $g(x) = 4 - x$
13. $F(x) = 2x^2$	**14.** $G(x) = x^2 + 2$
15. $g(x) = 5 - x^2$	**16.** $f(x) = (x - 1)^2$
17. $G(x) = \sqrt{x - 1}$	**18.** $F(x) = \sqrt{9 - x}$
19. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$	**20.** $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$
21. $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$	**22.** $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
23. $h(x) = \lvert x - 3 \rvert$	**24.** $H(x) = \lvert 5 - x \rvert$
25. $F(x) = \lvert 3x + 2 \rvert$	**26.** $G(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$
27. $H(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$	**28.** $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7x + 3}{x + 3}$

29. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$ **30.** $g(x) = \dfrac{(x^2 - 4)(x - 3)}{x^2 - x - 6}$

31. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2 & \text{si } 3 < x \end{cases}$

32. $g(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < -2 \\ -1 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

33. $g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 8 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

35. $F(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \neq 3 \\ -2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

36. $G(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si } x \neq -3 \\ 4 & \text{si } x = -3 \end{cases}$

37. $G(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x + 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

38. $F(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$

39. $g(x) = \begin{cases} 6x + 7 & \text{si } x \leq -2 \\ 4 - x & \text{si } -2 < x \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$

41. $h(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < -5 \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \leq x \leq 5 \\ 3 - x & \text{si } 5 < x \end{cases}$

42. $H(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -4 \\ \sqrt{16 - x^2} & \text{si } -4 < x < 4 \\ 2 - x & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$

43. $F(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ **44.** $G(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2}{x + 3}$

45. $f(x) = [\![x - 4]\!]$ **46.** $g(x) = [\![x + 2]\!]$

47. (**a**) Dibuje la gráfica de la *función escalón* (o *salto*) *unitario* denotada por U y definida por

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

Defina cada una de las siguientes funciones a trozos y dibuje sus gráficas: (**b**) $U(x - 1)$; (**c**) $U(x) - 1$; (**d**) $U(x) - U(x - 1)$.

48. Defina cada una de las siguientes funciones a trozos y dibuje sus gráficas, donde U es la función escalón unitario definida en el ejercicio 47:
(**a**) $x \cdot U(x)$; (**b**) $(x + 1) \cdot U(x + 1)$;
(**c**) $(x + 1) \cdot U(x + 1) - x \cdot U(x)$.

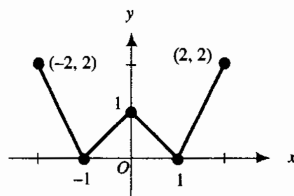
49. (**a**) Dibuje la gráfica de la *función signo* denotada por sgn y definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

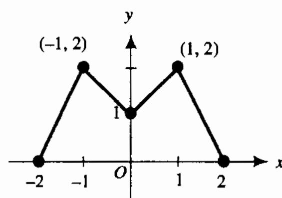
$\operatorname{sgn}(x)$ se lee "signo de x". Defina cada una de las siguientes funciones a trozos y dibuje sus gráficas: (**b**) $x \cdot \operatorname{sgn}(x)$; (**c**) $2 - x \operatorname{sgn}(x)$; (**d**) $x - 2 \operatorname{sgn}(x)$.

50. Defina cada una de las siguientes funciones a trozos, donde sgn es la función signo definida en el ejercicio 49: (**a**) $\operatorname{sgn}(x + 1)$; (**b**) $\operatorname{sgn}(x - 1)$; (**c**) $\operatorname{sgn}(x + 1) - \operatorname{sgn}(x - 1)$.

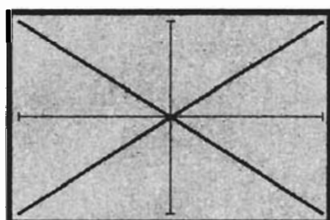
51. La gráfica de la función f de la figura se parece a la letra W. Defina $f(x)$ a trozos.



52. La gráfica de la función f de la figura se parece a la letra M. Defina $f(x)$ a trozos.



53. En la figura, la gráfica se parece a la letra X y es la gráfica de dos funciones f_1 y f_2 trazadas en el rectángulo inspección de $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Defina $f_1(x)$ y $f_2(x)$.



$[-1, 1]$ por $[-1, 1]$

54. Existen tres funciones f_1, f_2 y f_3 cuyas gráficas trazadas simultáneamente en el rectángulo de inspección de $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$ se parecen a la letra Z. Defina $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$.

En los ejercicios 55 a 58, haga lo siguiente: (a) defina la función a trozos sin emplear las barras de valor absoluto; (b) dibuje la gráfica de la función definida en el inciso (a); (c) apoye sus respuestas a los incisos (a) y (b) trazando la gráfica de la función.

55. $f(x) = |x^2 - 1|$ **56.** $g(x) = |4 - x^2|$

57. $g(x) = |x| \cdot |5 - x|$ **58.** $f(x) = |x| \cdot |x - 3|$

En los ejercicios 59 y 60, dibuje la gráfica de la función y determine su dominio y su contradominio. Apoye sus respuestas trazando la gráfica de la función.

59. $h(x) = x - [\![x]\!]$ **60.** $F(x) = x + [\![x]\!]$

61. Las gráficas de las funciones de los ejercicios 51 y 52 parecen letras del alfabeto. Defina otras dos funciones cuyas gráficas se parezcan a dos letras diferentes y dibújelas.

62. En esta sección se utilizaron los símbolos f, $f(x)$ y $y = f(x)$ concernientes a una función particular, los cuales tienen significados diferentes. Explique lo que significa cada notación, invente una función y utilícela para distinguir los tres símbolos.

63. Explique por qué la gráfica de una función es consistente con la definición de la función como un conjunto de pares ordenados. En su explicación utilice un ejemplo específico.

1.2 OPERACIONES CON FUNCIONES Y TIPOS DE FUNCIONES

Se pueden formar nuevas funciones a partir de funciones dadas mediante adición, sustracción, multiplicación y división de sus valores. De acuerdo con esto, las nuevas funciones se conocen como la *suma, diferencia, producto* y *cociente* de las funciones originales.

1.2.1 Definición de la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones

Dadas las dos funciones f y g:

(i) su **suma,** denotada por $f + g$, es la función definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

(ii) su **diferencia,** denotada por $f - g$, es la función definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

(iii) su **producto,** denotado por $f \cdot g$, es la función definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

(iv) su **cociente,** denotado por f/g, es la función definida por

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) \qquad g(x) \neq 0$$

En cada caso, el *dominio* de la función resultante consta de aquellos valores de x comunes a los dominios de f y g, con el requerimiento adicional en el caso (iv) de que se excluyan los valores de x para los cuales $g(x) = 0$.

EJEMPLO 1 Dado que f y g son las funciones definidas por

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x-4}$$

defina las siguientes funciones y determine el dominio de las funciones resultantes: **(a)** $f + g$; **(b)** $f - g$; **(c)** $f \cdot g$; **(d)** f/g.

Solución

(a) $(f + g)(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$

(b) $(f - g)(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4}$

(c) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-4}$

(d) $(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}}$

El dominio de f es $[-1, +\infty)$ y el dominio de g es $[4, +\infty)$. Así, el dominio de las funciones resultantes en los incisos (a), (b) y (c) es $[4, +\infty)$. En el inciso (d), el denominador es cero cuando $x = 4$; por lo que 4 también se excluye y se obtiene como dominio $(4, +\infty)$. ◀

Otra operación entre funciones es la obtención de la *función compuesta* de dos funciones dadas.

1.2.2 Definición de función compuesta

Dadas las dos funciones f y g, la función compuesta, denotada por $f \circ g$, está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

y el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los números x del dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

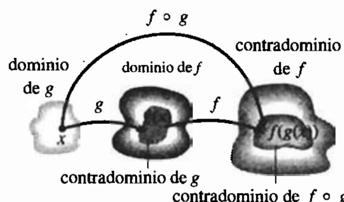


FIGURA 1

Esta definición indica que cuando se calcula $(f \circ g)(x)$, primero se aplica g a x y después se aplica f a $g(x)$. Para visualizar este cálculo Consulte la figura 1. La función g asigna el valor $g(x)$ al número x del dominio de g. La función f asigna el valor $f(g(x))$ al número $g(x)$ del dominio de f. Observe que en la figura 1 el contradominio de g es un subconjunto del dominio de f y que el contradominio de $f \circ g$ es un subconjunto del contradominio de f.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Si f y g están definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = 2x - 3$$

entonces

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x - 3) \\ &= \sqrt{2x - 3}\end{aligned}$$

El dominio de g es $(-\infty, +\infty)$ y el dominio de f es $[0, +\infty)$. Por tanto, el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de números reales x para los cuales $2x - 3 \geq 0$ o, equivalentemente, $[\frac{3}{2}, +\infty)$. ◀

▶ ***EJEMPLO 2*** Sean

$$f(x) = \frac{5}{x - 2} \quad \text{y} \quad g(x) = 2x + 1$$

Obtenga $(f \circ g)(3)$ mediante dos métodos: **(a)** calcule $g(3)$ y utilice este número para determinar $f(g(3))$; **(b)** calcule $(f \circ g)(x)$ y emplee el resultado para determinar $(f \circ g)(3)$.

Solución

(a)
$$\begin{aligned}g(3) &= 2(3) + 1 \\ &= 7\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}f(g(3)) &= f(7) \\ &= \frac{5}{7 - 2}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x + 1) \\ &= \frac{5}{(2x + 1) - 2} \\ &= \frac{5}{2x - 1}\end{aligned}$$

$= 1$

Por tanto

$$(f \circ g)(3) = \frac{5}{2(3) - 1}$$
$$= 1$$

◀

EJEMPLO 3 Dado que f y g están definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 1$$

calcule: **(a)** $f \circ f$; **(b)** $g \circ g$; **(c)** $f \circ g$; **(d)** $g \circ f$. También determine el dominio de cada función compuesta.

Solución El dominio de f es $[0, +\infty)$ y el dominio de g es $(-\infty, +\infty)$.

(a)
$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\ &= f(\sqrt{x}) \\ &= \sqrt{\sqrt{x}} \\ &= \sqrt[4]{x}\end{aligned}$$

El dominio es $[0, +\infty)$.

(b)
$$\begin{aligned}(g \circ g)(x) &= g(g(x)) \\ &= g(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)^2 - 1 \\ &= x^4 - 2x^2\end{aligned}$$

El dominio es $(-\infty, +\infty)$.

(c)
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2 - 1) \\ &= \sqrt{x^2 - 1}\end{aligned}$$

El dominio es

$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

(d)
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(\sqrt{x}) \\ &= (\sqrt{x})^2 - 1 \\ &= x - 1\end{aligned}$$

El dominio es $[0, +\infty)$.

En el inciso (d) observe que aunque $x - 1$ está definido para todos los valores de x, el dominio de $g \circ f$, por la definición de función compuesta, es el conjunto de todos los números x del dominio de f tales que $f(x)$ está en el dominio de g. De donde, el dominio de $g \circ f$ debe ser un subconjunto del dominio de f. ◀

Observe en los resultados de los incisos (c) y (d) del ejemplo 3 que $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ no son necesariamente iguales.

Un teorema importante en Cálculo, llamado la *regla de la cadena*, que se estudiará en la sección 2.8, trata sobre funciones compuestas. Cuando se aplica la regla de la cadena, es necesario considerar una función como la composición de otras dos funciones, tal como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Si $h(x) = (4x^2 + 1)^3$, h se puede expresar como la composición de las dos funciones f y g para las cuales

$$f(x) = x^3 \quad \text{y} \quad g(x) = 4x^2 + 1$$

debido a que

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(4x^2 + 1) \\ &= (4x^2 + 1)^3\end{aligned}$$

◀

La función h del ejemplo ilustrativo 2 también puede expresarse como la composición de otro par de funciones. Por ejemplo, si

$$F(x) = (4x + 1)^3 \quad \text{y} \quad G(x) = x^2$$

entonces

$$\begin{aligned}(F \circ G)(x) &= F(G(x))\\ &= F(x^2)\\ &= (4x^2 + 1)^3\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Dada

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

exprese h como la composición de dos funciones f y g en dos formas: **(a)** la función f contiene el radical; **(b)** la función g contiene el radical.

Solución

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 3}}$

$g(x) = x^2$

Entonces

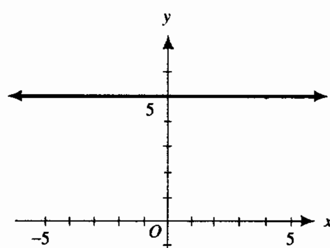
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(x^2)\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}\end{aligned}$$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

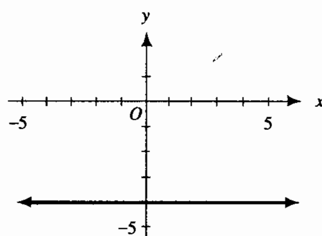
Entonces

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(\sqrt{x^2 + 3})\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}\end{aligned}$$



$f(x) = 5$

FIGURA 2



$g(x) = -4$

FIGURA 3

Una función cuyo contradominio consta de un solo número recibe el nombre de **función constante.** De este modo, si $f(x) = c$, y c es cualquier número real, entonces f es una función constante y su gráfica es una recta horizontal a una distancia dirigida de c unidades a partir del eje x.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

(a) La función definida por $f(x) = 5$ es una función constante, y su gráfica, mostrada en la figura 2, es una recta horizontal situada a 5 unidades sobre el eje x.

(b) La función definida por $g(x) = -4$ es una función constante cuya gráfica es una recta horizontal ubicada a 4 unidades debajo del eje x. Consulte la figura 3.

Una **función lineal** se define por

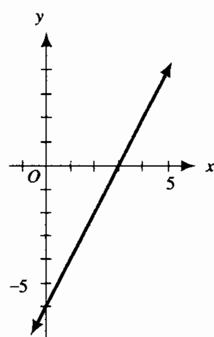
$$f(x) = mx + b$$

donde m y b son constantes y $m \neq 0$. Su gráfica es una recta cuya *pendiente* es m y su *intercepción y* u *ordenada al origen* es b.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 La función definida por

$$f(x) = 2x - 6$$

es lineal. Su gráfica es la recta mostrada en la figura 4.



$f(x) = 2x - 6$

FIGURA 4

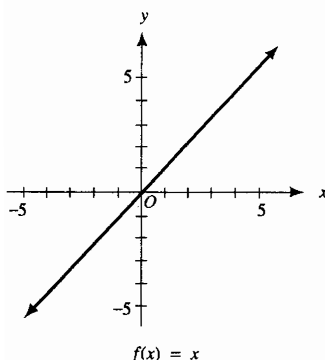


FIGURA 5

La función lineal particular definida por

$$f(x) = x$$

se denomina **función identidad.** Su gráfica, dibujada en la figura 5, es la recta que bisecta los cuadrantes primero y tercero.

Si una función f se define por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \dots, a_n$ son números reales $(a_n \neq 0)$ y n es un número entero no negativo, entonces recibe el nombre de **función polinomial** de grado n. Así, la función definida por

$$f(x) = 3x^5 - x^2 + 7x - 1$$

es una función polinomial de grado 5.

Una función lineal es una función polinomial de grado 1. Si el grado de una función polinomial es 2, entonces se le llama **función cuadrática,** y si el grado es 3, entonces recibe el nombre de **función cúbica.**

Si una función puede expresarse como el cociente de dos funciones polinomiales, entonces se denomina **función racional.**

Una **función algebraica** es aquella formada por un número finito de operaciones algebraicas sobre la función identidad y una función constante. Estas operaciones algebraicas incluyen adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación (elevación a una potencia) y radicación (extracción de una raíz). Las funciones polinomiales y racionales son tipos particulares de funciones algebraicas. Un ejemplo complejo de una función algebraica es aquella definida por

$$f(x) = \frac{(x^2 - 3x + 1)^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

Además de las funciones algebraicas, se considerarán las *funciones trascendentes*, ejemplos de estas funciones son las funciones trigonométricas, discutidas en la sección A.9 del apéndice, y las funciones logarítmica y exponencial estudiadas en el capítulo 5.

Una *función par* es aquella cuya gráfica es simétrica con respecto al eje y, y una *función impar* es aquella cuya gráfica es simétrica con respecto al origen. A continuación se presenta la definición formal de estas funciones.

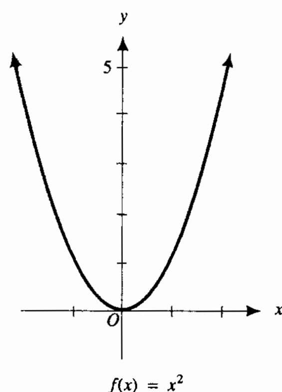
1.2.3 Definición de función par y función impar

(i) Una función f es una **función par** si para cada x del dominio de f, $f(-x) = f(x)$.

(ii) Una función f es una **función impar** si para cada x del dominio de f, $f(-x) = -f(x)$.

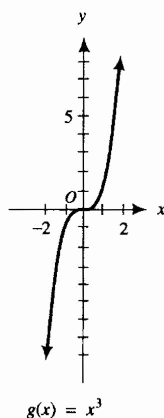
En los dos incisos (i) y (ii) se sobrentiende que $-x$ está en el dominio de f siempre que x lo esté.

Las propiedades de simetría de las funciones pares e impares se deducen de los criterios de simetría dados en la sección A.2 del apéndice.



$f(x) = x^2$

FIGURA 6



$g(x) = x^3$

FIGURA 7

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

(a) Si $f(x) = x^2$, entonces $f(-x) = (-x)^2$. Por tanto, $f(-x) = f(x)$ y en consecuencia, f es una función par. Su gráfica es una parábola simétrica con respecto al eje y. Véa la figura 6.

(b) Si $g(x) = x^3$, entonces $g(-x) = (-x)^3$. Como $g(-x) = -g(x)$, entonces g es una función impar. La gráfica de g, mostrada en la figura 7, es simétrica con respecto al origen. ◀

▶ *EJEMPLO 5*

Trace la gráfica de la función y a partir de la gráfica conjeture si la función es par, impar o de ninguno de estos dos tipos; después confirme la conjetura analíticamente.

(a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$

(b) $g(x) = 3x^5 - 4x^3 - 9x$

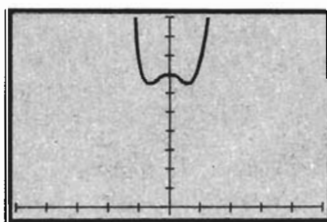
(c) $h(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$

Solución

(a) La gráfica de f, trazada en la figura 8, parece simétrica con respecto al eje y. Por tanto, se sospecha que la función es par. Para probar este hecho analíticamente, se calcula $f(-x)$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 7 \\ &= 3x^4 - 2x^2 + 7 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

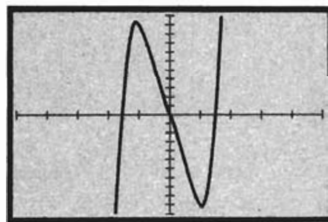
Como $f(-x) = f(x)$, entonces f es par.



$[-5, 5]$ por $[0, 10]$

$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$

FIGURA 8



$[-5, 5]$ por $[-11, 11]$

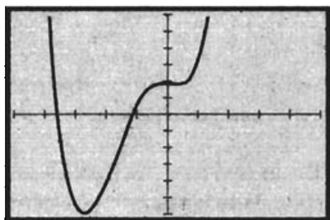
$g(x) = 3x^5 - 4x^3 - 9x$

FIGURA 9

(b) La figura 9 muestra la gráfica de la función g, la cual parece simétrica con respecto al origen. Por tanto, se sospecha que la función es impar. Al calcular $g(-x)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} g(-x) &= 3(-x)^5 - 4(-x)^3 - 9(-x) \\ &= -3x^5 + 4x^3 + 9x \\ &= -(3x^5 - 4x^3 - 9x) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

Como $g(-x) = -g(x)$, entonces se ha demostrado analíticamente que la función g es impar.



$[-5, 5]$ por $[-30, 30]$

$h(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$

FIGURA 10

(c) Como la gráfica de h, mostrada en la figura 10, no es simétrica con respecto al eje y ni con respecto al origen, la función no es par ni impar. Al calcular $h(-x)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} h(-x) &= 2(-x)^4 + 7(-x)^3 - (-x)^2 + 9 \\ &= 2x^4 - 7x^3 - x^2 + 9 \end{aligned}$$

Como $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, se ha confirmado que h no es par ni tampoco impar. ◀

▶ ***EJEMPLO 6*** Sea

$$F(x) = |x + 3| - |x - 3|$$

(a) Defina $F(x)$, sin las barras de valor absoluto, a trozos en los intervalos siguientes: $(-\infty, -3)$; $[-3, 3)$; $[3, +\infty)$. **(b)** Apoye la respuesta gráficamente trazando la gráfica de F a partir de la ecuación dada. **(c)** De la gráfica del inciso (b) establezca si F es par, impar o de ninguno de estos dos tipos. **(d)** Confirme la respuesta del inciso (c) analíticamente a partir de la ecuación.

Solución

(a) A partir de la definición del valor absoluto de un número

$$|x + 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x + 3 \geq 0 \\ -(x + 3) & \text{si } x + 3 < 0 \end{cases}$$

y

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3) & \text{si } x - 3 < 0 \end{cases}$$

Esto es

$$|x + 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \geq -3 \\ -x - 3 & \text{si } x < -3 \end{cases}$$

y

$$|x - 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Si $x \in (-\infty, -3)$, $|x + 3| = -x - 3$ y $|x - 3| = -x + 3$. En consecuencia

$$\begin{aligned} |x + 3| - |x - 3| &= -x - 3 - (-x + 3) \\ &= -6 \end{aligned}$$

Si $x \in [-3, 3)$, $|x + 3| = x + 3$ y $|x - 3| = -x + 3$. Así

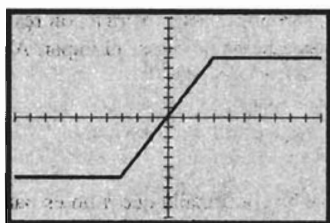
$$\begin{aligned} |x + 3| - |x - 3| &= x + 3 - (-x + 3) \\ &= 2x \end{aligned}$$

Si $x \in [3, +\infty)$, $|x + 3| = x + 3$ y $|x - 3| = x - 3$. Por tanto

$$\begin{aligned} |x + 3| - |x - 3| &= x + 3 - (x - 3) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Con estos resultados, se define $F(x)$ a trozos de la siguiente forma

$$F(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x < -3 \\ 2x & \text{si } -3 \leq x < 3 \\ 6 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$



$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

$F(x) = |x + 3| - |x - 3|$

FIGURA 11

(b) La figura 11 muestra la gráfica de F trazada a partir de la ecuación. La gráfica apoya la respuesta del inciso (a).

(c) Como la gráfica de la figura 11 es simétrica con respecto al origen, la función F es impar.

(d) Al calcular $F(-x)$ a partir de la ecuación dada, se confirma la respuesta del inciso (c):

$$\begin{aligned} F(-x) &= |-x + 3| - |-x - 3| \\ &= |-(x - 3)| - |-(x + 3)| \\ &= |x - 3| - |x + 3| \\ &= -F(x) \end{aligned}$$

Por tanto, se ha demostrado analíticamente que F es impar. ◀

EJERCICIOS 1.2

En los ejercicios 1 a 10, defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función resultante: (a) $f + g$; (b) $f - g$; (c) $f \cdot g$; (d) f/g; (e) g/f.

1. $f(x) = x - 5;\ g(x) = x^2 - 1$

2. $f(x) = \sqrt{x};\ g(x) = x^2 + 1$

3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1};\ g(x) = \dfrac{1}{x}$

4. $f(x) = \sqrt{x};\ g(x) = 4 - x^2$

5. $f(x) = \sqrt{x};\ g(x) = x^2 - 1$

6. $f(x) = |x|;\ g(x) = |x - 3|$

7. $f(x) = x^2 + 1;\ g(x) = 3x - 2$

8. $f(x) = \sqrt{x - 4};\ g(x) = x^2 - 4$

9. $f(x) = \dfrac{1}{x+1};\ g(x) = \dfrac{x}{x-2}$

10. $f(x) = x^2;\ g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

En los ejercicios 11 a 14, para las funciones f y g y el número c, obtenga $(f \circ g)(c)$ mediante dos métodos: (a) calcule $g(c)$ y utilice este número para determinar $f(g(c))$; (b) Determine $(f \circ g)(x)$ y emplee ese valor para calcular $(f \circ g)(c)$.

11. $f(x) = 3x^2 - 4x;\ g(x) = 2x - 5;\ c = 4$

12. $f(x) = \sqrt{x^2 - 36};\ g(x) = x^2 - 3x;\ c = 5$

13. $f(x) = \dfrac{1}{x-1};\ g(x) = \dfrac{2}{x^2+1};\ c = \dfrac{1}{2}$

14. $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x+3}}{x};\ g(x) = \dfrac{2x+5}{x^4};\ c = -2$

En los ejercicios 15 a 24, defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función compuesta: (a) $f \circ g$; (b) $g \circ f$; (c) $f \circ f$; (d) $g \circ g$.

15. $f(x) = x - 2;\ g(x) = x + 7$

16. $f(x) = 3 - 2x;\ g(x) = 6 - 3x$

17. Las funciones del ejercicio 1.

18. Las funciones del ejercicio 2.

19. $f(x) = \sqrt{x - 2};\ g(x) = x^2 - 2$

20. $f(x) = x^2 - 1;\ g(x) = \dfrac{1}{x}$

21. $f(x) = \dfrac{1}{x};\ g(x) = \sqrt{x}$

22. $f(x) = \sqrt{x};\ g(x) = -\dfrac{1}{x}$

23. $f(x) = |x|;\ g(x) = |x + 2|$

24. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1};\ g(x) = \sqrt{x - 1}$

En los ejercicios 25 y 26 defina las siguientes funciones y determine el dominio de las funciones resultantes: (a) $f(x^2)$; (b) $[f(x)]^2$; (c) $(f \circ f)(x)$; (d) $(f \circ f)(-x)$.

25. $f(x) = \sqrt{x}$ **26.** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

En los ejercicios 27 a 32, exprese h como composición de las dos funciones f y g en dos formas.

27. $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ **28.** $h(x) = (9 + x^2)^{-2}$

29. $h(x) = \left(\dfrac{1}{x-2}\right)^3$ **30.** $h(x) = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^3 + 3}}$

31. $h(x) = (x^2 + 4x - 5)^4$ **32.** $h(x) = \sqrt{|x| + 4}$

En los ejercicios 33 a 38, trace en la graficadora la gráfica de la función y a partir de la gráfica conjeture si la función es par, impar o de ninguno de estos dos tipos. Después confirme su conjetura analíticamente.

33. **(a)** $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$ **(b)** $g(x) = 5x^5 + 1$

34. **(a)** $f(x) = x^2 + 2x + 2$ **(b)** $g(x) = x^6 - 1$

35. **(a)** $f(x) = 5x^3 - 7x$ **(b)** $g(x) = |x|$

36. **(a)** $f(x) = 4x^5 + 3x^3$ **(b)** $g(x) = x^3 + 1$

37. **(a)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **(b)** $g(x) = 5x^4 - 4$

38. **(a)** $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ **(b)** $g(x) = 2|x| + 3$

En los ejercicios 39 y 40, determine analíticamente si la función es par, impar o de ninguno de estos dos tipos.

39. **(a)** $f(y) = \dfrac{y^3 - y}{y^2 + 1}$ **(b)** $g(r) = \dfrac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$

(c) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$

40. (**a**) $h(x) = \dfrac{x^2 - 5}{2x^3 + x}$ (**b**) $g(z) = \dfrac{z - 1}{z + 1}$

(**c**) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

En los ejercicios 41 a 44, haga lo siguiente: (a) defina f(x), sin las barras de valor absoluto, en los intervalos indicados. (b) Apoye la respuesta del inciso (a) gráficamente trazando la gráfica de f en la graficadora a partir de la ecuación dada. (c) A partir de la gráfica del inciso (b), establezca si la función es par, impar o de ninguno de estos dos tipos. (d) Confirme la respuesta del inciso (c) analíticamente a partir de la ecuación dada.

41. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$; $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$

42. $f(x) = x\,|x|$; $(-\infty, 0)$, $[0, +\infty)$

43. $f(x) = |x - 2| - |x + 2|$; $(-\infty, -2)$, $[-2, 2)$, $[2, +\infty)$

44. $f(x) = \dfrac{|x+1| - |x-1|}{x}$

$(-\infty, -1)$, $[-1, 0)$, $(0, 1]$, $(1, +\infty)$

45. ¿Es conmutativa la composición de dos funciones? Es decir, si f y g son dos funciones cualesquiera, ¿son iguales $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$? Justifique su respuesta proporcionando un ejemplo.

Si f y g son dos funciones tales que $(f \circ g)(x) = x$ y $(g \circ f)(x) = x$, entonces se dice que f y g son inversas una de la otra. En los ejercicios 46 a 50, demuestre que f y g son inversas una de la otra.

46. $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = \dfrac{x + 3}{2}$

47. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ y $g(x) = \dfrac{1 - x}{x}$

48. $f(x) = x^2, x \geq 0,$ y $g(x) = \sqrt{x}$

49. $f(x) = x^2, x \leq 0,$ y $g(x) = -\sqrt{x}$

50. $f(x) = (x - 1)^3$ y $g(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$

51. La función escalón unitario U y la función signo sgn se definieron en los ejercicios 47 y 49, respectivamente, de la sección 1.1. (**a**) Defina $\text{sgn}(U(x))$ y dibuje la gráfica. (**b**) Defina $U(\text{sgn}(x))$ y dibuje la gráfica.

52. Demuestre que si f y g son funciones impares, entonces $(f + g)$ y $(f - g)$ también son funciones impares, mientras que $f \cdot g$ y f/g son funciones pares.

53. Determine si la función compuesta $f \circ g$ es par o impar en cada uno de los casos siguientes: (**a**) f y g son impares; (**b**) f es par y g es impar; (**c**) g es par.

54. Encuentre fórmulas para $(f \circ g)(x)$ si

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Dibuje las gráficas de f, g y $f \circ g$.

55. Encuentre fórmulas para $(g \circ f)(x)$ a partir de las funciones del ejercicio 54. Dibuje la gráfica de $g \circ f$.

56. Si $f(x) = x^2 + 2x + 2$, encuentre dos funciones g para las cuales $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$.

57. Si $f(x) = x^2$, encuentre dos funciones g para las cuales $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9$

58. Demuestre que si f y g son dos funciones lineales, entonces $f \circ g$ es una función lineal.

59. Existe una función cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales que es a la vez par e impar. ¿Cuál es esa función? Demuestre que es única esta función.

60. Suponga que $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = -\dfrac{1}{x}$ y $h(x) = -x$. Demuestre que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ y explique por qué $f \circ g$ ni $g \circ f$ son la misma que h.

61. Trace en la graficadora las gráficas de las dos funciones F y G definidas por

$$F(x) = \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 4}} \quad \text{y} \quad G(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 4}}$$

[Observe que F es la misma función que f/g del ejemplo 1(d)]. Explique por qué las gráficas de F y G no son las mismas y, consecuentemente, las funciones no son iguales.

1.3 FUNCIONES COMO MODELOS MATEMÁTICOS

En las aplicaciones del Cálculo, se necesita expresar una situación del mundo real en términos de una relación funcional, denominada **modelo matemático** de la situación. Esta sección está destinada a proporcionarle práctica en la obtención de funciones como modelos matemáticos y al mismo tiempo para mostrarle algunas de las aplicaciones que encontrará posteriormente.

Aunque no siempre se emplea un método específico para obtener un modelo matemático, a continuación se le presentan algunos pasos que le proporcionarán un procedimiento posible que deberá seguir. Conforme estudie los ejemplos, refiérase a estos pasos para ver cómo se aplican.

Sugerencias para resolver problemas que implican una función como modelo matemático

1. Lea el problema cuidadosamente hasta que lo entienda. Para comprenderlo, con frecuencia es útil inventar un ejemplo específico que involucre una situación similar en la que las cantidades son conocidas. Otra ayuda es dibujar un diagrama si es posible, como se muestra en los ejemplos 4 y 5.
2. Determine las cantidades conocidas y desconocidas. Utilice un símbolo, digamos x, para la variable independiente y un símbolo, por decir f, para la función que se obtendrá; entonces $f(x)$ simbolizará el valor de función. Como x y $f(x)$ son símbolos para representar números, sus definiciones deben indicar este hecho. Por ejemplo, si la variable independiente representa longitud y la longitud se mide en pies, entonces si x es el símbolo para la variable, x debe definirse como el número de pies de la longitud o, equivalentemente, x pies es la longitud.
3. Anote cualquier hecho numérico conocido acerca de la variable y del valor de la función.
4. A partir de la información del paso 3, determine dos expresiones algebraicas en términos de la variable y del valor de la función. De estas dos expresiones forme una ecuación que defina la función. Ahora ya se tiene una función como modelo matemático del problema.
5. A fin de terminar el problema una vez que se ha aplicado el modelo matemático, para determinar las cantidades desconocidas, *escriba una conclusión*, la cual consista de una o más oraciones, que respondan a las preguntas del problema. Asegúrese de que la conclusión contenga las unidades de medición correctas.

▶ ***EJEMPLO 1*** El volumen de un gas a presión constante es directamente proporcional a la temperatura absoluta y a la temperatura de 175° el gas ocupa 100 m^3. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen como una función de la temperatura. **(b)** ¿Cuál es volumen del gas a una temperatura de 140°?

Solución

(a) Sea $f(x)$ metros cúbicos el volumen del gas cuya temperatura es x grados. Entonces, por la definición de variación directamente proporcional

$$f(x) = kx \quad \textbf{(1)}$$

donde k es una constante. Como el volumen del gas es 100 m^3 a la temperatura de 175°, se sustituye x por 175 y $f(x)$ por 100 en (1), de donde se obtiene

$$100 = k(175)$$
$$k = \tfrac{4}{7}$$

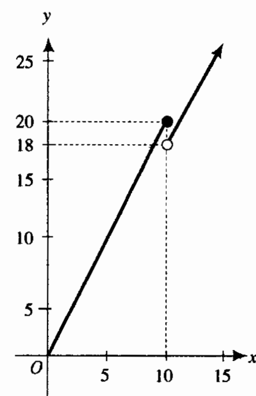
Al sustituir este valor de k en (1), se obtiene

$$f(x) = \tfrac{4}{7}x$$

(b) A partir de la expresión para $f(x)$, se obtiene

$$f(140) = \tfrac{4}{7}(140)$$
$$= 80$$

<u>Conclusión:</u> A una temperatura de 140°, el volumen del gas es de 80 m^3. ◀



$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 10 \\ 1.8x & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

FIGURA 1

▶ **EJEMPLO 2** Un mayorista vende un producto por libra (o fracción de libra); si se ordenan no más de 10 libras, el mayorista cobra \$2 por libra. Sin embargo, para atraer órdenes mayores, el mayorista cobra sólo \$1.80 por libra si se ordenan más de 10 libras. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el costo total de la orden como una función de la cantidad de libras ordenadas del producto. **(b)** Dibuje la gráfica de la función del inciso (a). **(c)** Determine el costo total de una orden de 9.5 lb y de una orden de 10.5 lb.

Solución

(a) Sea $C(x)$ dólares el costo total de una orden de x libras del producto. Entonces,

$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 10 \\ 1.8x & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

(b) La gráfica de la función C se muestra en la figura 1.

(c) $C(x)$ se obtiene a partir de la ecuación $C(x) = 2x$ cuando $0 \le x \le 10$ y de la ecuación $C(x) = 1.8x$ cuando $10 < x$. Por tanto,

$$C(9.5) = 2\,(9.5) \qquad C(10.5) = (1.8)(10.5)$$
$$= 19 \qquad\qquad = 18.90$$

<u>Conclusión:</u> El costo total de 9.5 lb es \$19 y el costo total de 10.5 lb es \$18.90. ◀

Observe en el inciso (b) del ejemplo 2 que la gráfica de C se rompe en el punto donde $x = 10$, lo cual indica que la función C es *discontinua* en $x = 10$. Se estudiará esta propiedad en la sección 1.8. Por ahora, note que debido a esta discontinuidad de C, sería más ventajoso incrementar el tamaño de algunas órdenes de compra para obtener un costo total menor. En particular, sería imprudente comprar 9.5 lb por \$19 cuando se pueden comprar 10.5 lb por \$18.90.

En el ejemplo siguiente se tiene una función compuesta como un modelo matemático.

▶ **EJEMPLO 3** En un bosque un depredador se alimenta de su presa, y para las primeras 15 semanas a partir del fin de la temporada de caza, la población de depredadores es una función f de x, el número de presas en el bosque, la cual a su vez, es una función g de t, el número de semanas que han pasado desde el fin de la temporada de caza. Si

$$f(x) = \tfrac{1}{48}x^2 - 2x + 50 \quad \text{y} \quad g(t) = 4t + 52$$

donde $0 \le t \le 15$, haga lo siguiente: **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese la población de depredadores como un función del número de semanas a partir del fin de la temporada de caza. **(b)** Determine la población de depredadores 11 semanas después del cierre de la temporada de caza.

Solución

(a) La población de depredadores t semanas después del cierre de la temporada de caza está dada por $(f \circ g)(t)$, donde $0 \le t \le 15$.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(t) &= f(g(t)) \\ &= f(4t + 52) \\ &= \tfrac{1}{48}(4t + 52)^2 - 2(4t + 52) + 50\end{aligned}$$

(b) Cuando $t = 11$, se tiene

$$\begin{aligned}(f \circ g)(11) &= \tfrac{1}{48}(96)^2 - 2(96) + 50 \\ &= 50\end{aligned}$$

<u>**Conclusión:**</u> Once semanas después del cierre de la temporada de caza la población de depredadores es 50. ◀

En la sección 2.8 se considerará la situación del ejemplo 3 y se determinará la tasa a la cual creció la población de depredadores 11 semanas después del cierre de la temporada de caza.

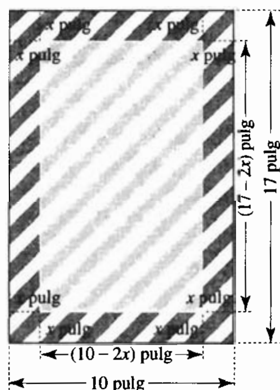


FIGURA 2

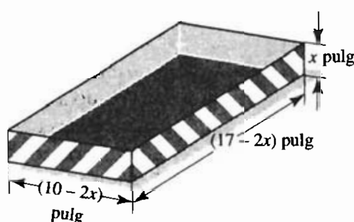
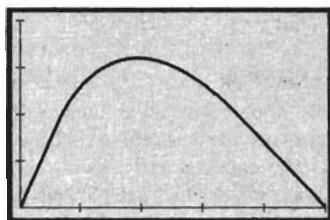


FIGURA 3



[0, 5] por [0, 200]

$V(x) = 170x - 54x^2 + 4x^3$

FIGURA 4

▶ ***EJEMPLO 4*** Un fabricante de cajas de cartón desea elaborar cajas abiertas a partir de piezas de cartón rectangulares de 10 pulg por 17 pulg cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando hacia arriba los lados. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen de la caja como una función de la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función obtenida en el inciso (a)? **(c)** En una graficadora determine, con aproximación de dos cifras decimales, la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán de modo que la caja tenga el volumen más grande posible. ¿Cuál es el volumen máximo?

Solución

(a) Sea x pulgadas la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán y sea $V(x)$ pulgadas cúbicas el volumen de la caja. En la figura 2 se presenta una pieza de cartón dada y la figura 3 muestra la caja obtenida a partir de la pieza de cartón. El número de pulgadas de las dimensiones de la caja son x, $10 - 2x$ y $17 - 2x$. Por tanto,

$$\begin{aligned}V(x) &= x(10 - 2x)(17 - 2x) \\ &= 170x - 54x^2 + 4x^3\end{aligned}$$

(b) De la expresión para $V(x)$ del inciso (a), se observa que $V(0) = 0$ y $V(5) = 0$. A partir de las condiciones del problema se sabe que x no puede ser un número negativo ni tampoco mayor que 5. En consecuencia, el dominio de V es el intervalo cerrado $[0, 5]$.

(c) La gráfica de la función V trazada en el rectángulo de inspección de $[0, 5]$ por $[0, 200]$ se muestra en la figura 4. Se observa que V tiene un valor máximo en su dominio. La coordenada x del punto más alto de la gráfica proporciona la longitud del lado de los cuadrados, los cuales deben cortarse para obtener la caja de volumen máximo, y la coordenada y proporciona dicho volumen. En la graficadora se determina que el punto más alto es (2.03, 156.03).

<u>**Conclusión:**</u> La longitud del lado de los cuadrados debe ser de 2.03 pulg para obtener la caja cuyo volumen máximo es 156.03 pulg^3. ◀

En la sección 3.2 se aplicará el Cálculo para confirmar analíticamente la respuesta del ejemplo 4(c).

▶ ***EJEMPLO 5*** Una envase cerrado de hojalata, cuyo volumen es de 60 pulg^3, tiene la forma de un cilindro circular recto. **(a)** Determine un modelo matemático que exprese el área de la superficie total del envase como una función del radio de la base. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función obtenida en

el inciso (a)? (c) En una graficadora determine, con aproximación de dos cifras decimales, el radio de la base del envase si se emplea la cantidad mínima de hojalata en su elaboración.

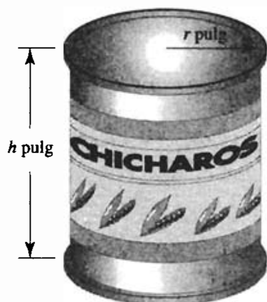


FIGURA 5

Solución

(a) Observe la figura 5, ésta muestra el envase cilíndrico donde r pulgadas es la longitud del radio de la base y h es la altura. Se empleará la cantidad mínima de hojalata cuando el área de la superficie total sea un mínimo. El área de la superficie lateral es $2\pi rh$ pulg^2, y el área de cada una de las dos tapas es πr^2 pulg^2. Si S pulgadas cuadradas es el área de la superficie total, entonces

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 \qquad (2)$$

Como $\pi r^2 h$ pulgadas cúbicas es el volumen de un cilindro circular recto y el volumen del envase es de 60 pulg^3, se tiene que

$$\pi r^2 h = 60$$

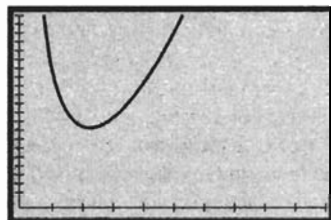
Al despejar h de esta ecuación y sustituirla en (2), se obtiene S como función de r:

$$S(r) = 2\pi r\left(\frac{60}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2$$

$$S(r) = \frac{120}{r} + 2\pi r^2$$

(b) Para obtener el dominio de S, observe en la ecuación que define a $S(r)$ que r no puede ser cero. Sin embargo, teóricamente r puede ser cualquier número positivo. Por tanto, el dominio de S es $(0, +\infty)$.

(c) La figura 6 muestra la gráfica de S trazada en el rectángulo de inspección de $[0, 10]$ por $[0, 200]$. La coordenada r del punto más bajo de la gráfica proporciona el radio para el área de la superficie total mínima. En la graficadora se determina que el punto más bajo es $(2.12, 84.84)$.



$[0, 10]$ por $[0, 200]$

$S(r) = \frac{120}{r} + 2\pi r^2$

FIGURA 6

<u>**Conclusión:**</u> Se empleará la cantidad mínima de hojalata en la elaboración del envase cuando el radio sea de 2.12 pulg. ◀

En la sección 3.9 se confirmará analíticamente la respuesta del ejemplo 5(c) como una aplicación del Cálculo.

▶ ***EJEMPLO 6*** En una comunidad de 8 000 personas, la velocidad con la que se difunde un rumor es conjuntamente proporcional al número de personas que lo han escuchado y al número de personas que no lo han escuchado. Cuando 20 personas han escuchado el rumor, éste circula a una velocidad de 200 personas por hora. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese la velocidad a la que se esparce el rumor como una función del número de personas que lo han escuchado. **(b)** ¿Qué tan rápido circula el rumor cuando lo han escuchado 500 personas? **(c)** En la graficadora, estime cuántas personas han escuchado el rumor cuando éste corre con la mayor velocidad.

Solución

(a) Sea $f(x)$ el número de personas por hora la velocidad a la cual corre el rumor cuando lo han escuchado x personas. Entonces, por la definición de variación conjuntamente proporcional,

$$f(x) = kx(8\,000 - x) \qquad (3)$$

donde k es una constante. Como el rumor circula a la velocidad de 200 personas por hora, cuando 20 personas lo han escuchado, se sustituye x por 20 y $f(x)$ por 200 en (3), obteniéndose

$$200 = k(20)(8\,000 - 20)$$
$$k = \frac{1}{798}$$

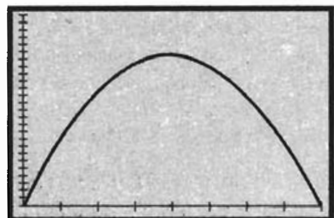
Al sustituir k por este valor en (3), se tiene

$$f(x) = \frac{x(8\,000 - x)}{798}$$

(b) De la expresión anterior para $f(x)$, se obtiene

$$f(500) = \frac{500(8\,000 - 500)}{798}$$
$$= 4\,699.25$$

Conclusión: El rumor se difunde a una tasa de 4 699 personas por hora cuando lo han escuchado 500 personas,



[0, 8 000] por [0, 25 000]

$f(x) = \dfrac{x(8\,000 - x)}{798}$

FIGURA 7

(c) La figura 7 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [0, 8 000] por [0, 25 000]. Se determina que el punto más alto se obtiene cuando $x = 4\,000$.

Conclusión: El rumor se difunde a la mayor velocidad cuando lo han escuchado 4 000 personas, la mitad de la población. ◀

En las secciones 3.2 y 7.4 se considerará la situación del ejemplo 6 para ilustrar dos aplicaciones diferentes del Cálculo. En la sección 3.2 se confirmará analíticamente la respuesta del inciso (c). Después, en la sección 7.4, se obtendrá un modelo que exprese el número de personas que han escuchado el rumor como función del tiempo que el rumor ha sido esparcido, de modo que se puede determinar cuántas personas han escuchado el rumor en cualquier momento particular. Aprenderá que la gráfica de este modelo recibe el nombre de *curva de crecimiento logístico*. También se probará en la sección 7.4 que, finalmente, la población completa escuchará el rumor.

EJERCICIOS 1.3

En cada ejercicio, obtenga una función como un modelo matemático de una situación particular. Muchos de estos modelos aparecerán posteriormente en el texto cuando se aplique el Cálculo a la situación. Defina la variable independiente y el valor de la función como un número e indique las unidades de medición. En algunos de los ejercicios, la variable independiente, por definición, puede representar un número no negativo. Por ejemplo, en el ejercicio 1 si x representa el número de trabajadores, entonces x debe ser un número entero no negativo. En tales ejercicios, para satisfacer los requerimientos de continuidad (que la gráfica no se rompa) necesarios para aplicar el Cálculo posteriormente, considere que la variable independiente representa un número real no negativo, No olvide completar el ejercicio escribiendo una conclusión.

1. La nómina de pago diario de una cuadrilla es directamente proporcional al número de trabajadores, y una cuadrilla de 12 tiene una nómina de $810. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese la nómina de pago diario como una función del número de trabajadores. **(b)** ¿Cuál es la nómina de pago diario para una cuadrilla de 15 trabajadores?

2. El peso aproximado del cerebro de una persona es directamente proporcional al peso de su cuerpo, y una persona que pesa 150 lb tiene un cerebro cuyo peso aproximado es de 4 lb. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el peso aproximado del cerebro como una función del peso de la persona. **(b)** Determine el peso aproximado del cerebro de una persona que pesa 176 lb.

3. El periodo (tiempo para una oscilación completa) de un péndulo es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud del péndulo, y un péndulo de 8 pie de longitud tiene un periodo de 2 s. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el periodo de un péndulo como una función de su longitud. **(b)** Determine el periodo de un péndulo de 2 pie de longitud.

4. Para una cuerda que vibra, el número de vibraciones es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión de la cuerda, y una cuerda particular vibra 864 veces por segundo bajo una tensión de 24 kg. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el número de vibraciones como una función de la tensión. **(b)** Determine el número de vibraciones por segundo bajo una tensión de 6 kg.

5. Los cargos de embarques se basan frecuentemente en una fórmula que proporciona el cargo mínimo por libra conforme el cargamento se incrementa. Suponga que los cargos de embarques son los siguientes: $2.20 por libra si el peso no excede 50 lb; $2.10 por libra si el peso es mayor que 50 lb pero no excede 200 lb; $2.05 por libra si el peso es mayor que 200 lb. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el costo total de un embarque como una función de su peso. **(b)** Dibuje la gráfica de la función del inciso (a). **(c)** Determine el costo total de un embarque de 50 lb; 51 lb; 52 lb; 53 lb; 200 lb; 202 lb; 204 lb y 206 lb.

6. En 1995, el porte de correo para una carta de primera clase se calculó como sigue: 32 centavos para la primera onza o menos, y 23 centavos por onza (o fracción de onza) adicional para las siguientes 10 oz. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el porte de correo para una carta de primera clase, que no pese más de 11 oz, como una función de su peso. **(b)** Dibuje la gráfica de la función del inciso (a). **(c)** Determine el porte de correo para una carta de primera clase que pesa 1.6 oz, 2 oz, 2.1 oz, 8.4 oz y 11 oz.

7. El costo de una llamada telefónica desde Mendocino a San Francisco durante el horario de oficinas es 40 centavos por el primer minuto y 30 centavos por cada minuto o fracción adicional. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el costo de una llamada telefónica, que no dura más de 5 min, como una función de la duración de la llamada. **(b)** Dibuje la gráfica de la función del inciso (a). **(c)** Determine el costo de una llamada telefónica que dura 0.5 min, 2 min, 2.5 min, 3 min, 3.5 min y 5 min.

8. El precio de admisión regular para un adulto a una determinada función en el Coast Cinema es de $7, mientras que para un niño menor de 12 años de edad es de $4 y el precio para adultos de por lo menos 60 años de edad es de $5. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el precio de admisión como una función de la edad de la persona. **(b)** Dibuje la gráfica de la función del inciso (a).

9. La demanda de un juguete en cierto almacén es una función f de p, el número de dólares de su precio, el cual es a su vez una función g de t, el número de meses desde que el juguete llegó al almacén. Si

$$f(p) = \frac{5\,000}{p^2} \quad \text{y} \quad g(t) = \frac{1}{20}t^2 + \frac{7}{20}t + 5$$

haga lo siguiente: **(a)** encuentre un modelo matemático que exprese la demanda como una función del número de meses desde que el juguete llegó al almacén. **(b)** Determine la demanda cinco meses desde que el juguete llegó al almacén.

10. En un lago, un pez grande se alimenta de un pez mediano y la población del pez grande es una función f de x, el número de peces de tamaño mediano en el lago. A su vez, el pez mediano se alimenta de un pez pequeño, y la población de peces medianos es una función g de w, el número de peces pequeños en el lago. Si

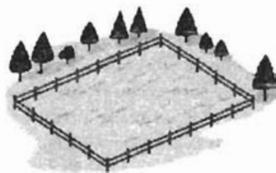
$$f(x) = \sqrt{20x} + 150 \quad \text{y} \quad g(w) = \sqrt{w} + 5\,000$$

haga lo siguiente: **(a)** encuentre un modelo matemático que exprese la población de peces grandes como una función del número de peces pequeños en el lago. **(b)** Determine el número de peces grandes cuando el lago contiene 9 millones de peces pequeños.

11. El área de la superficie de una esfera es función de su radio. Si el radio de una esfera mide r centímetros y $A(r)$ centímetros cuadrados es el área de la superficie, entonces $A(r) = 4\pi r^2$. Suponga que un globo mantiene la forma de una esfera conforme se infla de modo que el radio cambia a una tasa constante de 3 cm/s. Si $f(t)$ centímetros es el radio del globo después de t segundos, haga lo siguiente: **(a)** calcule $(A \circ f)(t)$ e interprete su resultado. **(b)** Determine el área de la superficie del globo después de 4 s.

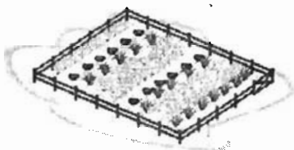
12. El volumen de una esfera es función de su radio. Si el radio de una esfera mide r pies y $V(r)$ pies cúbicos es su volumen, entonces $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Suponga que una bola de nieve de 2 pie de radio comenzó a derretirse a una tasa constante de 4.5 pulg/min. Si $f(t)$ pies es el radio de la bola de nieve después de t minutos, haga lo siguiente: **(a)** calcule $(V \circ f)(t)$ e interprete su resultado. **(b)** Determine el volumen de la bola de nieve después de 3 min.

13. A un campo de forma rectangular se le colocaron 240 m de cerca. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el área del terreno como una función de su longitud. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Al trazar la gráfica de la función del inciso (a) en la graficadora, estime, con aproximación de metros, las dimensiones del campo rectangular de mayor área que pueda cercarse con 240 m.

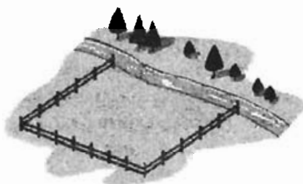


14. En un jardín rectangular se colocaron con 100 pie de cerca. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el área del jardín como una función de su longitud. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Al trazar la gráfica de la función del inciso (a) en la graficadora, estime, con aproximación de pies, las dimensiones del jar-

dín rectangular de mayor área que pueda cercarse con 100 pie.



15. Realice el ejercicio 13 considerando ahora que un lado del terreno está sobre la orilla de un río, por lo que tiene una límite natural, y el material para cercar se empleará en los otros tres lados.



16. Realice el ejercicio 14 considerando ahora que el jardín está situado de modo que el lado de una casa sirve como límite, y el material para cercar se empleará en los otros tres lados.



17. Un fabricante de cajas de hojalata abiertas desea emplear piezas de hojalata con dimensiones de 8 pulg por 15 pulg, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando hacia arriba los lados. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen de la caja como una función de la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Determine en la graficadora, con aproximación de décimos de pulgada, la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán de modo que la caja tenga el volumen más grande posible. ¿Cuál es el volumen máximo aproximado a pulgadas cúbicas?

18. Un fabricante de cajas de cartón hace cajas abiertas a partir de piezas cuadradas de cartón de 12 cm de lado, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen de la caja como una función de la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Determine en la graficadora, con aproximación de centímetros, la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán de modo que el volumen de la caja sea máximo. ¿Cuál es el volumen máximo aproximado a centímetros cúbicos?

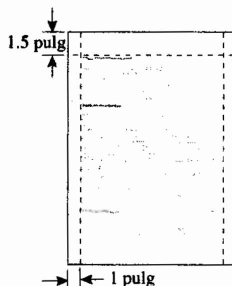
19. Realice el ejercicio 17 considerando ahora que el fabricante elabora las cajas abiertas a partir de piezas de hojalata rectangulares de dimensiones de 12 pulg por 15 pulg. En el inciso (c), determine la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán y el volumen aproximado con dos cifras decimales.

20. Realice el ejercicio 18 considerando ahora que el fabricante elabora las cajas abiertas a partir de piezas de cartón rectangulares de dimensiones de 40 cm por 50 cm. En el inciso (c), determine la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán y el volumen aproximado con dos cifras decimales.

21. Para el envase de hojalata del ejemplo 5, suponga que el costo del material para las tapas es dos veces el costo del material para los lados. **(a)** Determine un modelo matemático que exprese el costo total del material como una función del radio de la base del envase. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Detemine en la graficadora, con aproximación de dos cifras decimales, el radio de la base para el cual el costo total del material es el mínimo.

22. Realice el ejemplo 5 considerando ahora que el envase es abierto en lugar de cerrado.

23. Una página impresa contiene una región de impresión de 24 pulg^2, un margen de 1.5 pulg en las partes superior e inferior y un margen de 1 pulg en los lados. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el área total de la página como una función del ancho de la región de impresión. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Determine, en la graficadora, con aproximación de centésimos de pulgada, las dimensiones de la página más pequeña que satisface estos requerimientos.

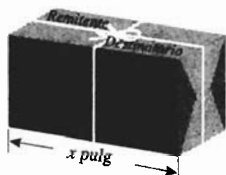


24. Un almacén que tiene un piso rectangular de 13 200 pie^2, se construye de modo que tenga pasillos de 22 pie de ancho en el frente y en fondo del almacén, y pasillos de 15 pie de ancho en los lados. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el área total del terreno donde se construirá el almacén y los pasillos como una función de la longitud del frente y del fondo del almacén. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Determine en la graficadora, con aproximación de centésimos de pie, las dimen-

siones del terreno que tiene el área mínima en el cual este almacén se construirá.



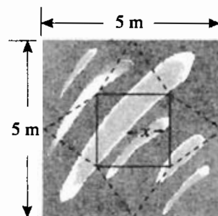
25. Suponga que desea utilizar un servicio de correo particular para enviar un paquete que tiene forma de caja rectangular con una sección transversal cuadrada tal que la suma de su longitud y el perímetro de la sección transversal es 100 pulg, el máximo permitido por el servicio. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen de la caja como una función de su longitud. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Determine en la graficadora, con aproximación de pulgadas, las dimensiones del paquete que tiene el mayor volumen posible que pueda enviarse por este servicio.



26. En un ambiente limitado donde A es el número óptimo de bacterias soportado por el ambiente, la tasa del crecimiento bacteriano es conjuntamente proporcional al número presente de bacterias y la diferencia entre A y el número presente. Suponga que el número óptimo soportable por un ambiente particular es 1 millón de bacterias, y que la tasa de crecimiento es de 60 bacterias por minuto cuando se tienen 1 000 bacterias presentes. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese la tasa de crecimiento bacteriano como función del número de bacterias presentes. **(b)** ¿Cuál es la tasa de crecimiento cuando están presentes 100 000 bacterias? **(c)** Determine en la graficadora, con aproximación de miles, cuántas bacterias están presentes cuando la tasa de crecimiento es un máximo.

27. Fort Bragg, en el norte de California, es una ciudad pequeña con 5 000 habitantes. Suponga que la tasa de crecimiento de una epidemia (la tasa de variación del número de personas infectadas) en Fort Bragg es conjuntamente proporcional al número de personas infectadas y el número de personas no infectadas. Cuando 100 personas están infectadas, la epidemia crece a una tasa de 9 personas por día. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese la tasa de crecimiento de la epidemia como una función del número de personas no infectadas. **(b)** ¿Qué tan rápido es el crecimiento de la epidemia cuando 200 personas están infectadas? **(c)** En la graficadora, determine cuántas personas están infectadas cuando la tasa de crecimiento de la epidemia es un máximo.

28. Una tienda de campaña con forma de pirámide cuadrangular se construye a partir de una pieza cuadrada de material de 5 m de lado. En la base de la pirámide, sea x metros la distancia desde el centro a uno de sus lados. Refiérase a la figura. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen de la casa de campaña como una función de x. *Sugerencia:* La fórmula para el volumen de una pirámide es $V = \frac{1}{3}Bh$, donde V, B y h son, respectivamente, las medidas del volumen, el área de la base y la altura. **(b)** Determine el volumen de la pirámide cuando $x = 0.8$. **(c)** Determine en la graficadora, con aproximación de centésimos de metro, el valor de x para el cual el volumen de la pirámide es un máximo.



1.4 INTRODUCCIÓN GRÁFICA A LOS LÍMITES DE FUNCIONES

El primer contacto con límites concierne a *límites de funciones.* Para dar una idea intuitiva del límite de una función se dedicará esta sección a una interpretación gráfica, los resultados de esto se confirmarán analíticamente al emplear desigualdades. La discusión desarrollada aquí facilitará el camino para la definición presentada en la sección 1.5.

Se comenzará con una función particular:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} \tag{1}$$

Observe que esta función no está definida cuando $x = 1$; esto es, $f(1)$ no existe. Sin embargo, la función está definida para cualquier otro número real. Se investigarán los valores de la función cuando x se aproxima a 1, pero sin lle-

gar a ser 1. Usted puede preguntarse por qué se desea considerar estos valores de función. El siguiente ejemplo ilustrativo orientará esa pregunta.

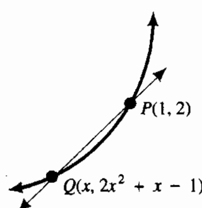


FIGURA 1

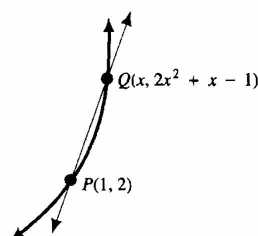


FIGURA 2

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 El punto $P(1, 2)$ está sobre la curva que tiene como ecuación

$$y = 2x^2 + x - 1$$

Sea $Q(x, 2x^2 + x - 1)$ otro punto sobre esta curva, diferente de P. Cada una de las figuras 1 y 2 muestran una porción de la gráfica de la ecuación y la recta secante que pasa por Q y P, donde Q está cerca de P. En la figura 1, la coordenada x de Q es menor que 1, y en la figura 2 es mayor que 1. Suponga que $f(x)$ es la pendiente de la recta PQ. Entonces

$$f(x) = \frac{(2x^2 + x - 1) - 2}{x - 1}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

la cual es la ecuación (1). Además, $x \neq 1$ porque P y Q son puntos distintos. Conforme x se aproximan cada vez más a 1, los valores de $f(x)$ se acercan cada vez más al número que se definirá en la sección 2.1 como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P. ◀

Tabla 1

x	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
0	3
0.25	3.5
0.5	4
0.75	4.5
0.9	4.8
0.99	4.98
0.999	4.998
0.9999	4.9998
0.99999	4.99998

Tabla 2

x	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
2	7
1.75	6.5
1.5	6.0
1.25	5.5
1.1	5.2
1.01	5.02
1.001	5.002
1.0001	5.0002
1.00001	5.00002

Considere otra vez la función definida por la ecuación (1) y calcule $f(x)$ cuando x toma los valores 0, 0.25, 0.50, 0.75, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999, y así sucesivamente. Se están tomando valores de x cada vez más cercanos a 1 pero menores que 1; en otras palabras, la variable x se aproxima a 1 a través de números que son menores que 1. La tabla 1 proporciona los valores de la función para estos números.

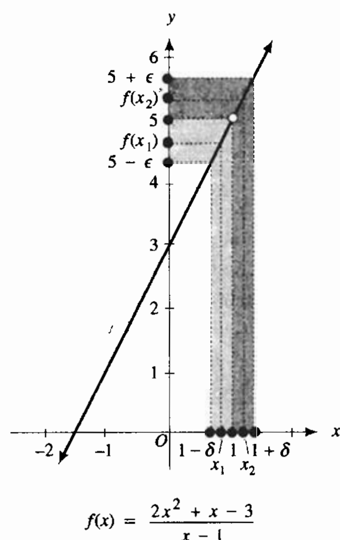
Ahora considere que la variable se aproxima a 1 a través de números que son mayores que 1; esto es, x toma los valores 2, 1.75, 1.5, 1.25, 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001, 1.00001, etc. Los valores de la función para estos números se muestran en la tabla 2.

Observe que en las dos tablas conforme x se aproxima cada vez más a 1, $f(x)$ se acerca más y más a 5; y cuanto más cerca esté x de 1, más cerca estará $f(x)$ de 5. Por ejemplo, de la tabla 1, cuando $x = 0.9$, $f(x) = 4.8$; esto es, cuando x es menor que 1 por 0.1, $f(x)$ es menor que 5 por 0.2. Cuando $x = 0.999$, $f(x) = 4.998$; es decir, cuando x es menor que 1 por 0.001, $f(x)$ es menor que 5 por 0.002. Además, cuando $x = 0.9999$, $f(x) = 0.49998$; esto es, cuando x es menor que 1 por 0.0001, $f(x)$ es menor que 5 por 0.0002.

La tabla 2, muestra que cuando $x = 1.1$, $f(x) = 5.2$; esto es, cuando x es mayor que 1 por 0.1, $f(x)$ es mayor que 5 por 0.2. Cuando $x = 1.001$, $f(x) = 5.002$; es decir, cuando x es mayor que 1 por 0.001, $f(x)$ es mayor que 5 por 0.002. Cuando $x = 1.0001$, $f(x) = 5.0002$; esto es, cuando x es mayor que 1 por 0.0001, $f(x)$ es mayor que 5 por 0.0002.

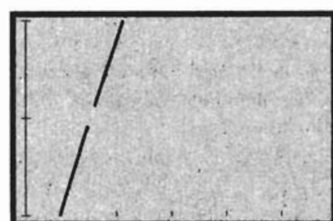
Por tanto, de las dos tablas se observa que cuando x difiere de 1 por $\pm$ 0.001, (esto es $x = 0.999$ o $x = 1.001$), $f(x)$ difiere de 5 por $\pm$ 0.002 (es decir $f(x) = 4.998$ o $f(x) = 5.002$). Y cuando x difiere de 1 por $\pm$ 0.0001, $f(x)$ difiere de 5 por $\pm$ 0.0002.

Ahora, enfocando la situación desde otro punto de vista, se considerarán primero los valores de $f(x)$. Es posible hacer que los valores de $f(x)$ estén tan cercanos a 5 como se desee, si se toman valores de x suficientemente cercanos a 1; esto es, $|f(x) - 5|$ puede hacerse tan pequeño como se desee hacien-



$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

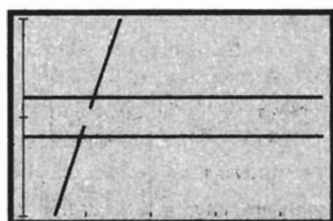
FIGURA 3



[0, 4.7] por [4, 6]

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

FIGURA 4



[0, 4.7] por [4, 6]

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

$y = 4.8$ y $y = 5.2$

FIGURA 5

do $|x - 1|$ lo suficientemente pequeño. Pero tenga presente que x nunca toma el valor 1.

Esta condición puede escribirse en forma más precisa empleando dos símbolos para las diferencias pequeñas. Los símbolos empleados usualmente son las letras griegas ϵ (épsilon) y δ (delta). De modo que se establece que para cualquier número positivo ϵ existe un número positivo δ, seleccionado adecuadamente, tal que si $|x - 1|$ es menor que δ y $|x - 1| \neq 0$ (esto es, $x \neq 1$), entonces $|f(x) - 5|$ es menor que ϵ. Es importante señalar que primero se elige ϵ y que el valor de δ depende del valor de ϵ. Otra forma de expresar esto es: proporcionado cualquier número positivo ϵ, puede lograrse que $|f(x) - 5| < \epsilon$ tomando $|x - 1|$ lo suficientemente pequeño; es decir, existe un número positivo δ lo suficientemente pequeño tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 5| < \epsilon \tag{2}$$

Observe que el numerador de la fracción en (1) puede factorizarse de modo que

$$f(x) = \frac{(2x + 3)(x - 1)}{x - 1}$$

Si $x \neq 1$, entonces el numerador y el denominador pueden dividirse entre $x - 1$ para obtener

$$f(x) = 2x + 3 \qquad x \neq 1 \tag{3}$$

La ecuación (3), junto con la indicación de que $x \neq 1$, es tan adecuada como la ecuación (1) para una definición de $f(x)$.

Ahora se verá el significado geométrico de todo esto para la función particular definida por las ecuaciones (1) o (3). La figura 3 ilustra el significado geométrico de ϵ y δ. Observe que si x, en el eje horizontal, está entre $1 - \delta$ y $1 + \delta$, entonces $f(x)$, en el eje vertical, estará entre $5 - \epsilon$ y $5 + \epsilon$; o equivalentemente,

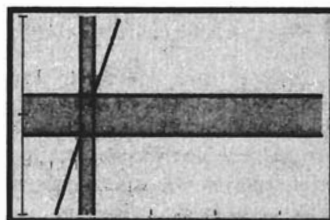
$$\text{si} \quad 0 < |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 5| < \epsilon$$

Otra manera de establecer esto es la siguiente: $f(x)$, en el eje vertical, puede restringirse a que esté entre $5 - \epsilon$ y $5 + \epsilon$ obligando a que x, en el eje horizontal, esté entre $1 - \delta$ y $1 + \delta$.

A continuación se mostrará gráficamente cómo elegir una δ adecuada para una ϵ dada. La figura 4 muestra la gráfica de la función f trazada en el rectángulo de inspección de [0, 4.7] por [4, 6]. La gráfica tiene un «agujero» en el punto (1, 5), el cual puede o no exhibirse en la graficadora, esto depende del modelo de la graficadora y del rectángulo de inspección elegido. Suponga que $\epsilon = 0.2$; se desea restringir $f(x)$, en el eje vertical, de modo que esté entre $5 - 0.2$ y $5 + 0.2$ o, equivalentemente, entre 4.8 y 5.2. Se trazan las rectas $y = 4.8$ y $y = 5.2$ y la gráfica de f en el mismo rectángulo de inspección, como se muestra en la figura 5. Se observa que las rectas intersectan a la gráfica de f en los puntos donde $x = 0.9$ y $x = 1.1$, respectivamente. De modo que para $\epsilon = 0.2$, se toma $\delta = 0.1$ y se establece que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 1| < 0.1 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 5| < 0.2$$

Esta es la proposición (2) con $\epsilon = 0.2$ y $\delta = 0.1$, lo cual está de acuerdo con lo observado en las tablas 1 y 2. Si su graficadora tiene la característica de *sombra* (*shade*), se podrá tener apoyo gráfico al trazar la gráfica de f: el rectángulo horizontal sombreado entre las rectas $y = 4.8$ y $y = 5.2$, y el



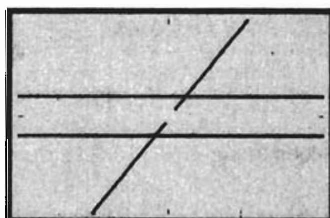
[0, 4.7] por [4, 6]

$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

$y = 4.8$ y $y = 5.2$

$x = 0.9$ y $x = 1.1$

FIGURA 6

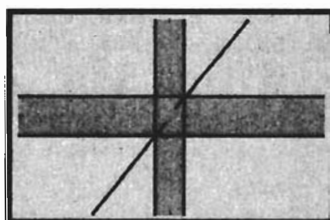


[0.9, 1.1] por [4.9, 5.1]

$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

$y = 4.98$ y $y = 5.02$

FIGURA 7



[0.9, 1.1] por [4.9, 5.1]

$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

$y = 4.98$ y $y = 5.02$

$x = 0.99$ y $x = 1.01$

FIGURA 8

rectángulo vertical sombreado entre las rectas $x = 0.9$ y $x = 1.1$ en el rectángulo de inspección de [0, 4.7] por [4, 6] como se muestra en la figura 6.

Ahora suponga que $\epsilon = 0.02$ y trace la gráfica de f y las rectas $y = 4.98$ y $y = 5.02$ en el rectángulo de inspección de [0.9, 1.1] por [4.9, 5.1] como se muestra en la figura 7. Se observa que las rectas intersectan a la gráfica de f en los puntos donde $x = 0.99$ y $x = 1.01$, respectivamente. Por tanto, para $\epsilon = 0.02$, se toma $\delta = 0.01$ y se establece que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 1| < 0.01 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 5| < 0.02$$

Esta es la proposición (2) con $\epsilon = 0.02$ y $\delta = 0.01$, lo cual está de acuerdo con la información de las tablas 1 y 2. Otra vez se obtiene apoyo gráfico adicional de la figura 8, la cual muestra el rectángulo horizontal sombreado entre las rectas $y = 4.98$ y $y = 5.02$, el rectángulo vertical sombreado entre las rectas $x = 0.99$ y $x = 1.01$ y la gráfica de f en el rectángulo de inspección de [0.9, 1.1] por [4.9, 5.1].

Se puede dar como ϵ cualquier número positivo pequeño y determinar un valor adecuado para δ tal que si $|x - 1| < \delta$ y $x \neq 1$ (esto es, $0 < |x - 1| < \delta$), entonces $|f(x) - 5|$ será menor que ϵ. Observe que los valores de ϵ se eligen arbitrariamente y puede ser tan pequeño como se desee, y que el valor de δ depende del valor elegido de ϵ. También debe señalarse que a un valor pequeño de ϵ le corresponderá un valor pequeño de δ. Como para cualquier $\epsilon > 0$ puede determinarse un $\delta > 0$ tal que la proposición (2) se cumpla, se establece que el límite de $f(x)$ conforme x tiende o se aproxima a 1, es igual a 5, o expresado con símbolos

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5$$

Observe que en esta ecuación se tiene un nuevo uso del símbolo "igual". Aquí, ningún valor de x hace que $f(x)$ tenga el valor 5. El símbolo "igual" es apropiado debido a que el lado izquierdo está escrito como $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

De (3) es evidente que puede lograrse que $f(x)$ esté tan cerca de 5 como se desee, tomando x suficientemente cerca de 1, por lo que esta propiedad de la función f no depende de que f esté definida cuando $x = 1$. Este hecho proporciona la diferencia entre $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ y el valor de la función en 1; es decir, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$, *pero* $f(1)$ *no existe.* En consecuencia, en la proposición (2), se escribe $0 < |x - 1|$ debido a que sólo nos interesan los valores de $f(x)$ para x cerca de 1, pero no para $x = 1$.

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Sea g la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \neq 1 \\ 7 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

La gráfica de g se muestra en la figura 9. Excepto en $x = 1$, la función g tiene los mismos valores de la función f definida por la ecuación (1). En consecuencia, como el hecho de que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$ no tiene nada que ver con lo que ocurre en $x = 1$, se puede aplicar el argumento anterior a la función g y concluir que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad |g(x) - 5| < \epsilon$$

de modo que $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 5$. Note que $g(1) = 7$; por lo que para esta función, el límite de la función y el valor de la función existen para $x = 1$, pero no son iguales. ◀

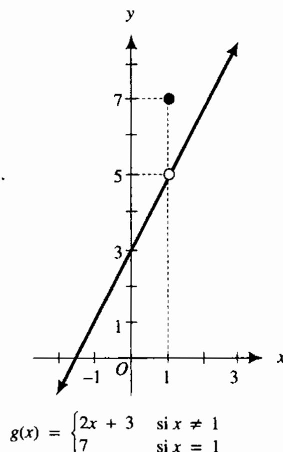
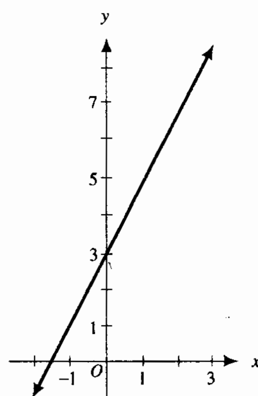


FIGURA 9



$h(x) = 2x + 3$

FIGURA 10

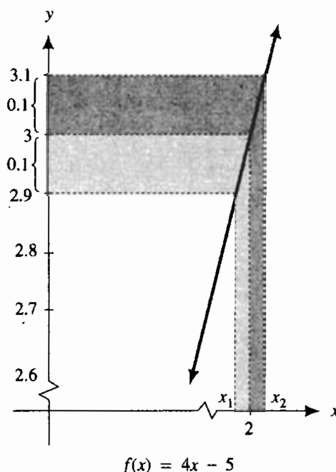


FIGURA 11



EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Sea h la función definida por

$$h(x) = 2x + 3$$

La gráfica de h consta de todos los puntos de la recta $y = 2x + 3$, mostrada en la figura 10. Otra vez, excepto en $x = 1$, se tiene una función con los mismos valores de la función f, definida por la ecuación (1), así como de la función g del ejemplo ilustrativo 2. De este modo, se puede aplicar una vez más el mismo argumento y concluir que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad |h(x) - 5| < \epsilon$$

de modo que $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = 5$. Sin embargo, en esta ocasión, el valor de la función y el límite existen y son iguales para $x = 1$. Una consecuencia de este hecho, como se verá en la sección 1.8, es que la función h es *continua* en $x = 1$. Observe que la gráfica de h de la figura 10 no tiene ningún agujero en $x = 1$, considerando que las gráficas de f y g de las figuras 3 y 9, respectivamente, tienen un agujero en $x = 1$. En la sección 1.8 aprenderá que las funciones f y g son *discontinuas* en $x = 1$. ◀



EJEMPLO 1 Sea f la función definida por

$$f(x) = 4x - 5$$

(a) Utilice una figura semejante a la figura 3 para $\epsilon = 0.1$ con el fin de determinar una $\delta > 0$, tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 3| < 0.1$$

(b) Apoye la elección de δ del inciso (a) con el uso de la graficadora.

Solución

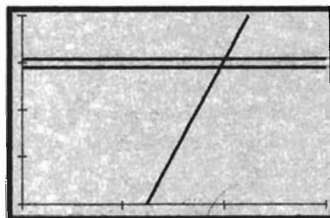
(a) Refiérase a la figura 11 y observe que los valores de la función crecen conforme x se incrementa. Así, la figura indica que se necesita un valor de x_1 tal que $f(x_1) = 2.9$ y un valor de x_2 tal que $f(x_2) = 3.1$; esto es, se necesitan x_1 y x_2 tales que

$$4x_1 - 5 = 2.9 \qquad 4x_2 - 5 = 3.1$$
$$x_1 = \frac{7.9}{4} \qquad x_2 = \frac{8.1}{4}$$
$$x_1 = 1.975 \qquad x_2 = 2.025$$

Debido a que $2 - 1.975 = 0.025$ y $2.025 - 2 = 0.025$, se elige $\delta = 0.025$ de modo que se tiene la proposición

$$\text{si} \quad 0 < |x - 2| < 0.025 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 3| < 0.1$$

(b) En la graficadora se traza la gráfica de f y las rectas $y = 2.9$ y $y = 3.1$ en el rectángulo de inspección de [0, 3] por [0, 4] como se muestra en la figura 12. Con la operación de *intersección* (*intersection*) o las de *rastreo* (*trace*) y *aumento* (*zoom*) de la graficadora, se determina que la recta $y = 2.9$ intersecta a la gráfica de f en $x = 1.975$ y que la recta $y = 3.1$ intersecta a dicha gráfica en $x = 2.025$, lo cual apoya la elección de δ efectuada en el inciso (a). ◀



[0, 3] por [0, 4]

$f(x) = 4x - 5$

$y = 2.9$ y $y = 3.1$

FIGURA 12

En el ejemplo siguiente se utiliza el símbolo $\Rightarrow$ por primera vez. La flecha $\Rightarrow$ significa *implica*. También se emplea la doble flecha $\Leftrightarrow$, lo cual significa que las proposiciones precedente y siguiente son *equivalentes*.

EJEMPLO 2 Confirme analíticamente la elección de δ en el ejemplo 1 utilizando propiedades de las desigualdades.

Solución Se desea determinar una $\delta > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
&\text{si } 0 < |x-2| < \delta \text{ entonces } |f(x) - 3| < 0.1 \\
\Leftrightarrow\ &\text{si } 0 < |x-2| < \delta \text{ entonces } |(4x-5) - 3| < 0.1 \\
\Leftrightarrow\ &\text{si } 0 < |x-2| < \delta \text{ entonces } 4|x-2| < 0.1 \\
\Leftrightarrow\ &\text{si } 0 < |x-2| < \delta \text{ entonces } |x-2| < 0.025
\end{aligned}
$$

Esta proposición indica que una elección adecuada de δ es 0.025. Con esta δ, se tiene el argumento siguiente:

$$
\begin{aligned}
& 0 < |x-2| < 0.025 \\
& 4|x-2| < 4(0.025) \\
\Rightarrow\ & |4x-8| < 0.1 \\
\Rightarrow\ & |(4x-5) - 3| < 0.1 \\
\Rightarrow\ & |f(x) - 3| < 0.1
\end{aligned}
$$

De esta manera, se ha confirmado analíticamente que

$$\text{si } 0 < |x-2| < 0.025 \text{ entonces } |f(x) - 3| < 0.1 \tag{4}$$

En los ejemplos 1 y 2 cualquier número positivo menor que 0.025 puede utilizarse en lugar de 0.025 como la δ requerida. Observe este hecho en la figura 11. Además, si $0 < \gamma < 0.025$ y si se cumple la desigualdad (4), entonces se tiene que

$$\text{si } 0 < |x-2| < \gamma \text{ entonces } |f(x) - 3| < 0.1$$

ya que cualquier número x que satisfaga la desigualdad $0 < |x-2| < \gamma$ también satisface la desigualdad $0 < |x-2| < 0.025$.

Las soluciones de los ejemplos 1 y 2 consistieron en determinar una δ para una ϵ específica. En la sección 1.5 aprenderá que si para cualquier $\epsilon > 0$ se puede determinar una $\delta > 0$, tal que

$$\text{si } 0 < |x-2| < \delta \text{ entonces } |(4x-5) - 3| < \epsilon$$

entonces se habrá establecido que $\lim_{x \to 2} (4x - 5) = 3$. Esto se hará en el ejemplo 1 de la sección 1.5.

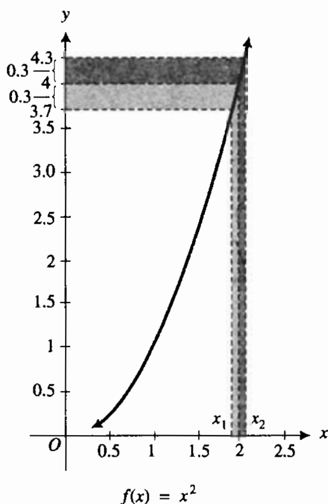
EJEMPLO 3 Sea f la función definida por

$$f(x) = x^2$$

(a) Utilice una figura con $\epsilon = 0.3$ para determinar una $\delta > 0$ tal que

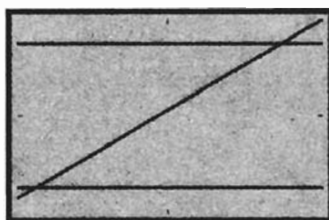
$$\text{si } 0 < |x-2| < \delta \text{ entonces } |f(x) - 4| < 0.3$$

(b) Apoye la elección de δ del inciso (a) con el uso de la graficadora.



$f(x) = x^2$

FIGURA 13



[1.91, 2.09] por [3.6, 4.4]

$f(x) = x^2$

$y = 3.7$ y $y = 4.3$

FIGURA 14

Solución

(a) La figura 13 muestra una porción de la gráfica de f en una vecindad del punto (2, 4). Si $x > 0$, los valores de la función crecen conforme el valor de x se incrementa. Por tanto, la figura indica que se necesita un valor positivo x_1 tal que $f(x_1) = 3.7$ y un valor positivo x_2 tal que $f(x_2) = 4.3$; esto es, se necesitan $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$, tales que

$$\begin{aligned} x_1^2 &= 3.7 & x_2^2 &= 4.3 \\ x_1 &= \sqrt{3.7}7 & x_2 &= \sqrt{4.3} \\ x_1 &\approx 1.92 & x_2 &\approx 2.07 \end{aligned}$$

Entonces $2 - 1.92 = 0.08$ y $2.07 - 2 = 0.07$. Debido a que $0.07 < 0.08$, se elige $\delta = 0.07$ de modo que se tiene la proposición

$$\text{si} \quad 0 < |x - 2| < 0.07 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 4| < 0.3$$

Cualquier número positivo menor que 0.07 puede tomarse como la δ requerida.

(b) La figura 14 muestra las gráficas de f y de las rectas $y = 3.7$ y $y = 4.3$ trazadas en el rectángulo de inspección de [1.91, 2.09] por [3.6, 4.4]. En la graficadora se determina que la recta $y = 3.7$ intersecta a la gráfica de f en $x = 1.92$ y que la recta $y = 4.3$ intersecta a dicha gráfica en $x = 2.07$, lo cual apoya la elección de δ del inciso (a). ◀

▶ ***EJEMPLO 4*** Confirme analíticamente la elección de δ del ejemplo 3 empleando propiedades de las desigualdades.

Solución Se desea determinar una $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &\text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 4| < 0.3 \qquad (5) \\ \Leftrightarrow \quad &\text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x^2 - 4| < 0.3 \\ \Leftrightarrow \quad &\text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x - 2|\,|x + 2| < 0.3 \end{aligned}$$

Observe en el lado derecho de esta proposición que además del factor $|x - 2|$, se tiene el factor $|x + 2|$. Por tanto, se necesita obtener una desigualdad que contenga a $|x + 2|$. Para hacer esto, se restringe la δ que se requiere. Considere que δ es menor que o igual a 0.1, lo cual parece razonable. Entonces

$$\begin{aligned} &0 < |x - 2| < \delta \quad \text{y} \quad \delta \leq 0.1 \\ \Rightarrow \quad &0 < |x - 2| < 0.1 \\ \Rightarrow \quad &-0.1 < x - 2 < 0.1 \\ \Rightarrow \quad &3.9 < x + 2 < 4.1 \\ \Rightarrow \quad &|x + 2| < 4.1 \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} &0 < |x - 2| < \delta \quad \text{y} \quad \delta \leq 0.1 \\ \Rightarrow \quad &0 < |x - 2| < \delta \quad \text{y} \quad |x + 2| < 4.1 \\ \Rightarrow \quad &|x - 2| \cdot |x + 2| < \delta(4.1) \end{aligned}$$

Recuerde que el objetivo consiste en obtener la proposición (5). De modo que, debe pedirse que

$$\delta(4.1) \leq 0.3 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \leq \tfrac{3}{41}$$

Ahora se tienen dos restricciones sobre δ: $\delta \le 0.1$ y $\delta \le \frac{3}{41}$. Para que ambas restricciones se cumplan, se toma $\delta = \frac{3}{41}$, el menor de los dos números. Mediante el uso de esta δ, se tiene el argumento siguiente:

$$
\begin{aligned}
& 0 < |x - 2| < \tfrac{3}{41} \\
\Rightarrow\quad & |x - 2| < \tfrac{3}{41} \text{ y } |x + 2| < 4.1 \\
\Rightarrow\quad & |x - 2|\,|x + 2| < \tfrac{3}{41}(4.1) \\
\Rightarrow\quad & |x^2 - 4| < 0.3
\end{aligned}
$$

Por tanto, se ha determinado una δ de modo que la proposición (5) se cumple. Puesto que $\frac{3}{41} \approx 0.07$ se ha confirmado la elección de δ del ejemplo 3. ◀

Ahora se aplicarán los conceptos anteriores a fin de determinar cómo debe medirse aproximadamente una cantidad para asegurar una aproximación específica de la medición de una segunda cantidad que depende de la primera.

▶ **EJEMPLO 5** Para la situación del ejemplo 1 de la sección 1.3, ¿cuál debe ser la temperatura del gas si éste ocupa un volumen entre 79.5 m^3 y 80.5 m^3?

Solución En el ejemplo 1 de la sección 1.3 se obtuvo el siguiente modelo matemático de la situación:

$$f(x) = \tfrac{4}{7}x$$

donde $f(x)$ metros cúbicos es el volumen de un gas cuya temperatura es x grados. Como $f(140) = 80$, el gas ocupa 80 m^3 a una temperatura de 140°. Se desea determinar qué tan cerca debe estar x de 140 para que $f(x)$ no esté a más de 0.5 de 80; esto es, para $\epsilon = 0.5$ se desea determinar una $\delta > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
& \text{si } 0 < |x - 140| < \delta \text{ entonces } |f(x) - 80| < 0.5 \\
\Leftrightarrow\quad & \text{si } 0 < |x - 140| < \delta \text{ entonces } \left|\tfrac{4}{7}x - 80\right| < 0.5 \\
\Leftrightarrow\quad & \text{si } 0 < |x - 140| < \delta \text{ entonces } \tfrac{7}{4}\left|\tfrac{4}{7}x - 80\right| < \tfrac{7}{4}(0.5) \\
\Leftrightarrow\quad & \text{si } 0 < |x - 140| < \delta \text{ entonces } |x - 140| < 0.875
\end{aligned}
$$

Por tanto, se toma $\delta = 0.875$, y se tiene el argumento siguiente:

$$
\begin{aligned}
& 0 < |x - 140| < 0.875 \\
\Rightarrow\quad & \tfrac{4}{7}|x - 140| < \tfrac{4}{7}(0.875) \\
\Rightarrow\quad & \left|\tfrac{4}{7}x - 80\right| < 0.5
\end{aligned}
$$

En consecuencia,

$$\text{si } 0 < |x - 140| < 0.875 \text{ entonces } |f(x) - 80| < 0.5$$

Conclusión: Para que el gas ocupe un volumen entre 79.5 y 80.5 m^3 su temperatura debe estar entre 139.125° y 140.875°. ◀

▶ **EJEMPLO 6** La cubierta circular de una mesa tiene un área que difiere de 225π pulg^2 en menos de 4 pulg^2. ¿Cuál es la medida aproximada del radio?



$A(r) = \pi r^2$

FIGURA 15

Solución Observe la figura 15. Si la longitud del radio de la cubierta de la mesa es de r pulgadas y $A(r)$ pulgadas cuadradas es el área de la cubierta, entonces

$$A(r) = \pi r^2$$

El área es 225π pulg^2 cuando el radio mide 15 pulg. Se desea determinar qué tan cerca debe estar r de 15, de modo que $A(r)$ no esté a más de 4 unidades de 225π. Esto es, si $\epsilon = 4$, se desea determinar una $\delta > 0$, tal que

$$\begin{array}{lll} & \text{si } 0 < |r - 15| < \delta \text{ entonces} & |A(r) - 225\pi| < 4 \\ \Leftrightarrow & \text{si } 0 < |r - 15| < \delta \text{ entonces} & |\pi r^2 - 225\pi| < 4 \\ \Leftrightarrow & \text{si } 0 < |r - 15| < \delta \text{ entonces} & |r - 15|\,|r + 15| < \dfrac{4}{\pi} \end{array} \quad (6)$$

Debido a que se tiene el factor $|x + 15|$ del lado derecho de la proposición (6), se necesita una desigualdad que contenga a este factor. A fin de obtener dicha desigualdad, se restringe δ de modo que $\delta \leq 1$. Entonces

$$\begin{array}{llll} & 0 < |r - 15| < \delta \text{ y } \delta \leq 1 & \Rightarrow & 0 < |r - 15| < 1 \\ \Rightarrow & -1 < r - 15 < 1 & \Rightarrow & 14 < r < 16 \\ \Rightarrow & 29 < r + 15 < 31 & \Rightarrow & |r + 15| < 31 \end{array}$$

Por tanto,

$$\text{si } 0 < |r - 15| < \delta \text{ y } \delta \leq 1 \text{ entonces } |r - 15|\,|r + 15| < \delta(31)$$

Como se desea que la proposición (6) se cumpla, será necesario que

$$\delta(31) \leq \frac{4}{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \delta \leq \frac{4}{31\pi}$$

Ahora se tienen dos restricciones sobre δ: $\delta \leq 1$ y $\delta \leq \frac{4}{31\pi}$. Se elige δ como $\frac{4}{31\pi}$, el menor de estos dos números. Con esta δ se tiene el siguiente argumento:

$$\begin{array}{ll} & 0 < |r - 15| < \dfrac{4}{31\pi} \\ \Rightarrow & |r - 15| < \dfrac{4}{31\pi} \text{ y } |r + 15| < 31 \\ \Rightarrow & |r - 15|\,|r + 15| < \dfrac{4}{31\pi}(31) \\ \Rightarrow & \pi|r^2 - 225| < 4 \end{array}$$

Por tanto,

$$\text{si } 0 < |r - 15| < \frac{4}{31\pi} \text{ entonces } |A(r) - 225\pi| < 4$$

Como $\frac{4}{31\pi} \approx 0.041$, se tiene la siguiente conclusión.

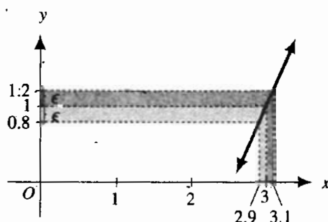
__Conclusión:__ El radio de la cubierta de la mesa debe estar entre 14.959 pulg y 15.041 pulg para que dicha cubierta tenga un área que difiera de 225π pulg^2 por menos de 4 pulg^2. ◀

EJERCICIOS 1.4

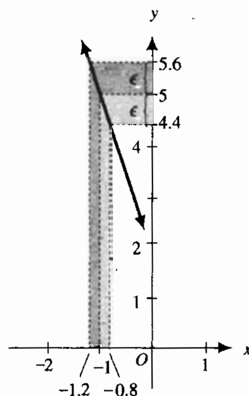
En los ejercicios 1 y 2, se proporcionan $f(x)$, a, L, ϵ y una figura. A partir de la figura determine $\delta > 0$, tal que

si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$

1. $f(x) = 2x - 5$; $a = 3$; $L = 1$; $\epsilon = 0.2$



2. $f(x) = 2 - 3x$; $a = -1$; $L = 5$; $\epsilon = 0.6$



En los ejercicios 3 a 14, se proporcionan $f(x)$, a, L y ϵ. (a) Utilice una figura semejante a la de los ejercicios 1 y 2 y el ejemplo 1, y argumentos similares al del ejemplo 1 para determinar una $\delta > 0$, tal que

si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$

(b) Apoye la elección de δ del inciso (a) usando una graficadora.

3. $f(x) = x - 1$; $a = 4$; $L = 3$; $\epsilon = 0.03$

4. $f(x) = x + 2$; $a = 3$; $L = 5$; $\epsilon = 0.02$

5. $f(x) = 2x + 4$; $a = 3$; $L = 10$; $\epsilon = 0.01$

6. $f(x) = 3x - 1$; $a = 2$; $L = 5$; $\epsilon = 0.1$

7. $f(x) = 5x - 3$; $a = 1$; $L = 2$; $\epsilon = 0.05$

8. $f(x) = 4x - 5$; $a = 2$; $L = 3$; $\epsilon = 0.001$

9. $f(x) = 3 - 4x$; $a = -1$; $L = 7$; $\epsilon = 0.02$

10. $f(x) = 2 + 5x$; $a = -2$; $L = -8$; $\epsilon = 0.002$

11. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$; $a = -2$; $L = -4$; $\epsilon = 0.01$

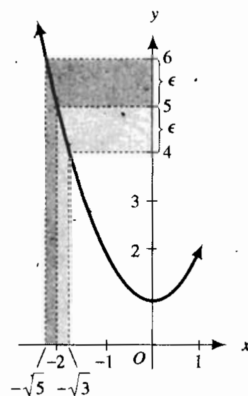
12. $f(x) = \dfrac{9x^2 - 1}{3x - 1}$; $a = \dfrac{1}{3}$; $L = 2$; $\epsilon = 0.01$

13. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 4x - 3}{2x + 1}$; $a = -\dfrac{1}{2}$; $L = -4$; $\epsilon = 0.03$

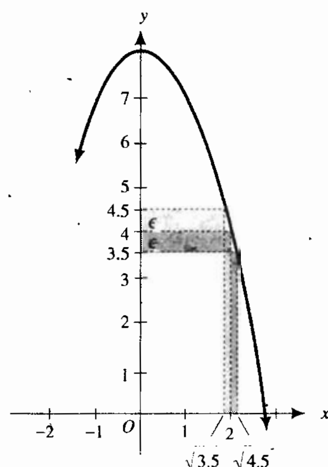
14. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 8x - 3}{x - 3}$; $a = 3$; $L = 10$; $\epsilon = 0.05$

Para los ejercicios 15 y 16, siga las mismas instrucciones que para los ejercicios 1 y 2.

15. $f(x) = x^2 + 1$; $a = -2$; $L = 5$; $\epsilon = 1$



16. $f(x) = 8 - x^2$; $a = 2$; $L = 4$; $\epsilon = 0.5$



En los ejercicios 17 a 24, se proporcionan $f(x)$, a, L y ϵ (a). Utilice una figura semejante a la de los ejercicios 15 y 16 y del ejemplo 3, y argumentos similares al de este ejemplo para determinar una $\delta > 0$, tal que

si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$

17. $f(x) = x^2$; $a = 3$; $L = 9$; $\epsilon = 0.5$

18. $f(x) = x^2$; $a = 0.5$; $L = 0.25$; $\epsilon = 0.1$

19. $f(x) = x^2$; $a = -1$; $L = 1$; $\epsilon = 0.2$

20. $f(x) = x^2 - 5$; $a = 1$; $L = -4$; $\epsilon = 0.15$

21. $f(x) = x^2 - 2x + 1$; $a = 2$; $L = 1$; $\epsilon = 0.4$

22. $f(x) = x^2 + 4x + 4$; $a = -1$; $L = 1$; $\epsilon = 0.08$

23. $f(x) = 2x^2 + 5x + 3; a = -3; L = 6; \epsilon = 0.6$

24. $f(x) = 3x^2 - 7x + 2; a = 1; L = -2; \epsilon = 0.3$

En los ejercicios 25 a 36, confirme analíticamente (empleando propiedades de las desigualdades) la elección de δ del ejercicio indicado.

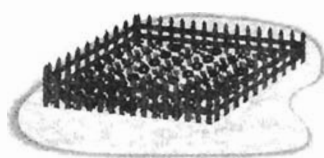
25. Ejercicio 3
26. Ejercicio 4
27. Ejercicio 7
28. Ejercicio 8
29. Ejercicio 13
30. Ejercicio 14
31. Ejercicio 17
32. Ejercicio 18
33. Ejercicio 21
34. Ejercicio 22
35. Ejercicio 23
36. Ejercicio 24

En los ejercicios 37 a 44, primero obtenga una función como modelo matemático de la situación. Defina la variable dependiente y el valor de función como números, e indique las unidades de medición. No olvide completar el ejercicio con una conclusión.

37. A una persona que gana \$15 por hora se le paga sólo por el tiempo real de trabajo. ¿Qué tan cerca de 8 horas debe trabajar una persona para que su salario difiera de \$120 en no más de 25 centavos?

38. Para la situación del ejemplo 1 de la sección 1.3, ¿cuál debe ser la temperatura del gas si éste ocupa un volumen entre 79.95 m^3 y 80.05 m^3?

39. Se construye una cerca alrededor de un jardín de forma cuadrada. ¿Qué tan próxima a 10 pie debe estar la longitud de cada lado del jardín para que la longitud total de la cerca esté entre 39.96 y 40.04 pie?



40. Se construye una señal circular de modo que la longitud de su circunferencia difiera de 6π pie en no más de 0.1 pie. ¿Qué tan cerca de 3 pie debe medir el radio de la señal?

41. Para el jardín del ejercicio 39, ¿qué tan cercana a 10 pie debe estar la longitud de cada lado del jardín para que el área de dicho jardín difiera de 100 pie^2 en no más de 0.5 pie^2?

42. Para la señal del ejercicio 40, ¿qué tan cercano a 3 pie debe medir el radio de la señal para que el área de dicha señal difiera de 9π pie^2 en no más de 0.2 pie^2?

43. El número de pies que cae un cuerpo a partir del reposo en t segundos varía directamente como el cuadrado de t, y un cuerpo cae a partir del reposo 64 pie en 2 s. ¿Qué tiempo cercano a 5 s le tomará a un cuerpo caer entre 398 y 402 pie?

44. El número de libras por pie cuadrado de la fuerza del viento sobre una superficie plana cuando la velocidad del viento es v millas por hora, varía directamente como el cuadrado de v. Suponga que la fuerza es de 2 lb/pie^2 cuando la velocidad del viento es de 20 mi/h. ¿Qué tan cerca de 30 mi/h será la velocidad del viento cuando su fuerza sobre una superficie plana está entre 4.45 lb/pie^2 y 4.55 lb/pie^2?

1.5 DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN Y TEOREMAS DE LÍMITES

Ahora se presentará la definición formal de límite de una función. La definición contiene la proposición que implica las desigualdades con la notación ϵ-δ mostrada con frecuencia en la sección 1.4.

1.5.1 Definición de límite de una función

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en el número a mismo. El **límite de $f(x)$ conforme x se aproxima a a es L**, lo que se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si la siguiente proposición es verdadera:

dada cualquier $\epsilon > 0$, no importa cuan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon \qquad (1)$$

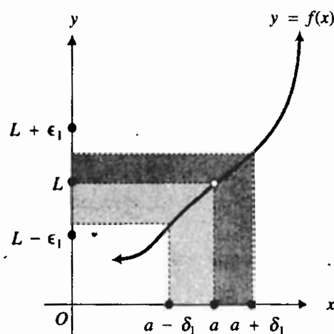


FIGURA 1

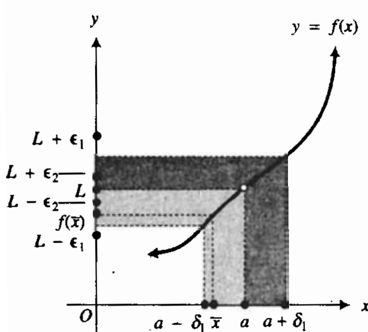


FIGURA 2

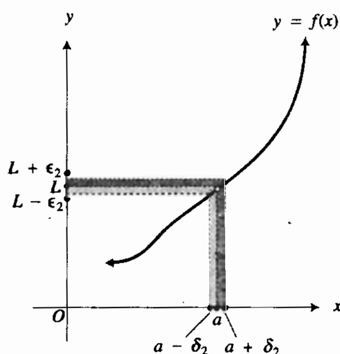


FIGURA 3

En palabras, esta definición establece que los valores de función $f(x)$ se aproximan al límite L conforme x lo hace al número a si el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L puede hacerse tan pequeña como se desee tomando x suficientemente cerca de a pero no igual a a.

Observe que en la definición no se menciona nada acerca del valor de la función cuando $x = a$. Recuerde, como se señaló en la sección 1.4, la función f no necesita estar definida en a, para que el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ exista. Más aún, si f está definida en a, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ puede existir sin que tenga el mismo valor que $f(a)$ como en el caso de la función del ejemplo ilustrativo 2 de la sección 1.4.

Una interpretación geométrica de la definición de límite de una función f se muestra en la figura 1, la cual presenta una porción de la gráfica de f cerca del punto donde $x = a$. Como f no está necesariamente definida en a, no existe un punto en la gráfica de f con abscisa a. Observe que si x, en el eje horizontal, está entre $a - \delta_1$ y $a + \delta_1$, entonces $f(x)$, en el eje vertical, estará entre $L - \epsilon_1$ y $L + \epsilon_1$. En otras palabras, al restringir x, en el eje horizontal, de modo que esté entre $a - \delta_1$ y $a + \delta_1$, se restringe a $f(x)$, en el eje vertical, de manera que esté entre $L - \epsilon_1$ y $L + \epsilon_1$. Así,

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon_1$$

La figura 2 muestra cómo un valor pequeño de ϵ puede requerir una elección diferente para δ. En la figura se aprecia que $\epsilon_2 < \epsilon_1$, y que el valor δ_1 es demasiado grande; esto es, existen valores de x para los cuales $0 < |x - a| < \delta_1$, pero $|f(x) - L|$ no es menor que ϵ_2. Por ejemplo, $0 < |\bar{x} - a| < \delta_1$, pero $|f(\bar{x}) - L| > \epsilon_2$. Por esta razón debe elegirse un valor δ_2 más pequeño, como se muestra en la figura 3, tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon_2$$

Sin embargo, para cualquier elección de $\epsilon > 0$, no importa que tan pequeño sea, existe $\delta > 0$ tal que la proposición (1) se cumple. Por tanto, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

En el primer ejemplo de esta sección, se vuelve a tratar la función mostrada en los ejemplos 1 y 2 de la sección 1.4.

▶ EJEMPLO 1

Utilice la definición de límite para demostrar que

$$\lim_{x \to 2} (4x - 5) = 3$$

Solución El primer requisito de la definición 1.5.1 es que $4x - 5$ esté definida en cada número de un intervalo abierto que contenga a 2, excepto posiblemente en 2. Puesto que $4x - 5$ está definida para todos los números reales, cualquier intervalo abierto que contenga a 2 satisface este requisito. Ahora se debe demostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
& \text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |(4x - 5) - 3| < \epsilon \qquad \textbf{(2)}\\
\Leftrightarrow \quad & \text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad 4|x - 2| < \epsilon\\
\Leftrightarrow \quad & \text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x - 2| < \tfrac{1}{4}\epsilon
\end{aligned}$$

Esta proposición denota que $\frac{1}{4}\epsilon$ es una δ satisfactoria. Con esta elección de δ se tiene el argumento siguiente:

$$\begin{aligned}
& 0 < |x - 2| < \delta\\
\Rightarrow \quad & 4|x - 2| < 4\delta\\
\Rightarrow \quad & |4x - 8| < 4\delta
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad |(4x - 5) - 3| < 4\delta$$
$$\Rightarrow \quad |(4x - 5) - 3| < \epsilon \quad (\text{porque } \delta = \tfrac{1}{4}\epsilon)$$

Por tanto, se ha establecido que si $\delta = \frac{1}{4}\epsilon$, entonces se cumple la proposición (2). Esto demuestra que $\lim\limits_{x \to 2} (4x - 5) = 3$.

En particular, si $\epsilon = 0.1$, entonces se toma $\delta = \frac{1}{4}(0.1)$, es decir, $\delta = 0.025$. Este valor de δ corresponde al valor determinado en los ejemplos 1 y 2 de la sección 1.4.

Cualquier número positivo menor que $\frac{1}{4}\epsilon$ puede emplearse también como la δ requerida. ◀

En el suplemento de esta sección, al final del ápendice se proporciona un ejemplo que muestra cómo aplicar la definición 1.5.1 para demostrar que $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

A fin de calcular límites de manera más fácil que cuando se utiliza la definición se emplean teoremas, cuyas demostraciones están basadas en la definición. Estos teoremas, así como otros que aparecen en secciones posteriores de este capítulo, están señalados con la etiqueta *teorema de límites*.

1.5.2 Teorema 1 de límites — Límite de una función lineal

Si m y b son dos constantes cualesquiera, entonces

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$$

Demostración A partir de la definición de límite de una función, se debe demostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$, tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |(mx + b) - (ma + b)| < \epsilon \qquad (3)$$

Caso 1: $m \neq 0$.

Como $|(mx + b) - (ma + b)| = |m| \cdot |x - a|$, se desea encontrar una $\delta > 0$ para cualquier $\epsilon > 0$, tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |m| \cdot |x - a| < \epsilon$$

o como $m \neq 0$,

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x - a| < \frac{\epsilon}{|m|}$$

Esta proposición se cumplirá si $\delta = \epsilon/|m|$; por lo que se puede concluir que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \text{ y } \delta = \frac{\epsilon}{|m|} \quad \text{entonces} \quad |(mx + b) - (ma + b)| < \epsilon$$

Esto demuestra el teorema para el caso 1.

Caso 2: $m = 0$.

Si $m = 0$, entonces $|(mx + b) - (ma + b)| = 0$ para todos los valores de x. De modo que se toma δ como cualquier número positivo, cumpliéndose así la proposición (3). Esto demuestra el teorema para el caso 2. ■

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Del teorema 1 de límites,

$$\lim_{x \to 2} (3x + 5) = 3 \cdot 2 + 5$$
$$= 11$$



1.5.3 Teorema 2 de límites Límite de una función constante

Si c es una constante, entonces para cualquier número a

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Este teorema se deduce inmediatamente del teorema 1 de límites tomando $m = 0$ y $b = c$.

1.5.4 Teorema 3 de límites Límite de la función identidad

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Este teorema también se deduce inmediatamente del teorema 1 de límites tomando $m = 1$ y $b = 0$.



EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Del teorema 2 de límites,

$$\lim_{x \to 5} 7 = 7$$

y del teorema 3 de límites,

$$\lim_{x \to -6} x = -6$$

◀

1.5.5 Teorema 4 de límites Límite de la suma y de la diferencia de dos funciones

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

La demostración del teorema 4 de límites se presenta en el suplemento de esta sección. En el enunciado del teorema, el hecho de que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$ indica que los límites existen. En otras palabras, no se puede decir simplemente que *el límite de la suma de dos funciones es la suma de sus límites*, se debe agregar la condición de la existencia de los límites: *si los límites existen*. Consulte el ejercicio 44 de la sección 1.6 y el ejercicio 50 de la sección 1.7.

El teorema siguiente de límites es una extensión del teorema 4 de límites para cualquier número finito de funciones. Se le pedirá que proporcione la demostración mediante inducción matemática en el ejercicio suplementario 10.

1.5.6 Teorema 5 de límites Límite de la suma y de la diferencia de n funciones

Si $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$, . . . , y $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm \ldots \pm L_n$$

El límite del producto de dos funciones se tiene mediante el teorema siguiente de límites. Otra vez, observe que el teorema establece que el límite

del producto de dos funciones es el producto de sus límites si los límites existen. Para la demostración, refiérase al suplemento de esta sección.

1.5.7 Teorema 6 de límites Límite del producto de dos funciones

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Del teorema 3 de límites, $\lim\limits_{x \to 4} x = 4$, y del teorema 1 de límites, $\lim\limits_{x \to 4} (2x + 1) = 9$. Así, por el teorema 6 de límites

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 4} [x(2x + 1)] &= \lim_{x \to 4} x \cdot \lim_{x \to 4} (2x + 1) \\ &= 4 \cdot 9 \\ &= 36 \end{aligned}$$

◀

El teorema 6 de límites también puede extenderse a un número finito de funciones mediante la aplicación de la inducción matemática, como se le pedirá que lo haga en el ejercicio suplementario 13.

1.5.8 Teorema 7 de límites Límite del producto de *n* funciones

Si $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_2, \ldots,$ y $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = L_n$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)] = L_1 L_2 \ldots L_n$$

1.5.9 Teorema 8 de límites Límite de la *n*-ésima potencia de una función

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y n es cualquier número entero positivo, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$$

La demostración es inmediata a partir del teorema 7 de límites, tomando $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ todas iguales a $f(x)$ y $L_1, L_2, \ldots, L_n$ todos iguales a L.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 Del teorema 1 de límites, $\lim\limits_{x \to -2} (5x + 7) = -3$. Por tanto, del teorema 8

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} (5x + 7)^4 &= \left[\lim_{x \to -2} (5x + 7) \right]^4 \\ &= (-3)^4 \\ &= 81 \end{aligned}$$

◀

El siguiente teorema de límites trata acerca del límite del cociente de dos funciones, y no sólo se requiere la existencia de los límites, sino que también se pide que el límite de la función del denominador sea diferente de cero.

1.5.10 Teorema 9 de límites Límite del cociente de dos funciones

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{si } M \neq 0$$

La demostración de este teorema se presenta en la sección 1.9.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 Del teorema 3 de límites, $\lim_{x \to 4} x = 4$, y del teorema 1 de límites, $\lim_{x \to 4} (-7x + 1) = -27$. Por tanto, del teorema 9 de límites,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 4} \frac{x}{-7x + 1} &= \frac{\lim_{x \to 4} x}{\lim_{x \to 4}(-7x + 1)} \\ &= \frac{4}{-27} \\ &= -\frac{4}{27}\end{aligned}$$

◀

1.5.11 Teorema 10 de límites Límite de la raíz *n*-ésima de una función

Si n es un número entero positivo y $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

con la restricción de que si n es par, $L > 0$.

La demostración de este teorema también se proporciona en la sección 1.9.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 Del ejemplo ilustrativo 5 y del teorema 10 de límites,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{\frac{x}{-7x + 1}} &= \sqrt[3]{\lim_{x \to 4} \frac{x}{-7x + 1}} \\ &= \sqrt[3]{-\frac{4}{27}} \\ &= -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\end{aligned}$$

◀

Ahora se establecerán dos teoremas, los cuales son casos especiales de los teoremas 9 y 10 de límites, respectivamente. Cada uno de estos teoremas se utiliza en la sección 1.9 para la demostración de los teoremas de límites correspondientes.

1.5.12 Teorema

Si a es cualquier número real diferente de cero, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

1.5.13 Teorema

Si $a > 0$ y n es un número entero positivo, o si $a \leq 0$ y n es un número entero impar, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

Las demostraciones de los teoremas 1.5.12 y 1.5.13 se presentan en el suplemento de esta sección.

En los ejemplos siguientes se aplicarán los teoremas anteriores para calcular límites. A fin de indicar qué teorema se ha aplicado se escribirá la abreviación "T.n L.", donde n representa el número del teorema; por ejemplo, "T.2 L." se refiere al teorema 2 de límites.

EJEMPLO 2 Calcule $\lim_{x \to 3}(x^2 + 7x - 5)$, y cuando sea apropiado, indique los teoremas de límites que se aplicaron.

Solución

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3}(x^2 + 7x - 5) &= \lim_{x \to 3} x^2 + \lim_{x \to 3} 7x - \lim_{x \to 3} 5 && \textbf{(T. 5 L.)} \\
&= \lim_{x \to 3} x \cdot \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 7 \cdot \lim_{x \to 3} x - \lim_{x \to 3} 5 && \textbf{(T. 6 L.)} \\
&= 3 \cdot 3 + 7 \cdot 3 - 5 && \textbf{(T. 3 L. y T. 2 L.)} \\
&= 9 + 21 - 5 \\
&= 25
\end{aligned}$$

Es importante que se de cuenta de que el límite del ejemplo 2 se evaluó mediante la aplicación directa de los teoremas de límites. Observe que para la función f del ejemplo no sólo el $\lim_{x \to 3} f(x)$ es igual a 25, sino que también $f(3)$ es igual a 25. Pero recuerde, $\lim_{x \to 3} f(x)$ y $f(a)$ no siempre son iguales.

EJEMPLO 3 Determine el siguiente límite y, cuando sea apropiado, indique los teoremas de límites que se aplicaron:

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}} &= \sqrt{\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}} && \textbf{(T. 10 L.)} \\
&= \sqrt{\frac{\lim_{x \to 2}(x^3 + 2x + 3)}{\lim_{x \to 2}(x^2 + 5)}} && \textbf{(T. 9 L.)} \\
&= \sqrt{\frac{\lim_{x \to 2} x^3 + \lim_{x \to 2} 2x + \lim_{x \to 2} 3}{\lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 5}} && \textbf{(T. 5 L.)} \\
&= \sqrt{\frac{(\lim_{x \to 2} x)^3 + \lim_{x \to 2} 2 \cdot \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 3}{(\lim_{x \to 2} x)^2 + \lim_{x \to 2} 5}} && \textbf{(T. 6 L. y T. 8 L.)} \\
&= \sqrt{\frac{2^3 + 2 \cdot 2 + 3}{2^2 + 5}} && \textbf{(T. 3 L. y T. 2 L.)}
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{8 + 4 + 3}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{3}$$ ◀

▶ **EJEMPLO 4** Sea

$$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

(a) Utilice una calculadora para determinar y tabular los valores de $f(x)$ cuando x toma los valores 4, 4.5, 4.9, 4.99, 4.999 y cuando x es igual a 6, 5.5, 5.1, 5.01, 5.001. ¿A qué valor parece que se aproxima $f(x)$ conforme x tiende a 5?

(b) Confirme la respuesta del inciso (a) analíticamente mediante el cálculo del $\lim_{x \to 5} f(x)$.

Solución

(a) Las tablas 1 y 2 muestran los valores de $f(x)$ para los valores indicados de x. Observando estas tablas, parece que $f(x)$ se aproxima a 10 conforme x tiende a 5.

(b) En este caso, se tiene una situación diferente a las de los ejemplos anteriores. No puede aplicarse el teorema 9 de límites al cociente $\frac{x^2 - 25}{x - 5}$ debido a que $\lim_{x \to 5} (x - 5) = 0$. Sin embargo, al factorizar el numerador se obtiene

$$\frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5}$$

Si $x \neq 5$, entonces el numerador y el denominador pueden dividirse entre $x - 5$ para obtener $x + 5$. Recuerde que cuando se calcula el límite de una función conforme x se aproxima a 5, se consideran los valores de x cercanos a 5, pero sin tomar este valor. Por tanto, es posible dividir el numerador y el denominador entre $x - 5$. La solución se expresa en la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} &= \lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} \\ &= \lim_{x \to 5} (x + 5) \\ &= 10 \qquad \textbf{(T. 1 L.)} \end{aligned}$$ ◀

Tabla 1

x	$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$
4	9
4.5	9.5
4.9	9.9
4.99	9.99
4.999	9.999

Tabla 2

x	$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$
6	11
5.5	10.5
5.1	10.1
5.01	10.01
5.001	10.001

▶ **EJEMPLO 5** Considere

$$g(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

(a) Utilice una calculadora para determinar y tabular los valores de $g(x)$ cuando x toma los valores 3, 3.5, 3.9, 3.99, 3.999 y cuando x es igual a 5, 4.5, 4.1, 4.01, 4.001. ¿A qué valor parece que se aproxima $g(x)$ conforme x tiende a 4?

(b) Apoye la respuesta del inciso (a) trazando la gráfica de g en un rectángulo de inspección conveniente.

(c) Confirme la respuesta del inciso (a) analíticamente mediante el cálculo del $\lim_{x \to 4} g(x)$ y, cuando sea apropiado, indique los teoremas que se aplicaron.

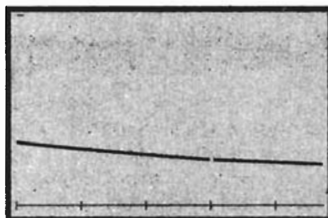
Solución

Tabla 3

x	$g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$
3	0.2679
3.5	0.2583
3.9	0.2516
3.99	0.2502
3.999	0.2500

Tabla 4

x	$g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$
5	0.2361
4.5	0.2426
4.1	0.2485
4.01	0.2498
4.001	0.2500



[1, 5.7] por [0, 1]

$g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

FIGURA 4

(a) Las tablas 3 y 4 muestran los valores de $g(x)$ para los valores especificados de x. Observando estas tablas, parece que $g(x)$ se aproxima a 0.2500 conforme x tiende a 4.

(b) La figura 4 muestra la gráfica de g trazada en el rectángulo de inspección de [1, 5.7] por [0, 1]. La gráfica tiene un agujero en el punto (4, 0.25). Utilizando el rastreo (*trace*) de la graficadora, se observa que $g(x)$ se aproxima a 0.25 conforme x tiende a 4, lo cual apoya la respuesta del inciso (a).

(c) Como en el ejemplo 4, no se puede aplicar el teorema 9 de límites al cociente $\dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ debido a que $\lim_{x \to 4} (x - 4) = 0$. Para simplificar el cociente se racionaliza el numerador multiplicando tanto el numerador como el denominador por $\sqrt{x} + 2$.

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

Puesto que se está evaluando el límite conforme x tiende a 4, se consideran sólo los valores de x cercanos a 4 sin tomar este valor. En consecuencia, se pueden dividir el numerador y el denominador entre $x - 4$. Por tanto

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \qquad \text{si } x \neq 4$$

La solución se expresa como sigue:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} &= \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\
&= \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\
&= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2)} \\
&= \frac{\lim_{x \to 4} 1}{\lim_{x \to 4}(\sqrt{x} + 2)} && \textbf{(T. 9 L.)} \\
&= \frac{1}{\lim_{x \to 4} \sqrt{x} + \lim_{x \to 4} 2} && \textbf{(T. 2 L.) y (T. 4 L.)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lim_{x \to 4} x} + 2} && \textbf{(T. 10 L.) y (T. 2 L.)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4} + 2} && \textbf{(T. 3 L.)} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

◀

De vez en cuando se necesitarán otros dos enunciados de límites que son equivalentes a

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Estos enunciados se presentan en los dos teoremas siguientes, cuyas demostraciones se le pedirán en los ejercicios 63 y 64.

Apostol, 158

1.5.14 Teorema

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to a} [f(x) - L] = 0$

1.5.15 Teorema

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{t \to 0} f(t + a) = L$

El teorema siguiente establece que una función no puede aproximarse a dos límites diferentes simultáneamente. Este teorema recibe el nombre de *teorema de unicidad,* debido a que garantiza que si el límite de una función existe, entonces es único.

1.5.16 Teorema

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$.

Debido a este teorema se puede establecer que si una función f tiene un límite L en el número a, entonces L es *el* límite de f en a. La demostración del teorema se proporciona en el suplemento de esta sección.

EJERCICIOS 1.5

En los ejercicios 1 a 10, demuestre, aplicando la definición 1.5.1, que el límite es el número indicado.

1. $\lim_{x \to 2} 7 = 7$
2. $\lim_{x \to 5} (-4) = -4$
3. $\lim_{x \to 4} (2x + 1) = 9$
4. $\lim_{x \to 1} (4x + 3) = 7$
5. $\lim_{x \to 3} (7 - 3x) = -2$
6. $\lim_{x \to -4} (2x + 7) = -1$
7. $\lim_{x \to -2} (1 + 3x) = -5$
8. $\lim_{x \to -2} (7 - 2x) = 11$
9. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$
10. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

En los ejercicios 11 a 24, determine el límite y, cuando sea apropiado, indique los teoremas de límites que se aplicaron.

11. $\lim_{x \to 5} (3x - 7)$
12. $\lim_{x \to -4} (5x + 2)$
13. $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1)$
14. $\lim_{x \to 3} (2x^2 - 4x + 5)$
15. $\lim_{z \to -2} (z^3 + 8)$
16. $\lim_{y \to -1} (y^3 - 2y^2 + 3y - 4)$
17. $\lim_{x \to 3} \dfrac{4x - 5}{5x - 1}$
18. $\lim_{x \to 2} \dfrac{3x + 4}{8x - 1}$
19. $\lim_{t \to 2} \dfrac{t^2 - 5}{2t^3 + 6}$
20. $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x + 1}{x^2 - 3x + 4}$
21. $\lim_{r \to 1} \sqrt{\dfrac{8r + 1}{r + 3}}$
22. $\lim_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{x^2 + 3x + 4}{x^3 + 1}}$
23. $\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x^2 - x - 1}}$
24. $\lim_{x \to -3} \sqrt[3]{\dfrac{5 + 2x}{5 - x}}$

En los ejercicios 25 a 30, haga lo siguiente: (a) utilice una calculadora para determinar con cuatro cifras decimales y tabular los valores de f(x) para los valores especificados de x. ¿A qué valor parece que se aproxima f(x) conforme x tiende a c? (b) Apoye la respuesta del inciso (a) trazando la gráfica de f en un rectángulo de inspección adecuado. (c) Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando el $\lim_{x \to c} f(x)$ *y, cuando sea apropiado, indique los teoremas de límites que se aplicaron.*

25. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$; x es 1, 1.5, 1.9, 1.99, 1.999 y x es 3, 2.5, 2.1, 2.01, 2.001; $c = 2$
26. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 6x - 16}$; x es −3, −2.5, −2.1, −2.01, −2.001 y x es −1, −1.5, −1.9, −1.99, −1.999; $c = -2$
27. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12}$; x es −4, −3.5, −3.1, −3.01, −3.001, −3.0001 y x es −2, −2.5, −2.9, −2.99, −2.999, −2.9999; $c = -3$
28. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{4x^2 - 9}$; x es 1, 1.4, 1.49, 1.499, 1.4999 y x es 2, 1.6, 1.51, 1.501, 1.5001; $c = \frac{3}{2}$
29. $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$; x es 8, 8.5, 8.9, 8.99, 8.999 y x es 10, 9.5, 9.1, 9.01, 9.001; $c = 9$

30. $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}$; x es $-1, -0.5, -0.1, -0.01, -0.001$ y x es $1, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001$; $c = 0$

En los ejercicios 31 a 46, determine el límite y, cuando sea apropiado, indique los teoremas de límites que se aplicaron.

31. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x^2 - 49}{x - 7}$

32. $\lim\limits_{z \to -5} \dfrac{z^2 - 25}{z + 5}$

33. $\lim\limits_{x \to 3/2} \dfrac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

34. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{3x - 1}{9x^2 - 1}$

35. $\lim\limits_{s \to 4} \dfrac{3s^2 - 8s - 16}{2s^2 - 9s + 4}$

36. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$

37. $\lim\limits_{y \to -2} \dfrac{y^3 + 8}{y + 2}$

38. $\lim\limits_{s \to 1} \dfrac{s^3 - 1}{s - 1}$

39. $\lim\limits_{y \to -3} \sqrt{\dfrac{y^2 - 9}{2y^2 + 7y + 3}}$

40. $\lim\limits_{t \to 3/2} \sqrt{\dfrac{8t^3 - 27}{4t^2 - 9}}$

41. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

42. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x + 5} - 2}{x + 1}$

43. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h + 2} - \sqrt{2}}{h}$

44. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

45. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5}$

46. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2}$

47. Si $f(x) = x^2 + 5x - 3$, demuestre analíticamente que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$. Apoye su respuesta gráficamente.

48. Si $F(x) = 2x^3 + 7x - 1$, demuestre analíticamente que $\lim\limits_{x \to -1} F(x) = F(-1)$. Apoye su respuesta gráficamente.

49. Si $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, ¿por qué no existe $g(1)$? Demuestre analíticamente que $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ existe y calcúlelo. Apoye su respuesta gráficamente.

50. Si $G(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$, ¿por qué no existe $G(1)$? Demuestre analíticamente que $\lim\limits_{x \to 1} G(x)$ existe y calcúlelo. Apoye su respuesta gráficamente.

51. Si $h(x) = \dfrac{\sqrt{x + 9} - 3}{x}$, ¿por qué no existe $h(0)$? Demuestre analíticamente que $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ existe y calcúlelo. Apoye su respuesta gráficamente.

52. Si $H(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x + 1} - 1}$, ¿por qué no existe $H(0)$? Demuestre analíticamente que $\lim\limits_{x \to 0} H(x)$ existe y calcúlelo. Apoye su respuesta gráficamente.

53. Si

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

encuentre el $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ y demuestre que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$. Dibuje la gráfica de f.

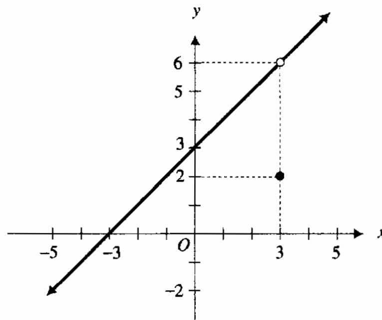
54. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } x \neq -3 \\ 4 & \text{si } x = -3 \end{cases}$$

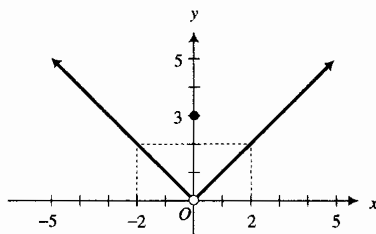
encuentre el $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ y demuestre que $\lim\limits_{x \to -3} f(x) \neq f(-3)$. Dibuje la gráfica de f.

En los ejercicios 55 a 58, responda los incisos (a)-(c) a partir de la gráfica de f dibujada en la figura adjunta.

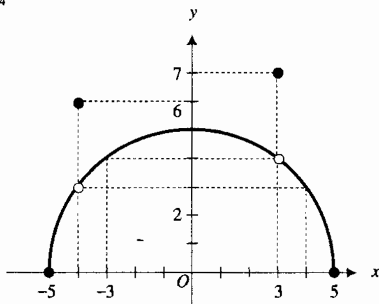
55. El dominio de f es $(-\infty, +\infty)$. **(a)** Defina $f(x)$ a trozos. **(b)** ¿Cuáles son los valores de $f(-3)$, $f(0)$ y $f(3)$? **(c)** ¿Cuáles son los valores de $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$?



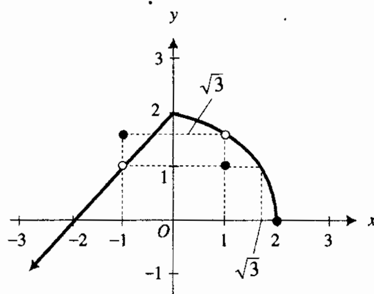
56. El dominio de f es $(-\infty, +\infty)$. **(a)** Defina $f(x)$ a trozos. **(b)** ¿Cuáles son los valores de $f(-2)$, $f(0)$ y $f(2)$? **(c)** ¿Cuáles son los valores de $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$?



57. El dominio de f es $[-5, 5]$. **(a)** Defina $f(x)$ a trozos. **(b)** ¿Cuáles son los valores de $f(-4)$, $f(-3)$, $f(3)$ y $f(4)$? **(c)** ¿Cuáles son los valores de $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$?



58. El dominio de f es $[-\infty, 2]$. (a) Defina $f(x)$ a trozos. (b) ¿Cuáles son los valores de $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ y $f(\sqrt{3})$? (c) ¿Cuáles son los valores de $\lim_{x\to -1} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$ y $\lim_{x\to \sqrt{3}} f(x)$?



En los ejercicios 59 a 62, dibuje la gráfica de alguna función f que satisfaga las condiciones dadas. En cada ejercicio el dominio de f es $(-\infty, +\infty)$.

59. $f(2) = 3$; $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$; $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ si $a \neq 2$; el contradominio de f es el conjunto de todos los números reales.

60. $f(-3) = 4$; $f(3) = -5$; $\lim_{x\to -3} f(x) = -5$; $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$; $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ si $a \neq \pm 3$; el contradominio de f es el conjunto de todos los números reales.

61. $\lim_{x\to -6} f(x) \neq f(-6)$; $\lim_{x\to 6} f(x) \neq f(6)$; $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ si $a \neq \pm 6$; el contradominio de f es el conjunto de todos los números reales no negativos.

62. $f(-2) \neq f(2)$; $\lim_{x\to -2} f(x) \neq f(-2)$; $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$; $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ si $a \neq \pm 2$; el contradominio de f es el intervalo cerrado $[-3, 3]$.

63. Demuestre el teorema 1.5.14. *Sugerencia:* Debido a que el teorema tiene el conectivo lógico *si y sólo si*, la demostración debe realizarse en dos partes. Para demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *si* $\lim_{x\to a} [f(x) - L] = 0$, inicie con $\lim_{x\to a} f(x)$ y sustituya $f(x)$ por $[f(x) - L] + L$, después aplique el teorema 4 de límites. Para demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *sólo si* $\lim_{x\to a} [f(x) - L] = 0$ o, equivalentemente, $\lim_{x\to a} [f(x) - L] = 0$ *si* $\lim_{x\to a} f(x) = L$, aplique el teorema 4 de límites a $\lim_{x\to a} [f(x) - L]$.

64. Demuestre el teorema 1.5.15. *Sugerencia:* como en la demostración del teorema 1.5.14, se requieren dos partes. Para demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *si* $\lim_{t\to 0} f(t + a) = L$, aplique la definición 1.5.1 y después sustituya $t + a$ por x y t por $x - a$. Para demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *sólo si* $\lim_{t\to 0} f(t + a) = L$ o, equivalentemente, $\lim_{t\to 0} f(t + a) = L$ *si* $\lim_{x\to a} f(x) = L$, aplique la definición 1.5.1 y después sustituya x por $t + a$ y $x - a$ por t.

65. Si P es una función polinomial, ¿por qué existe $\lim_{x\to a} P(x)$ para todos los números a y por qué puede determinarse este límite calculando $P(a)$? Si R es una función racional, ¿por qué no puede tenerse un enunciado semejante al anterior que implique a $\lim_{x\to a} R(x)$? ¿Cómo podría modificar el enunciado anterior para el límite de una función racional?

66. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ no existe, explique por qué puede concluirse que $\lim_{x\to a} g(x)$ no existe.

67. Sin emplear las palabras *límite* o *se aproxima* y sin utilizar símbolos tales como ϵ y δ, establezca en palabras lo que significa el siguiente simbolismo: $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

1.6 LÍMITES LATERALES

Hasta ahora, en el estudio del límite de una función conforme la variable independiente x tiende al número a, se han considerado valores de x cercanos a a, tanto mayores como menores que a; esto es, valores de x en un intervalo abierto que contenga a a, el cual no se considera como posible valor de x. Sin embargo, suponga que se tiene la función definida por

$$f(x) = \sqrt{x - 4}$$

Como $f(x)$ no existe si $x < 4$, entonces f no está definida en cualquier intervalo abierto que contenga a 4. De modo que $\lim_{x\to 4} \sqrt{x - 4}$ no tiene significado. Si, de cualquier forma, se restringe x a números mayores que 4, puede lograrse que el valor de $\sqrt{x - 4}$ esté tan cerca de 0 como se desee tomando valores de x suficientemente cercanos a 4 pero mayores que 4. En tal caso, x se aproxima a 4 por la derecha y se considera el *límite por la derecha* (o el *límite lateral derecho*), el cual se define a continuación.

1.6.1 Definición de límite por la derecha

Sea f una función definida en cada número del intervalo abierto (a, c). Entonces, el **límite de $f(x)$, conforme x tiende a a por la derecha, es L,** lo que se denota por

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar qué tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < x - a < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Observe que en la última línea de la definición, no se colocaron barras de valor absoluto alrededor de $x - a$ ya que se consideran únicamente valores de x para los cuales $x > a$.

Al calcular, a partir de la definición, el límite de $\sqrt{x - 4}$, conforme x tiende a 4 por la derecha, se tiene

$$\lim_{x \to 4^+} \sqrt{x - 4} = 0$$

Si, cuando se considera el límite de una función, la variable independiente x se restringe a números menores que a, se dice que x se aproxima a a por la izquierda. Este límite recibe el nombre de *límite por la izquierda* (o *límite lateral izquierdo*).

1.6.2 Definición de límite por la izquierda

Sea f una función definida en cada número del intervalo abierto (d, a). Entonces, el **límite de $f(x)$, conforme x tiende a a por la izquierda, es L,** lo que se denota por

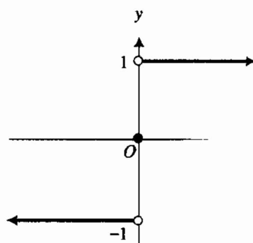
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar qué tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < a - x < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Se referirá al $\lim_{x \to a} f(x)$ como el **límite bilateral** para distinguirlo de los límites laterales.

Los teoremas 1 a 10 de límites estudiados en la sección 1.5 siguen siendo válidos si "$x \to a$" se sustituye por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".



$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

FIGURA 1

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 La figura 1 muestra la gráfica de la función signo definida en el ejercicio 49 de la sección 1.1 mediante

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

Como $\operatorname{sgn} x = -1$ si $x < 0$ y $\operatorname{sgn} x = 1$ si $0 < x$, se tiene

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \to 0^-} (-1) \qquad \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \to 0^+} 1$$
$$= -1 \qquad\qquad\qquad = 1$$

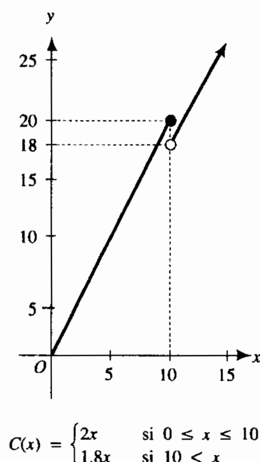
◀

En el ejemplo ilustrativo 1, debido a que el límite por la izquierda y el límite por la derecha no son iguales, el límite bilateral $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ no existe. El concepto de límite bilateral no existe debido a que los dos límites laterales son diferentes, lo cual es una consecuencia del siguiente teorema.

1.6.3 Teorema

El $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y es igual a L si y sólo si $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existen y son iguales a L.

La demostración de este teorema se deja al estudiante como ejercicio (consulte el ejercicio 34).



$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 10 \\ 1.8x & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

FIGURA 2

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 En el ejemplo 2 de la sección 1.3 se tuvo la siguiente función en la que $C(x)$ dólares es el costo total de un pedido de x libras de un producto:

$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1.8x & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

La gráfica de C se muestra en la figura 2. Observe el rompimiento de la gráfica en $x = 10$. A continuación se examinará el $\lim_{x\to 10} C(x)$. Como la definición de $C(x)$ cuando $x < 10$ es diferente de la definición cuando $x > 10$, debe distinguirse entre el límite por la izquierda en 10 y el límite por la derecha en 10. Al calcular estos límites se obtiene

$$\lim_{x\to 10^-} C(x) = \lim_{x\to 10^-} 2x = 20 \qquad \lim_{x\to 10+} C(x) = \lim_{x\to 10+} 1.8x = 18$$

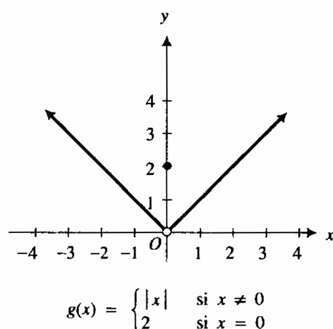
Puesto que $\lim_{x\to 10^-} C(x) \ne \lim_{x\to 10^+} C(x)$, se concluye, por el teorema 1.6.3, que $\lim_{x\to 10} C(x)$ no existe. En la sección 1.8, se considerará otra vez esta función como un ejemplo de una función *discontinua*. ◀

EJEMPLO 1 Sea g la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \ne 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Dibuje la gráfica de g. (b) Determine $\lim_{x\to 0} g(x)$ si existe.

Solución



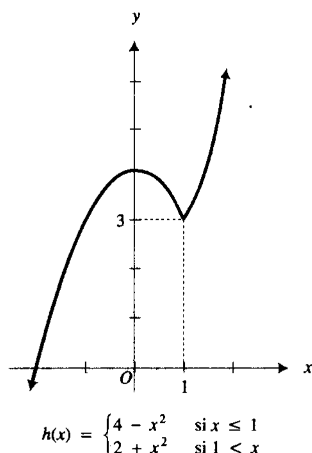
$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \ne 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

FIGURA 3

(a) La gráfica de g se muestra en la figura 3. Observe que la gráfica se rompe en el origen.

(b) $$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Como $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x)$, se concluye, por el teorema 1.6.3, que $\lim_{x\to 0} g(x)$ existe y es igual a 0. Observe que $g(0) = 2$, lo cual no afecta al $\lim_{x\to 0} g(x)$. ◀



$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 + x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

FIGURA 4

EJEMPLO 2 Sea h la función definida por

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 + x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

(a) Dibuje la gráfica de h. **(b)** Determine, si existen, cada uno de los siguientes límites: $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$.

Solución

(a) La gráfica de h se muestra en la figura 4.

(b) $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (4 - x^2) = 3$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2 + x^2) = 3$

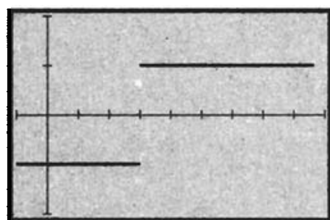
Como $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$ y ambos son iguales a 3, se concluye, por el teorema 1.6.3, que $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = 3$. ◀

EJEMPLO 3 Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{|x - 3|}{x - 3}$$

(a) Trace la gráfica de f y a partir de la gráfica haga una conjetura acerca de $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$. **(b)** Confirme analíticamente la conjetura del inciso (a).

Solución



[−1, 8.4] por [−2, 2]

$f(x) = \dfrac{|x - 3|}{x - 3}$

FIGURA 5

(a) La figura 5 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [−1, 8.4] por [−2, 2]. Debido a que la gráfica se rompe en el punto donde $x = 3$, se sospecha que $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ no existe.

(b) Como

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geq 3 \\ 3 - x & \text{si } x < 3 \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \frac{|x - 3|}{x - 3} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 3 \\ -1 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Al calcular los límites laterales se obtiene

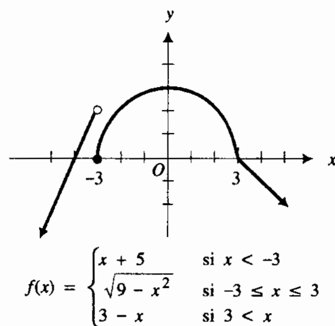
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{|x - 3|}{x - 3} = \lim_{x\to 3^-} (-1) = -1 \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{|x - 3|}{x - 3} = \lim_{x\to 3^+} 1 = 1$$

Como $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, se ha confirmado analíticamente que $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ no existe. ◀

EJEMPLO 4 Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ 3 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

(a) Dibuje la gráfica de f. **(b)** Determine cada uno de los siguientes límites: $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.



$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{si } -3 \le x \le 3 \\ 3 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

FIGURA 6

Solución

(a) La gráfica de f se muestra en la figura 6.

(b)
$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} (x + 5) = 2 \qquad \lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \sqrt{9 - x^2} = 0$$

Como $\lim_{x\to -3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$, entonces $\lim_{x\to -3} f(x)$ no existe.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (3 - x) = 0$$

Como $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$, entonces $\lim_{x\to 3} f(x)$ existe y es igual a 0. ◀

EJERCICIOS 1.6

En los ejercicios 1 a 22, dibuje la gráfica de la función y si existe, determine el límite indicado; si el límite no existe, diga por qué razón.

1. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \\ -3 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$; **(b)** $\lim_{x\to 1^-} f(x)$; **(c)** $\lim_{x\to 1} f(x)$

2. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$; **(b)** $\lim_{x\to 0^-} f(x)$; **(c)** $\lim_{x\to 0} f(x)$

3. $f(t) = \begin{cases} t + 4 & \text{si } t \le -4 \\ 4 - t & \text{si } -4 < t \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to -4^+} f(t)$; **(b)** $\lim_{x\to -4^-} f(t)$; **(c)** $\lim_{x\to -4} f(t)$

4. $g(s) = \begin{cases} s + 3 & \text{si } s \le -2 \\ 3 - s & \text{si } -2 < s \end{cases}$

(a) $\lim_{s\to -2^+} g(s)$; **(b)** $\lim_{s\to -2^-} g(s)$; **(c)** $\lim_{s\to -2} g(s)$

5. $F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ 8 - 2x & \text{si } 2 < x \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to 2^+} F(x)$; **(b)** $\lim_{x\to 2^-} F(x)$; **(c)** $\lim_{x\to 2} F(x)$

6. $h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 3 \\ 10 - x & \text{si } 3 \le x \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to 3^+} h(x)$; **(b)** $\lim_{x\to 3^-} h(x)$; **(c)** $\lim_{x\to 3} h(x)$

7. $g(r) = \begin{cases} 2r + 3 & \text{si } r < 1 \\ 2 & \text{si } r = 1 \\ 7 - 2r & \text{si } 1 < r \end{cases}$

(a) $\lim_{r\to 1^+} g(r)$; **(b)** $\lim_{r\to 1^-} g(r)$; **(c)** $\lim_{r\to 1} g(r)$

8. $g(t) = \begin{cases} 3 + t^2 & \text{si } t < -2 \\ 0 & \text{si } t = -2 \\ 11 - t^2 & \text{si } -2 < t \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to -2^+} g(t)$; **(b)** $\lim_{t\to -2^-} g(t)$; **(c)** $\lim_{t\to -2} g(t)$

9. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \\ 4 - x^2 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$; **(b)** $\lim_{x\to 2^-} f(x)$; **(c)** $\lim_{x\to 2} f(x)$

10. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ x^2 + 2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$; **(b)** $\lim_{x\to 1^-} f(x)$; **(c)** $\lim_{x\to 1} f(x)$

11. $F(x) = |x - 5|$

(a) $\lim_{x\to 5^+} F(x)$; **(b)** $\lim_{x\to 5^-} F(x)$; **(c)** $\lim_{x\to 5} F(x)$

12. $f(x) = 3 + |2x - 4|$

(a) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$; **(b)** $\lim_{x\to 2^-} f(x)$; **(c)** $\lim_{x\to 2} f(x)$

13. $G(x) = |2x - 3| - 4$

(a) $\lim_{x\to 3/2^+} G(x)$; **(b)** $\lim_{x\to 3/2^-} G(x)$; **(c)** $\lim_{x\to 3/2} G(x)$

14. $F(x) = \begin{cases} |x - 1| & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ |1 - x| & \text{si } -1 < x \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to -1^+} F(x)$; **(b)** $\lim_{x\to -1^-} F(x)$; **(c)** $\lim_{x\to -1} F(x)$

15. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

(a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$; **(b)** $\lim_{x\to 0^-} f(x)$; **(c)** $\lim_{x\to 0} f(x)$

16. $S(x) = |\text{sgn}\, x|$ (la función sgn x se definió en el ejemplo ilustrativo 1)

(a) $\lim_{x\to 0^+} S(x)$; **(b)** $\lim_{x\to 0^-} S(x)$; **(c)** $\lim_{x\to 0} S(x)$

17. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ -2 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$; **(b)** $\lim_{x\to -2^+} f(x)$; **(c)** $\lim_{x\to -2} f(x)$ **(d)** $\lim_{x\to 2^-} f(x)$; **(e)** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$; **(f)** $\lim_{x\to 2} f(x)$

18. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$; **(b)** $\lim_{x\to -1^+} f(x)$; **(c)** $\lim_{x\to -1} f(x)$ **(d)** $\lim_{x\to 1^-} f(x)$; **(e)** $\lim_{x\to 1^+} f(x)$; **(f)** $\lim_{x\to 1} f(x)$

19. $f(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t} & \text{si } t < 0 \\ \sqrt{t} & \text{si } 0 \le t \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t)$; (b) $\lim\limits_{t \to 0^-} f(t)$; (c) $\lim\limits_{t \to 0} f(t)$

20. $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x} & \text{si } x \le 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{si } 0 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

21. $F(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} & \text{si } x \le -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{si } -3 < x < 3 \\ \sqrt{x^2 - 9} & \text{si } 3 \le x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to -3^-} F(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to -3^+} F(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to -3} F(x)$; (d) $\lim\limits_{x \to 3^-} F(x)$; (e) $\lim\limits_{x \to 3^+} F(x)$; (f) $\lim\limits_{x \to 3} F(x)$

22. $G(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t + 1} & \text{si } t \le -1 \\ \sqrt{1 - t^2} & \text{si } -1 < t < 1 \\ \sqrt[3]{t - 1} & \text{si } 1 \le t \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{t \to -1^-} G(t)$; (b) $\lim\limits_{t \to -1^+} G(t)$; (c) $\lim\limits_{t \to -1} G(t)$; (d) $\lim\limits_{t \to 1^-} G(t)$; (e) $\lim\limits_{t \to 1^+} G(t)$; (f) $\lim\limits_{t \to 1} G(t)$

23. Sea $F(x) = x - 2 \operatorname{sgn} x$, donde $\operatorname{sgn} x$ está definida en el ejemplo ilustrativo 1. Si existen, determine: (a) $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 0^-} F(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 0} F(x)$.

24. Sea $h(x) = \operatorname{sgn} x - U(x)$, donde $\operatorname{sgn} x$ está definida en el ejemplo ilustrativo 1 y U es la función salto unitario definida por

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$

Si existen, determine: (a) $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.

25. Si existen, determine: (a) $\lim\limits_{x \to 2^+} [\![x]\!]$; (b) $\lim\limits_{x \to 2^-} [\![x]\!]$; (c) $\lim\limits_{x \to 2} [\![x]\!]$.

26. Si existen, determine: (a) $\lim\limits_{x \to 4^+} [\![x - 3]\!]$; (b) $\lim\limits_{x \to 4^-} [\![x - 3]\!]$; (c) $\lim\limits_{x \to 4} [\![x - 3]\!]$.

27. Sea $h(x) = (x - 1) \operatorname{sgn} x$. Dibuje la gráfica de h. Si existen, determine: (a) $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.

28. Sea $G(x) = [\![x]\!] + [\![4 - x]\!]$. Dibuje la gráfica de G. Si existen, determine: (a) $\lim\limits_{x \to 3^+} G(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 3^-} G(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 3} G(x)$.

29. Dada $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 4 \\ 5x + k & \text{si } 4 \le x \end{cases}$, determine el valor de k, tal que $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ exista.

30. Dada $f(x) = \begin{cases} kx - 3 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 + k & \text{si } -1 < x \end{cases}$, determine el valor de k tal que $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ exista.

31. Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le -2 \\ ax + b & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$, determine valores de a y b tales que $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existan.

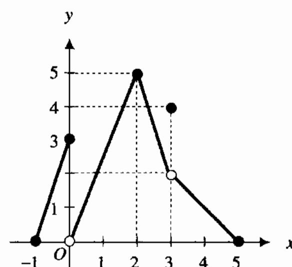
32. Dada $f(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{si } x < -3 \\ ax + 2b & \text{si } -3 \le x \le 3 \\ b - 5x & \text{si } 3 < x \end{cases}$, determine los valores de a y b tales que $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ existan.

33. Sea $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$, Demuestre que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe, y que $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)|$ existe.

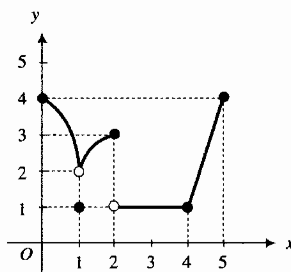
34. Demuestre el teorema 1.6.3.

En los ejercicios 35 y 36, si existen, evalúe los límites de los incisos (a)-(k) a partir de la gráfica mostrada en la figura adjunta.

35. El dominio de f es $[-1, 5]$. (a) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; (d) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; (e) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; (f) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; (g) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$; (h) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$; (i) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$; (j) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$; (k) $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$.



36. El dominio de f es $[0, 5]$. (a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; (d) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$; (e) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; (f) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; (g) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$; (h) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$; (i) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$; (j) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$; (k) $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$.



En los problemas 37 y 38, dibuje la gráfica de alguna función f que satisfaga las condiciones dadas.

37. El dominio de f es $[-1, 3]$. $f(-1) = -2$; $f(0) = 0$; $f(1) = 2$; $f(2) = 4$; $f(3) = 1$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 5$.

38. El dominio de f es $[-4, 4]$. $f(-4) = 3$; $f(-2) = -3$; $f(0) = 1$; $f(2) = -1$; $f(4) = 0$; $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 0$.

39. En el inciso (a) del ejercicio 5 de la sección 1.3, se le pidió que encontrase un modelo matemático que expresara el costo total de un embarque como una función de su peso. Si f es esa función y x es la variable independiente, determine cada uno de los siguientes límites: **(a)** $\lim\limits_{x \to 50^-} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 50^+} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 200^-} f(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x \to 200^+} f(x)$.

40. En el inciso (a) del ejercicio 6 de la sección 1.3, se le pidió que encontrase un modelo matemático que expresara el porte de correo de primera clase para una carta que no pese más de 11 oz como una función de su peso. Si F es esa función y x es la variable independiente, determine cada uno de los siguientes límites: **(a)** $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x \to 2^-} F(x)$; **(e)** $\lim\limits_{x \to 10^-} F(x)$; **(f)** $\lim\limits_{x \to 10^+} F(x)$; **(g)** $\lim\limits_{x \to 11^-} F(x)$.

41. En el inciso (a) del ejercicio 7 de la sección 1.3, se le pidió que encontrase un modelo matemático que expresara el costo de una llamada telefónica, que no dure más de 5 min, de Mendocino a San Francisco como una función de su duración. Si g es esa función y x es la variable independiente, determine cada uno de los siguientes límites: **(a)** $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x \to 5^-} g(x)$.

42. En el inciso (a) del ejercicio 8 de la sección 1.3, se le pidió que encontrase un modelo matemático que expresara el precio de admisión al Coast Cinema como una función de la edad de la persona. Si G es esa función y x es la variable independiente, determine cada uno de los siguientes límites: **(a)** $\lim\limits_{x \to 12^-} G(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 12^+} G(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 60^-} G(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x \to 60^+} G(x)$.

43. Sean f y g las funciones definidas como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

(a) Muestre que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ existen pero no son iguales, y en consecuencia, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existe.

(b) Muestre que $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ existen pero no son iguales, y en consecuencia, $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ no existe.

(c) Obtenga una fórmula para $f(x) \cdot g(x)$.

(d) Demuestre que $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) \cdot g(x)]$ existe probando que

$$\lim_{x \to 1^-} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to 1^+} [f(x) \cdot g(x)].$$

44. Sean f y g las funciones definidas como

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 1 \\ 1 + x & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

(a) Muestre que $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ no existen.

(b) Defina la función $f + g$.

(c) Demuestre que $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) + g(x)]$ existe.

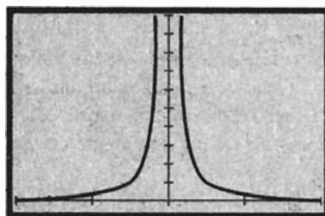
(d) De los resultados de los incisos (a) y (c) se tiene

$$\lim_{x \to 1} [f(x) + g(x)] \neq \lim_{x \to 1} f(x) + \lim_{x \to 1} g(x).$$

¿Contradice este hecho al teorema 4 de límites (1.5.5)? ¿Por qué?

45. Sin utilizar las palabras *límite* o *se aproxima* y sin emplear símbolos tales como ϵ y δ, exprese en palabras lo que significa cada uno de los siguientes simbolismos: **(a)** $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$; **(b)** $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$.

1.7 LÍMITES INFINITOS



[-2, 2] por [0, 100]

$f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

FIGURA 1

En esta sección, se estudian las funciones cuyos valores *crecen* o *decrecen sin límite* conforme la variable independiente se acerca cada vez más a un número fijo. Para iniciar, considere la función definida por

$$f(x) = \frac{3}{x^2}$$

El dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto 0, mientras que su contradominio es el conjunto de todos los números reales positivos. La figura 1 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [−2, 2] por [0, 100]. Observe que conforme las coordenadas x de los puntos de la gráfica se aproximan a 0, por la derecha o por la izquierda, las coordenadas y, o $f(x)$, crecen. A continuación se calcularán algunos valores de la función cuando x tiende a 0. Aproxime x a 0 por la derecha, es decir, considere los siguientes valores de x: 1, 0.5, 0.25, 0.1, 0.01, 0.001, y determine los valores correspondientes de $f(x)$, los cuales se muestran en la

Tabla 1

x	$f(x) = \dfrac{3}{x^2}$
1	3
0.5	12
0.25	48
0.1	300
0.01	30 000
0.001	3 000 000

la tabla 1. Observe en esta tabla que $f(x)$ crece conforme x se aproxima cada vez más a 0, a través de valores mayores que 0. En realidad, se puede hacer $f(x)$ tan grande como se desee para todos los valores de x suficientemente cercanos a 0 y mayores que 0. Debido a este hecho, se dice que $f(x)$ *crece sin límite* conforme x tiende a 0 mediante valores mayores que 0, lo cual se escribe como

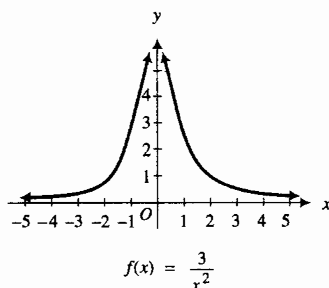
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3}{x^2} = +\infty$$

Ahora aproxime x a 0 por la izquierda; en particular, considere para x los valores $-1, -0.5, -0.25, -0.1, -0.01$ y -0.001. Debido a la simetría con respecto al eje y, los valores de la función son los mismos que los correspondientes a los valores positivos de x. Así, otra vez, $f(x)$ *crece sin límite* conforme x tiende a 0 a través de valores menores que 0, lo cual se expresa como

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{3}{x^2} = +\infty$$

Por tanto, conforme x se aproxima a 0 por la derecha o por la izquierda, $f(x)$ *crece sin límite*, lo que se expresa en símbolos como

$$\lim_{x \to 0} \frac{3}{x^2} = +\infty$$



$f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

FIGURA 2

A partir de la información anterior, se obtiene la gráfica de f, mostrada en la figura 2, la cual, por supuesto, corresponde a la gráfica trazada en la figura 1. Observe que las dos "ramas" de la curva se acercan cada vez más al eje y conforme x se aproxima a 0. Para esta gráfica, el eje y es una *asíntota vertical*, la cual se definirá posteriormente en esta sección.

1.7.1 Definición de valores de función que crecen sin límite

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto I que contiene a a, excepto posiblemente en a mismo. **Conforme x se aproxima a a, $f(x)$ crece sin límite,** lo cual se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \tag{1}$$

si para cualquier número $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

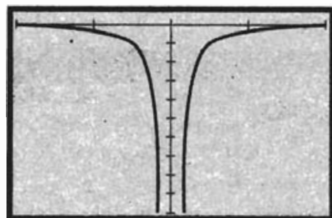
$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad f(x) > N$$

Esta definición también puede establecerse en otra forma como sigue: "Los valores de función $f(x)$ crecen sin límite conforme x tiende a un número a si $f(x)$ puede hacerse tan grande como se desee (esto es, mayor que cualquier número positivo N) para todos los valores de x suficientemente cercanos a a, pero sin considerar a a, mismo.

Se insiste una vez más, como se hizo cuando se analiza la notación de intervalos en la sección A-1 del apéndice, que $+\infty$ no es un símbolo para representar un número real; en consecuencia, cuando se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, no tiene el mismo significado que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, donde L es un número real. La ecuación (1) puede leerse como "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es infinito positivo (o más infinito)". En tal caso, el límite no existe, pero el símbolo $+\infty$ indica el comportamiento de los valores de función $f(x)$ conforme x se aproxima cada vez más a a.

De manera análoga, puede indicarse el comportamiento de una función cuyos valores *decrecen sin límite*. Para llegar a esto, considere la función g definida por la ecuación

$$g(x) = \frac{-3}{x^2}$$



$[-2, 2]$ por $[-100, 0]$

$g(x) = \frac{-3}{x^2}$

FIGURA 3

La figura 3 muestra la gráfica de esta función trazada en el rectángulo de inspección de $[-2, 2]$ por $[-100, 0]$. Los valores de función dada por $g(x) = \frac{-3}{x^2}$, son los negativos de los valores proporcionados por $f(x) = \frac{3}{x^2}$. De modo que para la función g, conforme x se aproxima a 0, por la derecha o por la izquierda, $g(x)$ *decrece sin límite*, lo que se escribe como

$$\lim_{x\to 0} \frac{-3}{x^2} = -\infty$$

1.7.2 Definición de valores de función que decrecen sin límite

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto I que contiene a a, excepto posiblemente en a mismo. **Conforme x se aproxima a a, $f(x)$ decrece sin límite,** lo cual se escribe como

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \qquad (2)$$

si para cualquier número $N < 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad f(x) < N$$

Nota: La ecuación (2) puede leerse como "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es infinito negativo (o menos infinito)". Observe, otra vez, que el límite no existe, y que el símbolo $-\infty$ sólo indica el comportamiento de los valores de función $f(x)$ conforme x se aproxima cada vez más a a.

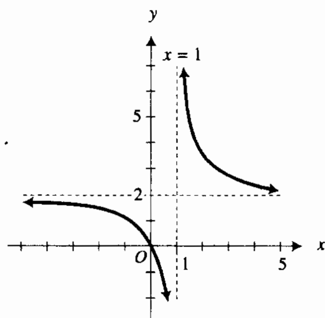
También se pueden considerar los límites "infinitos" laterales. Se establece que y $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ si f está definida en cada número de un intervalo abierto (a, c) y si para cualquier número $N > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < x - a < \delta, \quad \text{entonces} \quad f(x) > N$$

Definiciones semejantes pueden darse para $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$. Se le pedirá que escriba estas definiciones en el ejercicio 52.

Ahora suponga que h es la función definida por la ecuación

$$h(x) = \frac{2x}{x - 1} \qquad (3)$$



$h(x) = \frac{2x}{x - 1}$

FIGURA 4

La gráfica de h se presenta en la figura 4, en esta figura también se muestra la recta $x = 1$ como una recta punteada (una *asíntota vertical* de la gráfica). Consulte las figuras 1, 3 y 4, y observe la diferencia entre el comportamiento de la función de la figura 4 y las funciones de las otras dos figuras. Note que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x - 1} = -\infty \qquad (4)$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x - 1} = +\infty \qquad (5)$$

Esto es, para la función definida por (3), conforme x se aproxima a 1 a través de valores menores que 1, los valores de función decrecen sin límite, mientras que cuando x se aproxima a 1 mediante valores mayores que 1, los valores de función crecen sin límite.

Antes de presentar algunos ejemplos, se necesitan dos teoremas de límites que implican límites "infinitos".

1.7.3 Teorema 11 de límites

Si r es cualquier número entero positivo, entonces

(i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^r} = +\infty$;

(ii) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & \text{si } r \text{ es impar} \\ +\infty & \text{si } r \text{ es par} \end{cases}$

Demostración Se probará el inciso (i). La demostración del inciso (ii) es análoga y se deja como ejercicio. (Vea el ejercicio suplementario 3). Se debe probar que para cualquier $N > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$\text{si } 0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{x^r} > N$$

o, equivalentemente, como $x > 0$ y $N > 0$,

$$\text{si } 0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad x^r < \frac{1}{N}$$

o, de modo equivalente, como $r > 0$,

$$\text{si } 0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad x < \left(\frac{1}{N}\right)^{1/r}$$

El enunciado anterior se cumple si $\delta = \left(\frac{1}{N}\right)^{1/r}$. Por tanto, cuando $\delta = \left(\frac{1}{N}\right)^{1/r}$

$$\text{si } 0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{x^r} > N$$ ■



EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 A partir del teorema 11(i) de límites

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

Del teorema 11(ii) de límites

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$$ ◀

El teorema 12 de límites, que a continuación se presenta, implica el límite de una función racional para la cual el límite del denominador es cero y el límite del numerador es una constante diferente de cero. Esta situación se presenta en (4) y (5).

1.7.4 Teorema 12 de límites

Si a es cualquier número real y si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, donde c es una constante diferente de 0, entonces

(i) si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

(ii) si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iii) si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iv) si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

El teorema también es válido si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

La demostración del inciso (i) se presenta en el suplemento de esta sección. Las demostraciones de los otros incisos se dejan como ejercicios. Consulte los ejercicios suplementarios 4 a 6).

Cuando se aplica el teorema 12 de límites, con frecuencia se obtiene alguna indicación de si el resultado es $+\infty$ o $-\infty$, tomando *valores adecuados* de x próximos a a para determinar si el cociente es positivo o negativo, como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** En (4) se tiene

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x - 1}$$

Se puede aplicar el teorema 12 de límites ya que $\lim_{x \to 1^-} 2x = 2$ y $\lim_{x \to 1^-} (x - 1) = 0$. Se desea determinar si el resultado es $+\infty$ o $-\infty$. Puesto que $x \to 1^-$, se toma un valor cercano a 1 pero menor que 1; por ejemplo, tome $x = 0.9$ y al calcular el cociente se obtiene

$$\frac{2(0.9)}{0.9 - 1} = -18$$

El cociente negativo conduce a sospechar que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x - 1} = -\infty$$

Este resultado se obtiene a partir del inciso (ii) del teorema 12 de límites, puesto que cuando $x \to 1^-$, $x - 1$ se aproxima a 0 mediante valores negativos.

Para el límite de (5), como $x \to 1^+$, se toma $x = 1.1$ y se calcula

$$\frac{2(1.1)}{1.1 - 1} = 22$$

Debido a que el cociente es positivo se sospecha que

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{x - 1} = +\infty$$

Este resultado se obtiene a partir del inciso (i) del teorema 12 de límites, puesto que cuando $x \to 1^+$, $x - 1$ se aproxima a 0 por medio de valores positivos. ◀

Cuando utilice el procedimiento mostrado en el ejemplo ilustrativo 2, tenga cuidado al elegir el valor de x, asegúrese de que esté suficientemente cerca de a al determinar el comportamiento verdadero del cociente. Por ejemplo, cuando se calculó el $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x}{x-1}$, el valor elegido de x no debe ser sólo menor que 1, sino que también debe ser mayor que 0.

▶ **EJEMPLO 1** Sea

$$F(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$$

Determine: **(a)** $\lim\limits_{x\to 3^+} F(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x\to 3^-} F(x)$. **(c)** Apoye las respuestas de los incisos (a) y (b) trazando la gráfica de F.

Solución

(a) $$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{(x-3)(x+1)}$$

El límite del numerador es 14, lo cual puede verificarse fácilmente.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3^+} (x-3)(x+1) &= \lim_{x\to 3^+} (x-3) \cdot \lim_{x\to 3^+} (x+1) \\ &= 0 \cdot 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

El límite del denominador es 0, y el denominador se aproxima a 0 mediante valores positivos. Entonces, del teorema 12(i) de límites,

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = +\infty$$

(b) $$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{(x-3)(x+1)}$$

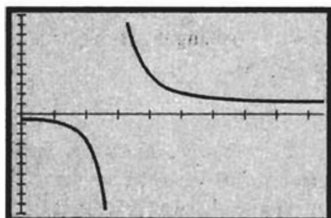
Como en el inciso (a), el límite del numerador es 14.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3^-} (x-3)(x+1) &= \lim_{x\to 3^-} (x-3) \cdot \lim_{x\to 3^-} (x+1) \\ &= 0 \cdot 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

En este caso, el límite del denominador es cero, pero el denominador se aproxima a cero por medio de valores negativos. Del teorema 12(ii) de límites,

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

(c) La figura 5 muestra la gráfica de F trazada en el rectángulo de inspección de [0, 9.4] por [−10, 10], la cual apoya las respuestas de los incisos (a) y (b). ◀



[0, 9.4] por [−10, 10]

$$g(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$$

FIGURA 5

EJEMPLO 2 Sean

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2}$$

Determine: **(a)** $\lim_{x \to 2^+} f(x)$; **(b)** $\lim_{x \to 2^-} g(x)$. Apoye cada respuesta trazando la gráfica de la función.

Solución

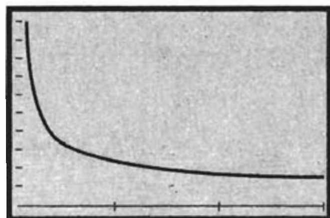
(a) Como $x \to 2^+, x - 2 > 0$; de modo que $x - 2 = \sqrt{(x - 2)^2}$. Así

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} &= \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{(x - 2)(x + 2)}}{\sqrt{(x - 2)^2}} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x - 2}\sqrt{x + 2}}{\sqrt{x - 2}\sqrt{x - 2}} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x + 2}}{\sqrt{x - 2}}\end{aligned}$$

El límite del numerador es 2. El límite del denominador es 0, y el denominador se aproxima a 0 mediante valores positivos. En consecuencia, por el teorema 12(i) de límites,

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} = +\infty$$

La gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [2, 5] por [0, 10], y mostrada en la figura 6, apoya la respuesta.



[2, 5] por [0, 10]

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$

FIGURA 6

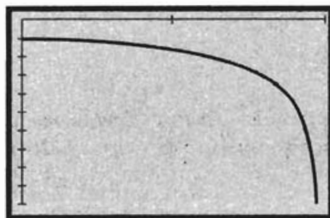
(b) Como $x \to 2^-, x - 2 < 0$; de modo que $x - 2 = -\sqrt{(2 - x)^2}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2} &= \lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{2 - x}\sqrt{2 + x}}{-\sqrt{2 - x}\sqrt{2 - x}} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{2 + x}}{-\sqrt{2 - x}}\end{aligned}$$

El límite del numerador es 2. El límite del denominador es 0, y el denominador se aproxima a 0 mediante valores negativos. En consecuencia, por el teorema 12(ii) de límites,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2} = -\infty$$

La figura 7 muestra la gráfica de g trazada en el rectángulo de inspección de [0, 2] por [−10, 0], la cual apoya la respuesta. ◀



[0, 2] por [−10, 0]

$g(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2}$

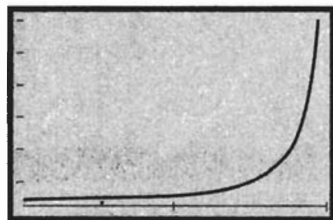
FIGURA 7

EJEMPLO 3 Dada

$$h(x) = \frac{[\![x]\!] - 4}{x - 4}$$

(a) Trace la gráfica de h, y a partir de la gráfica elabore un enunciado acerca del comportamiento aparente de $h(x)$ conforme x se aproxima a 4 por medio de valores menores que 4.

(b) Confirme el enunciado del inciso (a) analíticamente determinando el $\lim_{x \to 4^-} h(x)$.



[3, 4] por [0, 30]

$h(x) = \dfrac{[\![x]\!] - 4}{x - 4}$

FIGURA 8

Solución

(a) La figura 8 muestra la gráfica de h trazada en el rectángulo de inspección de [3, 4] por [0, 30]. En la figura, parece que $h(x)$ crece sin límite conforme x se aproxima a 4 mediante valores menores que 4.

(b) Como $\lim\limits_{x\to 4^-} [\![x]\!] = 3$, se tiene que $\lim\limits_{x\to 4^-} ([\![x]\!] - 4) = -1$. Además, $\lim\limits_{x\to 4^-} (x - 4) = 0$, y $x - 4$ se aproxima a 0 por medio de valores negativos. En consecuencia, del teorema 12(iv) de límites,

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{[\![x]\!] - 4}{x - 4} = +\infty$$

Este resultado confirma el enunciado del inciso (a). ◀

Recuerde que como $+\infty$ y $-\infty$ no son símbolos para representar números reales, los teoremas 1 a 10 de límites de la sección 1.5 no se cumplen para límites "infinitos". Sin embargo, las propiedades concernientes a dichos límites se presentan en los teoremas siguientes, cuyas demostraciones se dejan como ejercicios (consulte los ejercicios suplementarios 7 a 9).

1.7.5 Teorema

(i) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante, entonces $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = +\infty$

(ii) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante, entonces

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = -\infty$$

Estos teoremas también se cumplen si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".



EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Como

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x - 2} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{4}$$

se deduce del teorema 1.7.5(i) que $\lim\limits_{x\to 2^+} = \left[\dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{1}{x + 2}\right] = +\infty$ ◀

1.7.6 Teorema

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante distinta de 0, entonces

(i) si $c > 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$;

(ii) si $c < 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$.

Estos teoremas también se cumplen si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".



EJEMPLO ILUSTRADO 4

$$\lim_{x\to 3} \frac{5}{(x - 3)^2} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 3} \frac{x + 4}{x - 4} = -7$$

Por tanto, del teorema 1.7.6 (ii),

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{5}{(x-3)^2}\cdot\frac{x+4}{x-4}\right] = -\infty$$ ◀

1.7.7 Teorema

Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante distinta de 0, entonces

(i) si $c > 0$, $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = -\infty$;
(ii) si $c < 0$, $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = +\infty$.

Estos teoremas también se cumplen si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** En el ejemplo 2(b) se mostró que

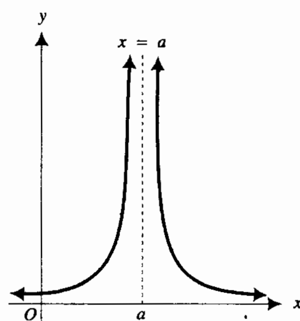
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = -\infty$$

Además,

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x+2} = -\frac{1}{4}$$

Por tanto, del teorema 1.7.7(ii)

$$\lim_{x\to 2^-}\left[\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}\cdot\frac{x-3}{x+2}\right] = +\infty$$ ◀



$f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^2}$

FIGURA 9

Se pueden aplicar límites infinitos para determinar las *asíntotas verticales* de una gráfica, si es que posee alguna. Consulte la figura 9 que muestra la gráfica de la función definida por

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2} \qquad \textbf{(6)}$$

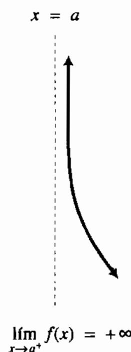
Cualquier recta paralela al eje x y por encima de éste intersectará esta gráfica en dos puntos, un punto a la izquierda del la recta $x = a$ y el otro en el lado derecho de dicha recta. Así, para cualquier $k > 0$, no importa qué tan grande sea, la recta $y = k$ intersectará a la gráfica de f en dos puntos; la distancia de estos dos puntos a la recta $x = a$ es cada vez más pequeña conforme k crece. Por esto, se dice que la recta $x = a$ es una *asíntota vertical* de la gráfica de f.

1.7.8 Definición de asíntota vertical

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de la función f si al menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:

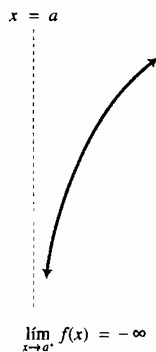
(i) $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$
(ii) $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$
(iii) $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$
(iv) $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 Cada una de las figuras 10 a 13 muestra una porción de la gráfica de una función para la cual la recta $x = a$ es una asíntota vertical. En la figura 10 se aplica el inciso (i) de la definición 1.7.8; en la figura 11, se aplica el inciso (ii); y en las figuras 12 y 13 se aplican los incisos (iii) y (iv), respectivamente.



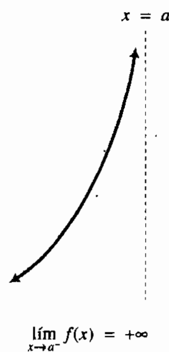
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

FIGURA 10



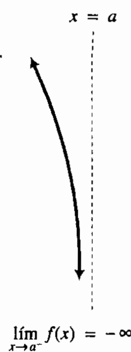
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

FIGURA 11



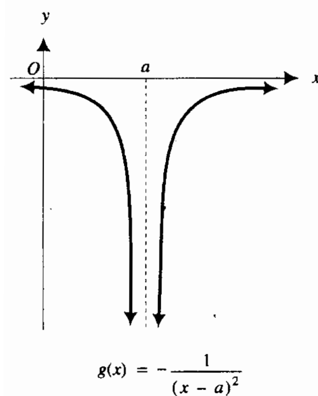
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

FIGURA 12



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

FIGURA 13



$g(x) = -\dfrac{1}{(x-a)^2}$

FIGURA 14

Para la función definida por (6), los incisos (i) y (iii) de la definición anterior son verdaderos. *Véase* la figura 9. Si g es la función definida por

$$g(x) = -\frac{1}{(x-a)^2}$$

entonces los incisos (ii) y (iv) son verdaderos, por lo que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de g. La figura 14 muestra esta situación.

EJEMPLO 4 Determine la asíntota vertical de la gráfica de la función f definida por

$$f(x) = \frac{3}{x-3}$$

Apoye la respuesta trazando la gráfica de f y la asíntota en el mismo rectángulo de inspección.

Solución Se estudiarán los límites

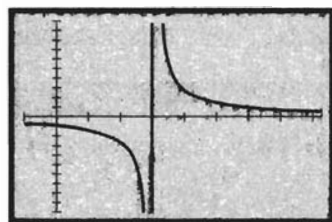
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 3^-} f(x)$$

porque en los dos casos, el límite del denominador es cero.

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{3}{x-3} = +\infty \qquad \lim_{x \to 3^-} \frac{3}{x-3} = -\infty$$

De la definición 1.7.8 se concluye que la recta $x = 3$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

La gráfica de f y de la recta $x = 3$ trazadas en el rectángulo de inspección de $[-1, 8.4]$ por $[-10, 10]$, mostradas en la figura 15, apoyan la respuesta.



$[-1, 8.4]$ por $[-10, 10]$

$f(x) = \dfrac{3}{x-3}$

FIGURA 15

EJERCICIOS 1.7

En los ejercicios 1 a 12, haga lo siguiente: (a) utilice una calculadora para determinar y tabular los valores de f(x) para los valores de x indicados, y a partir de estos valores elabore un enunciado concerniente al comportamiento aparente de f(x). (b) Apoye la respuesta del inciso (a) trazando la gráfica de f. (c) Confirme la respuesta del inciso (a) analíticamente calculando el límite indicado.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$; x es 6, 5.5, 5.1, 5.01, 5.001, 5.0001; $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{1}{x-5}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$; x es 4, 4.5, 4.9, 4.99, 4.999, 4.9999; $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{1}{x-5}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{(x-5)^2}$; x es 6, 5.5, 5.1, 5.01, 5.001, 5.0001 y x es 4, 4.5, 4.9, 4.99, 4.999, 4.9999; $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{(x-5)^2}$

4. $f(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$; x es 0, 0.5, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999; $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+2}{1-x}$

5. $f(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$; x es 2, 1.5, 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001; $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+2}{1-x}$

6. $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)^2}$; x es 0, 0.5, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999 y x es 2, 1.5, 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{(x-1)^2}$

7. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$; x es 0, −0.5, −0.9, −0.99, −0.999, −0.9999; $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x-2}{x+1}$

8. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$; x es −2, −1.5, −1.1, −1.01, −1.001, −1.0001; $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x-2}{x+1}$

9. $f(x) = \dfrac{x}{x+4}$; x es −5, −4.5, −4.1, −4.01, −4.001, −4.0001; $\lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{x}{x+4}$

10. $f(x) = \dfrac{x}{x-4}$; x es 5, 4.5, 4.01, 4.001, 4.0001; $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x}{x-4}$

11. $f(x) = \dfrac{4x}{9-x^2}$; x es −4, −3.5, −3.1, −3.01, −3.001, −3.0001; $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{4x}{9-x^2}$

12. $f(x) = \dfrac{4x^2}{9-x^2}$; x es 4, 3.5, 3.1, 3.01, 3.001, 3.0001; $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{4x^2}{9-x^2}$

En los ejercicios 13 a 32, determine el límite analíticamente y apoye la respuesta trazando la gráfica de la función en la graficadora.

13. $\lim\limits_{t\to 2^+} \dfrac{t+2}{t^2-4}$

14. $\lim\limits_{t\to 2^-} \dfrac{-t+2}{(t-2)^2}$

15. $\lim\limits_{t\to 2^-} \dfrac{t+2}{t^2-4}$

16. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{3+x^2}}{x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{3+x^2}}{x}$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3+x^2}}{x^2}$

19. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$

20. $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x-4}$

21. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

22. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2-3}{x^3+x^2}$

23. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2-4x^3}{5x^2+3x^3}$

24. $\lim\limits_{s\to 2^-} \left(\dfrac{1}{s-2} - \dfrac{3}{s^2-4}\right)$

25. $\lim\limits_{t\to -4^-} \left(\dfrac{2}{t^2+3t-4} - \dfrac{3}{t+4}\right)$

26. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x^3-5x^2}{x^2-1}$

27. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{[\![x]\!]-x}{3-x}$

28. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{[\![x^2]\!]-1}{x^2-1}$

29. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^3+9x^2+20x}{x^2+x-12}$

30. $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{6x^2+x-2}{2x^2+3x-2}$

31. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1}$

32. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-2}{2-\sqrt{4x-x^2}}$

33. Sea

$$f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}$$

(a) Trace la gráfica de f en el rectángulo de inspección de [−1, 8.4] por [−5, 5]. A partir de la gráfica elabore una conjetura acerca de los límites siguientes y, después, confirme analíticamente la conjetura: **(b)** $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$; **(e)** $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$.

34. Sea

$$f(x) = \frac{x^2+x^2-3}{x^2+x-6}$$

(a) Trace la gráfica de f en el rectángulo de inspección de [−4.7, 4.7] por [−5, 5]. A partir de la gráfica elabore una conjetura acerca de los límites siguientes y, después, confirme analíticamente la conjetura: **(b)** $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$; **(e)** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

En los ejercicios 35 y 36, determine la asíntota vertical de la gráfica de la función y dibújela.

35. (**a**) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (**b**) $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

(**c**) $F(x) = \dfrac{1}{x^3}$ (**d**) $G(x) = \dfrac{1}{x^4}$

36. (**a**) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ (**b**) $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

(**c**) $F(x) = -\dfrac{1}{x^3}$ (**d**) $G(x) = -\dfrac{1}{x^4}$

En los ejercicios 37 a 44, (a) determine la(s) asíntota(s) vertical(es) de la gráfica de la función, y (b) aplique la respuesta del inciso (a) para dibujar la gráfica.

37. $f(x) = \dfrac{2}{x-4}$ **38.** $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$

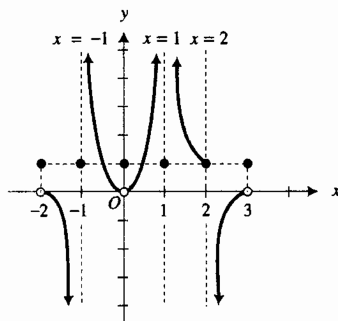
39. $f(x) = \dfrac{-2}{x+3}$ **40.** $f(x) = \dfrac{-4}{x-5}$

41. $f(x) = \dfrac{-2}{(x+3)^2}$ **42.** $f(x) = \dfrac{4}{(x-5)^2}$

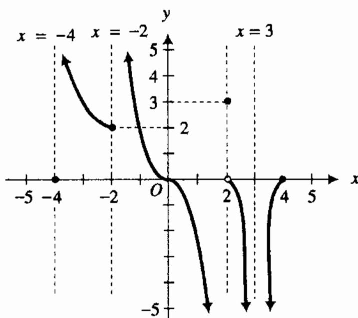
43. $f(x) = \dfrac{5}{x^2+8x+15}$ **44.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+5x-6}$

En los ejercicios 45 y 46, evalúe los límites de los incisos (a) a (j) a partir de la gráfica de la función f dibujada en la figura adjunta.

45. El dominio de f es $[-2, 3]$. (**a**) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$; (**b**) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$; (**c**) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$; (**d**) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; (**e**) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; (**f**) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$; (**g**) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; (**h**) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$; (**i**) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; (**j**) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$.



46. El dominio de f es $[-4, 4]$. (**a**) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$; (**b**) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$; (**c**) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$; (**d**) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; (**e**) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$; (**f**) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; (**g**) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$; (**h**) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$; (**i**) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$; (**j**) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$.



En los ejercicios 47 y 48, dibuje la gráfica de alguna función f que satisfaga las condiciones dadas.

47. El dominio de f es $[-5, 5]$. $f(-5) = 0$; $f(-3) = 2$; $f(-1) = 0$; $f(0) = 0$; $f(1) = 0$; $f(3) = -2$; $f(5) = -4$; $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = -\infty$.

48. El dominio de f es $[-2, 2]$. $f(-2) = 0$; $f(-1) = 0$; $f(0) = 5$; $f(1) = -5$; $f(2) = 3$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$.

49. Si $C(t)$ dólares es el costo total por hora de luz en una fábrica con n lámparas fluorescentes, cada una con un promedio de vida de t horas, entonces

$$C(t) = n\left(\frac{r}{t} + \frac{epk}{1\,000}\right)$$

donde r dólares es el costo de renovación, e es la constante de eficiencia comercial, p watts es la potencia de cada lámpara, y k dólares es el costo de la energía por cada 1 000 watts. Determine $\lim\limits_{t\to 0^+} C(t)$.

50. Dadas

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{2-x}$$

(**a**) Demuestre que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ no existen. (**b**) Defina la función $f + g$. (**c**) Demuestre que $\lim\limits_{x\to 2} [f(x) + g(x)]$ existe. (**d**) De los resultados de los incisos (a) y (c),

$$\lim_{x\to 2} [f(x) + g(x)] \neq \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x)$$

¿Contradice este hecho al teorema 4 de límites (1.5.5)?

51. De acuerdo con la teoría especial de la relatividad de Einstein, ninguna partícula con masa positiva puede viajar más rápido que la velocidad de la luz. La teoría especifica que si $m(v)$ es la medida de la masa de una partícula que se mueve con una velocidad de medida v, entonces

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$$

donde m_0 es la medida constante de la masa de la partícula en reposo relativa a algún sistema de referencia, y c es la medida constante de la velocidad de la luz. Explique porque ninguno de los siguientes límites existen: $\lim\limits_{v\to c^-} m(v)$; $\lim\limits_{v\to c^+} m(v)$; $\lim\limits_{v\to c} m(v)$. En su explicación indique el comportamiento de $m(v)$ conforme v tiende a c mediante valores menores que c.

52. Escriba una definición formal de cada uno de los siguientes límites laterales: (**a**) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$; (**b**) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$; (**c**) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$.

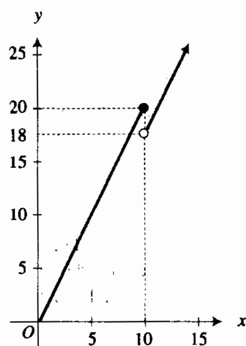
En los ejercicios 53 y 54, establezca con palabras lo que significa el simbolismo indicado sin utilizar las palabras límite, se

aproxima, infinito, crece sin límite o decrece sin límite, y sin emplear símbolos como N y δ.

53. $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ **54.** $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

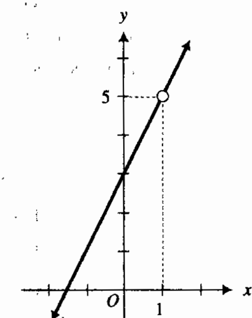
55. Si $P(x)$ es un polinomio y $Q(x) = x - a$, entonces la gráfica de la función f definida por $f(x) = P(x)/Q(x)$ puede tener a la recta $x = a$ como asíntota o un agujero en el punto donde $x = a$. ¿Cuál es la relación entre estos dos conceptos geométricos y $\lim_{x\to a} f(x)$?

1.8 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN NÚMERO



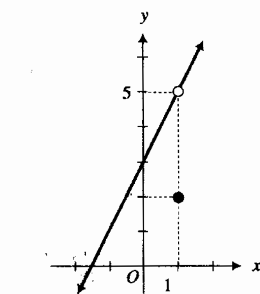
$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 10 \\ 1.8x & \text{si } 10 < x \end{cases}$

FIGURA 1



$f(x) = \dfrac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$

FIGURA 2



$F(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \ne 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

FIGURA 3

En el ejemplo 2 de la sección 1.3 y en el ejemplo ilustrativo 2 de la sección 1.6 se trató la función definida por

$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 10 \\ 1.8x & \text{si } 10 < x \end{cases} \tag{1}$$

donde $C(x)$ dólares es el costo total de x libras de un producto. Se mostró que $\lim_{x\to 10} C(x)$ no existe debido a que $\lim_{x\to 10^+} C(x) \ne \lim_{x\to 10^-} C(x)$. La gráfica de C, dibujada en la figura 1, se rompe en el punto donde $x = 10$ porque C es la *discontinua* en el número 10. Esta *discontinuidad* es causada por el hecho de que $\lim_{x\to 10} C(x)$ no existe. Se hará referencia a esta función otra vez en el ejemplo ilustrativo 1.

En la sección 1.4, se consideró la función f definida por

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1} \tag{2}$$

La gráfica de f consiste de todos los puntos de la recta $y = 2x + 3$ excepto $(1, 5)$, y se muestra en la figura 2. La gráfica se rompe en el punto $(1, 5)$ debido a que la función es *discontinua* en el número 1. Esta *discontinuidad* ocurre porque $f(1)$ no existe.

Suponga que la función F tiene los mismos valores que la función f definida por (2) donde $x \ne 1$, y suponga que, por ejemplo, $F(1) = 2$. Entonces F está definida para todos los valores de x, pero existe una rotura en la gráfica (consulte la figura 3), y la función es *discontinua* en 1. Sin embargo, si se define $F(1) = 5$, la gráfica no se rompe, y se dice que la función F es *continua* en todos los valores de x.

1.8.1 Definición de función continua en un número

Se dice que la función f es **continua** en el número a si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

(i) $f(a)$ existe;
(ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe;
(iii) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si una o más de estas tres condiciones no se cumplen en a, entonces se dice que la función f es **discontinua** en a.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** La gráfica de la función C definida por (1) se muestra en la figura 1. Como la gráfica se rompe en el punto donde $x = 10$, se investigarán las condiciones de la definición anterior en ese número.

(i) $C(10) = 10$
(ii) $\lim_{x \to 10} C(x)$ no existe.

Así, la condición (i) se satisface, pero la condición (ii) no se cumple en 10. Por tanto, se concluye que C es discontinua en 10. ◀

El siguiente ejemplo ilustrativo presenta otra situación, en la cual la fórmula para calcular el costo de más de 10 lb de un producto es diferente de la fórmula para el cálculo del costo de 10 lb o menos. Sin embargo, para esta situación la función costo es continua en 10.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Un mayorista distribuye un producto que se vende por libra (o fracción de libra) cobra \$2 por libra si se ordenan 10 o menos libras. Si se ordenan más de 10 libras, el mayorista cobra \$20 más \$1.40 por cada libra que exceda de las 10. Por tanto, si se compran x libras por un costo total de $C(x)$ dólares, entonces $C(x) = 2x$ si $0 \leq x \leq 10$ y $C(x) = 20 + 1.4(x - 10)$ si $10 < x$; esto es,

$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 1.4x + 6 & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

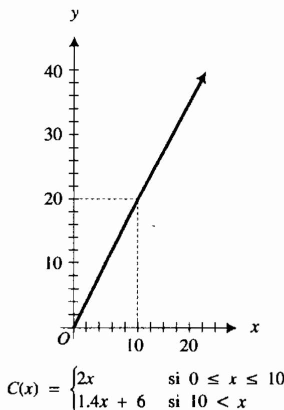


FIGURA 4

La gráfica de C se muestra en la figura 4. Para esta función, $C(10) = 20$ y

$$\lim_{x \to 10^-} C(x) = \lim_{x \to 10^-} 2x = 20 \qquad \lim_{x \to 10^+} C(x) = \lim_{x \to 10^+} (1.4x + 6) = 20$$

Por tanto, $\lim_{x \to 10} C(x)$ existe y es igual a $C(10)$. En consecuencia, C es continua en 10. ◀

Ahora se presentarán algunos ejemplos de funciones discontinuas. En cada ejemplo se dibuja la gráfica de la función dada, se determinan los puntos donde la gráfica se rompe y se muestran cuáles de las tres condiciones de la definición 1.8.1 no se cumplen en cada discontinuidad.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

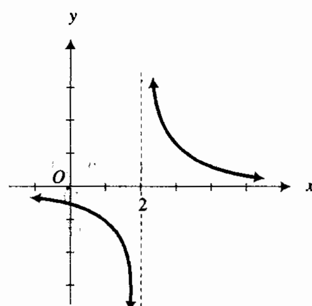
La gráfica de esta función, la cual se muestra en la figura 3, se rompe en el punto donde $x = 1$, por lo que se investigarán en ese punto las condiciones de la definición 1.8.1.

(i) $f(1) = 2$
(ii) $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$
(iii) $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

Las condiciones (i) y (ii) se satisfacen pero la condición (iii) no se cumple. Por tanto, la función f es discontinua en 1. ◀

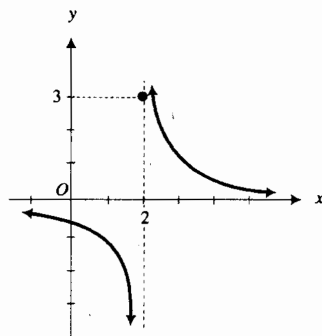
Observe que si en el ejemplo ilustrativo 3, se definirá $f(1)$ como 5, entonces $\lim_{x \to 1} f(x)$ y $f(1)$ serían iguales y f sería continua en 1. Por esta razón, la discontinuidad del ejemplo ilustrativo 3 se denomina *discontinuidad removible.*

En general, suponga que f es una función discontinua en el número a para la cual $\lim_{x \to a} f(x)$ existe. Entonces $f(a)$ no existe, o bien, $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$.



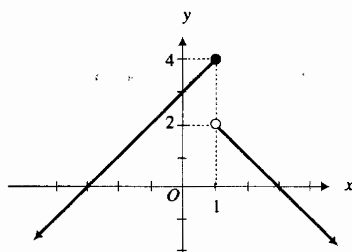
$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

FIGURA 5



$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

FIGURA 6



$h(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si } 1 < x \end{cases}$

FIGURA 7

Dicha discontinuidad es una **discontinuidad removible** (o **eliminable**) porque si f se redefine en a de modo que $f(a)$ es igual a $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, la nueva función es continua en a. Si la discontinuidad no es removible, entonces se le llama **discontinuidad esencial.**

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

La gráfica de f, mostrada en la figura 5, se rompe en el punto donde $x = 2$; por lo que se investigarán las condiciones de la definición 1.8.1.

(i) $f(2)$ no está definida.

Como no se satisface la condición (i), f es discontinua en 2.

La discontinuidad es esencial porque $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe. ◀

La discontinuidad del ejemplo ilustrativo 4 recibe el nombre de **discontinuidad infinita.**

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Sea g la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

La gráfica de g se muestra en la figura 6. Se investigarán las tres condiciones de la definición 1.8.1 en 2.

(i) $g(2) = 3$

(ii) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ no existe.

Como no se cumple la condición (ii), g es discontinua en 2.

La discontinuidad es infinita, y por supuesto, esencial. ◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Sea h la función definida por

$$h(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

La figura 7 muestra la gráfica de h. Como la gráfica de h se rompe en el punto donde $x = 1$, se investigarán las condiciones de la definición 1.8.1 en 1.

(i) $h(1) = 4$

(ii) $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (3 + x) = 4$ $\qquad \lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (3 - x) = 2$

Debido a que $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} h(x)$, entonces $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$ no existe.

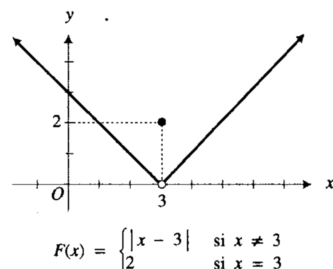
La condición (ii) no se cumple en 1; de modo que h es discontinua en 1.

Puesto que $\lim_{x \to 1} h(x)$ no existe, la discontinuidad es esencial. ◀

La discontinuidad del ejemplo ilustrativo 6 se denomina **discontinuidad de salto.**

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 7** Sea F la función definida por

$$F(x) = \begin{cases} |x - 3| & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$



$F(x) = \begin{cases} |x - 3| & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

FIGURA 8

La figura 8 muestra la gráfica de F. Se investigarán las tres condiciones de la definición 1.8.1 en 3.

(i) $F(3) = 2$

(ii) $\lim_{x \to 3^-} F(x) = \lim_{x \to 3^-} (3 - x) = 0$ $\qquad$ $\lim_{x \to 3^+} F(x) = \lim_{x \to 3^+} (x - 3) = 0$

Por tanto, $\lim_{x \to 3} F(x) = 0$

(iii) $\lim_{x \to 3} F(x) \neq F(3)$

Debido a que la condición (iii) no se satisface, F es discontinua en 3.

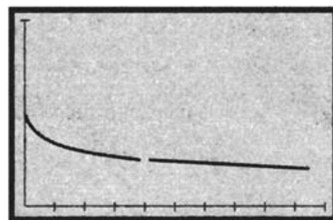
Esta discontinuidad es removible porque si se redefine $F(3)$ como 0, entonces la nueva función será continua en 3. ◀

▶ ***EJEMPLO 1*** La función definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

es discontinua en 4. **(a)** Trace la gráfica de f en el rectángulo de inspección de [0, 9.4] por [0, 1]. La gráfica se rompe en el punto donde $x = 4$. ¿La discontinuidad mostrada es removible o esencial? Si la discontinuidad parece removible, especule sobre cuál sería el valor de $f(4)$ de modo que la discontinuidad sea eliminada. **(b)** Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a).

Solución



[0, 9.4] por [0, 1]

$F(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

FIGURA 9

(a) La figura 9 muestra la gráfica de f con un agujero en el punto donde $x = 4$. Al emplear el rastreo (*Trace*) de la graficadora, se sospecha que $\lim_{x \to 4} f(x)$ existe y es 0.25. Así, la discontinuidad parece removible y puede eliminarse si se redefine $f(4)$ como 0.25.

(b) Al calcular $\lim_{x \to 4} f(x)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 4} f(x) &= \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \\ &= \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Así, se ha confirmado la respuesta del inciso (a). Por tanto, se redefine la función f en 4 y se obtiene la nueva función definida por

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} & \text{si } x \neq 4 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

Esta función es continua en 4. ◀

Los teoremas acerca de funciones continuas en un número son de gran ayuda al calcular límites, así como para demostrar otros teoremas. El primero de estos teoremas se obtiene al aplicar la definición 1.8.1 y algunos teoremas de límites.

1.8.2 Teorema

Si f y g son dos funciones continuas en el número a, entonces

(i) $f + g$ es continua en a;
(ii) $f - g$ es continua en a;
(iii) $f \cdot g$ es continua en a;
(iv) f/g es continua en a, considerando que $g(a) \neq 0$.

A fin de ilustrar el tipo de demostración requerida para cada inciso de este teorema, se probará el inciso (i).

Demostración de (i) Como f y g son continuas en a, de la definición 1.8.1

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

De estos dos límites y del teorema 4 de límites,

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = f(a) + g(a)$$

la cual es la condición para que $f + g$ sea continua en a. ■

Las demostraciones para los incisos (ii), (iii) y (iv) son semejantes. Considere la función polinomial f definida por

$$f(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n \qquad b_0 \neq 0$$

donde n es un número entero no negativo y $b_0, b_1, \ldots, b_n$ son números reales. Mediante aplicaciones sucesivas de los teoremas de límites, se puede demostrar que si a es cualquier número, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= b_0a^n + b_1a^{n-1} + b_2a^{n-2} + \ldots + b_{n-1}a + b_n \\ &= f(a) \end{aligned}$$

de modo que se establece el siguiente teorema.

1.8.3 Teorema

Una función polinomial es continua en todo número.



EJEMPLO ILUSTRATIVO 8 Si $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$, entonces f es una función polinomial y por tanto, por el teorema 1.8.3,

f es continua en todo número. En particular, como f es continua en 3, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$. Así,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3} (x^3 - 2x^2 + 5x + 1) &= 3^3 - 2(3)^2 + 5(3) + 1 \\ &= 27 - 18 + 15 + 1 \\ &= 25 \end{aligned}$$

◀

1.8.4 Teorema

Una función racional es continua en todo número de su dominio.

Demostración Si f es una función racional entonces se puede expresar como el cociente de dos funciones polinomiales. De modo que f se puede definir por

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

donde g y h son dos funciones polinomiales, y el dominio de f consta de todos los números reales excepto aquellos para los que $h(x) = 0$.

Si a es cualquier número del dominio de f, entonces $h(a) \neq 0$; de modo que por el teorema 9 de límites

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} g(x)}{\lim\limits_{x \to a} h(x)} \tag{3}$$

Como g y h son funciones polinomiales, por el teorema 1.8.3 son continuas en a; por lo que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$ y $\lim\limits_{x \to a} h(x) = h(a)$. En consecuencia,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{g(a)}{h(a)}$$

Por tanto, f es continua en cada número de su dominio. ■

 **EJEMPLO 2** Determine los números en los que la función siguiente es continua:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 9}$$

Solución El dominio de f es el conjunto R de números reales excepto aquellos para los que $x^2 - 9 = 0$. Como $x^2 - 9 = 0$ cuando $x = \pm 3$, el dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto 3 y -3.

Debido a que f es una función racional, por el teorema 1.8.4, f es continua en todos los números diferentes de 3 y -3. ◀

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 9** Sea f la función del ejemplo 2. Puesto que 2 está en el dominio de f, entonces por el teorema 1.8.4

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} f(x) &= f(2) \\ &= \frac{2^3 + 1}{2^2 - 9} \\ &= -\frac{9}{5} \end{aligned}$$

◀

 ***EJEMPLO 3*** Determine los números en los que la función siguiente es continua:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Solución Las funciones cuyos valores son $2x - 3$ y x^2 son funciones polinomiales y, por tanto, son continuas en todo número real. De esta manera, 1 es el único número en el que la continuidad es cuestionable. Por esto, se investigarán las tres condiciones de continuidad en 1.

(i) $f(1) = -1$. Por lo que se cumple la condición (i).

(ii) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x - 3) = -1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, el límite bilateral $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existe. Por esto, f tiene una discontinuidad de salto en 1. Por tanto, f es continua en cada número real excepto 1. ◀

1.8.5 Teorema

Si n es un número entero positivo y

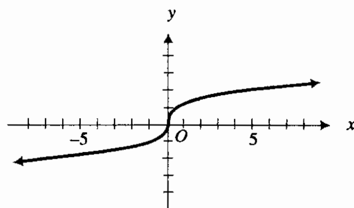
$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

entonces

(i) si n es impar, entonces f es continua en todo número,
(ii) si n es par, entonces f es continua en todo número positivo.

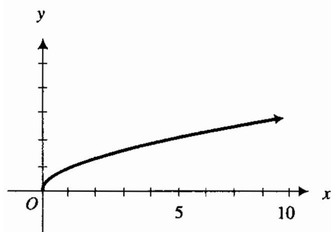
La demostración de este teorema es una consecuencia inmediata del teorema 1.5.13, el cual establece que si $a > 0$ y n es un número entero positivo, o si $a \leq 0$ y n es un número entero positivo impar, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$

FIGURA 10



$f(x) = \sqrt{x}$

FIGURA 11

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 10**

(a) Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$, entonces, por el teorema 1.8.5(i), f es continua en cada número real. La figura 10 muestra la gráfica de f.
(b) Si $g(x) = \sqrt{x}$, entonces, por el teorema 1.8.5(ii), g es continua en cada número real positivo. La gráfica de g se muestra en la figura 11. ◀

En ocasiones se necesita emplear una definición de continuidad en la que se utiliza la notación ϵ-δ. A fin de obtener esta definición alternativa, se comienza con la definición 1.8.1, la cual establece que la función f es continua en el número a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{4}$$

Al aplicar la definición de límite de una función (1.5.1), donde L es igual a $f(a)$, (4) se cumple si para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon \tag{5}$$

Si f es continua en a, debe existir $f(a)$; por tanto, la condición de que $|x - a| > 0$ no es necesaria en la proposición (5), debido a que cuando $x = a$, $|f(x) - f(a)|$ será 0 y así, menor que ϵ. Se tiene, entonces, el teorema siguiente, el cual servirá como la definición alternativa deseada de continuidad.

1.8.6 Teorema

La función f es continua en el número a si f está definida en algún intervalo abierto que contenga a a y si para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

EJERCICIOS 1.8

En los ejercicios 1 a 14, dibuje la gráfica de la función. Observe donde la gráfica se rompe, determine el número en el que la función es discontinua, y muestre por qué la definición 1.8.1 no se satisface en este número.

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

2. $F(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}$

3. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3} & \text{si } x \neq -3 \\ 1 & \text{si } x = -3 \end{cases}$

4. $G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} & \text{si } x \neq 4 \\ 2 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

5. $h(x) = \dfrac{5}{x - 4}$

6. $H(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x - 4} & \text{si } x \neq 4 \\ 2 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

8. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ 0 & \text{si } x = -2 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 < x \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 1 - x & \text{si } 1 < x \end{cases}$

11. $g(t) = \begin{cases} t^2 - 4 & \text{si } t < 2 \\ 4 & \text{si } t = 2 \\ 4 - t^2 & \text{si } 2 < t \end{cases}$

12. $H(x) = \begin{cases} 6 + x & \text{si } x \leq -2 \\ 2 - x & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ 2x - 1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

13. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

14. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

En los ejercicios 15 a 28, la función es discontinua en el número a. (a) Trace la gráfica de f en un rectángulo de inspección conveniente y determine que la gráfica se rompe en el punto donde x = a. ¿Parece ser removible o esencial esta discontinuidad? Si parece ser removible, especule sobre cómo debe redefinirse f(a) de modo que la discontinuidad sea eliminada. (b) Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a).

15. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}; a = 2$

16. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x + 3}; a = -3$

17. $f(x) = \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}; a = 9$

18. $f(x) = \dfrac{x - 5}{\sqrt{x - 1} - 2}; a = 5$

19. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 4} - 3}{x - 5}; a = 5$

20. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 5} - \sqrt{5}}{x}; a = 0$

21. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{x + 2}}{x}; a = 0$

22. $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x + 1}}{x - 3}; a = 3$

23. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}; a = 8$

24. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x + 1} - 1}{x}; a = 0$

25. $f(x) = \dfrac{x + 3}{3 - |x|}; a = -3$

26. $f(x) = \dfrac{x + 5}{|x + 1| - 4}; a = -5$

27. $f(x) = \dfrac{x + 3}{3 - |x|}; a = 3$

28. $f(x) = \dfrac{x + 5}{|x + 1| - 4}; a = 3$

En los ejercicios 29 a 40, determine los números en los que la función es continua e indique la razón.

29. $f(x) = x^2(x + 3)^2$

30. $f(x) = (x - 5)^3 (x^2 + 4)^5$

31. $g(x) = \dfrac{x}{x - 3}$ **32.** $h(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 5}$

33. $F(x) = \dfrac{x^3 + 7}{x^2 - 4}$ **34.** $G(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 + 2x - 8}$

35. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 4 - x^2 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} (x + 2)^2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + 2 & \text{si } 0 < x \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 1} & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{1}{3 - x} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{2}{9 - x} & \text{si } 3 \le x \end{cases}$

39. $h(x) = \begin{cases} x + \sqrt[3]{x} & \text{si } x < 0 \\ x - \sqrt{x} & \text{si } 0 \le x \end{cases}$

40. $g(x) = \begin{cases} 2x - \sqrt[3]{x} & \text{si } x \le 1 \\ x\sqrt{x} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

En los ejercicios 41 a 44, realice lo siguiente: (a) determine los valores de las constantes c y k que hagan a la función continua en todo número. (b) Dibuje la gráfica de la función resultante.

41. $f(x) = \begin{cases} 3x + 7 & \text{si } x \le 4 \\ kx - 1 & \text{si } 4 < x \end{cases}$

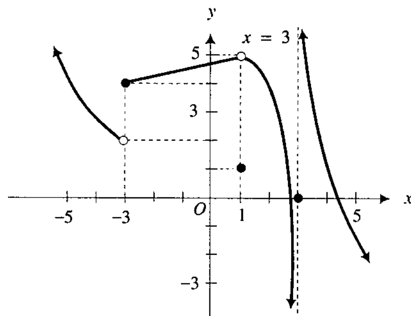
42. $f(x) = \begin{cases} kx - 1 & \text{si } x \le 2 \\ kx^2 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 1 \\ cx + k & \text{si } 1 < x < 4 \\ -2x & \text{si } 4 \le x \end{cases}$

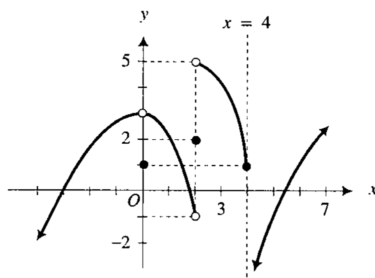
44. $f(x) = \begin{cases} x + 2c & \text{si } x < -2 \\ 3cx + k & \text{si } -2 \le x \le 1 \\ 3x - 2k & \text{si } 1 < x \end{cases}$

Los ejercicios 45 y 46 tratan acerca de la función dibujada en la figura adjunta. En los incisos (a)-(c) confirme analíticamente por qué f es discontinua en el número indicado, señalando por qué no se cumple la definición 1.8.1.

45. **(a)** En $x = -3$; **(b)** en $x = 1$; **(c)** en $x = 3$. **(d)** ¿Cuáles de las discontinuidades de los incisos (a)-(c) son esenciales? ¿Por qué? **(e)** ¿Cuáles de las discontinuidades de los incisos (a)-(c) son removibles? ¿Qué haría para eliminar la discontinuidad?



46. **(a)** En $x = 0$; **(b)** en $x = 2$; **(c)** en $x = 4$. **(d)** ¿Cuáles de las discontinuidades de los incisos (a)-(c) son esenciales? ¿Por qué? **(e)** ¿Cuáles de las discontinuidades de los incisos (a)-(c) son removibles? ¿Qué haría para eliminar la discontinuidad?



En los ejercicios 47 y 48, dibuje la gráfica de alguna función f que satisfaga las condiciones dadas.

47. El dominio de f es $(-4, 4)$. La función f es continua en cada número de los intervalos $(-4, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, 4)$ y f es discontinua en -2 y 2; $f(-2) = 0$ y $f(2) = 0$; $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$.

48. La función f es continua en cada número de los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$ y f es discontinua en -1 y 1; $f(-1) = 0$ y $f(1) = 0$; $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ existen pero son diferentes de 0; $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ no existen.

En los ejercicios 49 a 52, determine los números en los que la función indicada es discontinua, y muestre por qué no se cumple la definición 1.8.1 en cada discontinuidad.

49. La función del ejercicio 5 de la sección 1.3 y del ejercicio 39 de la sección 1.6, la cual es un modelo matemático que expresa el costo total de un embarque como una función de su peso.

50. La función del ejercicio 6 de la sección 1.3 y del ejercicio 40 de la sección 1.6, la cual es un modelo matemático que expresa el porte de correo de primera clase para una carta que no pese más de 11 oz como una función de su peso.

51. La función del ejercicio 7 de la sección 1.3 y del ejercicio 41 de la sección 1.6, la cual es un modelo matemático que expresa el costo de una llamada telefónica, que no dura más de 5 min, de Mendocino a San Francisco como una función de la duración de la llamada.

52. La función del ejercicio 8 de la sección 1.3 y del ejercicio 42 de la sección 1.6, la cual es un modelo matemático que expresa el precio de admisión al Coast Cinema como una función de la edad de la persona.

53. Suponga que a los t minutos, $r(t)$ metros es el radio del flujo circular de petróleo que se derrama por una fisura de un tanque y

$$r(t) = \begin{cases} 4t^2 + 20 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ 16t + 4 & \text{si } 2 < t \end{cases}$$

Demuestre que r es continua en 2.

54. Si $A(t)$ metros cuadrados es el área de la fisura del tanque del ejercicio 53 a los t minutos, **(a)** defina $A(t)$, y **(b)** demuestre que A es continua en 2.

55. Demuestre que la función definida por

$$f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

donde n es un número entero positivo, tiene una discontinuidad removible en 1. *Sugerencia:* para el factor $x^n - 1$ utilice la fórmula (12) de la sección suplementaria 1.5.

56. La función f está definida por

$$f(x) = \lim_{n \to 0} \frac{2nx}{n^2 - nx}$$

Dibuje la gráfica de f. ¿En qué valores de x es discontinua la función f?

57. Si $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x \end{cases}$

demuestre que f y g son discontinuas en 0 pero que el producto $f \cdot g$ es continuo en 0.

58. Proporcione un ejemplo para mostrar que el producto de dos funciones f y g puede ser continuo en a, donde f es continua en a, pero g es discontinua en a.

59. Dé un ejemplo de dos funciones que sean discontinuas en un número a, pero cuya suma sea continua en a.

60. Explique por qué la definición de función continua en un número a garantiza que la gráfica de la función no se rompe en el punto donde $x = a$.

61. Si la función f es continua en a y la función g es discontinua en a, ¿por qué puede concluirse que la suma de las dos funciones, $f + g$, es discontinua en a?

62. Si la función f es discontinua en a y la función g es continua en a, ¿es posible que el cociente de las dos funciones, f/g, sea continuo en a? Explique su respuesta.

1.9 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA Y CONTINUIDAD EN UN INTERVALO

Recuerde la definición (1.2.2) de función compuesta: dadas las funciones f y g, la función compuesta, denotada por $f \circ g$, está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

y el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los números del dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 4 - x^2$, y si h es la función compuesta $f \circ g$, entonces

$$\begin{aligned} h(x) &= f(g(x)) \\ &= f(4 - x^2) \\ &= \sqrt{4 - x^2} \end{aligned}$$

Debido a que el dominio de g es el conjunto de todos los números reales y el dominio de f es el conjunto de todos los números no negativos, el conjunto de h es el conjunto de todos los números tales que $4 - x^2 \ge 0$, esto es, todos los números del intervalo cerrado $[-2, 2]$. La gráfica de h se muestra en la figura 1. ◀

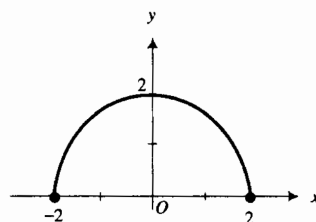


FIGURA 1

De la figura 1, parece que h es continua en cada número del intervalo abierto $(-2, 2)$. Antes de probar este hecho en el ejemplo 1, se necesitan dos teoremas más, el primero de los cuales trata acerca del límite de una función compuesta.

1.9.1 Teorema Límite de una función compuesta

Si $\lim_{x \to a} g(x) = b$ y si la función f es continua en b, entonces

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(b)$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$

Demostración Puesto que f es continua en b, por el teorema 1.8.6, se tiene el siguiente enunciado: para cada $\epsilon_1 > 0$ existe una $\delta_1 > 0$, tal que

$$\text{si } |y - b| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |f(y) - f(b)| < \epsilon_1 \tag{1}$$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = b$, para cada $\delta_1 > 0$ existe $\delta_2 > 0$, tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad |g(x) - b| < \delta_1 \tag{2}$$

Si $0 < |x - a| < \delta_2$, se sustituye y por $g(x)$ en el enunciado (1) obteniéndose lo siguiente: para cada $\epsilon_1 > 0$ existe $\delta_1 > 0$, tal que

$$\text{si } |g(x) - b| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |f(g(x)) - f(b)| < \epsilon_1 \tag{3}$$

De los enunciados (2) y (3) se concluye que para cualquier $\epsilon_1 > 0$ existe $\delta_2 > 0$, tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad |f(g(x)) - f(b)| < \epsilon_1$$

de lo que se deduce que

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$ ■

El teorema 1.9.1 tiene un papel importante en las demostraciones de los teoremas de límites 9 y 10, presentadas al final de la sección. A continuación se aplicará el teorema en la demostración del teorema siguiente que trata sobre la continuidad de una función compuesta.

1.9.2 Teorema Continuidad de una función compuesta

Si la función g es continua en a y la función f es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ es continua en a.

Demostración Puesto que g es continua en a, entonces

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a) \tag{4}$$

Como la función f es continua en $g(a)$, se puede aplicar el teorema 1.9.1 a la función compuesta $f \circ g$, de lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (f \circ g)(x) &= \lim_{x \to a} f(g(x)) \\ &= f(\lim_{x \to a} g(x)) \\ &= f(g(a)) \qquad \text{(por (4))} \\ &= (f \circ g)(a) \end{aligned}$$

lo cual demuestra que $f \circ g$ es continua en a. ■

El teorema 1.9.2 establece que *una función continua de una función continua es continua*. El siguiente ejemplo muestra como se emplea este teorema en la obtención de los números para los cuales una función particular es continua.

EJEMPLO 1 Determinar los números en los que la función siguiente es continua:

$$h(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Solución La función h es la que se obtuvo en el ejemplo ilustrativo 1 como la función compuesta $f \circ g$, donde $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 4 - x^2$. Como g es una función polinomial, es continua en todos los números reales. Además, por el teorema 1.8.5(ii), f es continua en cada número real positivo. En consecuencia, por el teorema 1.9.2, h es continua en cada número x para el cual $g(x) > 0$. Esto es, cuando $4 - x^2 > 0$. Por tanto, h es continua en el intervalo abierto $(-2, 2)$. ◀

Como la función h del ejemplo 1 es continua en cada número del intervalo abierto $(-2, 2)$, se dice que *h es continua en el intervalo abierto* $(-2, 2)$.

1.9.3 Definición de continuidad en un intervalo abierto

Se dice que una función es **continua en un intervalo abierto** si y sólo si es continua en cada número del intervalo abierto.

Se hará referencia otra vez a la función h del ejemplo 1. Como h no está definida en cualquier intervalo abierto que contenga a -2 o 2, no se puede considerar $\lim_{x \to -2} h(x)$ o $\lim_{x \to 2} h(x)$. Por tanto, la definición 1.8.1 de continuidad en un número, no permite que h sea continua en -2 o 2. En consecuencia, para discutir la cuestión de la continuidad de h en el intervalo cerrado $[-2, 2]$, se debe extender el concepto de continuidad para incluir la continuidad en un extremo de un intervalo cerrado. Para esto, primero se define *continuidad por la derecha* y *continuidad por la izquierda*

1.9.4 Definición de continuidad por la derecha

Se dice que la función f es **continua por la derecha en el número a** si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existe;

(iii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

1.9.5 Definición de continuidad por la izquierda

Se dice que la función f es **continua por la izquierda en el número a** si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existe;

(iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

1.9.6 Definición de continuidad en un intervalo cerrado

Se dice que una función, cuyo dominio contiene al intervalo cerrado $[a, b]$, es **continua en el intervalo cerrado $[a, b]$** si y sólo si es continua en el intervalo abierto (a, b), así como continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

EJEMPLO 2 Demuestre que la función h del ejemplo 1 es continua en el intervalo cerrado $[-2, 2]$.

Solución La función h está definida por

$$h(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

y en el ejemplo 1 se mostró que h es continua en el intervalo abierto $(-2, 2)$. Al aplicar el teorema 1.9.1 se calculan los límites $\lim\limits_{x \to -2^+} h(x)$ y $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2^+} h(x) &= \lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} \\ &= 0 \\ &= h(-2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} h(x) &= \lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} \\ &= 0 \\ &= h(2) \end{aligned}$$

De este modo, h es continua por la derecha en -2 y es continua por la izquierda en 2. En consecuencia, por la definición 1.9.6, h es continua en el intervalo cerrado $[-2, 2]$. La gráfica de h se muestra en la figura 1. ◀

Observe la diferencia en la terminología utilizada en los ejemplos 1 y 2. En el ejemplo 1 se estableció que *h es continua en cada número del intervalo abierto* $(-2, 2)$, mientras que en el ejemplo 2 se concluyó que *h es continua en el intervalo cerrado* $[-2, 2]$.

1.9.7 Definición de continuidad en un intervalo semiabierto

(i) Una función cuyo dominio incluye al intervalo semiabierto $[a, b)$ es **continua en $[a, b)$** si y sólo si es continua en el intervalo abierto (a, b) y es continua por la derecha en a.

(ii) Una función cuyo dominio incluye al intervalo semiabierto $(a, b]$ es **continua en $(a, b]$** si y sólo si es continua en el intervalo abierto (a, b) y es continua por la izquierda en b.

Se tienen definiciones similares a las de la definición 1.9.7 para la continuidad en los intervalos $[a, +\infty)$ y $(-\infty, b]$.

EJEMPLO 3 Determine el intervalo más grande (o unión de intervalos) en el que la función siguiente es continua:

$$f(x) = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x - 3}$$

Solución Primero se determina el dominio de f. La función está definida en todo número excepto cuando $x = 3$ o cuando $25 - x^2 < 0$ (esto es, cuando $x > 5$ o $x < -5$). Por tanto, el dominio de f es $[-5, 3) \cup (3, 5]$. Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -5^+} f(x) &= 0 \\ &= f(-5) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \lim_{x \to 5^-} f(x) &= 0 \\ &= f(5) \end{aligned}$$

f es continua por la derecha en –5 y es continua por la izquierda en 5. Además, *f* es continua en los intervalos semiabiertos (–5, 3) y (3, 5). En consecuencia, *f* es continua en [–5, 3) ∪ (3, 5]. ◀

La importancia de la continuidad de una función en un intervalo será más evidente a medida que avance en el estudio del Cálculo. Esta propiedad es parte de las hipótesis de muchos teoremas esenciales , tales como *el teorema del valor medio, los teoremas fundamentales del Cálculo,* y *el teorema del valor extremo.*

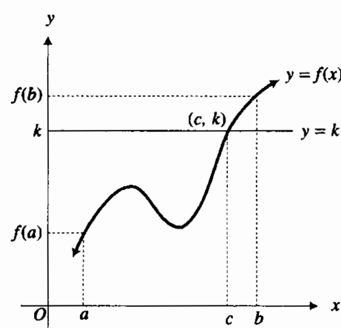


FIGURA 2

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** En el ejemplo 4 de la sección 1.3 se obtuvo como modelo matemático la función V definida por

$$V(x) = 170x - 54x^2 + 4x^3$$

y expresa el volumen de una caja de cartón como función de la longitud del cuadrado cortado en cada una de las esquinas de un trozo de cartón de forma rectangular. Debido a que V es una función polinomial, es continua en todo número, y por tanto, es continua en su dominio, el intervalo cerrado [0, 5]. Este hecho es necesario para aplicar el teorema del valor extremo de la sección 3.2 para determinar el valor de x, el cual hace que $V(x)$ sea un máximo. ◀

Otro teorema importante concerniente a la continuidad de una función en un intervalo cerrado es *el teorema del valor intermedio,* el cual se tratará a continuación.

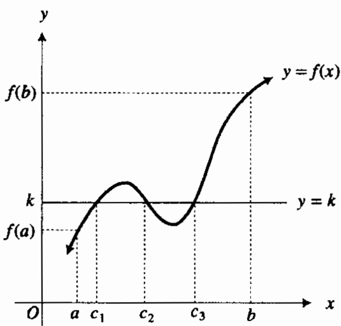


FIGURA 3

1.9.8 Teorema del valor intermedio

Si la función *f* es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si $f(a) \neq f(b)$, entonces para cada valor k entre $f(a)$ y $f(b)$ existe un número c entre a y b tal que $f(c) = k$.

La demostración del teorema del valor intermedio está más allá de los objetivos de este libro y puede encontrarse en un texto de Cálculo avanzado.

En términos geométricos, el teorema del valor intermedio establece que la gráfica de una función continua en un intervalo cerrado debe intersectar a cada recta $y = k$ entre las rectas $y = f(a)$ y $y = f(b)$ al menos una vez. Observe la figura 2, donde $(0, k)$ es cualquier punto sobre el eje y entre los puntos $(0, f(a))$ y $(0, f(b))$; la recta $y = k$ intersecta la gráfica de f en el punto (c, k), donde c está entre a y b.

Para algunos valores de k, puede tenerse más de un valor posible para c. El teorema establece que existe al menos un valor de c pero tal valor no es necesariamente único. La figura 3 muestra tres valores posibles para c (c_1, c_2 y c_3) para una k particular.

El teorema del valor intermedio afirma que si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $f(x)$ toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$ conforme x toma todos los valores entre a y b. Los dos ejemplos ilustrativos siguientes muestran la importancia de la continuidad de f en $[a, b]$ para poder garantizar esta afirmación.

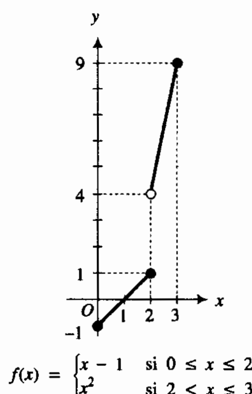


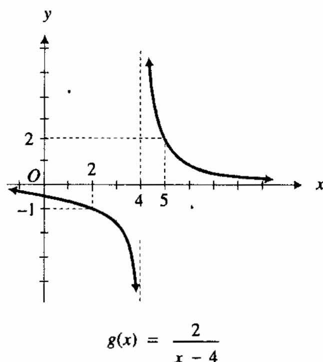
FIGURA 4

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Considere la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

La gráfica de esta función se presenta en la figura 4.

La función f es discontinua en 2, el cual está en el intervalo cerrado $[0, 3]$; $f(0) = -1$ y $f(3) = 9$. Si k es cualquier número entre 1 y 4, entonces no hay ningún valor de c tal que $f(c) = k$ porque no existen valores de la función entre 1 y 4. ◀



$g(x) = \dfrac{2}{x-4}$

FIGURA 5

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** Sea g la función definida por

$$g(x) = \frac{2}{x-4}$$

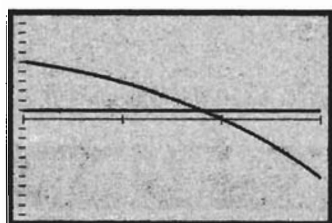
La figura 5 muestra la gráfica de esta función.

La función g es discontinua en 4, el cual pertenece al intervalo cerrado $[2, 5]$; $g(2) = -1$ y $g(5) = 2$. Si k es cualquier número entre -1 y 2, no hay ningún valor de c entre 2 y 5, tal que $g(c) = k$. En particular, si $k = 1$, entonces $g(6) = 1$, pero 6 no pertenece al intervalo $(2, 5)$. ◀

▶ ***EJEMPLO 4*** Dada la función f definida por

$$f(x) = 4 + 3x - x^2 \qquad 2 \le x \le 5$$

(a) Verifique que el teorema del valor intermedio se cumpla para $k = 1$ trazando la gráfica de f y la recta $y = 1$; estime, con cuatro cifras decimales, el número c del intervalo $(2, 5)$, tal que $f(c) = 1$. **(b)** Confirme la estimación del inciso *(a)* analíticamente. **(c)** Dibuje la gráfica de f en el intervalo $[2, 5]$ y muestre el punto $(c, 1)$.



$[2, 5]$ por $[-10, 10]$
$f(x) = 4 + 3x - x^2$
$y = 1$

FIGURA 6

Solución

(a) Como f es una función polinomial, es continua en todo número, en particular en $[2, 5]$. La figura 6 muestra la gráfica de f y la recta $y = 1$ trazadas en el rectángulo de inspección de $[2, 5]$ por $[-10, 10]$. En la graficadora, se estima $c = 3.7913$.

(b) Se resuelve la ecuación cuadrática

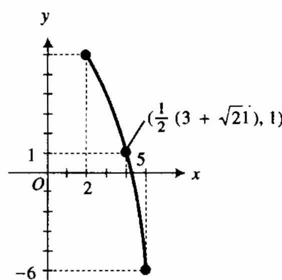
$$4 + 3c - c^2 = 1$$
$$c^2 - 3c - 3 = 0$$
$$c = \frac{3 \pm \sqrt{9+12}}{2}$$
$$c = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Se rechaza $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{21})$ porque este número es negativo y no pertenece al intervalo $(2, 5)$. El número $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{21})$ está en el intervalo $(2, 5)$, y

$$f\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right) = 1$$

Como $(3 + \sqrt{21})/2 \approx 3.7913$, se confirma la estimación.

(c) La gráfica requerida se muestra en la figura 7. ◀



$f(x) = 4 + 3x - x^2, x \in [2, 5]$

FIGURA 7

El teorema siguiente es una consecuencia directa, un corolario, del teorema del valor intermedio.

1.9.9 Teorema del cero intermedio

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe un número c entre a y b, tal que $f(c) = 0$; es decir, c es un cero de f.

Demostración La función f satisface las hipótesis del teorema del valor intermedio, y como $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, se considera a 0 como un número k entre $f(a)$ y $f(b)$. Por tanto, existe un número c entre a y b, tal que $f(c) = 0$. ■

En el ejemplo siguiente se aplica el teorema del cero intermedio para localizar ceros de una función.

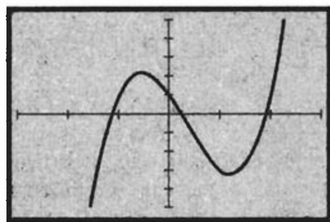
▶ ***EJEMPLO 5*** **(a)** Aplique el teorema del cero intermedio para mostrar que la función definida por

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x + 1$$

tiene tres ceros entre −2 y 2. **(b)** Estime en una graficadora estos ceros con dos cifras decimales.

Tabla 1

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	−15	1	1	−3	1



[−3, 3] por [−5, 5]

$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x + 1$

FIGURA 8

Solución

(a) Se calculan los valores de $f(x)$ para los valores enteros de −2 a 2 y se forma la tabla 1. Como $f(-2)$ y $f(-1)$ tienen signos opuestos, f tiene un cero entre −2 y −1; también f tiene un cero entre 0 y 1, y otro entre 1 y 2 por la misma razón.

(b) La gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [−3, 3] por [−5, 5] se muestra en la figura 8. En la graficadora se estima que los ceros son −1.14, 0.23 y 1.91. ◀

Ahora se demostrarán los teoremas 9 y 10 como se indicó en la sección 1.5. Observe la aplicación del teorema 1.9.1 (límite de una función compuesta).

Teorema 9 de límites **Límite del cociente de dos funciones**

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{si } M \neq 0$$

Demostración Sea h la función definida por $h(x) = 1/x$. Entonces la función compuesta $h \circ g$ está definida por $h(g(x)) = 1/g(x)$. La función h es continua en todo número excepto en 0, lo cual se deduce del teorema 1.5.12. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} &= \lim_{x \to a} h(g(x)) \\
&= h(\lim_{x \to a} g(x)) \qquad \text{(por el teorema 1.9.1)} \\
&= h(M) \\
&= \frac{1}{M}
\end{aligned}$$

Del teorema 6 de límites y del resultado anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} \\
&= L \cdot \frac{1}{M} \\
&= \frac{L}{M}
\end{aligned}$$

■

Teorema 10 de límites **Límite de la raíz n-ésima de una función**

Si n es un número entero positivo y $\lim_{x\to a} f(x) = L$, entonces

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

Con la restricción de que si n es par, $L > 0$.

Demostración Sea h la función definida por $h(x) = \sqrt[n]{x}$. Entonces la función compuesta $h \circ f$ está definida por $h(f(x)) = \sqrt[n]{f(x)}$. Del teorema 1.8.5, h es continua en L si n es impar, o si n es par y $L > 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} &= \lim_{x\to a} h(f(x)) \\ &= h(\lim_{x\to a} f(x)) \qquad \text{(por el teorema 1.9.1)} \\ &= h(L) \\ &= \sqrt[n]{L}\end{aligned}$$

■

EJERCICIOS 1.9

En los ejercicios 1 a 6, defina $f \circ g$ y determine los números en los que $f \circ g$ es continua.

1. (a) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 9 - x^2$;
   (b) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 16$
2. (a) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 16 - x^2$;
   (b) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + 4$
3. (a) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$;
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; $g(x) = \sqrt{x}$
4. (a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $g(x) = \sqrt{x+1}$;
   (b) $f(x) = \sqrt{x+1}$; $g(x) = \sqrt[3]{x}$
5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x-1}}$; $g(x) = |x|$
6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{4-x}}$; $g(x) = |x|$

En los ejercicios 7 a 16, determine el dominio de la función, y después determine para cual de los intervalos indicados es continua la función.

7. $f(x) = \dfrac{2}{x+5}$; $(3, 7)$, $[-6, 4]$, $(-\infty, 0)$, $(-5, +\infty)$, $[-5, +\infty)$, $[-10, -5)$
8. $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$; $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$, $(0, 2)$, $(0, 2]$, $[2, +\infty)$, $(2, +\infty)$
9. $f(t) = \dfrac{t}{t^2-1}$; $(0, 1)$, $(-1, 1)$, $[0, 1]$, $(-1, 0]$, $(-\infty, -1]$, $(1, +\infty)$
10. $f(r) = \dfrac{r+3}{r^2-4}$; $(0, 4]$, $(-2, 2)$, $(-\infty, -2]$, $(2, +\infty)$, $[-4, 4]$, $(-2, 2]$
11. $g(x) = \sqrt{x^2-9}$; $(-\infty, -3)$, $(-\infty, -3]$, $(3, +\infty)$, $[3, +\infty)$, $(-3, 3)$
12. $f(x) = [\![x]\!]$; $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $(1, 2)$, $[1, 2)$, $(1, 2]$
13. $f(t) = \dfrac{|t-1|}{t-1}$; $(-\infty, 1)$, $(-\infty, 1]$, $[-1, 1]$, $(-1, +\infty)$, $(1, +\infty)$
14. $h(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < -2 \\ x - 5 & \text{si } -2 \le x \le 1 \\ 3 - x & \text{si } 1 < x \end{cases}$; $(-\infty, 1)$, $(-2, +\infty)$, $(-2, 1)$, $[-2, 1)$, $[-2, 1]$
15. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$; $(-2, 2)$, $[-2, 2]$, $[-2, 2)$, $(-2, 2]$, $(-\infty, -2]$, $(2, +\infty)$
16. $F(y) = \dfrac{1}{3+2y-y^2}$; $(-1, 3)$, $[-1, 3]$, $[-1, 3)$, $(-1, 3]$

En los ejercicios 17 a 22, determine el intervalo más grande (o unión de intervalos) en el que la función $f \circ g$ del ejercicio indicado es continua.

17. Ejercicio 1
18. Ejercicio 2
19. Ejercicio 3
20. Ejercicio 4
21. Ejercicio 5
22. Ejercicio 6
23. Determine el intervalo más grande (o unión de intervalos) en el que la función del ejercicio 17 de la sección 1.6 es continua.
24. Determine el intervalo más grande (o unión de intervalos) en el que la función del ejemplo 4 de la sección 1.6 es continua.

En los ejercicios 25 a 28, dibuje la gráfica de una función f que satisfaga las condiciones dadas.

25. f es continua en $(-\infty, 2]$ y $(2, +\infty)$; $\lim_{x\to 0} f(x) = 4$; $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -3$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$

26. f es continua en $(-\infty, -2)$, $[-2, 4]$ y $(4, +\infty)$; $\lim_{x\to -5} f(x) = 0$; $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -3$; $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$; $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 2$; $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 5$; $\lim_{x\to 6} f(x) = 0$

27. f es continua en $(-\infty, -3]$, $(-3, 3)$ y $[3, +\infty)$; $\lim_{x\to -5} f(x) = 2$; $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 0$; $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 4$; $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$; $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 0$; $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -5$; $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$

28. f es continua en $(-\infty, 0)$ y $[0, +\infty)$; $\lim_{x\to -4} f(x) = 0$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -3$; $\lim_{x\to 4} f(x) = 2$

En los ejercicios 29 a 34, demuestre que la función obtenida como un modelo matemático en el ejercicio indicado de la sección 1.3 es continua en su dominio.

29. **(a)** Ejercicio 13 **(b)** Ejercicio 15

30. **(a)** Ejercicio 14 **(b)** Ejercicio 16

31. **(a)** Ejercicio 17 **(b)** Ejercicio 19

32. **(a)** Ejercicio 18 **(b)** Ejercicio 20

33. **(a)** Ejercicio 21 **(b)** Ejercicio 23

34. **(a)** Ejercicio 22 **(b)** Ejercicio 24

En los ejercicios 35 a 42, determine si se cumple el teorema del valor intermedio para la función f, el intervalo cerrado [a, b] y el valor de k indicado. Si el teorema no se cumple, establezca la razón y apoye gráficamente su respuesta. Si el teorema se cumple: (a) trace la gráfica de f y la recta y = k en la graficadora y estime, con cuatro cifras decimales, el número c del intervalo (a, b) tal que f(c) = k. (b) Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente. (c) Dibuje la gráfica de f en [a, b] y muestre el punto (c, k).

35. $f(x) = 2 + x - x^2$; $[a, b] = [0, 3]$; $k = 1$

36. $f(x) = -\sqrt{100 - x^2}$; $[a, b] = [0, 8]$; $k = -8$

37. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$; $[a, b] = [-4.5, 3]$; $k = 3$

38. $f(x) = x^2 + 5x - 6$; $[a, b] = [-1, 2]$; $k = 4$

39. $f(x) = \dfrac{4}{x + 2}$; $[a, b] = [-3, 1]$; $k = \frac{1}{2}$

40. $f(x) = \dfrac{5}{2x - 1}$; $[a, b] = [0, 1]$; $k = 2$

41. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } -2 \le x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } 1 \le x \le 3 \end{cases}$; $[a, b] = [-2, 3]$; $k = -1$

42. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } -4 \le x < -2 \\ 2 - x & \text{si } -2 < x \le 1 \end{cases}$; $[a, b] = [-4, 1]$; $k = \frac{1}{2}$

En los ejercicios 43 a 46, haga lo siguiente: (a) aplique el teorema del cero intermedio para mostrar que la función f tiene el número indicado de ceros entre a y b. (b) Estime estos ceros con dos cifras decimales en la graficadora.

43. $f(x) = x^3 - 6x + 3$; tres ceros; $a = -5$; $b = 5$

44. $f(x) = x^4 + 7x^3 + x - 8$; dos ceros; $a = -10$; $b = 5$

45. $f(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x - 5$; dos ceros; $a = -3$; $b = 3$

46. $f(x) = 3x^4 - 21x^3 + 36x^2 + 2x - 8$; cuatro ceros; $a = -5$; $b = 5$

47. Muestre que el teorema del cero intermedio garantiza que la ecuacion $x^3 - 4x^2 + x + 3 = 0$ tiene una raíz entre 1 y 2, y utilice la graficadora para estimar esta raíz con dos cifras decimales.

48. Muestre que el teorema del cero intermedio garantiza que la ecuación $x^3 + x + 3 = 0$ tiene una raíz entre -2 y 2, y utilice la graficadora para estimar esta raíz con dos cifras decimales.

49. De la ecuación que define a $m(v)$, que trata de la teoría especial de la relatividad de Einstein del ejercicio 51 de la sección 1.7, determine el intervalo más grande en el que m es continua.

50. Demuestre que si la función f es continua en a, entonces

$$\lim_{t\to 0} f(a - t) = f(a)$$

51. Demuestre que si $f(x)$ es no negativo para todo valor de x en su dominio y $\lim_{x\to a} [f(x)]^2$ existe y es positivo, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \sqrt{\lim_{x\to a} [f(x)]^2}$$

52. Demuestre que si $\lim_{x\to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$.

53. Suponga que f es una función para la cual

$$0 \le f(x) \le 1 \quad \text{si } 0 \le x \le 1$$

Demuestre que si f es continua en $[0, 1]$, entonces existe al menos un número c en $[0, 1]$ tal que $f(c) = c$. *Sugerencia:* si c no es 0 ni 1, entonces $f(0) > 0$ y $f(1) < 1$. Considere la función g para la cual $g(x) = f(x) - x$ y aplique el teorema del valor intermedio a g en $[0, 1]$.

54. Encuentre el valor mayor de k para el cual la función definida por $f(x) = [\![x^2 - 2]\!]$ es continua en el intervalo $[3, 3 + k)$.

55. ¿Son equivalentes los dos enunciados siguientes: (i) la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$; (ii) la función f es continua en cada número del intervalo cerrado $[a, b]$? Justifique su respuesta.

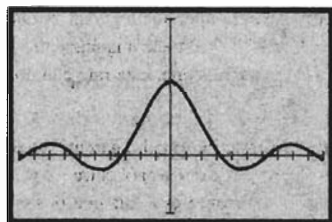
1.10 CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y TEOREMA DE ESTRICCIÓN

Se supondrá que usted estudió trigonometría previamente; sin embargo, debido a la importancia de las funciones trigonométricas en Cálculo, se presenta un breve repaso de ellas en la sección A.9 del apéndice.

En un curso de trigonometría, las gráficas de las funciones trigonométricas se dibujan mediante consideraciones intuitivas, debido a que dos conceptos de Cálculo, *continuidad* y *diferenciación*, son necesarios para una presentación formal de dichas gráficas. En esta sección se tratará la continuidad de las funciones trigonométricas, mientras que en la sección 2.7, donde se obtendrán las gráficas, se dedicará a la diferenciación de estas funciones. En el estudio de la continuidad de las funciones trigonométricas se considerará el límite siguiente:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\text{sen } t}{t} \qquad (1)$$

Observe que la función definida por $f(t) = \frac{\text{sen } t}{t}$ no existe cuando $t = 0$, pero existe para todos los otros valores de t. A fin de tener una idea intuitiva acerca de la existencia del límite (1), primero se trazará la gráfica de f en el rectángulo de inspección de $[-10, 10]$ por $[-1, 2]$, mostrada en la figura 1. Como $f(0)$ no existe, la gráfica tiene un agujero en el eje y. De la figura, se sospecha que probablemente el límite de (1) existe y es igual a 1. A fin de examinar el límite a mayor profundidad, se calculan los valores de la función para conformar las tablas 1 y 2. De las dos tablas, se sospecha otra vez que si el límite en (1) existe, puede ser igual a 1. El hecho de que el límite exista y sea igual a 1 se demuestra en el teorema 1.10.2, pero en la demostración de este teorema se necesita el siguiente teorema, al cual se hará referencia como el *teorema de estricción*. Este último no sólo es importante en la demostración del teorema 1.10.2, sino que también se utiliza en la demostración de teoremas importantes en secciones posteriores.



$[-10, 10]$ por $[-1, 2]$

$f(t) = \frac{\text{sen } t}{t}$

FIGURA 1

Tabla 1

t	$\frac{\text{sen } t}{t}$
1.0	0.84147
0.9	0.87036
0.8	0.89670
0.7	0.92031
0.6	0.94107
0.5	0.95885
0.4	0.97355
0.3	0.98507
0.2	0.99335
0.1	0.99833
0.01	0.99998

Tabla 2

t	$\frac{\text{sen } t}{t}$
-1.0	0.84147
-0.9	0.87036
-0.8	0.89670
-0.7	0.92031
-0.6	0.94107
-0.5	0.95885
-0.4	0.97355
-0.3	0.98507
-0.2	0.99335
-0.1	0.99833
-0.01	0.99998

1.10.1 El teorema de estricción

Suponga que las funciones f, g y h están definidas en algún intervalo abierto I que contiene a a, y que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para toda x en I para la cual $x \neq a$. También suponga que $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} h(x)$ existen y son iguales a L. Entonces $\lim_{x \to a} g(x)$ existe y es igual a L.

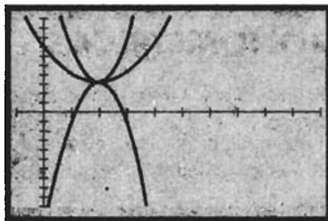
Se demostrará el teorema de estricción en el suplemento de esta sección. Sin embargo, ahora se interpretará el teorema geométricamente en el ejemplo ilustrativo siguiente.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Sean f, g y h las funciones definidas por

$$f(x) = -4(x - 2)^2 + 3$$

$$g(x) = \frac{(x - 2)(x^2 - 4x + 7)}{x - 2}$$

$$h(x) = 4(x - 2)^2 + 3$$



$[-1, 10]$ por $[-10, 10]$

$f(x) = -4(x - 2)^2 + 3$

$g(x) = \dfrac{(x-2)(x^2 - 4x + 7)}{x - 2}$

$h(x) = 4(x - 2)^2 + 3$

FIGURA 2

Las gráficas de estas funciones están trazadas en el rectángulo de inspección de $[-1, 10]$ por $[-10, 10]$ de la figura 2. Las gráficas de f y h son parábolas que tienen su vértice en el punto $(2, 3)$. La gráfica de g es una parábola con su vértice en $(2, 3)$ suprimido. La función g no está definida cuando $x = 2$; sin embargo, para toda $x \neq 2$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Además, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = 3$. Por tanto, se satisfacen las hipótesis del teorema de estricción, de donde se deduce que $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 3$. ◀

▶ ***EJEMPLO 1*** Considere que $|g(x) - 2| \leq 3(x - 1)^2$ para toda x. Utilice el teorema de estricción para determinar $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

Solución Como $|g(x) - 2| \leq 3(x - 1)^2$ para toda x, se infiere que

$$-3(x - 1)^2 \leq g(x) - 2 \leq 3(x - 1)^2 \qquad \text{para toda } x$$

$$\Leftrightarrow \quad -3(x - 1)^2 + 2 \leq g(x) \leq 3(x - 1)^2 + 2 \qquad \text{para toda } x$$

Sea $f(x) = -3(x - 1)^2 + 2$ y $h(x) = 3(x - 1)^2 + 2$. Entonces

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1} h(x) = 2 \tag{2}$$

Además, para toda x,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \tag{3}$$

Por tanto, de (2), (3) y el teorema de estricción

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 2$$

◀

▶ ***EJEMPLO 2*** Utilice el teorema de estricción para probar que

$$\lim_{x \to 0} \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = 0$$

Apoye este hecho gráficamente.

Solución Como $-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$ para toda t, entonces

$$0 \leq \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq 1 \qquad \text{si } x \neq 0$$

Por tanto, si $x \neq 0$,

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

En consecuencia,

$$0 \leq \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x| \qquad \text{si } x \neq 0 \tag{4}$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, se deduce de la desigualdad (4) y del teorema de estricción que

$$\lim_{x \to 0} \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = 0$$



$[-1, 1]$ por $[0, 1]$

$f(x) = \left|x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right|$

FIGURA 3

La gráfica de la función que tiene valores $\left|x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right|$, trazada en el rectángulo de inspección de $[-1, 1]$ por $[0, 1]$, se muestra en la figura 3. Observe el inusual comportamiento oscilante de la función cuando $-0.32 \leq x \leq 0.32$. La gráfica apoya el hecho de que el límite es 0. ◀

1.10.2 Teorema

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

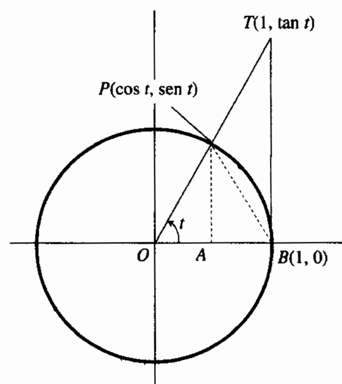


FIGURA 4

Demostración Primero suponga que $0 < t < \frac{1}{2}\pi$. Refiérase a la figura 4, la cual muestra la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ y el sector sombreado BOP, donde B es el punto $(1, 0)$ y P es el punto $(\cos t, \operatorname{sen} t)$. El área del sector circular de radio r y ángulo central cuya medida en radianes es t está determinada por $\frac{1}{2}r^2t$; de modo que si S unidades cuadradas es el área del sector BOP,

$$S = \tfrac{1}{2}t \qquad (5)$$

Considere ahora el triángulo BOP, y sea K_1 unidades cuadradas el área de este triángulo. Como $K_1 = \frac{1}{2}|\overline{AP}| \cdot |\overline{OB}|$, $|\overline{AP}| = \operatorname{sen} t$ y $|\overline{OB}| = 1$, se tiene

$$K_1 = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t \qquad (6)$$

Si K_2 unidades cuadradas es el área del triángulo rectángulo BOT, donde T es el punto $(1, \tan t)$, entonces $K_2 = \frac{1}{2}|\overline{BT}| \cdot |\overline{OB}|$. Debido a que $\overline{BT} = \tan t$ y $\overline{OB} = 1$, se tiene

$$K_2 = \tfrac{1}{2}\tan t \qquad (7)$$

En la figura 4 se observa que

$$K_1 < S < K_2$$

Al sustituir de (5), (6) y (7) en esta desigualdad se obtiene

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t < \tfrac{1}{2}t < \tfrac{1}{2}\tan t$$

Si se multiplica cada miembro de esta desigualdad por $2/\operatorname{sen} t$, el cual es positivo porque $0 < t < \frac{1}{2}\pi$, se tiene

$$1 < \frac{t}{\operatorname{sen} t} < \frac{t}{\cos t} \qquad \left(\text{porque } \frac{\tan t}{\operatorname{sen} t} = \frac{1}{\cos t}\right)$$

Al considerar el recíproco de cada miembro de esta desigualdad (lo cual hace que cambie de sentido el signo de desigualdad), se obtiene

$$\cos t < \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1 \qquad (8)$$

De la parte derecha de la desigualdad anterior se tiene

$$\operatorname{sen} t < t \qquad (9)$$

y de una identidad trigonométrica de semivalor, se obtiene

$$\frac{1 - \cos t}{2} = \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t \qquad (10)$$

Al sustituir t por $\frac{1}{2}t$ en la desigualdad (9), y si se eleva al cuadrado, se tiene

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}t < \tfrac{1}{4}t^2 \tag{11}$$

Por tanto, de (10) y (11) se infiere que

$$\frac{1 - \cos t}{2} < \frac{t^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \tfrac{1}{2}t^2 < \cos t \tag{12}$$

De (8) y (12) y como $0 < t < \frac{1}{2}\pi$, se deduce que

$$1 - \frac{1}{2}t^2 < \frac{\operatorname{sen} t}{-t} < 1 \qquad \text{si } 0 < t < \tfrac{1}{2}\pi \tag{13}$$

Si $-\frac{1}{2}\pi < t < 0$, entonces $0 < -t < \frac{1}{2}\pi$; y de (13),

$$1 - \frac{1}{2}(-t)^2 < \frac{\operatorname{sen}(-t)}{t} < 1 \qquad \text{si } -\tfrac{1}{2}\pi < t < 0$$

Pero sen $(-t) = -$sen t; de modo que lo anterior puede escribirse como

$$1 - \frac{1}{2}t^2 < \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1 \qquad \text{si } -\tfrac{1}{2}\pi < t < 0 \tag{14}$$

De (13) y (14) se concluye que

$$1 - \frac{1}{2}t^2 < \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1 \qquad \text{si } -\tfrac{1}{2}\pi < t < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{y} \quad t \neq 0 \tag{15}$$

Como $\lim\limits_{t\to 0}(1 - \frac{1}{2}t^2) = 1$ y $\lim\limits_{t\to 0} 1 = 1$, se deduce de (15) y del teorema de estricción que

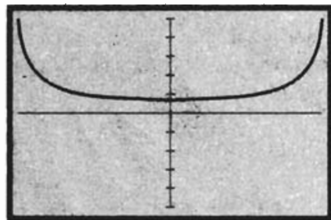
$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

■

EJEMPLO 3 Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$$

(a) Trace la gráfica de f en el rectángulo de inspección de [−2, 2] por [−5, 5]. ¿A qué valor parece que se aproxima $f(x)$ conforme x se acerca a 0? **(b)** Confirme la respuesta del inciso (a) analíticamente calculando $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.



[−0.6, 0.6] por [−5, 5]

$f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$

FIGURA 5

Solución

(a) La figura 5 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [−0.6, 0.6] por [−5, 5]. Como $f(0)$ no existe, la gráfica tiene un agujero en el punto donde $x = 0$. En la graficadora parece que $f(x)$ se aproxima a 0.6 cuando x se acerca a 0.

(b) Para determinar el $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ se desea escribir el cociente sen $3x$/sen $5x$ de tal forma que pueda aplicarse el teorema 1.10.2. Si $x \neq 0$,

$$\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x} = \frac{3\left(\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\right)}{5\left(\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}\right)}$$

Conforme x se aproxima a cero, $3x$ y $5x$ también lo hacen. En consecuencia,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = \lim_{3x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = \lim_{5x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = 1$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x} = \frac{3 \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\right)}{5 \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}\right)} = \frac{3\cdot 1}{5\cdot 1} = \frac{3}{5}$$

Este resultado confirma la respuesta del inciso (a). ◀

Del teorema 1.10.2 se puede demostrar que las funciones seno y coseno son continuas en 0.

1.10.3 Teorema

La función seno es continua en 0.

Demostración Se demostrará que se cumplen las tres condiciones necesarias para la continuidad en un número.

(i) $\operatorname{sen} 0 = 0$

(ii) $$\lim_{t\to 0} \operatorname{sen} t = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\cdot t = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\cdot \lim_{t\to 0} t = 1\cdot 0 = 0$$

(iii) $\lim\limits_{t\to 0} \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} 0$

Por tanto, la función seno es continua en 0. ■

1.10.4 Teorema

La función coseno es continua en 0.

Demostración Se verificará que se cumplen las tres condiciones necesarias para la continuidad en un número. En la verificación de la condición (ii) se utilizará el hecho de que la función seno es continua en 0, y se sustituirá $\cos t$ por $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$ porque $\cos t > 0$ cuando $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$.

(i) $\cos 0 = 1$

(ii) $$\lim_{t\to 0} \cos t = \lim_{t\to 0} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{\lim_{t\to 0}(1 - \operatorname{sen}^2 t)} = \sqrt{1 - 0} = 1$$

(iii) $\lim\limits_{t\to 0} \cos t = \cos 0$

De este modo, la función coseno es continua en 0. ∎

El límite del enunciado del siguiente teorema, el cual se aplicará posteriormente, se obtiene a partir de los tres teoremas previos y de los teoremas de límites.

1.10.5 Teorema

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{t(1 + \cos t)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos^2 t}{t(1 + \cos t)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t(1 + \cos t)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t}
\end{aligned}$$

Por el teorema 1.10.2

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

y como las funciones seno y coseno son continuas en 0, se infiere que

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t} &= \frac{0}{1 + 1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por tanto,

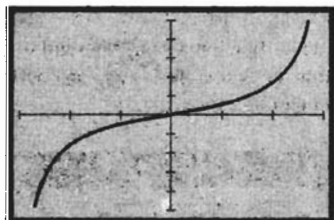
$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} &= 1 \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

∎

EJEMPLO 4 Sea g la función definida por

$$g(x) = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

(**a**) Trace la gráfica de g en un rectángulo de inspección conveniente. ¿A qué valor parece que se aproxima $g(x)$ cuando x tiende o se acerca a 0? (**b**) Confirme la respuesta del inciso (a) analíticamente calculando el $\lim_{t \to 0} g(x)$.



$[-3, 3]$ por $[-5, 5]$

$$g(x) = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

FIGURA 6

Solución

(**a**) La figura 6 muestra la gráfica de la función g trazada en el rectángulo de inspección de $[-3, 3]$ por $[-5, 5]$. La gráfica tiene un agujero en $x = 0$ porque $g(0)$ no existe. En la gráfica, parece que $g(x)$ se aproxima a 0 conforme x tiende a 0.

(**b**) Puesto que $\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) = 0$ y $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$, los teoremas de límites no pueden aplicarse al cociente $(1 - \cos x)/\operatorname{sen} x$. Sin embargo, si el numerador y el denominador se dividen entre x, lo cual está permitido ya que $x \neq 0$, se podrán aplicar los teoremas 1.10.2 y 1.10.5. Así,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1 - \cos x}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}}{\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

$$= \frac{0}{1}$$

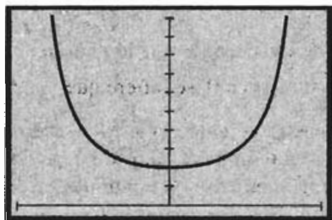
$$= 0$$

Por lo que se ha confirmado la respuesta del inciso (a). ◀

▶ ***EJEMPLO 5*** Sea h la función definida por

$$h(x) = \frac{2 \tan^2 x}{x^2}$$

(a) Trace la gráfica de h en un rectángulo de inspección conveniente. ¿A qué valor parece que se aproxima $h(x)$ cuando x tiende o se acerca a 0? **(b)** Confirme la respuesta del inciso (a) analíticamente calculando $\lim_{x \to 0} h(x)$



$[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ por $[0, 10]$

$$h(x) = \frac{2 \tan^2 x}{x^2}$$

FIGURA 7

Solución

(a) Se traza la gráfica de h en el rectángulo de inspección de $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ por $[0, 10]$ para obtener la figura 7. La gráfica tiene un agujero en $x = 0$ porque $h(0)$ no existe. En la gráfica, parece que $h(x)$ se aproxima a 2 conforme x se acerca a 0.

(b) Se aplica la identidad trigonométrica

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

y se tiene

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \tan^2 x}{x^2} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2 \cdot \cos^2 x}$$

$$= 2 \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$= 2$$

Este resultado confirma la respuesta del inciso (a). ◀

Del teorema 1.5.15 y de los hechos de que las funciones seno y coseno son continuas en 0, se puede demostrar que las funciones seno y coseno son continuas en todo número, como se establece en el teorema siguiente.

1.10.6 Teorema

Las funciones seno y coseno son continuas en cada número real.

Demostración El conjunto de números reales es el dominio de las funciones seno y coseno. Por tanto, se debe demostrar que si a es cualquier número real, entonces

$$\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

o, equivalentemente, del teorema 1.5.15,

$$\lim_{t\to 0} \operatorname{sen}(t + a) = \operatorname{sen} a \quad \text{y} \quad \lim_{t\to 0} \cos(t + a) = \cos a \qquad \textbf{(16)}$$

En la demostración se utilizarán las identidades

$$\operatorname{sen}(t + a) = \operatorname{sen} t \cos a + \cos t \operatorname{sen} a \qquad \textbf{(17)}$$

$$\cos(t + a) = \cos t \cos a - \operatorname{sen} t \operatorname{sen} a \qquad \textbf{(18)}$$

De (17),

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \operatorname{sen}(t + a) &= \lim_{t\to 0}(\operatorname{sen} t \cos a + \cos t \operatorname{sen} a)\\ &= \lim_{t\to 0} \operatorname{sen} t \cdot \lim_{t\to 0} \cos a + \lim_{t\to 0} \cos t \cdot \lim_{t\to 0} \operatorname{sen} a\\ &= 0 \cdot \cos a + 1 \cdot \operatorname{sen} a\\ &= \operatorname{sen} a\end{aligned}$$

Por tanto, se cumple la primera ecuación de (16); de modo que la función seno es continua en cada número real. De (18),

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \cos(t + a) &= \lim_{t\to 0}(\cos t \cos a - \operatorname{sen} t \operatorname{sen} a)\\ &= \lim_{t\to 0} \cos t \cdot \lim_{t\to 0} \cos a - \lim_{t\to 0} \operatorname{sen} t \cdot \lim_{t\to 0} \operatorname{sen} a\\ &= 1 \cdot \cos a - 0 \cdot \operatorname{sen} a\\ &= \cos a\end{aligned}$$

Por lo que se cumple la segunda ecuación de (16); así, la función coseno es continua en cada número real. ■

Mediante el uso de identidades trigonométricas, el teorema 1.8.4, acerca de la continuidad de una función racional, y el teorema 1.10.6 se puede demostrar que las otras cuatro funciones trigonométricas son continuas en su dominio.

1.10.7 Teorema

Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante son continuas en sus dominios.

La demostración del teorema 1.10.7 se deja como ejercicios (consulte los ejercicios 37 a 40).

EJERCICIOS 1.10

En los ejercicios 1 a 20, haga lo siguiente: (a) trace la gráfica de f en un rectángulo de inspección conveniente. ¿A qué valor parece que se aproxima f(x) conforme x tiende o se acerca a 0? (b) Confirme la respuesta del inciso (a) calculando el $\lim_{x\to 0} f(x)$.

1. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{x}$

2. $f(x) = \dfrac{2x}{\operatorname{sen} 3x}$

3. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 9x}{\operatorname{sen} 7x}$

4. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 6x}$

5. $f(x) = \dfrac{3x}{\operatorname{sen} 5x}$

6. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2}$

7. $f(x) = \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}^2 3x}$

8. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^5 2x}{4x^5}$

9. $f(x) = \dfrac{x}{\cos x}$

10. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$

11. $f(x) = \dfrac{1 - \cos 4x}{x}$

12. $f(x) = \dfrac{1 - \cos 2x}{4x}$

13. $f(x) = \dfrac{3x^2}{1 - \cos^2 \frac{1}{2}x}$

14. $f(x) = \dfrac{1 - \cos^2 x}{2x^2}$

15. $f(x) = \dfrac{\tan x}{2x}$

16. $f(x) = \dfrac{\tan^4 2x}{4x^4}$

17. $f(x) = \dfrac{1 - \cos 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

18. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

19. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{\operatorname{sen} x}$

20. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{3x^2 + 2x}$

En los ejercicios 21 y 22, haga lo siguiente: (a) trace la gráfica de g en un rectángulo de inspección conveniente. ¿A qué se parece el comportamiento de g(t) conforme t se aproxima a 0 mediante valores mayores que 0? (b) Confirme la respuesta del inciso (a) calculando el $\lim_{t\to 0^+} g(t)$.

21. $g(t) = \dfrac{\text{sen } t}{t^2}$ **22.** $g(t) = \dfrac{\text{sen } 4t}{\cos 3t - 1}$

En los ejercicios 23 y 24, haga lo siguiente: (a) trace la gráfica de h en un rectángulo de inspección conveniente. ¿A qué valor parece que se aproxima h(t) conforme t tiende o se acerca a π/2? (b) Confirme la respuesta del inciso (a) calculando el $\lim_{t\to\pi/2} h(t)$. *Sugerencia: considere* $x = \frac{1}{2}\pi - t$.

23. $h(t) = \dfrac{1 - \text{sen } t}{\frac{1}{2}\pi - t}$ **24.** $h(t) = \dfrac{\frac{1}{2}\pi - t}{\cos t}$

En los ejercicios 25 y 26, haga lo siguiente: (a) trace la gráfica de f en un rectángulo de inspección conveniente. ¿A qué valor parece que se aproxima f(x) conforme x tiende o se acerca a π mediante valores mayores que π? (b) Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando $\lim_{x\to\pi^+} f(x)$. *Sugerencia: considere* $t = x - \pi$.

25. $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x - \pi}$ **26.** $f(x) = \dfrac{\tan x}{x - \pi}$

27. Si $R(\theta)$ pies es el alcance de un proyectil, entonces

$$R(\theta) = \frac{v_0{}^2 \text{ sen } 2\theta}{g} \qquad 0 \le \theta \le \tfrac{1}{2}\pi$$

donde v_0 pie/s es la velocidad inicial, g pie/s^2 es la constante de aceleración debida a la gravedad, y θ es la medida en radianes del ángulo que el cañón forma con la horizontal. Demuestre que R es continua en su dominio.

28. Si un cuerpo cuyo peso es de W libras es arrastrado a lo largo de un piso horizontal a una velocidad constante por una fuerza de magnitud F libras y dirigida en un ángulo de θ radianes con respecto al piso, entonces

$$F(\theta) = \frac{kW}{k \text{ sen } \theta + \cos \theta}$$

donde k es una constante llamada *coeficiente de fricción* y $0 < k < 1$. Demuestre que F es continua en $[0, \frac{1}{2}\pi]$.

En los ejercicios 29 a 32, utilice el teorema de estricción para determinar el límite. En los ejercicios 29 y 30, apoye su respuesta gráficamente.

29. $\lim_{x\to 0} x \cos \dfrac{1}{x}$ **30.** $\lim_{x\to 0} x^2 \text{ sen } \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

31. $\lim_{x\to 3} g(x)$, si $|g(x) + 4| < 2(3 - x)^4$ para toda x

32. $\lim_{x\to -2} g(x)$, si $|g(x) - 3| < 5(x + 2)^2$ para toda x

En los ejercicios 33 y 34, determine el límite si existe y apoye su respuesta gráficamente.

33. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen(sen } x)}{x}$ **34.** $\lim_{x\to 0} \text{sen } x \text{ sen } \dfrac{1}{x}$

35. Dado que $1 - \cos^2 x \le f(x) \le x^2$, para toda x en el intervalo abierto $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, determine $\lim_{x\to 0} f(x)$.

36. Dado que $-\text{sen } x \le f(x) \le 2 + \text{sen } x$, para toda x en el intervalo abierto $(-\pi, 0)$, determine $\lim_{x\to -\pi/2} f(x)$.

En los ejercicios 37 a 40, demuestre que la función es continua en su dominio.

37. La función tangente

38. La función cotangente

39. La función secante

40. La función cosecante

41. Si $|f(x)| \le M$ para toda x, donde M es una constante, utilice el teorema de estricción para demostrar que $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$.

42. Considere que $|f(x)| \le M$ para toda x, donde M es una constante. Además suponga que $\lim_{x\to a} |g(x)| = 0$. Utilice el teorema de estricción para demostrar que $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

43. Si $|f(x)| \le k|x - a|$ para toda $x \ne a$, donde k es una constante, demuestre que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

44. Dada $f(x) = \text{sen}(1/x)$, trace la gráfica de f en cada uno de los siguientes rectángulos de inspección: **(a)** [−2, 2] por [−2, 2]; **(b)** [−1, 1] por [−2, 2]; **(c)** [−0.5, 0.5] por [−2, 2]; **(d)** [−0.25, 0.25] por [−2, 2]; **(e)** [−0.1, 0.1] por [−2, 2]; **(f)** [−0.01, 0.01] por [−2, 2]; **(g)** ¿Sospecha que el $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe? Si es así, ¿qué número sospecha que es y por qué? O, ¿sospecha que el $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe? Si es así, ¿por qué?

45. Haga el ejercicio 44 considerando ahora que $f(x) = \cos \dfrac{1}{x}$.

46. Haga el ejercicio 44 considerando ahora que $f(x) = \tan \dfrac{1}{x}$.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 1

▶ *SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 1*

1. Defina *función* y en su definición incluya los conceptos de *dominio* y *contradominio:*

2. Invente un ejemplo de una función que tenga la propiedad indicada:

(a) El dominio es el conjunto de todos los números reales.

(b) El dominio es el conjunto de todos los números no negativos.

(c) El dominio es el conjunto de todos los números negativos.

(d) El dominio es el conjunto de todos los números reales excepto 0.

(e) El contradominio es el conjunto de todos los números enteros.

3. ¿Qué se entiende por *gráfica de una función*?

4. Invente un ejemplo de una función que tenga la propiedad indicada:

(a) La gráfica de f tiene un "agujero" en $x = 4$, cuando $f(4)$ no está definido.

(b) La gráfica de f tiene un "agujero" en $x = 4$, cuando $f(4)$ está definido.

(c) La función f está definida a trozos para $x < 2$ y $2 \leq x$, donde la gráfica de f se rompe en $x = 2$.

(d) La función f está definida a trozos para $x < 2$ y $2 \leq x$, donde la gráfica de f no se rompe en $x = 2$.

5. Defina la *suma, diferencia, producto* y *cociente* de dos funciones f y g, y establezca cómo se relaciona el dominio de la función resultante con los dominios de las funciones f y g.

6. Invente un ejemplo de dos funciones f y g, tales que al menos una no sea una función polinomial, y defina $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ y $(f/g)(x)$. Determine los dominios de f y g y los dominios de las funciones resultantes.

7. Defina la *función compuesta* de dos funciones f y g, y establezca cómo se relaciona el dominio de la función compuesta con los dominios de las funciones f y g.

8. Invente un ejemplo de dos funciones f y g, tales que al menos una no sea una función polinomial, y defina $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$. Determine los dominios de f y g, así como los dominios de $f \circ g$ y $g \circ f$.

9. ¿Qué se entiende por: **(a)** *función par*, **(b)** *función impar*? Describa la simetría de las gráficas de cada uno de estos tipos de funciones.

10. Invente un ejemplo de una función, diferente de una polinomial, que sea **(a)** par, **(b)** impar y **(c)** ni par ni impar.

11. Defina con precisión, empleando la notación ϵ-δ, lo que se entiende por: *el límite de $f(x)$ conforme x se aproxima a a es igual a L*. Ahora establezca en palabras lo que significa sin utilizar la notación ϵ-δ y sin usar las palabras *límite* y *tiende* o *se aproxima*.

12. ¿Cómo se utiliza la definición del límite de una función para demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = L$?

13. Describa en términos geométricos la relación entre ϵ y δ de la definición del límite de una función.

14. Invente un ejemplo de una función para la cual:

(a) $f(a)$ no existe, pero $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

(b) $f(a)$ existe, pero $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe;

(c) tanto $f(a)$ como $\lim_{x \to a} f(x)$ existen, pero no son iguales.

15. ¿Qué se entiende cuando se dice que *el límite de una función, cuando existe es único*? Establezca el teorema que garantiza este hecho.

16. ¿Cómo se utilizan los teoremas de límites para calcular el límite de una función?

17. Establezca los teoremas que tratan sobre los límites de la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones.

18. ¿Por qué no es preciso el siguiente enunciado: *El límite de la suma de dos funciones es la suma de sus límites*? Invente un ejemplo de dos funciones para las cuales el enunciado es incorrecto.

19. Invente un ejemplo de dos funciones f y g tales que al menos una no sea una función polinomial, y muestre cómo se aplican los teoremas de la sugerencia 17.

20. Defina con precisión, utilizando la notación ϵ-δ, cada uno de los siguientes *límites laterales*: **(a)** $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$; **(b)** $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$. Ahora establezca en palabras lo que significa cada una de estas definiciones sin utilizar la notación ϵ-δ ni usar las palabras *límite* y *tiende* o *se aproxima*.

21. ¿Cómo están relacionados los límites laterales y los límites bilaterales?

22. ¿Cuándo es necesario emplear los límites laterales para calcular un límite bilateral? Invente un ejemplo para ilustrar su respuesta.

23. ¿Cuándo pueden emplearse los límites laterales para demostrar que un límite bilateral no existe? Invente un ejemplo para ilustrar su respuesta.

24. Defina con precisión, empleando la notación δ-N, cada una de las siguientes expresiones: **(a)** conforme x se aproxima a a, $f(x)$ crece sin límite; **(b)** conforme x se aproxima a a, $f(x)$ decrece sin límite. Ahora establezca en palabras lo que significa cada una de estas definiciones sin utilizar la notación δ-N y sin usar las palabras *límite, tiende a* o *se aproxima a, infinito, crece sin límite* o *decrece sin límite*.

25. ¿Cómo se evalúa el límite de una función racional para la cual el límite del denominador es cero y el límite del numerador es una constante diferente de cero?

26. ¿Qué es la *asíntota vertical* de la gráfica de una función?

27. ¿Cómo puede determinarse cualquier asíntota vertical para la gráfica de una función?

28. Invente ejemplos de dos funciones racionales tales que la gráfica de una tenga un agujero en el punto donde $x = 3$ y la otra tenga a la recta $x = 3$ como una asíntota vertical.

29. Defina: la *función f es continua en el número a*.

30. Invente un ejemplo de una función discontinua en el número 1, debido a las condiciones indicadas:

(a) $f(1)$ no existe, pero $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe; **(b)** $f(1)$ existe pero $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe; **(c)** tanto $f(1)$ como $\lim_{x \to 1} f(x)$ existen, pero no son iguales.

31. ¿Cuál es la diferencia entre *discontinuidad esencial* y *discontinuidad removible*?

32. Invente un ejemplo de una función que tenga una discontinuidad esencial en $x = 2$. Después invente un ejemplo de una función que tenga una discontinuidad removible en $x = 2$ y muestre cómo puede removerse o eliminarse esta discontinuidad.

33. Establezca los teoremas concernientes a la continuidad de funciones polinominales y racionales. ¿Cómo se aplican estos teoremas para calcular los límites de estas funciones?

34. ¿Qué condiciones de continuidad de las funciones f y g son necesarias para que la función compuesta $f \circ g$ sea continua en el número a?

35. Invente un ejemplo de dos funciones f y g tales que la función compuesta $f \circ g$ sea continua en cada número del intervalo abierto $(-3, 3)$. Muestre que las funciones f y g de su ejemplo cumplen las condiciones de la respuesta de la sugerencia 34.

36. Invente un ejemplo de una función que sea discontinua en el número c y que sea continua por la derecha de c. Muestre que su función satisface los requerimientos.

37. Defina: la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.

38. Establezca el *teorema del valor intermedio*.

39. Invente un ejemplo de una función que ilustre el teorema del valor intermedio. Muestre que la hipótesis y la conclusión del teorema son satisfechas por su función.

40. Establezca el *teorema de estricción*. Invente un ejemplo de tres funciones f, g y h que satisfagan las hipótesis de este teorema y muestre que se cumple la conclusión.

41. Invente un ejemplo de tres funciones f, g y h que ilustren cómo se aplica el teorema de estricción para calcular el límite de $g(x)$ cuando los límites de $f(x)$ y $h(x)$ se conocen.

42. ¿A qué es igual el $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ y cómo se utiliza su valor para demostrar que la función seno es continua en 0?

43. ¿Cómo se emplea la continuidad de la función seno en 0 para demostrar que la función coseno es continua en 0?

44. ¿Cómo se usa el hecho de que las funciones seno y coseno son continuas en 0 para demostrar que dichas funciones son continuas en cada número real?

45. ¿Cómo se demuestra la continuidad de las otras cuatro funciones trigonométricas a partir de la continuidad de las funciones seno y coseno?

▶ EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 1

1. Dada $f(x) = 4 - x^2$, determine: **(a)** $f(1)$; **(b)** $f(-2)$; **(c)** $f(3)$; **(d)** $f(x - 1)$; **(e)** $f(x^2)$; **(f)** $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.

2. Dada $g(x) = \sqrt{1 - x}$, determine: **(a)** $g(1)$; **(b)** $g(-3)$; **(c)** $g(x + 1)$; **(d)** $g(1 - x^2)$; **(e)** $\dfrac{g(x + h) - g(x)}{h}$, $h \neq 0$.

En los ejercicios 3 a 6, defina las siguientes funciones y determine los dominios de las funciones resultantes: (a) $f + g$; (b) $f - g$; (c) $f \cdot g$; (d) f/g; (e) g/f; (f) $f \circ g$; (g) $g \circ f$.

3. $f(x) = \sqrt{x + 2}$; $g(x) = x^2 - 4$

4. $f(x) = x^2 - 9$; $g(x) = \sqrt{x + 5}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $g(x) = \sqrt{x}$

6. $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

En los ejercicios 7 y 8, trace la gráfica de la función y a partir de la gráfica conjeture si la función es par, impar o de ninguno de estos tipos. Después confirme su conjetura analíticamente.

7. **(a)** $f(x) = 2x^3 - 3x$ **(b)** $g(x) = 5x^4 + 2x^2 - 1$
(c) $h(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 - x$
(d) $F(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - x}$

8. **(a)** $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x^2 - 1}$ **(b)** $g(x) = \dfrac{x}{|x|}$
(c) $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$ **(d)** $F(x) = x^2 [\![x]\!]$

En los ejercicios 9 y 10, trace la gráfica de la función y determine su dominio y su contradominio.

9. **(a)** $f(x) = 4 - 2x$ **(b)** $g(x) = x^2 - 4$
(c) $h(x) = \sqrt{x^2 - 16}$ **(d)** $F(x) = \sqrt{16 - x^2}$
(e) $f(x) = |5 - x|$ **(f)** $g(x) = 5 - |x|$

10. **(a)** $g(x) = 3x + 2$ **(b)** $f(x) = 9 - x^2$
(c) $H(x) = \sqrt{1 - x^2}$ **(d)** $G(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
(e) $g(x) = |x + 4|$ **(f)** $f(x) = |x| + 4$

En los ejercicios 11 a 14, dibuje la gráfica de la función y determine su dominio y su contradominio.

11. **(a)** $g(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$

(b) $G(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x \neq -4 \\ 3 & \text{si } x = -4 \end{cases}$

12. **(a)** $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

(b) $F(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

13. **(a)** $F(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 0 \\ 3 + 2x & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

(b) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \le 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$

14. (a) $G(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \le 0 \\ 4 - 2x & \text{si } 0 < x \end{cases}$

(b) $H(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ (x + 2)^2 & \text{si } -1 \le x \end{cases}$

En los ejercicios 15 a 20, se han dado f(x), a, L y ϵ. (a) Utilice una figura y un argumento semejante a los de los ejemplos 1 y 3 de la sección 1.4 para determinar una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon$$

(b) Apoye la elección de δ del inciso (a) con la graficadora. (c) Confirme analíticamente, empleando las propiedades de las desigualdades, la elección de δ del inciso (a).

15. $f(x) = 2x - 5; a = 3; L = 1; \epsilon = 0.05$

16. $f(x) = 3x + 2; a = 1; L = 5; \epsilon = 0.2$

17. $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}; a = 5; L = 10; \epsilon = 0.1$

18. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 9x + 10}{x + 2}; a = -2; L = 1; \epsilon = 0.03$

19. $f(x) = x^2 + 4; a = 2; L = 8; \epsilon = 0.3$

20. $f(x) = x^2 - 3x; a = 3; L = 0; \epsilon\ 0.08$

En los ejercicios 21 a 26, demuestre que el límite es el número indicado aplicando la definición 1.5.1; esto es, para cualquier $\epsilon > 0$, determine una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon$$

21. $\lim_{x \to 3} (2x - 5) = 1$

22. $\lim_{x \to -2} (8 - 3x) = 14$

23. $\lim_{x \to -1} (3x + 8) = 5$

24. $\lim_{x \to 5} (4x - 11) = 9$

25. $\lim_{x \to -3/4} \dfrac{16x^2 - 9}{4x + 3} = -6$

26. $\lim_{x \to 1/3} \dfrac{1 - 9x^2}{1 - 3x} = 2$

En los ejercicios 27 a 34, calcule el límite y, cuando sea apropiado, indique los teoremas de límites empleados.

27. $\lim_{x \to 2} (3x^2 - 4x + 5)$

28. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 5x - 14}$

29. $\lim_{z \to -3} \dfrac{z^2 - 9}{z + 3}$

30. $\lim_{h \to 1} \dfrac{h^2 - 4}{3h^3 + 6}$

31. $\lim_{x \to 1/2} \sqrt[3]{\dfrac{4x^2 + 4x - 3}{4x^2 - 1}}$

32. $\lim_{t \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 + t}}{t}$

33. $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{9 - t} - 3}{t}$

34. $\lim_{y \to -4} \sqrt{\dfrac{5y + 4}{y - 5}}$

En los ejercicios 35 a 42, calcule el límite si existe, y apoye su respuesta trazando la gráfica de la función en un rectángulo de inspección adecuado.

35. $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{3x^2 + 8x + 5}$

36. $\lim_{y \to 3} \sqrt{\dfrac{y - 3}{y^3 - 27}}$

37. $\lim_{x \to 9} \dfrac{2\sqrt{x} - 6}{x - 9}$

38. $\lim_{y \to 5^-} \sqrt{\dfrac{25 - y^2}{y - 5}}$

39. $\lim_{s \to 7} \dfrac{5 - \sqrt{4 + 3s}}{7 - s}$

40. $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 - 5}{2x^3 - 3x^2}$

41. $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{[\![x]\!] - 1}{[\![x]\!] - x}$

42. $\lim_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x - 1} - 2}{x - 5}$

En los ejercicios 43 a 48, dibuje la gráfica de la función y calcule el límite indicado si existe; si el límite no existe, establezca la razón.

43. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 3 \\ x + 5 & \text{si } 3 \le x \end{cases}$

(a) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$; (b) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$; (c) $\lim_{x \to 3} f(x)$.

44. $g(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$

(a) $\lim_{x \to 0^-} g(x)$; (b) $\lim_{x \to 0^+} g(x)$; (c) $\lim_{x \to 0} g(x)$.

45. $h(t) = \dfrac{|t - 1|}{t - 1}$

(a) $\lim_{t \to 1^-} h(t)$; (b) $\lim_{t \to 1^+} h(t)$; (c) $\lim_{t \to 1} h(t)$.

46. $f(r) = \begin{cases} |r - 2| & \text{si } r \ne 2 \\ 3 & \text{si } r = 2 \end{cases}$

(a) $\lim_{r \to 2^-} f(r)$; (b) $\lim_{r \to 2^+} f(r)$; (c) $\lim_{r \to 2} f(r)$.

47. $g(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x < -4 \\ \sqrt{16 - x^2} & \text{si } -4 \le x \le 4 \\ 4 - x & \text{si } 4 < x \end{cases}$

(a) $\lim_{x \to -4^-} g(x)$; (b) $\lim_{x \to -4^+} g(x)$; (c) $\lim_{x \to -4} g(x)$;
(d) $\lim_{x \to 4^-} g(x)$; (e) $\lim_{x \to 4^+} g(x)$; (f) $\lim_{x \to 4} g(x)$.

48. $h(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \le 2 \\ 2 - x & \text{si } 2 < x \le 4 \\ x - 2 & \text{si } 4 < x \end{cases}$

(a) $\lim_{x \to 2^-} h(x)$; (b) $\lim_{x \to 2^+} h(x)$; (c) $\lim_{x \to 2} h(x)$;
(d) $\lim_{x \to 4^-} h(x)$; (e) $\lim_{x \to 4^+} h(x)$; (f) $\lim_{x \to 4} h(x)$.

En los ejercicios 49 a 54, calcule el límite y apoye su respuesta gráficamente.

49. (a) $\lim_{x \to -4^-} \dfrac{2x}{16 - x^2}$ (b) $\lim_{x \to -4^+} \dfrac{2x}{16 - x^2}$

50. (a) $\lim_{x \to -2^-} \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$ (b) $\lim_{x \to -2^+} \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$

51. (a) $\lim_{x \to 4^-} \dfrac{2x}{16 - x^2}$ (b) $\lim_{x \to 4^+} \dfrac{2x}{16 - x^2}$

52. (a) $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$ (b) $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$

53. **(a)** $\lim\limits_{t\to 5}\dfrac{\sqrt{t-4}}{(t-5)^2}$ **(b)** $\lim\limits_{t\to 5^+}\dfrac{4-t}{\sqrt{t-5}}$

54. **(a)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{3-x}}{(x+2)^2}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+2}}$

En los ejercicios 55 a 62, haga lo siguiente: (a) trace la gráfica de f en un rectángulo de inspección adecuado. ¿A qué número parece que se aproxima f(x) conforme x tiende o se acerca a 0? (b) Confirme la respuesta del inciso (a) analíticamente, calculando el límite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

55. $f(x) = \dfrac{x}{\text{sen}\,3x}$ **56.** $f(x) = \dfrac{x^2}{1-\cos x}$

57. $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,5x}{\text{sen}\,2x}$ **58.** $f(x) = \dfrac{1-\cos 3x}{\text{sen}\,3x}$

59. $f(x) = \dfrac{1-\cos^2 x}{x}$ **60.** $f(x) = \dfrac{4x}{\tan x}$

61. $f(x) = \dfrac{\csc 3x}{\cot x}$ **62.** $f(x) = \dfrac{2x^2-3x}{2\,\text{sen}\,x}$

En los ejercicios 63 a 68, determine las asíntotas verticales de la gráfica de la función y utilícelas para dibujar la gráfica.

63. $f(x) = \dfrac{x+8}{x-4}$ **64.** $f(x) = \dfrac{3x-2}{x-2}$

65. $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ **66.** $f(x) = \dfrac{-2}{x^2-x-6}$

67. $f(x) = \dfrac{5x^2}{x^2-4}$ **68.** $h(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$

En los ejercicios 69 a 74, dibuje la gráfica de la función; después observe donde se rompe la gráfica, determine los valores de x en los que la función es discontinua y muestre por qué la definición 1.8.1 *no se satisface en cada discontinuidad.*

69. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+x-2}$ **70.** $g(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

71. $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \le -2 \\ x-2 & \text{si } -2 < x \le 2 \\ 2-x & \text{si } 2 < x \end{cases}$

72. $F(x) = \begin{cases} |4-x| & \text{si } x \ne 4 \\ -2 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

73. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \le 1 \\ x^2-1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

74. $f(x) = \begin{cases} x^2-9 & \text{si } x < 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \\ 9-x^2 & \text{si } 3 < x \end{cases}$

En los ejercicios 75 a 78, demuestre que la función es discontinua en el número a. Después determine si la discontinuidad es esencial o removible. Si la discontinuidad es removible, redefina f(a) de modo que la discontinuidad sea eliminada.

75. $f(x) = \dfrac{x^2+2x-8}{x^2+3x-4}$; $a = -4$

76. $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x+3 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$; $a = 1$

77. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x \ne 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$; $a = 2$

78. $f(x) = \dfrac{|2x-6|}{2x-6}$; $a = 3$

En los ejercicios 79 a 82, la función es discontinua en el número a. (a) Trace la gráfica de f, la cual se rompe en el punto donde x = a. ¿Es esencial o removible la discontinuidad? Si parece que es removible, especule acerca de cómo debe redefinirse f(a) de modo que la discontinuidad sea eliminada. (b) Confirme la respuesta del inciso (a) analíticamente.

79. $f(x) = \dfrac{|4-x|-3}{x-1}$; $a = 1$

80. $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x+4}}{x}$; $a = 0$

81. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+9}-3}$; $a = 0$

82. $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; $a = 1$

En los ejercicios 83 y 84, (a) defina f ∘ g y (b) determine los números en los que f ∘ g es continua y establezca la razón.

83. **(a)** $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 25 - x^2$
(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{3-x}}$ y $g(x) = |x|$
(c) $f(x) = \text{sgn}\,x$ y $g(x) = x^2 - 1$

84. **(a)** $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 25$
(b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$
(c) $f(x) = \text{sgn}\,x$ y $g(x) = x^2 - x$

En los ejercicios 85 y 86, determine los valores de las constantes a y b que hagan a la función continua en todo número y dibuje la gráfica de la función resultante.

85. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \le 3 \\ ax+b & \text{si } 3 < x < 5 \\ x^2+2 & \text{si } 5 \le x \end{cases}$

86. $f(x) = \begin{cases} 3x+6a & \text{si } x < -3 \\ 3ax-7b & \text{si } -3 \le x \le 3 \\ x-12b & \text{si } 3 < x \end{cases}$

87. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es un número entero} \\ 0 & \text{si } x \text{ no es un número entero} \end{cases}$$

(a) Dibuje la gráfica de f. **(b)** ¿Para qué valores de a existe el límite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$? **(c)** ¿En qué números reales es continua f?

88. Proporcione un ejemplo de una función f para la cual $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)|$ exista pero que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no exista.

En los ejercicios 89 a 92, determine el intervalo más grande (o unión de intervalos), donde la función es continua. Apoye la respuesta con la graficadora.

89. (a) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$
(b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

90. (a) $f(x) = \dfrac{|x| + 1}{|x| - 1}$
(b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x - 2}$

91. (a) $f(x) = \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$
(b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

92. $F(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x < -4 \\ \sqrt{16 - x^2} & \text{si } -4 \leq x \leq 4 \\ 2 - x & \text{si } 4 < x \end{cases}$

En los ejercicios 93 a 96, haga lo siguiente: (a) verifique que se cumpla el teorema del valor intermedio para la función f, el intervalo cerrado [a, b] y el valor dado de k; (b) trace la gráfica de f y la recta y = k en la graficadora y estime, con cuatro cifras decimales, el número c de (a, b) tal que f(c) = k; (c) confirme analíticamente la estimación del inciso (b); (d) dibuje la gráfica de f en el intervalo [a, b] y muestre el punto (c, k).

93. $f(x) = x^2 - 4x + 1;\ [a, b] = [-10, 0];\ k = 10$

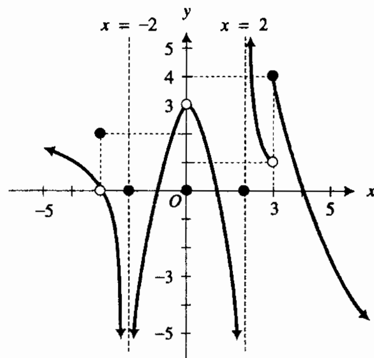
94. $f(x) = x^2 - 4x + 1;\ [a, b] = [0, 10];\ k = 10$

95. $f(x) = x - \sqrt{16 - x^2};\ [a, b] = [0, 4];\ k = -2$

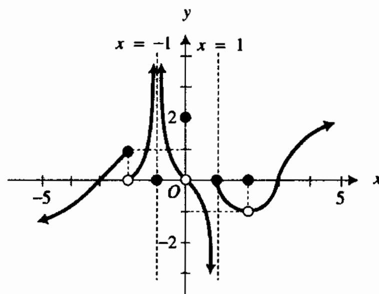
96. $f(x) = x - \sqrt{16 - x^2};\ [a, b] = [-4, 0];\ k = -2$

En los ejercicios 97 y 98, responda las preguntas a partir de la gráfica adjunta de la función f.

97. ¿Cuál es el valor de cada uno de los límites siguientes: **(a)** $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, **(e)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, **(f)** $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$; **(g)** $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$? **(h)** ¿En qué números es discontinua f? **(i)** ¿Cuáles de las discontinuidades del inciso (h) son esenciales? **(j)** ¿Cuáles de las discontinuidades del inciso (h) son removibles? ¿Cómo redefiniría la función para eliminar las discontinuidades?



98. ¿Cuál es el valor de cada uno de los límites siguientes: **(a)** $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; **(e)** $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, **(f)** $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; **(g)** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$? **(h)** ¿En qué números es discontinua f? **(i)** ¿Cuáles de las discontinuidades del inciso (h) son esenciales? **(j)** ¿Cuáles de las discontinuidades del inciso (h) son removibles? ¿Cómo redefiniría la función para eliminar las discontinuidades?



En los ejercicios 99 a 102, dibuje la gráfica de una función f que satisfaga las condiciones dadas.

99. −5, −3, −2, −1, 0, y 2 son los únicos ceros de f; $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$; f es continua en todos los números de los intervalos abiertos $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$.

100. f es continua en $(-\infty, -2)$, $[-2, 1)$, $[1, 3]$, y $(3, +\infty)$; $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 0$.

101. El dominio de f es $(-\infty, +\infty)$; $f(-4) = 2$; −2, 0, 2, 4 y 6 son los únicos ceros de f; $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 5$; f es continua en todos los números excepto −4, −2, 0, y 4.

102. f es continua en $(-\infty, -4]$, $(-4, 4)$ y $[4, +\infty)$; $\lim\limits_{x \to -6} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 0$.

En los ejercicios 103 a 106, obtenga un modelo matemático de la situación particular. Estos modelos se tratarán más adelante cuando se aplique el Cálculo a la situación. Defina la variable independiente y los valores de función como números, e indique las unidades de medición. Asegúrese de completar el ejercicio escribiendo una conclusión.

103. Se construye una cacerola abierta cortando cuadrados del mismo tamaño en las esquinas de un trozo rectangular de lámina de 14 por 18 pulg y doblando los lados hacia arriba. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen de la cacerola como una función de la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán.

(**b**) ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)?

(**c**) Demuestre que la función es continua en su dominio.

(**d**) En la graficadora, estime con aproximación de centésimos de pulgada la longitud del lado de los cuadrados que deben cortarse de modo que el volumen de la cacerola sea un máximo.

104. Una caja abierta tiene base cuadrada y un volumen de 4 000 pulg^3. (**a**) Encuentre un modelo matemático que exprese el área de la superficie total de la caja, como una función de la longitud del lado de la base cuadrada. (**b**) ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? (**c**) Demuestre que la función es continua en su dominio. (**d**) En la graficadora, determine, con aproximación de pulgadas, las dimensiones de la caja que pueda construirse con la mínima cantidad de material.

105. Se requiere que un anuncio, que contiene 50 m^2 de material impreso, tenga márgenes de 4 m en las partes superior e inferior y 2 m en los otros dos lados. (**a**) Encuentre un modelo matemático que exprese el área total del anuncio como una función de la dimensión horizontal de la región cubierta por el material impreso. (**b**) ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? (**c**) Demuestre que la función es continua en su dominio. (**d**) En la graficadora, estime, con aproximación de metros, las dimensiones del anuncio más pequeño que cumpla con estas especificaciones.



106. Un estanque puede mantener a 10 000 peces, la tasa de crecimiento de la población de peces es conjuntamente proporcional al número de peces presentes y a la diferencia entre 10 000 y el número de peces presentes. La tasa de crecimiento es de 90 peces semanales cuando se encuentran presentes 1 000 peces. (**a**) Encuentre un modelo matemático que exprese la tasa de crecimiento de la población, como una función de la cantidad de peces presentes. (**b**) ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? (**c**) Demuestre que la función es continua en su dominio. (**d**) En la graficadora, determine el tamaño de la población de peces, de modo que la tasa de crecimiento sea un máximo.

107. U y sgn son las funciones salto unitario y signo definidas en los ejercicios 47 y 49, respectivamente, de la sección 1.1. Encuentre fórmulas para la función F definida por

$$F(x) = (\operatorname{sgn} x) \cdot U(x + 1)$$

y dibuje su gráfica. ¿En qué números es F discontinua y por qué?

En los ejercicios 108 y 109, utilice el teorema de estricción para calcular los límites.

108. $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$ si $|g(x) + 5| < 3(4 - x)^2$ para toda x

109. $\lim\limits_{x \to 1} \left[(x - 1)^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x - 1}} \right]$

110. Dibuje la gráfica de f si $f(x) = [\![1 - x^2]\!]$ y $-2 \leq x \leq 2$. (**a**) ¿Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$? (**b**) ¿Es f continua en 0?

111. Dibuje la gráfica de g si $g(x) = (x - 1)[\![x]\!]$ y $0 \leq x \leq 2$. (**a**) ¿Existe $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$? (**b**) ¿Es g continua en 1?

112. (**a**) Demuestre que si $f(x) = g(x)$ para todos los valores de x excepto a, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ si los límites existen. (**b**) Demuestre que si $f(x) = g(x)$ para todos los valores de x excepto a, entonces si $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ no existe, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe. *Sugerencia:* muestre que la suposición de que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe conduce a una contradicción.

113. (**a**) Demuestre que si $\lim\limits_{h \to 0} f(x + h) = f(x)$, entonces $\lim\limits_{h \to 0} f(x + h) = \lim\limits_{h \to 0} f(x - h)$

(**b**) Demuestre que el inverso del teorema del inciso (a) es falso proporcionando un ejemplo de una función para la cual $\lim\limits_{h \to 0} f(x + h) = \lim\limits_{h \to 0} f(x - h)$, pero $\lim\limits_{h \to 0} f(x + h) \neq f(x)$.

114. Si el dominio de f es el conjunto de todos los números reales y f es continua en 0, demuestre que si

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

para todo a y b, entonces f es continua en todo número real.

115. Si el dominio de f es el conjunto de todos los números reales y f es continua en 0, demuestre que si

$$f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$$

para todo a y b, entonces f es continua en todo número real.

116. Suponga que la función f está definida en el intervalo abierto (0, 1) y que

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x(x - 1)}$$

Defina f en 0 y 1 de modo que f sea continua en el intervalo cerrado [0, 1].

Capítulo

2

Derivada y diferenciación

VISIÓN PRELIMINAR

En la sección 2.1 se introduce la *derivada*, considerando primero su interpretación geométrica como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función. Una función que tiene una derivada se dice *diferenciable*, y en la sección 2.2 se estudiará la relación entre diferenciabilidad y continuidad. La *derivada numérica* se aplica en la sección 2.3 para aproximar la derivada de una función en una graficadora y en secciones posteriores para apoyar gráficamente los cálculos de derivadas.

Una derivada se calcula mediante la operación de *diferenciación* o *derivación*. Los teoremas que permiten efectuar este cálculo sobre funciones algebraicas se establecen y demuestran en la sección 2.4, en la cual también se introducen las *derivadas de orden superior*.

La interpretación de la derivada como una *tasa de variación* (o *razón de cambio*), se inicia en la sección 2.5 con aplicaciones al movimiento rectilíneo. En la sección 2.6, se extienden las aplicaciones a otras disciplinas. Por ejemplo, la tasa de crecimiento de una población de bacterias proporciona una aplicación de la derivada en biología. La tasa de variación en una reacción química es de interés para un químico. Los economistas tratan con conceptos marginales tales como *ingreso marginal, costo marginal* y *utilidad marginal,* los cuales son tasas (o razones) de variación.

La diferenciación de funciones trigonométricas se trata en la sección 2.7, y en la sección 2.8 se establece y demuestra la *regla de la cadena*, un poderoso medio empleado para diferenciar funciones compuestas. La regla de la cadena se aplica en la sección 2.9 para obtener la fórmula que proporciona la derivada de la función potencia con exponentes racionales así como en la diferenciación de funciones definidas implícitamente. Los problemas que involucran tasas de variación relacionadas, tratadas en la sección 2.10, proporcionan otra aplicación importante de la derivada.

2.1 RECTA TANGENTE Y DERIVADA

Muchos problemas importantes en Cálculo dependen de la determinación de la *recta tangente* a la gráfica de una función en un punto específico de su gráfica. Esta sección se inicia con la definición de lo que significará *recta tangente*.



FIGURA 1

Recuerde de su curso de geometría plana que la recta tangente en un punto de una circunferencia se definió como la recta que intersecta a la circunferencia en sólo un punto. Tal definición no es suficiente para una curva en general. Por ejemplo, en la figura 1 la recta que debería ser la recta tangente a la curva en el punto P intersecta a la recta en otro punto Q. Para obtener una definición adecuada de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, se emplea el concepto de límite a fin de definir la *pendiente de la recta tangente* en el punto. Después, la recta tangente se determina por medio de su pendiente y el punto de tangencia.

Considere que la función f es continua en x_1. Se desea definir la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_1, f(x_1))$. Sea I un intervalo abierto que contiene a x_1, en el cual está definida f. Sea $Q(x_2, f(x_2))$ otro punto sobre la gráfica de f tal que x_2 también esté en I. Dibuje la recta que pasa por P y Q. Cualquier recta que pase por dos puntos de una curva se denomina **recta secante;** por tanto, la recta que pasa por P y Q es una recta secante. En la figura 2 se muestra la recta secante para varios valores de x_2. La figura 3 muestra una recta secante particular. En esta figura Q está a la derecha de P. Sin embargo, Q puede estar a la derecha o a la izquierda de P, como se muestra en la figura 2.

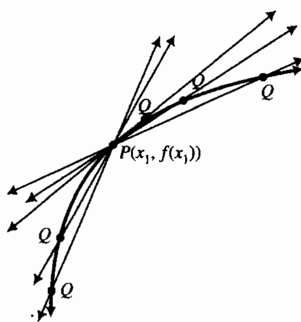


FIGURA 2

La diferencia de las abscisas (las coordenas x) de Q y P se denota por Δx (y se lee "delta x") de modo que

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Observe que Δx representa el cambio en el valor de x de x_1 a x_2 y puede ser positivo o negativo. Este cambio recibe el nombre **de incremento de x.** Note que el símbolo Δx para el incremento de x no significa "delta multiplicado por x".

Considere la recta secante PQ de la figura 3; su pendiente está determinada por

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

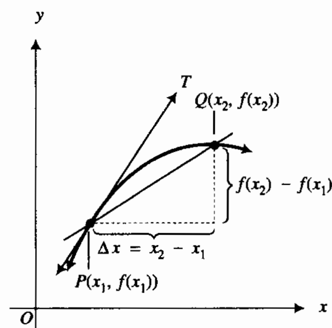


FIGURA 3

Como $x_2 = x_1 + \Delta x$, la ecuación anterior puede escribirse como

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Ahora considere el punto P como un punto fijo y que el punto Q se mueve a lo largo de la curva hacia P; esto es, Q tiende o se aproxima a P. Esto equivale a decir que Δx tiende a cero.

Conforme esto sucede, la recta secante gira sobre el punto fijo P. Si la recta secante PQ tiene una posición límite, es esta posición límite la que se quiere como la recta tangente a la gráfica de f en el punto P. Se desea así, que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en P sea el límite de m_{PQ} conforme Δx tiende a cero, si este límite existe. Si $\lim\limits_{\Delta x \to 0} m_{PQ}$ es igual a

$+\infty$ o a $-\infty$, entonces conforme Δx tiende a cero la recta PQ tiende a la recta que pasa por P y es paralela al eje y. En este caso se desearía que la recta tangente sea la recta $x = x_1$. Esta discusión conduce a la siguiente definición.

2.1.1 Definición de recta tangente a la gráfica de una función

Suponga que la función f es continua en x_1. La recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_1, f(x_1))$ es

(i) la recta que pasa por P y tiene pendiente $m(x_1)$, dada por

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad (1)$$

si este límite existe.

(ii) la recta $x = x_1$ si

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ es } +\infty \text{ o } -\infty$$

y

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ es } +\infty \text{ o } -\infty$$

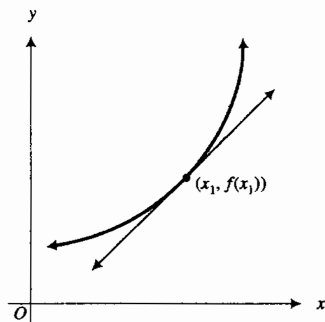


FIGURA 4

La figura 4 muestra la gráfica de una función f y su recta tangente cuando $m(x_1)$ existe. La figura 5 muestra la gráfica de una función f con una recta tangente vertical en el punto $(x_1,f(x_1))$.

Si no se cumple ninguno de los incisos de la definición 2.1.1, entonces no existe la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_1,f(x_1))$.

La *pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función* en un punto se denomina **pendiente de la gráfica** en el punto.

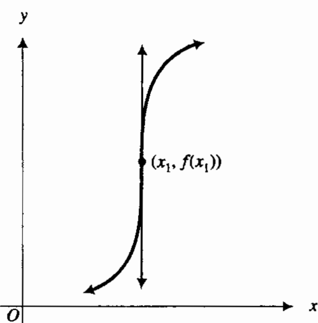


FIGURA 5

EJEMPLO 1 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 1$ en el punto (2, 3). Dibuje la parábola y muestre un segmento de la recta tangente en (2, 3).

Solución Primero se calcula la pendiente de la recta tangente en (2, 3). Con $f(x) = x^2 - 1$, se tiene de (1)

$$\begin{aligned} m(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(2 + \Delta x)^2 - 1] - 3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) \\ &= 4 \end{aligned}$$

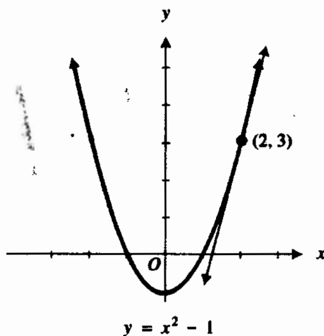


FIGURA 6

Así, la recta tangente en (2, 3) tiene pendiente 4. De la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, $y - y_1 = m(x - x_1)$, se obtiene

$$y - 3 = 4(x - 2)$$
$$4x - y - 5 = 0$$

La figura 6 presenta la parábola y un segmento de la recta tangente en (2, 3). ◀

2.1.2 Definición de recta normal a una gráfica

La recta normal a una gráfica en un punto dado es la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** La recta normal a la gráfica del ejemplo 1 en el punto (2, 3) es perpendicular a la recta tangente en ese punto. Como la pendiente de la recta tangente en (2, 3) es 4, entonces la pendiente de la recta normal en (2, 3) es $-\frac{1}{4}$, y una ecuación de esta recta normal es

$$y - 3 = -\tfrac{1}{4}(x - 2)$$
$$4y - 12 = -x + 2$$
$$x + 4y - 14 = 0$$

La figura 7 muestra la parábola y la recta normal en (2, 3). ◀

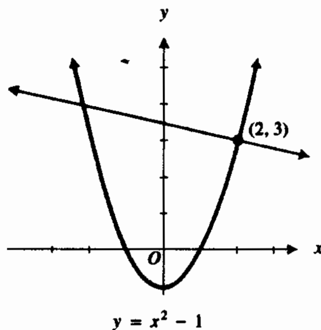


FIGURA 7

▶ ***EJEMPLO 2*** (a) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de

$$f(x) = x^3 - 3x$$

en el punto $(x_1, f(x_1))$. **(b)** Determine los puntos de la gráfica donde la recta tangente es horizontal y utilice estos puntos para dibujar la gráfica de f.

Solución

(a) Al calcular $f(x_1)$ y $f(x_1 + \Delta x)$ se obtiene

$$f(x_1) = x_1^3 - 3x_1$$
$$f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^3 - 3(x_1 + \Delta x)$$

De (1)

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

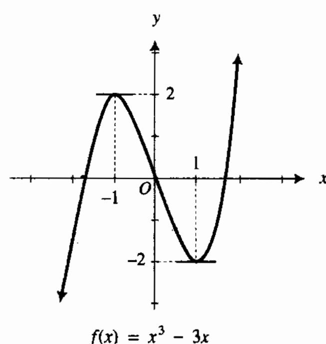
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^3 - 3(x_1 + \Delta x) - (x_1^3 - 3x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^3 + 3x_1^2\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x_1 - 3\Delta x - x_1^3 + 3x_1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_1^2\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3\Delta x}{\Delta x}$$

Como $\Delta x \neq 0$, el numerador y el denominador pueden dividirse entre Δx para obtener

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} [3x_1^2 + 3x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 3]$$
$$m(x_1) = 3x_1^2 - 3 \qquad (2)$$



$f(x) = x^3 - 3x$

FIGURA 8

(b) La recta tangente es horizontal en los puntos donde la pendiente es cero. Considerando $m(x_1) = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} 3x_1^2 - 3 &= 0 \\ x_1^2 &= 1 \\ x_1 &= \pm 1 \end{aligned}$$

Por tanto, la recta tangente es horizontal en los puntos $(-1, 2)$ y $(1, -2)$. Al localizar estos puntos y algunos otros se obtiene la gráfica mostrada en la figura 8. ◀

El tipo de límite en (1), empleado para definir la pendiente de una recta tangente, es uno de los más importantes en Cálculo. Este límite es de uso frecuente y recibe un nombre específico.

2.1.3 Definición de la derivada de una función

La derivada de la función f es aquella función, denotada por f', tal que su valor en un número x del dominio de f está dado por

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (3)$$

si este límite existe.

Si x_1 es un número particular del dominio de f, entonces

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad (4)$$

si este límite existe. Observe que el dominio de f' es un subconjunto del dominio de f.

Al comparar las fórmulas (1) y (4), se observa que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_1, f(x_1))$ es precisamente la derivada de f evaluada en x_1.

▶ ***EJEMPLO 3*** Determine la derivada de f si

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

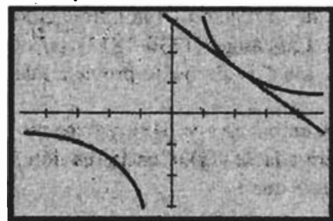
Solución Si x es un número del dominio de f, entonces de (3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{3}{x + \Delta x} - \dfrac{3}{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x - 3(x + \Delta x)}{\Delta x(x)(x + \Delta x)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3\Delta x}{\Delta x(x)(x + \Delta x)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3}{x(x + \Delta x)} \\ &= -\frac{3}{x^2} \end{aligned}$$

Por tanto, la derivada de f es la función f' definida por $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$. El dominio de f' es el conjunto de todos los números reales excepto 0, el cual es el mismo que el dominio de f. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Para la función f del ejemplo 3 se puede aplicar $f'(x)$ a fin de obtener una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en un punto particular. Por ejemplo, en el punto $(2, \frac{3}{2})$ la pendiente de la recta tangente es $f'(2) = -\frac{3}{4}$. Por tanto, una ecuación de esta recta tangente es

$$\begin{aligned} y - \tfrac{3}{2} &= -\tfrac{3}{4}(x - 2) \\ 4y - 6 &= -3x + 6 \\ 3x + 4y - 12 &= 0 \end{aligned}$$



$[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$

$f(x) = \frac{3}{x}$

FIGURA 9

La figura 9 muestra la gráfica de f y su recta tangente trazadas en el rectángulo de inspección de $[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$. ◀

Considere ahora la fórmula (4), la cual es

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

En esta fórmula considere

$$x_1 + \Delta x = x \tag{5}$$

Entonces,

"$\Delta x \to 0$" equivale a "$x \to x_1$" (6)

De (4), (5) y (6) se obtiene la fórmula siguiente para $f'(x_1)$:

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \tag{7}$$

si este límite existe. La fórmula (7) es una fórmula alternativa a la (4) para calcular $f'(x_1)$.

Los cocientes $\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ en (4) y $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ en (7) reciben el nombre de **cocientes de diferencias estándar** de la función f en el número x_1.

▶ ***EJEMPLO 4*** Para la función del ejemplo 3, calcule $f'(2)$ aplicando la fórmula (7).

Solución De la fórmula (7)

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{\Delta x \to 2} \frac{\frac{3}{x} - \frac{3}{2}}{x - 2} \\ &= \lim_{\Delta x \to 2} \frac{3(2 - x)}{2x(x - 2)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 2} \frac{-3}{2x}$$

$$= -\frac{3}{4}$$

lo cual concuerda con $f'(2)$ del ejemplo ilustrativo 2. ◀

El uso del símbolo f' para la derivada de la función f fue introducido por el matemático francés **Joseph Louis Lagrange** (1736–1813) en el siglo XVIII. Esta notación destaca que la función f' se *deriva* (o proviene) de la función f y su valor en x es $f'(x)$.

Si (x, y) es un punto de la gráfica de f, entonces $y = f(x)$, y y' se utiliza también como una notación para la derivada de $f(x)$. Con la función f definida por la ecuación $y = f(x)$ se considera que

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{8}$$

donde Δy se denomina **incremento de y** y denota un cambio en el valor de la función cuando x varía en Δx. Al utilizar (8) y escribir $\frac{dy}{dx}$ en lugar de $f'(x)$, la fórmula (3) se transforma en

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

El símbolo $\frac{dy}{dx}$ fue empleado como notación para la derivada por primera vez por el matemático alemán **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716). En el siglo XVII Leibniz y **Sir Isaac Newton** (1642–1727), trabajando de manera independiente, dieron a conocer casi simultáneamente la derivada. Leibniz probablemente pensó en dx y dy como pequeños cambios o variaciones de las variables x y y, y de la derivada de y con respecto a x como la razón de dy a dx cuando dy y dx son pequeños. El concepto de límite, como se acepta actualmente, fue desconocido por Leibniz y Newton.

En la notación de Lagrange el valor de la derivada en $x = x_1$ se indica por $f'(x_1)$. Con la notación de Leibniz se escribiría

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$$

Se debe recordar que cuando $\frac{dy}{dx}$ se utiliza como notación para la derivada de una función, a dy y dx no se les ha dado significado independiente hasta ahora en el texto, aunque posteriormente se definirán por separado. De modo que en esta ocasión $\frac{dy}{dx}$ es un símbolo para la derivada y no debe considerarse como una razón. De hecho, se puede considerar $\frac{d}{dx}$ como un operador (un símbolo para la operación de calcular la derivada), y cuando se escribe $\frac{dy}{dx}$, significa $\frac{d}{dx}(y)$, esto es, la derivada de y con respecto a x.

EJEMPLO 5 Calcule $\frac{dy}{dx}$ si

$$y = \sqrt{x}$$

Solución Se ha dado $y = f(x)$ donde $f(x) = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}\end{aligned}$$

A fin de evaluar este límite se racionaliza el numerador.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x - \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}\end{aligned}$$

Al dividir el numerador y el denominador entre Δx (ya que $\Delta x \neq 0$) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

◀

Otras dos notaciones para la derivada de una función f son

$$\frac{d}{dx}[f(x)] \quad \text{y} \quad D_x[f(x)]$$

Cada una de estas notaciones permite indicar la función original en la expresión para la derivada. Por ejemplo, se puede escribir el resultado del ejemplo 5 como

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{o como} \quad D_x(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Por supuesto, si la función y las variables se denotan por otras letras diferentes de f, x y y, las notaciones para la derivada deben incluir esas letras. Por ejemplo, si la función g está definida por la ecuación $s = g(t)$, entonces la derivada de g puede indicarse en cada una de las siguientes formas:

$$g'(t) \qquad \frac{ds}{dt} \qquad \frac{d}{dt}[g(t)] \qquad D_t[g(t)]$$

EJERCICIOS 2.1

En los ejercicios 1 a 6, obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación en el punto dado. Dibuje la gráfica de la ecuación y muestre un segmento de la recta tangente en el punto.

1. $y = 9 - x^2$; $(2, 5)$
2. $y = x^2 + 4$; $(-1, 5)$
3. $y = 2x^2 + 4x$; $(-2, 0)$
4. $y = x^2 - 6x + 9$; $(3, 0)$
5. $y = x^3 + 3$; $(1, 4)$
6. $y = 1 - x^3$; $(2, -7)$

En los ejercicios 7 a 10, (a) determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_1, f(x_1))$. (b) Determine los puntos de la gráfica donde la recta tangente es horizontal y utilice estos puntos para dibujar la gráfica.

7. $f(x) = 3x^2 - 12x + 8$

8. $f(x) = 7 - 6x - x^2$

9. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x - 2$

10. $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

En los ejercicios 11 a 16, obtenga ecuaciones de la recta tangente y de recta normal a la gráfica de la ecuación en el punto indicado. Trace en la graficadora la gráfica junto con las rectas tangente y normal en el mismo rectángulo de inspección.

11. $y =$

12. $y = \sqrt{4 - x}$; $(-5, 3)$

13. $y = 2x - x^3$; $(-2, 4)$

14. $y = x^3 - 4x$; $(0, 0)$

15. $y = \dfrac{4}{x^2}$; $(2, 1)$

16. $y = -\dfrac{8}{\sqrt{x}}$; $(4, -4)$

17. Sea $f(x) = 3x^2 - 7x$. **(a)** En la calculadora determine los valores del cociente de diferencias estándar

$$\frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

cuando Δx es igual a 0.10, 0.09, 0.08, . . . , 0.01, y −0.10, −0.09, −0.08, . . . , −0.01. ¿A qué valor parece que se aproxima el cociente conforme Δx tiende a 0? **(b)** Calcule $f'(2)$ aplicando la fórmula (4) y compare este número con la respuesta del inciso (a). **(c)** En la calculadora determine los valores del cociente de diferencias estándar

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

cuando x es igual a 2.10, 2.09, 2.08, . . . , 2.01, y 1.90, 1.91, 1.92, . . . , 1.99. ¿A qué valor parece que se aproxima el cociente conforme x tiende a 2? **(d)** Calcule $f'(2)$ aplicando la fórmula (7) y compare este número con la respuesta del inciso (c).

18. Haga el ejercicio 17 considerando ahora $f(x) = x^3$.

19. Resuelva el ejercicio 17 considerando ahora $f(x) = \sqrt{6 - x}$.

20. Haga el ejercicio 17 considerando ahora $f(x) = \dfrac{1}{4 - x}$.

En los ejercicios 21 a 30, determine $f'(x_1)$ en dos formas: (a) aplique la fórmula (7); (b) aplique la fórmula (4).

21. $f(x) = \dfrac{8}{x - 2}$; $x_1 = 6$

22. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 1$; $x_1 = 4$

23. $f(x) = \operatorname{sen} x$; $x_1 = 0$

24. $f(x) = \cos x$; $x_1 = 0$

25. $f(x) = \operatorname{sen} x$; $x_1 = \frac{1}{2}\pi$

26. $f(x) = \cos x$; $x_1 = \frac{1}{2}\pi$

27. $f(x) = \sec x$; $x_1 = 0$

28. $f(x) = \tan x$; $x_1 = 0$

29. $f(x) = \cot x$; $x_1 = \frac{1}{2}\pi$

30. $f(x) = \csc x$; $x_1 = \frac{1}{2}\pi$

En los ejercicios 31 a 36, determine $f'(x)$ aplicando la fórmula (3).

31. $f(x) = -4$

32. $f(x) = 10$

33. $f(x) = 7x + 3$

34. $f(x) = 8 - 5x$

35. $f(x) = 4 + 5x - 2x^2$

36. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

En los ejercicios 37 a 40, calcule la derivada indicada.

37. $\dfrac{d}{dx}(8 - x^3)$

38. $\dfrac{d}{dt}(t^3 + t)$

39. $D_r\left(\dfrac{2r + 3}{3r - 2}\right)$

40. $D_x\left(\dfrac{1}{x^2} - x\right)$

En los ejercicios 41 a 44, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

41. $y = 3x + \dfrac{6}{x^2}$

42. $y = \sqrt[3]{x}$

43. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$

44. $y = \dfrac{4}{2x - 5}$

45. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 + 3$ que sea paralela a la recta $8x - y + 3 = 0$.

46. Determine una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - 4$ que sea paralela a la recta $3x + y = 4$.

47. Encuentre una ecuación de la recta normal a la curva $y = 2 - \frac{1}{3}x^2$ que sea paralela a la recta $x - y = 0$.

48. Obtenga una ecuación de cada recta normal a la curva $y = x^3 - 3x$ que sea paralela a la recta $2x + 18y - 9 = 0$.

49. Demuestre que no existe una recta que pase por el punto $(1, 5)$ que sea tangente a la curva $y = 4x^2$.

50. Demuestre que no existe una recta que pase por el punto $(1, 2)$ que sea tangente a la curva $y = 4 - x^2$.

51. Si g es continua en a y $f(x) = (x - a)\, g(x)$, determine $f'(a)$. *Sugerencia:* utilice la fórmula (7).

52. Si g es continua en a y $f(x) = (x^2 - a^2)\, g(x)$, determine $f'(a)$. *Sugerencia:* utilice la fórmula (7).

53. Si

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

calcule $f''(x)$ si $f(x) = ax^2 + bx$.

54. Emplee la fórmula del ejercicio 53 para determinar $f''(x)$ si $f(x) = a/x$.

55. Si $f'(a)$ existe, demuestre que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Sugerencia: $f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)$
$= f(a + \Delta x) - f(a) + f(a) - f(a - \Delta x)$

56. Sea f una función cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales tal que $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$ para toda a y b. Además, suponga que $f(0) = 1$ y que $f'(0)$ existe. Demuestre que $f'(x)$ existe para toda x y que

$$f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$$

57. Trace la parábola $y = \frac{1}{4}x^2$ y su recta tangente en el punto (2, 1) en el rectángulo de inspección de [−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]. Conforme aplique el aumento (*zoom*) de la graficadora en el punto (2, 1) describa lo que sucede. ¿Por qué ocurre esto?

58. Trace la parábola $y = \sqrt{x}$ y su recta tangente en el punto (1, 1) en el rectángulo de inspección de [−1, 3.7] por [−1, 2.1]. Conforme aplique el aumento (*zoom*) de la graficadora en el punto (1, 1) describa lo que sucede. ¿Por qué ocurre esto?

2.2 DIFERENCIABILIDAD Y CONTINUIDAD

El proceso de calcular la derivada de una función se denomina *diferenciación*; esto es, la **diferenciación** es la operación mediante la cual se obtiene la función f' a partir de la función f.

Si una función tiene una derivada en x_1, se dice que la función es **diferenciable** en x_1. Una función es **diferenciable en un intervalo abierto** si es diferenciable en cada número del intervalo. Si una función es diferenciable en cada número de su dominio, entonces se dice que es una **función diferenciable.**

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** En el ejemplo 3 de la sección 2.1, $f(x) = 3/x$ y $f'(x) = -3/x^2$. Como el dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto 0, y $f'(x)$ existe en cada número real excepto en 0, entonces f es una función diferenciable. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Sea g la función definida por $g(x) = \sqrt{x}$. El dominio de g es $[0, +\infty)$. Del ejemplo 5 de la sección 2.1,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Como $g'(0)$ no existe, g no es diferenciable en 0. Sin embargo, g es diferenciable en cualquier otro número de su dominio. Por tanto, g es diferenciable en el intervalo abierto $(0, +\infty)$. ◀

Se comienza la discusión acerca de diferenciabilidad y continuidad con el ejemplo siguiente.

▶ ***EJEMPLO 1*** Sea

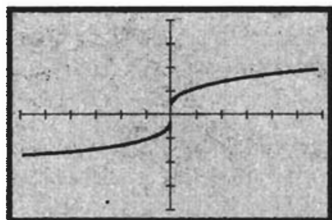
$$f(x) = x^{1/3}$$

(a) Muestre que f no es diferenciable en 0 aunque es continua en 0. **(b)** Trace la gráfica de f.

Solución

(a) Al aplicar la fórmula (7) de la seccion 2.1, se tiene, si el límite existe,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^{1/3} - 0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}} \end{aligned}$$



[−6, 6] por [−4, 4]

$f(x) = x^{1/3}$

FIGURA 1

Pero este límite no existe. Por tanto, f no es diferenciable en 0. No obstante, f es continua en 0 porque

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} x^{1/3} \\ &= 0 \\ &= f(0)\end{aligned}$$

(b) La figura 1 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [−6, 6] por [−4, 4]. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Para la función f del ejemplo 1, como

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^{1/3} - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

se concluye, por la definición 2.1.1 (ii), que $x = 0$ es la recta tangente a la gráfica de f en el origen. ◀

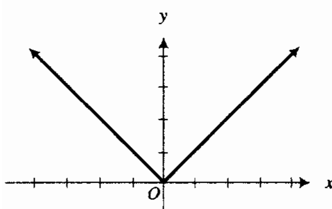
Del ejemplo 1 y del ejemplo ilustrativo 3, la función definida por $f(x) = x^{1/3}$ tiene las siguientes propiedades:

1. f es continua en 0.
2. f no es diferenciable en 0.
3. La gráfica de f tiene una recta tangente vertical en el punto donde $x = 0$.

En el siguiente ejemplo ilustrativo se tiene otra función que es continua pero no diferenciable en cero. La gráfica de esta función no tiene recta tangente en el punto donde $x = 0$.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** Sea f la función valor absoluto definida por

$$f(x) = |x|$$



$f(x) = |x|$

FIGURA 2

La gráfica de esta función se muestra en la figura 2. De la fórmula (7) de la sección 2.1, si el límite existe,

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}\end{aligned}$$

Como $|x| = x$ si $x > 0$ y $|x| = -x$ si $x < 0$, se consideran los límites laterales en 0:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^+} 1 \\ &= 1\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^-} (-1) \\ &= -1\end{aligned}$$

Debido a que $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}$, se deduce que el límite bilateral $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe. Por tanto, $f'(0)$ no existe, de modo que f no es diferen-renciable en 0.

Dado que no se cumple la definición 2.1.1 cuando $x = 0$, la gráfica de la función valor absoluto no tiene recta tangente en el origen. ◀

Como las funciones del ejemplo ilustrativo 4 y del ejemplo 1 son continuas en un número pero no son diferenciables en ese número, se puede concluir que la continuidad de una función en un número *no implica* la diferenciabilidad de la misma en el punto en cuestión. Sin embargo, la diferenciabilidad *implica* continuidad, lo cual se establece en el teorema siguiente.

2.2.1 Teorema

Si una función f es diferenciable en un número x_1, entonces f es continua en x_1.

Demostración Para demostrar que f es continua se debe probar que se cumplen las tres condiciones de la definición 1.8.1. Esto es, se debe probar que (i) $f(x_1)$ existe, (ii) $\lim_{x \to x_1} f(x)$ existe y (iii) $\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$.

Por hipótesis, f es diferenciable en x_1. Por tanto, existe $f'(x_1)$. Debido a la fórmula (7) de la sección 2.1

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$f(x_1)$ existe; en otro caso el límite anterior no tendría significado. Por tanto, se cumple la condición (i) en x_1. Ahora considere

$$\lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] = \lim_{x \to x_1} \left[(x - x_1) \cdot \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \right] \qquad (1)$$

Como

$$\lim_{x \to x_1} (x - x_1) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1)$$

se aplica el teorema del límite de un producto (1.5.7) al miembro derecho de (1) y se obtiene

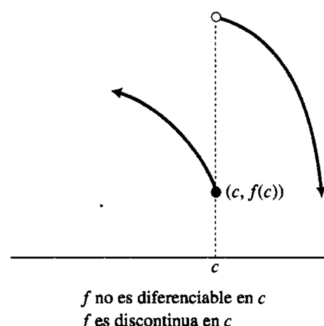
$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] &= \lim_{x \to x_1} (x - x_1) \cdot \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \\ &= 0 \cdot f'(x_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por el teorema 1.5.14, este límite equivale a

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$$

De esta ecuación se concluye que se cumplen las condiciones (ii) y (iii) para la continuidad de f en x_1. Por tanto, el teorema se ha demostrado. ■

Una función f puede no ser diferenciable en un número c por alguna de las siguientes razones:

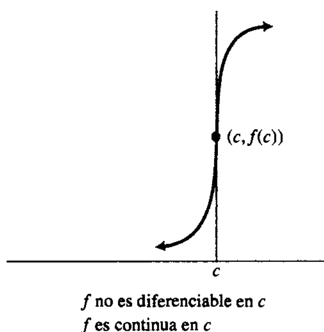


f no es diferenciable en *c*
f es discontinua en *c*

FIGURA 3

1. La función f es discontinua en c. La gráfica de la figura 3 es de este tipo.
2. La función f es continua en c, pero la gráfica de f tiene una recta tangente vertical en el punto donde $x = c$. La figura 4 muestra la gráfica de una función que tiene esta propiedad. Esta situación también ocurre en el ejemplo 1.
3. La función f es continua en c pero la gráfica de f no tiene recta tangente en el punto donde $x = c$. La figura 5 muestra la gráfica de una función que satisface esta condición. Observe un "cambio brusco" (o pico) en la gráfica en $x = c$. En el ejemplo ilustrativo 4 se tiene otra función de este tipo.

Antes de mostrar un ejemplo más de una función continua pero no diferenciable en un número, se presenta el concepto de *derivada lateral*.



f no es diferenciable en *c*
f es continua en *c*

FIGURA 4

2.2.2 Definición de derivada lateral

(i) Si la función f está definida en x_1, entonces la **derivada por la derecha** de f en x_1, denotada por $f'_+(x_1)$, está definida por

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'_+(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

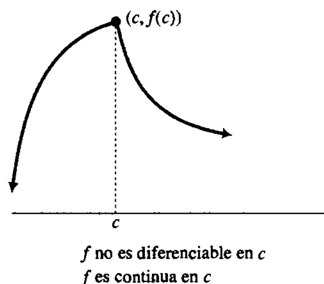
si existe el límite.

(ii) Si la función f está definida en x_1, entonces la **derivada por la izquierda** de f en x_1, denotada por $f'_-(x_1)$, está definida por

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'_-(x_1) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

si existe el límite.



f no es diferenciable en *c*
f es continua en *c*

FIGURA 5

A partir de esta definición y del teorema 1.6.3, se deduce que una función f definida en un intervalo abierto que contiene a x_1 es diferenciable en x_1 si y sólo si $f'_+(x_1)$ y $f'_-(x_1)$ existen y son iguales. Por supuesto, $f'(x_1)$, $f'_+(x_1)$ y $f'_-(x_1)$ son iguales.

EJEMPLO 2 Sea f la función definida por

$$f(x) = |1 - x^2|$$

(a) Dibuje la gráfica de f. **(b)** Demuestre que f es continua en 1.
(c) Determine si f es diferenciable en 1.

Solución Por la definición de valor absoluto, si $x < -1$ o $x > 1$, entonces $f(x) = -(1 - x^2)$, y si $-1 \leq x \leq 1$, entonces $f(x) = 1 - x^2$. Por tanto, f puede definirse como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

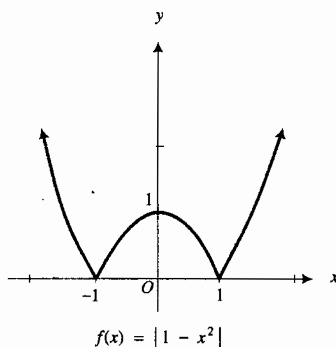


FIGURA 6

(a) La gráfica de f se muestra en la figura 6.

(b) Para demostrar que f es continua en 1 se verifican las tres condiciones para la continuidad.

(i) $f(1) = 0$

(ii) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (1 - x^2) = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 1) = 0$

Así, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

(iii) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

Como se cumplen las condiciones (i)–(iii), entonces f es continua en 1.

(c)

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(1 - x^2) - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(1 - x)(1 + x)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (-(1 + x)] = -2$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x^2 - 1) - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} (x + 1) = 2$$

Debido a que $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, se concluye que $f'(1)$ no existe, de modo que f no es diferenciable en 1. ◀

La función del ejemplo 2 tampoco es diferenciable en −1. En el ejercicio 32 se le pedirá que pruebe esto.

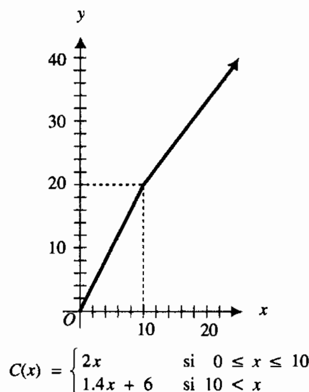


FIGURA 7

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

En el ejemplo ilustrativo 2 de la sección 1.8, se obtuvo el modelo matemático

$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 10 \\ 1.4x + 6 & \text{si} \quad 10 < x \end{cases}$$

donde $C(x)$ dólares es el costo total de x libras de un producto. La gráfica de C se presenta en la figura 7. En la sección 1.8 se mostró que C es continua en 10. Ahora se determinará si C es diferenciable en 10. Puesto que C está definida a trozos, se calcularán las derivadas laterales en 10.

$$C'_-(10) = \lim_{x \to 10^-} \frac{C(x) - C(10)}{x - 10} = \lim_{x \to 10^-} \frac{2x - 20}{x - 10} = \lim_{x \to 10^-} \frac{2(x - 10)}{x - 10} = \lim_{x \to 10^-} 2 = 2$$

$$C'_+(10) = \lim_{x \to 10^+} \frac{C(x) - C(10)}{x - 10} = \lim_{x \to 10^+} \frac{(1.4x + 6) - 20}{x - 10} = \lim_{x \to 10^+} \frac{1.4(x - 10)}{x - 10} = \lim_{x \to 10^+} 1.4 = 1.4$$

Como $C'_-(10) \neq C'_+(10)$, entonces C no es diferenciable en 10. ◀

EJEMPLO 3 Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 < x < b \\ 1 - \frac{1}{4}x & \text{si } b \leq x \end{cases}$$

(a) Determine un valor de b tal que f sea continua en b. **(b)** Dibuje la gráfica de f con el valor de b determinado en el inciso (a). **(c)** ¿Es diferenciable f en el valor de b determinado en el inciso (a)?

Solución

(a) La función f será continua en b si $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ y $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = f(b)$.

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{b} \qquad \lim_{x\to b^+} f(x) = \lim_{x\to b^+} (1 - \tfrac{1}{4}x) = 1 - \tfrac{1}{4}b$$

$f(b) = 1 - \frac{1}{4}b$; por tanto, f será continua en b si

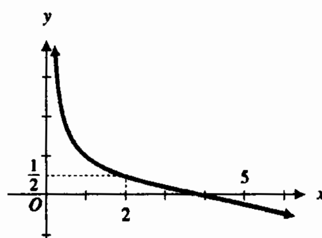
$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= 1 - \frac{1}{4}b \\ 4 &= 4b - b^2 \\ b^2 - 4b + 4 &= 0 \\ (b-2)^2 &= 0 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

Así

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 1 - \frac{1}{4}x & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

y f es continua en 2.

(b) La gráfica de f se presenta en la figura 8.



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 1 - \frac{1}{4}x & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

FIGURA 8

(c) Para determinar si f es diferenciable en 2 se calcularán $f'_-(2)$ y $f'_+(2)$.

$$\begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{2-x}{2x(x-2)} \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{2x} \\ &= -\tfrac{1}{4} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f'_+(2) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{(1 - \frac{1}{4}x) - \frac{1}{2}}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{2-x}{4(x-2)} \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{-1}{4} \\ &= -\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Como $f'_-(2) = f'_+(2)$, se concluye que $f'(2)$ existe, y en consecuencia, f es diferenciable en 2. ◀

EJEMPLO 4 En la planeación de una cafetería, se estimó que la ganancia diaria es de \$16 por lugar si se tienen de 40 a 80 lugares de capa-

cidad. Sin embargo, si se cuenta con más de 80 lugares, la ganancia diaria por cada lugar disminuirá en \$0.08 veces el número de lugares que exceden a 80. (**a**) Encuentre un modelo matemático que exprese la ganancia diaria como una función del número de lugares de la cafetería. (**b**) Demuestre que la función del inciso (a) es continua en su dominio. (**c**) Determine si la función del inciso (a) es diferenciable en 80.

Solución

(**a**) Sea x el número de lugares para la capacidad de la cafetería y $P(x)$ dólares la ganancia diaria. $P(x)$ se obtiene al multiplicar x por el número de dólares de la ganancia por cada lugar. Cuando $40 \leq x \leq 80$, la ganancia por lugar es \$16, de modo que $P(x) = 16x$. Cuando $x > 80$, el número de dólares de la ganancia por cada lugar es $16 - 0.08(x - 80)$; de donde se obtiene $P(x) = x[16 - 0.08(x - 80)]$; esto es, $P(x) = 22.40x - 0.08x^2$. Por tanto,

$$P(x) = \begin{cases} 16x & \text{si } 40 \leq x \leq 80 \\ 22.40x - 0.08x^2 & \text{si } 80 < x \leq 280 \end{cases}$$

El límite superior de 280 para x se obtiene al observar que $22.40x - 0.08x^2 = 0$ cuando $x = 280$; $22.40x - 0.08x^2 < 0$ cuando $x > 280$.

Aunque, por definición, x es un número entero no negativo, para tener continuidad se considerará que x toma todos los valores reales del intervalo $[40, 280]$.

(**b**) Como $P(x)$ es un polinomio en $[40, 80]$ y $(80, 280]$, entonces P es continua en esos intervalos. Para determinar la continuidad en 80 se calcularán los límites laterales en ese valor:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 80^-} P(x) &= \lim_{x\to 80^-} 16x \\ &= 1280 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{x\to 80^+} P(x) &= \lim_{x\to 80^+} (22.40x - 0.08x^2) \\ &= 1280 \end{aligned}$$

Como $P(80) = 1280$ y $\lim_{x\to 80} P(x) = 1280$, P es continua en 80. En consecuencia, P es continua en su dominio $[40, 280]$.

(**c**) Para determinar si P es diferenciable en 80, se calcularán las derivadas laterales en 80.

$$\begin{aligned} P'_-(80) &= \lim_{x\to 80^-} \frac{P(x) - P(80)}{x - 80} \\ &= \lim_{x\to 80^-} \frac{16x - 1280}{x - 80} \\ &= \lim_{x\to 80^-} \frac{16(x - 80)}{x - 80} \\ &= \lim_{x\to 80^-} 16 \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'_+(80) &= \lim_{x\to 80^+} \frac{P(x) - P(80)}{x - 80} \\ &= \lim_{x\to 80^+} \frac{(22.40x - 0.08x^2) - 1280}{x - 80} \\ &= \lim_{x\to 80^+} \frac{-0.08(x^2 - 280x + 16\,000)}{x - 80} \\ &= \lim_{x\to 80^+} \frac{-0.08(x - 80)(x - 200)}{x - 80} \\ &= \lim_{x\to 80^+} [-0.08(x - 200)] \\ &= 9.60 \end{aligned}$$

Como $P'_-(80) \neq P'_+(80)$, entonces P no es diferenciable en 80. ◀

En la sección 3.2, se considerará otra vez la situación del ejemplo 4 y se determinará la capacidad necesaria para obtener la máxima ganancia diaria.

EJERCICIOS 2.2

En los ejercicios 1 a 20, haga lo siguiente: (a) dibuje la gráfica de la función; (b) determine si f es continua en x_1; (c) calcule $f'_-(x_1)$ y $f'_+(x_1)$ si existen; (d) determine si f es diferenciable en x_1.

1. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -4 \\ -x - 6 & \text{si } -4 < x \end{cases}$ $\quad x_1 = -4$

2. $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{si } x < 2 \\ 3x - 7 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$ $\quad x_1 = 2$

3. $f(x) = |x - 3| \quad x_1 = 3$

4. $f(x) = 1 + |x + 2| \quad x_1 = -2$

5. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$ $\quad x_1 = 0$

6. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \end{cases}$ $\quad x_1 = 0$

7. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{si } 0 < x \end{cases}$ $\quad x_1 = 0$

8. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x - 2} & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$ $\quad x_1 = 2$

9. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x} & \text{si } x < 1 \\ (1 - x)^2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$ $\quad x_1 = 1$

10. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ -1 - 2x & \text{si } -1 \leq x \end{cases}$ $\quad x_1 = -1$

11. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 8x - 11 & \text{si } 2 < x \end{cases}$ $\quad x_1 = 2$

12. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } x < 3 \\ 6x - 18 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$ $\quad x_1 = 3$

13. $f(x) = \sqrt[3]{x + 1} \quad x_1 = -1$

14. $f(x) = (x - 2)^{-2} \quad x_1 = 2$

15. $f(x) = \begin{cases} 5 - 6x & \text{si } x \leq 3 \\ -4 - x^2 & \text{si } 3 < x \end{cases}$ $\quad x_1 = 3$

16. $f(x) = \begin{cases} -x^{2/3} & \text{si } x \leq 0 \\ x^{2/3} & \text{si } 0 < x \end{cases}$ $\quad x_1 = 0$

17. $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$ $\quad x_1 = 0$

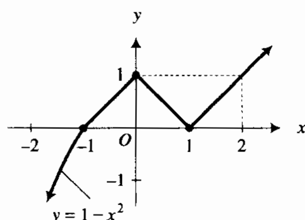
18. $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$ $\quad x_1 = 1$

19. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ x^3 & \text{si } 2 < x \end{cases}$ $\quad x_1 = 2$

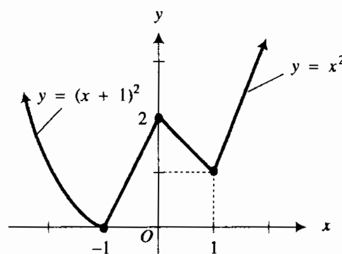
20. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 \leq x \end{cases}$ $\quad x_1 = 1$

Los ejercicios 21 a 26 tratan acerca de la función continua f cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales y cuya gráfica se muestra en la figura adjunta. Suponga que cada porción de la gráfica que parece ser un segmento de la recta es un segmento de recta. En cada ejercicio haga lo siguiente: (a) defina f como una función a trozos. Encuentre (b) $f'_-(-1)$, (c) $f'_+(-1)$, (d) $f'_-(0)$, (e) $f'_+(0)$, (f) $f'_-(1)$ y (g) $f'_+(1)$. (h) ¿En qué números f no es diferenciable?

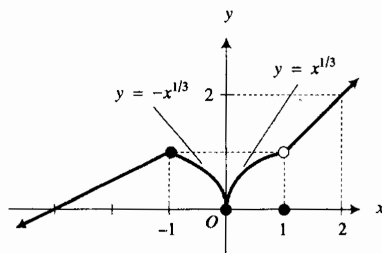
21.



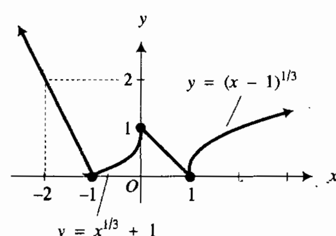
22.



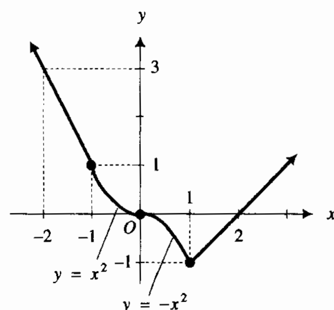
23.



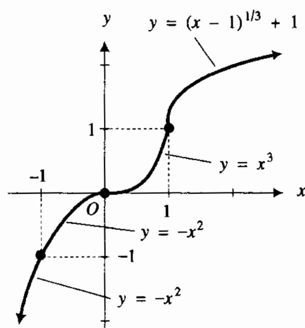
24.



25.



26.



En los ejercicios 27 a 30, dibuje la gráfica de alguna función continua f, cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales, la cual satisfaga las condiciones indicadas.

27. El contradominio de f es $(-\infty, +\infty)$; f es diferenciable en todo número excepto en 0 y 3; $f(-3) = -1$; $f(0) = 0$; $f(3) = 1$; $f'_-(0) = 1$; $f'_+(0) = 0$;

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = +\infty.$$

28. El contradominio de f es $[0, +\infty)$; f es diferenciable en todo número excepto en -2, 0 y 2; $f(-2) = 0$; $f(0) = 3$; $f(2) = 0$; $f'_-(-2) = -1$; $f'_+(-2) = 1$; $f'_-(2) = -1$;

$$f'_+(2) = 1;\ \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty.$$

29. El contradominio de f es $(-\infty, +\infty)$; f es diferenciable en todo número excepto en -2, 0 y 2; $f(-2) = 3$; $f(-1) = 0$; $f(0) = 0$; $f(1) = 0$; $f(2) = -3$; $f'_-(-2) = 1$; $f'_+(-2) = -1$; $f'_-(2) = -1$; $f'_+(2) = 1$;

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty;\ \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty.$$

30. El contradominio de f es $(-\infty, +\infty)$; f es diferenciable en todo número excepto en 0, y 4; $f(-2) = 0$; $f(0) = -1$; $f(4) = 1$; $f(5) = 0$; $f'_+(0) = 2$; $f'_-(4) = \frac{1}{2}$;

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty;\ \lim_{x\to 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = -\infty.$$

31. Para la fuga de petróleo del ejercicio 53 de la sección 1.8, determine si la función r es diferenciable en 2.

32. Demuestre que la función del ejemplo 2 es continua en -1 pero no es diferenciable en ese número.

33. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 7 & \text{si } 0 \le x \le b \\ \dfrac{6}{x} & \text{si } b < x \end{cases}$$

(**a**) Determine un valor de b tal que f sea continua en b. (**b**) Dibuje la gráfica de f con el valor de b determinado en el inciso (a). (**c**) ¿Es diferenciable f en el valor de b determinado en el inciso (a)?

34. Sea $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$. (**a**) Demuestre que $f'_-(0)$ y $f'_+(0)$ no existen. (**b**) Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$. (**c**) Dibuje la gráfica de f.

35. Determine los valores de a y b tales que la función f sea diferenciable en 1 y después dibuje la gráfica de f si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

36. Determine los valores de a y b tales que la función f sea diferenciable en 2 y después dibuje la gráfica de f si

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 - 1 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$

En los ejercicios 37 a 40, obtenga una función como modelo matemático de la situación particular. Aunque por definición la variable independiente represente un número entero no negativo, considere que dicha variable representa un número real no negativo a fin de tener los requerimientos necesarios de continuidad.

37. Una agencia de excursiones escolares puede transportar a 250 estudiantes con un costo de \$15 si no más de 150 estudiantes asisten a la excursión; sin embargo, el costo por alumno se reducirá en \$0.05 por cada alumno que exceda a los 150 hasta que el costo sea de \$10 por estudiante. (**a**) Obtenga un modelo matemático que exprese el ingreso en bruto como una función del número de estudiantes que asistirán a la excursión. (**b**) Demuestre que la función del inciso (a) es continua en su dominio. (**c**) Determine si la función del inciso (a) es diferenciable en 150.

38. Realice el ejercicio 37 considerando ahora que la reducción por cada estudiante que exceda a 150 es \$0.07.

39. Los naranjos que crecen en California producen 600 naranjas por año si no se plantan más de 20 árboles por acre. Por cada naranjo adicional plantado por acre el rendimiento por árbol decrece en 15 naranjas. (**a**) Encuentre un modelo matemático que exprese el número de naranjas producidas por año como una función del número de naranjos plantados por acre. (**b**) Demuestre que la función del inciso (a) es continua en su dominio. (**c**) Determine si la función del inciso (a) es diferenciable en 20.

40. Un club privado cobra una cuota de membresía anual de \$100 por miembro, menos \$0.50 por cada miembro que exceda a 600 y más \$0.50 por cada miembro que falte para completar 600. (**a**) Encuentre un modelo matemático que exprese el ingreso por las cuotas anuales como una función del número de sus miembros. (**b**) Demuestre que la función del inciso (a) es continua en su dominio. (**c**) Determine si la función del inciso (a) es diferenciable en 600.

41. En el ejemplo ilustrativo 4 se mostró que la función valor absoluto no es diferenciable en 0. Demuestre que

$$D_x(|x|) = \frac{|x|}{x} \quad \text{si } x \neq 0$$

Sugerencia: considere $|x| = \sqrt{x^2}$.

42. Dada $f(x) = [\![x]\!]$, determine $f'(x_1)$ si x_1 no es un número entero. Demuestre que $f'(x_1)$ no existe si x_1 es un número entero. Si x_1 es un número entero, ¿qué se puede decir acerca de $f'_-(x_1)$ y de $f'_+(x_1)$?

43. Sea $f(x) = (x - 1)[\![x]\!]$. Trace la gráfica de f para x en $[0, 2]$. Calcule, si existen: (**a**) $f'_-(1)$, (**b**) $f'_+(1)$, (**c**) $f'(1)$.

44. Sea $f(x) = (5 - x)[\![x]\!]$. Trace la gráfica de f para x en $[4, 6]$. Calcule, si existen, (**a**) $f'_-(5)$, (**b**) $f'_+(5)$, (**c**) $f'(5)$.

45. Dada $f(x) = (x - a)[\![x]\!]$, donde a es un número entero, muestre que $f'_-(a) + 1 = f'_+(a)$.

46. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ g'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

Demuestre que si $g'(a)$ existe, entonces f es continua en a.

47. (**a**) Sean $f(x) = |x|$ y $g(x) = -|x|$. Encuentre una fórmula para $(f + g)(x)$ y demuestre que $f + g$ es diferenciable en 0. Utilice las funciones f y g como ejemplos para explicar por qué es posible que la suma de dos funciones es diferenciable en un número aunque ninguna sea diferenciable en el número en cuestión. (**b**) Sean $F(x) = x^{-1}$ y $G(x) = -x^{-1}$. Encuentre una fórmula para $(F + G)(x)$. ¿Es diferenciable $F + G$ en 0? ¿Pueden emplearse las funciones F y G en lugar de f y g como ejemplos para la explicación del inciso (a)? Explique su respuesta.

2.3 DERIVADA NUMÉRICA

La *derivada numérica* es importante debido a que su gráfica puede trazarce en una gráficadora. Además, la derivada numérica puede emplearse para obtener una aproximación de la derivada de una función en un número particular siempre que la derivada exista.

Para desarrollar el concepto de derivada numérica, recuerde que $f'(a)$, la derivada de la función f evaluada en el número a, está definida como el límite del cociente de diferencias estándar

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \qquad (1)$$

si este límite existe. En el ejercicio 55 de la sección 2.1 se le pidió que demostrara que si $f'(a)$ existe, entonces

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\Delta x} \qquad (2)$$

Si no realizó este ejercicio cuando estudió la sección 2.1, regrese y hágalo ahora. El cociente

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\Delta x} \qquad (3)$$

que aparece en (2) se denomina **cociente de diferencias simétricas** de la función f en el número a. El término *simétricas* es apropiado porque el cociente es la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a - \Delta x, f(a - \Delta x))$ y $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$. Consulte la figura 1. Al valor elegido de Δx se le llama **tolerancia.**

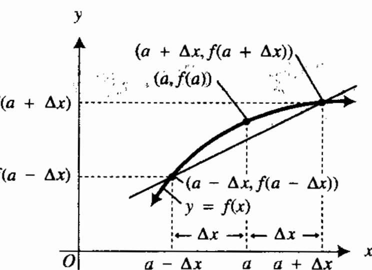


FIGURA 1

EJEMPLO 1 Sea

$$f(x) = \sqrt{x}$$

(a) Utilice el resultado del ejemplo 5 de la sección 2.1 para calcular el valor exacto de $f'(4)$. Obtenga una aproximación de $f'(4)$ empleando el cociente de diferencias simétricas de f en 4 con cada una de las tolerancias siguientes: **(b)** 0.1; **(c)** 0.01 y **(d)** 0.001.

Solución

(a) Del ejemplo 5 de la sección 2.1

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Así, $f'(4) = 0.25$.

(b)-(d) De (3), el cociente de diferencias simétricas de f en 4 es

$$\frac{\sqrt{4 + \Delta x} - \sqrt{4 - \Delta x}}{2\Delta x}$$

Ahora se evaluará el cociente con la tolerancia Δx indicada.

(b) $\Delta x = 0.1$

$$\frac{\sqrt{4 + 0.1} - \sqrt{4 - 0.1}}{2(0.1)} = 0.2500195366$$

(c) $\Delta x = 0.01$

$$\frac{\sqrt{4 + 0.01} - \sqrt{4 - 0.01}}{2(0.01)} = 0.2500001953$$

(d) $\Delta x = 0.001$

$$\frac{\sqrt{4 + 0.001} - \sqrt{4 - 0.001}}{2(0.001)} = 0.2500000019$$

Observe en el ejemplo 1 que el cociente de diferencias simétricas de f en 4 proporciona una buena aproximación de $f'(4)$, y la menor tolerancia da la mejor aproximación. Si para una tolerancia específica se compara la aproximación de $f'(a)$ determinada mediante el cociente de diferencias simétricas con la obtenida por medio del cociente de diferencias estándar (1), se observará que el cociente de diferencias simétricas proporciona una mejor aproximación. En los ejercicios 1 a 4 se le pedirá que realice algunas de estas comparaciones.

Se utilizará el cociente de diferencias simétricas para calcular la *derivada numérica* de una función en un número, exactamente como lo hacen algunas graficadoras con la elección de la tolerancia del usuario. Por tanto, se presenta la siguiente definición formal:

2.3.1 Definición de derivada numérica

La derivada numérica de la función f en el número a, denotada por NDER$(f(x), a)$, está definida por

$$\text{NDER}(f(x), a) = \frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\Delta x}$$

donde la elección de Δx depende de la aproximación deseada de NDER$(f(x), a)$ a $f'(a)$.

En este texto, se calculará NDER($f(x)$, a) con una tolerancia de 0.001; esto es,

$$\text{NDER}(f(x), a) = \frac{f(a + 0.001) - f(a - 0.001)}{0.002} \tag{4}$$

Observe en el enunciado del ejercicio 55 de la sección 2.1 que NDER($f(x)$, a) proporciona una aproximación para $f'(a)$ sólo si $f'(a)$ existe; es decir,

$$\text{NDER}(f(x), a) \approx f'(a) \qquad \text{si } f'(a) \text{ existe} \tag{5}$$

Consulte el manual del usuario acerca de cómo obtener la derivada numérica en su graficadora particular. Si su calculadora no tiene esta función, usted puede emplear un programa o el cociente de diferencias simétricas de (4).

EJEMPLO 2 Sea

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

(a) Aproxime $f'(5)$ con cinco cifras decimales calculando NDER($f(x)$, 5) en la graficadora. **(b)** Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando $f'(5)$ a partir del resultado del ejemplo 3 de la sección 2.1.

Solución

(a) En la graficadora se tiene

$$\text{NDER}\left(\frac{3}{x}, 5\right) = -0.1200000048$$

Por tanto, con cinco cifras decimales, $f'(5) \approx -0.12000$.

(b) Del ejemplo 3 de la sección 2.1,

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2}$$

Así, $f'(5) = -0.12$, lo cual es acorde con la respuesta del inciso (a). ◀

La notación NDER($f(x)$, x) denota la derivada numérica de la función f en x; esto es,

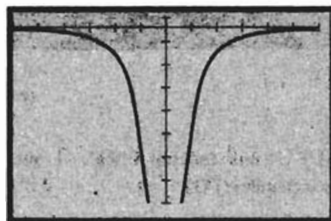
$$\text{NDER}(f(x), x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Tanto para las funciones lineales como para las cuadráticas NDER($f(x)$, x) es exactamente $f'(x)$. Se le pidará que demuestre esto en los ejecicios 21 y 22.

En la graficadora puede trazarse la gráfica de NDER($f(x)$, x). Comprenderá la importancia de esta característica de la graficadora conforme avance en el texto.

EJEMPLO 3 La función del ejemplo 3 de la sección 2.1 está definida por

$$f(x) = \frac{3}{x}$$



$[-6, 6]$ por $[-7, 1]$

$f'(x) = -\frac{3}{x^2}$ y NDER$(\frac{3}{x}, x)$

FIGURA 2

Utilice la gráfica de NDER$(f(x), x)$ para apoyar el valor de $f'(x)$ calculado en la sección 2.1.

Solución La figura 2 muestra el resultado de trazar las gráficas de NDER$\left(\frac{3}{x}, x\right)$ y de la función f' definida por

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2}$$

en el rectángulo de inspección de $[-6, 6]$ por $[-7, 1]$. El hecho de que las dos gráficas aparecen idénticas apoya el valor de $f'(x)$. ◀

De (5), NDER$(f(x), a) \approx f'(a)$ si $f'(a)$ existe. La condición de que $f'(a)$ debe existir a fin de que NDER$(f(x), a)$ proporcione una aproximación de $f'(a)$ es indispensable, como se mostrará en el siguiente ejemplo.

▶ **EJEMPLO 4** El ejercicio 55 de la sección 2.1 establece que si $f'(a)$ existe, entonces

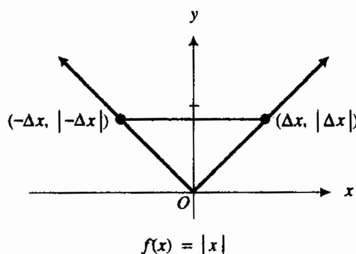
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Demuestre, empleando la función valor absoluto, que es posible que exista el límite de la ecuación anterior aunque $f'(a)$ no exista.

Solución Con $f(x) = |x|$ y $a = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0 - \Delta x|}{2\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x| - |-\Delta x|}{2\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Así, el límite existe y es igual a 0. Sin embargo, se sabe, del ejemplo ilustrativo 4 de la sección 2.2, que la derivada de la función valor absoluto no existe en cero. ◀



$f(x) = |x|$

FIGURA 3

Si se calcula NDER$(|x|, 0)$ en la graficadora, se obtendrá 0. Este resultado es consistente con lo aprendido en el ejemplo 4, pero, por supuesto, esto no proporciona la derivada de la función valor absoluto en 0. La figura 3 también apoya el resultado del ejemplo 4. Esta figura es el caso especial de la figura 1, donde $f(x) = |x|$. El cociente de diferencias simétricas es la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(-\Delta x, |-\Delta x|)$ y $(\Delta x, |\Delta x|)$, la cual es 0 para cualquier elección de Δx.

La discusión del párrafo anterior debe convencerlo de ser muy cuidadoso cuando emplee el valor de la derivada numérica de la función f en a para aproximar el valor de $f'(a)$. Los dos valores son aproximadamente iguales únicamente si $f'(a)$ existe. Vea los ejercicios 27 a 29 para otros ejemplos que muestran este hecho.

EJERCICIOS 2.3

En los ejercicios 1 a 4, haga lo siguiente: (a) en la calculadora, obtenga los valores del cociente de diferencias simétricas $\dfrac{f(2+\Delta x) - f(2-\Delta x)}{2\,\Delta x}$ *y elabore una tabla para la función f dada cuando* Δx *es igual a* 0.10, 0.09, 0.08, . . ., 0.01 y −0.10, 0.09, −0.08, . . . , −0.01. *¿A qué valor parece que se aproxima el cociente de diferencias simétricas conforme* Δx *tiende a 0? (b) En la graficadora, determine* NDER($f(x)$, 2) *y compare este número con la respuesta del inciso (a) y el valor exacto de* $f'(2)$ *calculado en el inciso (b) del ejercicio indicado de la sección 2.1. (c) Compare los valores calculados en el inciso (a) de este ejercicio con los valores correspondientes tabulados en el inciso (a) del ejercicio indicado de la sección 2.1, donde se utilizó el cociente de diferencias estándar. ¿Qué tabla de valores proporciona la mejor aproximación a* $f'(2)$*?*

1. $f(x) = 3x^2 - 7x$; ejercicio 17.
2. $f(x) = x^3$; ejercicio 18.
3. $f(x) = \sqrt{6-x}$; ejercicio 19.
4. $f(x) = \dfrac{1}{4-x}$; ejercicio 20.

En los ejercicios 5 a 8, utilice la gráfica de la derivada numérica en x trazada en la graficadora para apoyar el valor de la derivada determinada en el ejercicio indicado de la sección 2.1.

5. (a) Ejercicio 33 (b) Ejercicio 35 (c) Ejercicio 37
6. (a) Ejercicio 34 (b) Ejercicio 36 (c) Ejercicio 38
7. (a) Ejercicio 39 (b) Ejercicio 41 (c) Ejercicio 43
8. (a) Ejercicio 40 (b) Ejercicio 42 (c) Ejercicio 44

En los ejercicios 9 a 20, haga lo siguiente: (a) utilice la derivada numérica de la función f en el número x_1*, calculadada en la graficadora, para determinar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto donde* $x = x_1$*; (b) encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto* $(x_1, f(x_1))$*; (c) trace la gráfica de f y la recta tangente en el mismo rectángulo de inspección.*

9. $f(x) = (x-1)^2;\ x_1 = 2$
10. $f(x) = 2 + 2x - x^2;\ x_1 = -1$
11. $f(x) = x^2 - 2x - 4;\ x_1 = 3$
12. $f(x) = (2-x)^2 + 5;\ x_1 = 4$
13. $f(x) = \sqrt{x^2 - 16};\ x_1 = -5$
14. $f(x) = \sqrt{25 - x^2};\ x_1 = 3$
15. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 4};\ x_1 = 1$
16. $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{1 + x^2};\ x_1 = -2$
17. $f(x) = x \operatorname{sen} x;\ x_1 = 1$
18. $f(x) = x^2 \cos x;\ x_1 = 2$
19. $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x);\ x_1 = 2$
20. $f(x) = \tan(\operatorname{sen} x);\ x_1 = 3$
21. Demuestre que si f es una función lineal, entonces NDER($f(x)$, x) es exactamente $f'(x)$.
22. Demuestre que si f es una función cuadrática, entonces NDER($f(x)$, x) es exactamente $f'(x)$.
23. Sea $f(x) = x^2 + 2$. **(a)** Trace las gráficas de f y de NDER($f(x)$, x) en el mismo rectángulo de inspección. ¿Para qué valores de x se tiene que **(b)** NDER($f(x)$, x) > 0, y **(c)** NDER($f(x)$, x) < 0? ¿Para qué valores de x parece que **(d)** $f(x)$ crece conforme x crece, y **(e)** $f(x)$ decrece conforme x crece? **(f)** Compare las respuestas de los incisos (b) y (d) y de los incisos (c) y (e).
24. Realice el ejercicio 23 considerando ahora que $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
25. Haga el ejercicio 23 considerando ahora que $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.
26. Efectúe el ejercicio 23 considerando ahora que $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.
27. Sea $f(x) = x^{1/3}$. En el ejemplo 1 de la sección 2.2, se mostró que $f'(0)$ no existe. **(a)** Calcule NDER($f(x)$, 0) mediante la ecuación (4). **(b)** Apoye la respuesta del inciso (a) determinando NDER($f(x)$, 0) en la graficadora. **(c)** Explique por qué existe NDER($f(x)$, 0) para esta función aunque no existe $f'(0)$. **(d)** Trace la gráfica de NDER($f(x)$, x). ¿Qué es lo que observa cuando $x = 0$? **(e)** ¿Es consistente la respuesta del inciso (d) con lo aprendido en el ejemplo 1 de la sección 2.2? Explique su respuesta.
28. Sea $f(x) = x^{1/5}$. **(a)** Utilice la fórmula (7) de la sección 2.1 para mostrar que $f'(0)$ no existe. **(b)** Calcule NDER($f(x)$, 0) mediante la ecuación (4). **(c)** Apoye la respuesta del inciso (b) determinando NDER($f(x)$, 0) en la graficadora. **(d)** Explique por qué existe NDER($f(x)$, 0) para esta función aunque no existe $f'(0)$. **(e)** Trace la gráfica de NDER($f(x)$, x). ¿Qué es lo que observa cuando $x = 0$? **(f)** ¿Es consistente la respuesta del inciso (e) con la respuesta del inciso (a)? Explique su respuesta.
29. Siga las instrucciones del ejercicio 28 para $f(x) = x^{2/3}$.
30. Compare los cálculos de $f'(0)$ de los ejercicios 27 y 29. Después compare el valor de NDER($f(x)$, 0) calculado en el inciso (a) del ejercicio 27 con el valor de NDER($f(x)$, 0) calculado en el inciso (b) del ejercicio 29. Explique por qué se obtiene una conclusión semejante para $f'(0)$ en las dos funciones pero resultados completamente diferentes para NDER($f(x)$, 0).

2.4 TEOREMAS SOBRE DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS Y DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Debido a que el proceso del cálculo de la derivada de una función a partir de la definición 2.1.3 es muy largo, se estudiarán ahora algunos teoremas que permitirán determinar las derivadas con mayor facilidad. Estos teoremas se demostrarán a partir de la definición 2.1.3. En el enunciado de los teoremas se emplea la notación de Lagrange para la derivada, y la conclusión se expresa con la notación $D_x(f(x))$ y en palabras.

2.4.1 Teorema Regla de diferenciación de una constante

Si c es una constante y si $f(x) = c$, entonces

$$f'(x) = 0$$

Demostración

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$D_x(c) = 0$$ ■

La derivada de una constante es cero.

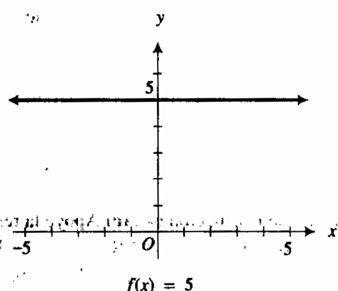


FIGURA 1

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Si $f(x) = 5$, entonces por el teorema 2.4.1

$$f'(x) = 0$$

Este resultado es apoyado por la gráfica de $f(x) = 5$ de la figura 1. Como la gráfica es una recta paralela al eje x, entonces la pendiente de la gráfica será 0 en cualquier parte. ◀

2.4.2 Teorema Regla de diferenciación de potencias (para potencias con exponentes enteros positivos)

Si n es un número entero positivo y si $f(x) = x^n$, entonces

$$f' = nx^{n-1}$$

Demostración

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \end{aligned}$$

Al aplicar el teorema del binomio a $(x + \Delta x)^n$ se tiene

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n\right] - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n}{\Delta x}$$

Si se divide el numerador y el denominador entre Δx se obtiene

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \ldots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right]$$

Cada término excepto el primero tienen un factor Δx; por tanto, todos los términos excepto el primero tienden a cero conforme Δx se aproxima a 0. Así,

$$f'(x) = nx^{n-1}$$ ■

$$D_x(x^n) = nx^{n-1}$$

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Si $f(x) = x^8$, entonces $f'(x) = 8x^7$. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Sea f la función identidad; esto es, $f(x) = x$. Por el teorema 2.4.2

$$f'(x) = 1 \cdot x^0$$

Observe que si $x = 0$, x^0 se transforma en 0^0 lo cual no está definido, pero si $x \neq 0$, $x^0 = 1$, de modo que

$$f'(x) = 1 \qquad \text{si } x \neq 0$$

Para calcular $f'(0)$ para la función identidad, se aplica la fórmula (7) de la sección 2.1:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, para toda x, $D_x(x) = 1$. ◀

2.4.3 Teorema Regla de diferenciación para el producto de una función por una constante

Si f es una función, c es una constante y g es la función definida por

$$g(x) = c \cdot f(x)$$

y si f' existe, entonces

$$g'(x) = c \cdot f'(x)$$

Demostración

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} c \cdot \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\ &= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

■

$$D_x[c \cdot f(x)] = c \cdot D_x f(x)$$

La derivada de la multiplicación de una función por una constante es igual a la derivada de la función multiplicada por la constante.

Al combinar los teoremas 2.4.2 y 2.4.3, se obtiene el resultado siguiente: Si $f(x) = cx^n$, donde n es un número entero positivo y c es una constante, entonces

$$f'(x) = cnx^{n-1}$$

$$D_x(cx^n) = cnx^{n-1}$$

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** Si $f(x) = 5x^7$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \cdot 7x^6 \\ &= 35x^6 \end{aligned}$$

◀

2.4.4 Teorema Regla de diferenciación para la suma

Si f y g son funciones y si h es la función definida por

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

y si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Demostración

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

■

$$D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$$

La derivada de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus derivadas si estas derivadas existen.

El resultado del teorema anterior puede extenderse a cualquier número finito de funciones mediante inducción matemática. Este hecho se establece en el siguiente teorema.

2.4.5 Teorema

La derivada de la suma de un número finito de funciones es igual a la suma de sus derivadas si estas derivadas existen.

De los teoremas anteriores, se tiene que la derivada de cualquier función polinominal puede calcularse fácilmente.

EJEMPLO 1 Determine $f'(x)$ si

$$f(x) = 7x^4 - 2x^3 + 8x + 5$$

Solución

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x(7x^4 - 2x^3 + 8x + 5) \\ &= D_x(7x^4) + D_x(-2x^3) + D_x(8x) + D_x(5) \\ &= 28x^3 - 6x^2 + 8 \end{aligned}$$

◀

La derivada del producto de dos funciones no es lo que usted espera; esto es, no es el producto de las derivadas, como se mostrará en el ejemplo ilustrativo siguiente.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 Sea

$$h(x) = (2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)$$

Se puede calcular la derivada $h'(x)$ con los teoremas anteriores si se desarrolla el miembro derecho y se diferencía el polinomio resultante como sigue:

$$\begin{aligned} h(x) &= 6x^8 - 12x^7 + 2x^5 - 4x^4 \\ h'(x) &= 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3 \end{aligned}$$

Ahora considere

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 \quad \text{de modo que} \quad f'(x) = 6x^2 - 8x$$
$$g(x) = 3x^5 + x^2 \quad \text{de modo que} \quad g'(x) = 15x^4 + 2x$$

Observe que $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ pero $h'(x) \neq f'(x) \cdot g'(x)$. ◀

2.4.6 Teorema Regla de diferenciación para el producto

Si f y g son funciones y h es la función definida por

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

y si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces

$$h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Demostración

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$

A continuación se realizará un poco de manipulación hábil que conducirá a los límites que definen $f'(x)$ y $g'(x)$. Al restar y sumar $f(x + \Delta x) \cdot g(x)$ en el numerador se obtiene

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) \cdot g(x) + f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Como f es diferenciable en x, por el teorema 2.2.1, f es continua en x; por tanto, $\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$. También $\lim_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x) \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

por lo que se obtiene

$$h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$ ■

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x) \cdot D_x g(x) + g(x) \cdot D_x f(x)$$

La derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera si estas derivadas existen.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 6** Se aplica la regla del producto para calcular $h'(x)$ para la función h del ejemplo ilustrativo 5:

$$h(x) = (2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)$$

De la regla del producto,

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2x^3 - 4x^2)(15x^4 + 2x) + (3x^5 + x^2)(6x^2 - 8x) \\ &= (30x^7 - 60x^6 + 4x^4 - 8x^3) + (18x^7 - 24x^6 + 6x^4 - 8x^3) \\ &= 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3 \end{aligned}$$

Lo cual es acorde con lo obtenido para $h'(x)$ en el ejemplo ilustrativo 5. ◀

No dude en concluir que el cálculo de $h'(x)$ en el ejemplo ilustrativo 5 fue más simple que en el cálculo del ejemplo ilustrativo 6. Pero recuerde que $h(x)$ en estos ejemplos es un polinomio. Se aplicará la regla del producto a muchas otras funciones diferentes de los polinomios.

Puesto que la derivada del producto de dos funciones no es el producto de sus derivadas, la derivada del cociente de dos funciones no es el cociente de sus derivadas, como se verá en el siguiente teorema.

2.4.7 Teorema Regla de diferenciación para el cociente

Si f y g son funciones y h es la función definida por

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad \text{donde } g(x) \neq 0$$

y si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces

$$h(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Demostración

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x + \Delta x)}$$

Como se hizo en la demostración de la regla del producto, se efectuará otra hábil manipulación. En esta ocasión se resta y suma $f(x) \cdot g(x)$ en el numerador para obtener

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x)}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x + \Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[g(x) \cdot \dfrac{f(x + \Delta x - f(x)}{\Delta x}\right] - \left[f(x) \cdot \dfrac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x + \Delta x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x - f(x)}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x)}$$

Como g es diferenciable en x, entonces g es continua en x; de modo que se tiene $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) = g(x)$. También $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$ y $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$. Con estos resultados y las definiciones de $f'(x)$ y $g'(x)$ se obtiene

$$h'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

■

$$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)D_xf(x) - f(x)D_xg(x)}{[g(x)]^2}$$

La derivada del cociente de dos funciones es igual a la fracción que tiene como denominador el cuadrado del denominador original, y como su numerador tiene al denominador original por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador original si estas derivadas existen.

EJEMPLO 2 Determine

$$D_x\left(\frac{2x^3+4}{x^2+1}\right)$$

Solución

$$D_x\left(\frac{2x^3+4}{x^2+1}\right) = \frac{(x^2+1)(6x^2)-(2x^3+4)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{6x^4+6x^2-4x^4-8x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^4+6x^2-8x)}{(x^2+1)^2}$$

2.4.8 Teorema Regla de diferenciación de potencias (para potencias con exponentes enteros negativos)

Si $f(x) = x^{-n}$, donde $-n$ es un número entero negativo y $x \neq 0$, entonces

$$f'(x) = -nx^{-n-1}$$

Demostración Puesto que $-n$ es un número entero negativo, entonces n es un número entero positivo. En consecuencia, se expresa $f(x)$ como un cociente y se aplica la regla del cociente. Así,

$$f(x) = \frac{1}{x^n}$$

$$f'(x) = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2}$$

$$= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= -nx^{n-1-2n}$$

$$= -nx^{-n-1}$$

■

EJEMPLO 3 Determine

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^5}\right)$$

Solución

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^5}\right) = \frac{d}{dx}(3x^{-5})$$

$$= 3(-5x^{-6})$$

$$= -\frac{15}{x^6}$$

Si r es cualquier número entero positivo o negativo, entonces se tiene la regla para potencias:

$$D_x(x^r) = rx^{r-1}$$

De esta fórmula y de la regla del producto de una función por una constante se obtiene

$$D_x(cx^r) = crx^{r-1}$$

si c es una constante y r es cualquier número entero negativo o positivo.

Si la función f es diferenciable, entonces su derivada f' se llama, en ocasiones, **primera derivada** de f o **primera función derivada.** Si la función f' es diferenciable, entonces la derivada de f' se denomina **segunda derivada** de f o **segunda función derivada.** La segunda derivada de f se denota por f'' (que se lee "f biprima"). De la misma manera, la **tercera derivada** de f o la **tercera función derivada,** está definida como la derivada de f'', suponiendo que la derivada de f'' existe. La tercera derivada de f se representa por f''' (lo cual se lee como "f triprima").

La ***n*-ésima derivada** de la función f, donde n es número entero mayor que 1, es la derivada de la $(n - 1)$-ésima derivada de f. La n-ésima derivada se denota por $f^{(n)}$. De modo que si $f^{(n)}$ es la n-ésima derivada, entonces se puede representar la función f misma como $f^{(0)}$.

EJEMPLO 4 Encuentre todas las derivadas de la función f definida por

$$f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$$

Solución

$$f'(x) = 32x^3 + 15x^2 - 2x$$
$$f''(x) = 96x^2 + 30x - 2$$
$$f'''(x) = 192x + 30$$
$$f^{(4)}(x) = 192$$
$$f^{(5)}(x) = 0$$
$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad n \geq 5$$

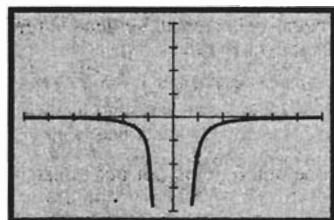
La notación de Leibniz para la primera derivada es $\dfrac{dy}{dx}$. Para la segunda derivada de y con respecto a x la notación de Leibniz es $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, debido a que representa $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{d}{dx}(y)\right]$. El símbolo $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ es una notación para la n-ésima derivada de y respecto a x.

Otros símbolos para la n-ésima derivada de f son

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)] \qquad D_x{}^n[f(x)]$$

Para denotar la segunda derivada numérica de la función f en x se utiliza la notación NDER2($f(x)$, x); esto es,

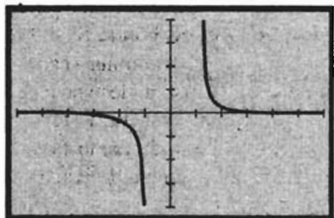
$$\text{NDER2}(f(x), x) = \text{NDER}(\text{NDER}(f(x), x), x)$$



[−6, 6] por [−4, 4]

$f'(x) = -3x^{-4}$ y NDER(x^{-3}, x)

FIGURA 2



[−6, 6] por [−4, 4]

$f''(x) = 12x^{-5}$ y NDER2(x^{-3}, x)

FIGURA 3

EJEMPLO 5 Calcule

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx^2}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

y apoye las respuestas gráficamente.

Solución Sea $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^{-3}) = -3x^{-4}$$

$$\frac{d}{dx^2}(x^{-3}) = 12x^{-5}$$

Para apoyar gráficamente las respuestas, primero se traza la gráfica de la función definida por $f'(x) = -3x^{-4}$ y NDER(x^{-3}, x) en el rectángulo de inspección de [−6, 6] por [−4, 4]. La figura 2 muestra que las gráficas son idénticas, lo cual apoya la respuesta de la primera derivada. Ahora se trazan las gráficas de las funciones definidas por $f''(x) = 12x^{-5}$ y NDER2(x^{-3}, x) o, equivalentemente, NDER$(-3x^{-4}, x)$, en el rectángulo de inspección de [−6, 6] por [−4, 4], para obtener la figura 3. En esta figura se muestra que las dos gráficas son idénticas, lo que apoya la respuesta para la segunda derivada. ◀

EJERCICIOS 2.4

En los ejercicios 1 a 24, obtenga la derivada de la función por medio de los teoremas de esta sección.

1. $f(x) = 7x - 5$
2. $g(x) = 8 - 3x$
3. $g(x) = 1 - 2x - x^2$
4. $f(x) = 4x^2 + x + 1$
5. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$
6. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$
7. $f(x) = \frac{1}{8}x^8 - x^4$
8. $g(x) = x^7 - 2x^5 + 5x^3 - 7x$
9. $F(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2$
10. $H(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$
11. $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$
12. $G(y) = y^{10} + 7y^5 - y^3 + 1$
13. $F(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}$
14. $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{x^3}$
15. $g(x) = 4x^4 - \frac{1}{4x^4}$
16. $f(x) = x^4 - 5 + x^{-2} + 4x^{-4}$
17. $g(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^4}$
18. $H(x) = \frac{5}{6x^5}$
19. $f(s) = \sqrt{3}(s^3 - s^2)$
20. $g(x) = (2x^2 + 5)(4x - 1)$
21. $f(x) = (2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)$
22. $f(x) = (4x^2 + 3)^2$
23. $G(y) = (7 - 3y^3)^2$
24. $F(t) = (t^3 - 2t + 1)(2t^2 + 3t)$

En los ejercicios 25 a 36, calcule la derivada aplicando los teoremas de esta sección. En los ejercicios 25 a 30, apoye la respuesta trazando en la graficadora la gráfica de su respuesta y de la derivada numérica en x, en el mismo rectángulo de inspección.

25. $D_x[(x^2 - 3x + 2)(2x^3 + 1)]$
26. $D_x\left(\frac{2x}{x + 3}\right)$
27. $D_x\left(\frac{x}{x - 1}\right)$
28. $D_y\left(\frac{2y + 1}{3y + 4}\right)$
29. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}\right)$
30. $\frac{d}{dx}\left(\frac{4 - 3x - x^2}{x - 2}\right)$
31. $\frac{d}{dt}\left(\frac{5t}{1 + 2t^2}\right)$
32. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4 - 2x^2 + 5x + 1}{x^4}\right)$
33. $\frac{d}{dy}\left(\frac{y^3 - 8}{y^3 + 8}\right)$
34. $\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2 - a^2}{s^2 + a^2}\right)$
35. $D_x\left[\frac{2x + 1}{x + 5}(3x - 1)\right]$
36. $D_x\left[\frac{x^3 + 1}{x^2 + 3}(x^2 - 2x^{-1} + 1)\right]$

En los ejercicios 37 y 38, determine todas las derivadas de la función

37. $f(x) = 6x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 9$

38. $f(x) = 2x^7 - x^5 + 5x^3 - 8x + 4$

39. Calcule $D_t^3\left(\frac{1}{6t^3}\right)$

40. Determine $\frac{d^4}{dx^4}\left(x^5 - \frac{1}{15x^5}\right)$

En los ejercicios 41 y 42, determine $\frac{d^2y}{dx^2}$ *y apoye gráficamente su respuesta trazando en la graficadora la gráfica de la respuesta y la segunda derivada numérica en x, en el mismo rectángulo de inspección.*

41. $y = \frac{x^4 + 1}{x^2}$ **42.** $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{3x^3}$

En los ejercicios 43 a 46, encuentre una ecuación de la recta tangente o de la recta normal, según se indica, y apoye su respuesta trazando la recta y la curva en el mismo rectángulo de inspección.

43. La recta tangente a la curva $y = x^3 - 4$ en el punto $(2, 4)$.

44. La recta tangente a la curva $y = \frac{8}{x^2 + 4}$ en el punto $(2, 1)$.

45. La recta normal a la curva $y = \frac{10}{14 - x^2}$ en el punto $(4, -5)$.

46. La recta normal a la curva $y = 4x^2 - 8x$ en el punto $(1, -4)$.

47. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - 4x$ que sea paralela a la recta $2x - y + 3 = 0$. Apoye su respuesta trazando la recta y la curva en el mismo rectángulo de inspección.

48. Determine una ecuación de cada una de las rectas tangentes a la curva $3y = x^3 - 3x^2 + 6x + 4$ que son paralelas a la recta $2x - y + 3 = 0$. Apoye sus respuestas trazando la curva y las rectas en el mismo rectángulo de inspección.

49. Encuentre una ecuación de cada una de las rectas normales a la curva $y = x^3 - 4x$ que sean paralelas a la recta $x + 8y - 8 = 0$. Apoye sus respuestas trazando la curva y las rectas en el mismo rectángulo de inspección.

50. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 - 6x$ que sea perpendicular a la recta $x - 2y + 6 = 0$. Apoye su respuesta trazando la curva y las dos rectas en el mismo rectángulo de inspección.

51. Determine una ecuación de cada una de las rectas que pasan por el punto $(4, 13)$ y que sean tangentes a la curva $y = 2x^2 - 1$. Apoye sus respuestas trazando la curva y las rectas en el mismo rectángulo de inspección.

52. Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x + 5$. Muestre que $f'(x) \geq 0$ para todos los valores de x.

53. Si f, g y h son funciones y $\phi(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$, demuestre que si $f'(x)$, $g'(x)$ y $h'(x)$ existen, entonces

$$\phi'(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$$

Sugerencia: aplique la regla del producto dos veces.

Utilice el resultado del problema 53 para diferenciar las funciones de los ejercicios 54 a 57.

54. $f(x) = (x^2 + 3)(2x - 5)(3x + 2)$

55. $h(x) = (3x + 2)^2(x^2 - 1)$

56. $g(x) = (3x^3 + x^{-3})(x + 3)(x^2 - 5)$

57. $\phi(x) = (2x^2 + x + 1)^3$

58. Si f y g son dos funciones tales que sus primeras y segundas derivadas existen y si h es la función definida por la ecuación $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, demuestre que

$$h''(x) = f(x) \cdot g''(x) + 2f'(x) \cdot g'(x) + f''(x) \cdot g(x)$$

59. Si $y = x^n$, donde n es cualquier número entero positivo, demuestre por inducción matemática que $\frac{d^n y}{dx^n} = n!$

60. Dé una demostración alternativa de la regla de diferenciación de potencias (para potencias enteras positivas) mostrando que si $f(x) = x^n$, entonces $f'(a) = na^{n-1}$ aplicando la fórmula (7) de la sección 2.1.

Sugerencia: factorice $x^n - a^n$, empleando la fórmula (12) de la sección suplementaria 1. 5.

61. Demuestre que si f y g son dos funciones diferenciables tales que $f(0) = g(0) = 0$, entonces el producto de f y g no puede ser la función identidad; esto es $f(x) \cdot g(x) \neq x$. *Sugerencia:* aplique la regla de diferenciación del producto.

62. Explique por qué tres teoremas sobre diferenciación permiten diferenciar cualquier polinomio. Incluya los enunciados de los teoremas en su explicación.

2.5 MOVIMIENTO RECTILÍNEO

La derivada de una función f en el número x_1 tiene una interpretación importante como la *tasa de variación* (o *razón de cambio*) *instantánea de f* en x_1, la cual se tratará en esta sección y la siguiente. Esta sección se inicia considerando una aplicación en física: el movimiento de una partícula sobre una recta. Dicho movimiento recibe el nombre de **movimiento rectilíneo.** Se elige arbitrariamente un sentido como positivo en la recta, y el sentido

opuesto es el negativo. Para simplificar esta discusión, suponga que la partícula se mueve sobre una recta horizontal, cuyo sentido (o dirección) positivo es hacia la derecha y el sentido negativo hacia la izquierda. Seleccione algún punto sobre la recta y denótelo por la letra O. Sea f la función que determina la distancia dirigida de la partícula a partir de O en cualquier tiempo particular.

Para ser más específicos, sea s metros (m) la distancia dirigida desde O a los t segundos (s). Entonces s es la función definida por

$$s = f(t)$$

la cual proporciona la distancia dirigida desde el punto O hasta la partícula en un instante particular.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Sea

$$s = t^2 + 2t - 3$$

Entonces, cuando $t = 0, s = -3$; por tanto, la partícula está a 3 m a la izquierda del punto O cuando $t = 0$. Cuando $t = 1, s = 0$; de modo que la partícula se encuentra en el punto O en el segundo 1. Cuando $t = 2, s = 5$; por lo que la partícula se encuentra a 5m a la derecha del punto O a los 2s. Cuando $t = 3, s = 12$; de manera que la partícula está ubicada a 12m a la derechadel punto O a los 3s.

La figura 1 ilustra las diferentes posiciones de la partícula para valores específicos de t.

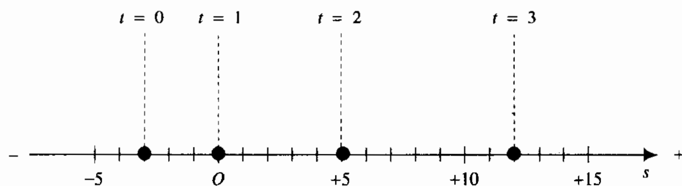


FIGURA 1

Entre el tiempo $t = 1$ y $t = 3$, la partícula se mueve desde el punto donde $s = 0$ hasta el punto donde $s = 12$; por lo que en el intervalo de 2 segundos el cambio en la distancia desde O es 12 m. *La velocidad promedio* de la partícula es la razón del cambio en la distancia dirigida desde un punto fijo al cambio en el tiempo. De modo que el número de metros por segundo de la velocidad promedio de la partícula desde $t = 1$ a $t = 3$ es $\frac{12}{2} = 6$. Desde $t = 0$ a $t = 2$, el cambio en la distancia dirigida desde O hasta la partícula es de 8 m, por lo que el números de metros por segundo de la velocidad promedio de la partícula, en este intervalo de 2 segundos, es $\frac{8}{2} = 4$. ◀

En el ejemplo ilustrativo 1, la velocidad promedio de la partícula evidentemente no es constante; y la velocidad promedio no proporciona información específica acerca del movimiento de la partícula en cualquier instante particular. Por ejemplo, si un automóvil recorre una distancia de 100 kilómetros (km) en el mismo sentido en 2 horas (h), se dice que la velocidad

promedio (o velocidad media) con que recorre esa distancia es de 50 km/h. Sin embargo, a partir de esta información no se puede determinar la lectura del velocímetro del automóvil en ningún tiempo particular en el intervalo de 2 horas. La lectura del velocímetro en un instante determinado se conoce como *velocidad instantánea*. La discusión siguiente permitirá llegar a una definición de lo que significa *velocidad instantánea*.

Suponga que la ecuación $s = f(t)$ define a s (el número de metros de la distancia dirigida de la partícula desde el punto O) como una función de t (el número de segundos en el tiempo). Cuando $t = t_1, s = s_1$. El cambio en la distancia dirigida desde O es $(s - s_1)$ metros durante el intervalo de tiempo $(t - t_1)$ segundos, y el número de metros por segundo de la velocidad promedio de la partícula durante este intervalo de tiempo está dado por

$$\frac{s - s_1}{t - t_1}$$

o, como $s = f(t)$ y $s_1 = f(t_1)$, la velocidad promedio se determina a partir de

$$\frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1} \qquad (1)$$

Ahora, entre más corto sea el intervalo de t_1 a t, más cerca estará la velocidad promedio de lo que pensaríamos que es la velocidad instantánea en t_1.

Por ejemplo, si la lectura del velocímetro de un automóvil al pasar por el punto P_1 es de 80 km/h, y si un punto P está a 10 m de P_1 entonces la velocidad promedio del automóvil conforme recorre esos 10 metros estará próxima a 80 km/h ya que la variación de la velocidad del automóvil en este pequeño espacio probablemente es ligera. Ahora bien, si la distancia de P_1 a P se acortará a 5 m, la velocidad promedio del automóvil en este intervalo estaría aún más próxima a la lectura del velocímetro en P_1. Este proceso se puede continuar y la lectura del velocímetro en P_1 puede representarse como el límite de la velocidad promedio entre P_1 y P conforme P tiende a P_1. Esto es, la *velocidad instantánea* puede definirse como el límite del cociente (1) conforme t tiende a t_1, suponiendo que este límite existe. Este límite es la derivada de la función f en t_1. En consecuencia, se tiene la definición siguiente.

2.5.1 Definición de velocidad instantánea

Si f es una función definida por la ecuación

$$s = f(t)$$

y una partícula se desplaza a lo largo de una recta, tal que s es el número de unidades de la distancia dirigida de la partícula desde un punto fijo sobre la recta en t unidades de tiempo, entonces la **velocidad instantánea** de la partícula a las t unidades de tiempo es v unidades de velocidad, donde

$$v = f'(t) \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{ds}{dt}$$

si existe.

La velocidad instantánea puede ser positiva o negativa, dependiendo de que si la partícula se desplaza en el sentido positivo o negativo. Cuando la velocidad instantánea es cero, la partícula está en reposo. La **rapidez** de una

partícula en cualquier tiempo es el valor absoluto de la velocidad instantánea. En consecuencia, la rapidez es un número no negativo. Los términos "rapidez" y "velocidad instantánea" se confunden con frecuencia. Observe que la rapidez sólo indica qué tan rápido se está moviendo la partícula, en cambio la velocidad instantánea también indica el sentido del movimiento.

▶ **EJEMPLO 1** Una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal de acuerdo con la ecuación

$$s = t^3 - 12t^2 + 36t - 24 \qquad t \geq 0$$

Determine los intervalos de tiempo en los que la partícula se está moviendo a la derecha y en los que se mueve hacia la izquierda. También determine el instante cuando la partícula cambia de sentido.

Solución

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ &= 3t^2 - 24t + 36 \\ &= 3(t^2 - 8t + 12) \\ &= 3(t - 2)(t - 6) \end{aligned}$$

La velocidad instantánea es cero cuando $t = 2$ y cuando $t = 6$. Por tanto, la partícula está en reposo en estos instantes. La partícula se mueve hacia la derecha cuando v es positiva y se mueve hacia la izquierda cuando v es negativa. Se determina el signo de v en diferentes intervalos de t, y los resultados se muestran en la tabla 1. ◀

Tabla 1

	$t - 2$	$t - 6$	*Conclusión*
$0 \leq t < 2$	–	–	v es positivo; la partícula se mueve hacia la derecha
$t = 2$	0	–	v es cero; la partícula está en reposo
$2 < t < 6$	+	–	v es negativo; la partícula se mueve hacia la izquierda
$t = 6$	+	0	v es cero; la partícula está en reposo
$6 < t$	+	+	v es positivo; la partícula se mueve hacia la derecha

Tabla 2

t	s	v
0	−24	36
1	1	15
2	8	0
3	3	−9
4	−8	−12
5	−19	−9
6	−24	0
7	−17	15
8	8	36

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Para interpretar visualmente el movimiento de la partícula del ejemplo 1, consulte la figura 2 donde el movimiento de la partícula es a lo largo de la recta horizontal de la figura. Sobre la recta se ha indicado el comportamiento de la partícula, descrito en la tabla 1, donde las flechas indican el sentido del movimiento de la partícula sobre el eje horizontal. La tabla 2 proporciona los valores de s y v para los valores enteros de t de 0 a 8. El valor de s indica la posición de la partícula sobre la recta horizontal para un valor determinado de t.

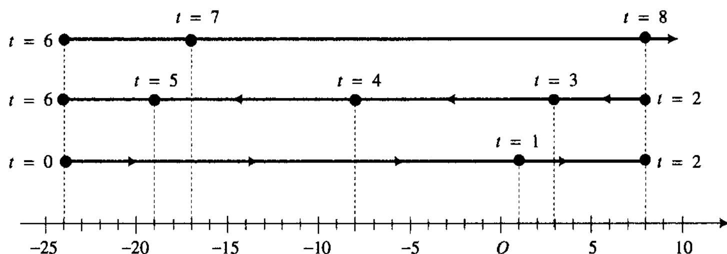
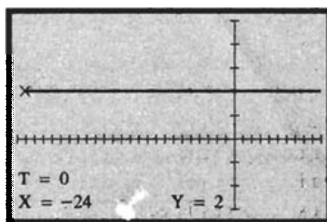


FIGURA 2

Ahora se describirá el movimiento de la partícula. Cuando $t = 0$, la partícula está a 24 unidades a la izquierda de O y se desplaza hacia la derecha; en $t = 1$, la partícula se encuentra a 1 unidad a la derecha de O y sigue moviéndose hacia la derecha; cuando $t = 2$, la partícula está a 8 unidades a la derecha de O y en reposo (se detiene por un instante) y después cambia de sentido e inicia el movimiento hacia la izquierda; cuando $t = 3$, la partícula se encuentra a 3 unidades a la derecha de O y se desplaza hacia la izquierda; en $t = 4$, la partícula está a 8 unidades a la izquierda de O y sigue desplazándose hacia la izquierda; cuando $t = 5$, la partícula se encuentra a 19 unidades a la izquierda de O y el movimiento es hacia la izquierda; en $t = 6$, la partícula está a 24 unidades a la izquierda de O y en reposo, después cambia de sentido e inicia el movimiento hacia la derecha; cuando $t = 7$, la partícula está a 17 unidades a la izquierda de O y se desplaza hacia la derecha; en $t = 8$, la partícula se encuentra a 8 unidades a la derecha de O y sigue moviéndose hacia la derecha; después la partícula continúa moviéndose hacia la derecha. ◀

El movimiento rectilíneo puede simularse en la graficadora. El método implica la representación del movimiento mediante ecuaciones paramétricas, por lo que se debe activar el modo paramétrico de la graficadora. Si usted no ha estudiado ecuaciones paramétricas en algún curso anterior al de Cálculo, consulte la sección 9.1. El ejemplo ilustrativo siguiente muestra el procedimiento para el movimiento rectilíneo del ejemplo 1 y del ejemplo ilustrativo 2.



[–25, 10] por [–3, 5]

$x_1(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 24, \quad y_1(t)$ 2

FIGURA 3

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Para aclarar estas ideas, se simulará el movimiento de la partícula sobre la recta $y = 2$ en lugar del eje x. Active la graficadora en modo paramétrico. Sean

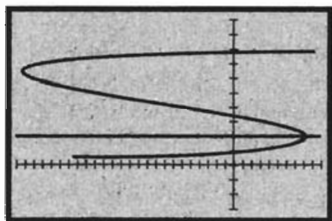
$$x_1(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 24 \quad \text{y} \quad y_1(t) = 2$$

En el rectángulo de inspección de [–25, 10] por [–3, 5], considere $t_{\text{mín}} = 0$, $t_{\text{máx}} = 10$ y $t_{\text{step}} = 0.05$. Ahora presione la tecla TRACE (*rastreo*) y después presione la tecla *flecha a la izquierda* y manténgala oprimida hasta que el cursor esté en $t = 0$. La figura 3 muestra la pantalla de la graficadora con su nuevo aspecto. Observe la información en la parte inferior de la pantalla: $t = 0, x = -24$ y $y = 2$.

De este modo, se está preparado para iniciar el movimiento de la partícula. Se presiona la tecla *flecha a la derecha* y se mantiene oprimida. El cursor representa la partícula que se mueve a lo largo de la recta $y = 2$. Observe que la partícula se desplaza hacia la derecha hasta que $t = 2$ y $x = 8$, cuando se detiene y cambia de sentido. Después, la partícula se

mueve hacia la izquierda hasta $t = 6$ y $x = -24$, cuando otra vez se detiene y cambia de sentido. Luego, el cursor se desplaza hacia la derecha y se pierde de la pantalla por el lado derecho. Este movimiento apoya los resultados del ejemplo 1 y del ejemplo ilustrativo 2. ◀

El movimiento rectilíneo puede visualizarse en otra forma en la graficadora, como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.



[−25, 10] por [−3, 10]

$x_1(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 24,\ y_1(t) = 2$
$x_2(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 24,\ y_2(t) = t$

FIGURA 4

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** Se considera otra vez el movimiento rectilíneo del ejemplo 1 y de los ejemplos ilustrativos 2 y 3. A la graficadora en modo paramétrico se le proporciona la información siguiente:

$$x_2(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 24 \quad \text{y} \quad y_2(t) = t$$

En esta ocasión se utiliza el rectángulo de inspección de [−25, 10] por [−3, 10] con t considerada como en el ejemplo ilustrativo 3. Se trazan las gráficas para $x_1(t)$, $y_1(t)$, $x_2(t)$, y $y_2(t)$ en el mismo rectángulo de inspección. y se selecciona SIMUL (*simultáneo*) del menú MODE. La figura 4 muestra las dos gráficas: la recta $y = 2$ sobre la que realmente se desplaza la partícula; y la curva sobre la cual las coordenadas son $(x_2(t), y_2(t))$, y que representa una amplificación vertical del movimiento de la partícula. Se puede observar que la partícula primero se mueve sobre la recta horizontal como en el ejemplo ilustrativo 3. Después se ve que la partícula se mueve sobre la curva (recuerde, esta curva no es la trayectoria real de la partícula). Para esto, primero se presiona la tecla *flecha hacia arriba* o *flecha hacia abajo* hasta que el cursor esté sobre la curva. Luego, como anteriormente se hizo, se presiona la tecla *flecha a la izquierda* y se mantiene oprimida hasta que el cursor esté en $t = 0$. Ahora se presiona la tecla *flecha a la derecha* y se mantiene oprimida. Este segundo procedimiento muestra el movimiento de la partícula de izquierda a derecha, después de derecha a izquierda y luego de izquierda a derecha otra vez. Observe en esta curva que la partícula cambia de sentido en el punto donde $x = 8$ y $y = 2$ (8 unidades a la derecha de O a los 2 s) y después otra vez en el punto donde $x = -24$ y $y = 6$ (24 unidades a la izquierda de O a los 6 s). ◀

▶ ***EJEMPLO 2*** Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde el piso con una velocidad inicial de 64 pies/s. Si el sentido positivo de la distancia desde su punto inicial es hacia arriba, t segundos es el tiempo que transcurre desde que la pelota fue lanzada, y s pies es la distancia de la pelota desde el punto inicial a los t segundos, entonces la ecuación del movimiento es

$$s = -16t^2 + 64t$$

(a) Simule el movimiento de la pelota en la graficadora. **(b)** Estime qué tan alto llegará la pelota y cuántos segundos le tomará para alcanzar su punto más alto. **(c)** Confirme analíticamente las estimaciones del inciso (b). **(d)** Obtenga la velocidad instantánea de la pelota en 1 s y 3 s. **(e)** Calcule la rapidez de la pelota en 1 s y 3 s. **(f)** Calcule la velocidad instantánea cuando llega al piso.

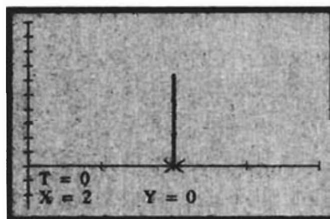
Solución

(a) Suponga que la pelota se mueve sobre la recta vertical $x = 2$. Active la graficadora en modo paramétrico. Sean

$$x_1(t) = 2 \quad \text{y} \quad y_1(t) = -16t^2 + 64t$$

Para determinar los valores de t de interés, en la ecuación dada se considera $s = 0$ y se obtiene

$$-16t(t - 4) = 0$$
$$t = 0 \qquad t = 4$$



[0, 4] por [−25, 100]

$x_1(t) = 2, \; y_1(t) = -16t^2 + 64t$

FIGURA 5

Por tanto, la pelota está en el piso a los 0 s y 4 s, lo que indica que $0 \leq t \leq 4$. En el rectángulo de inspección de [0, 4] por [−25, 100], sean $t_{mín} = 0$, $t_{máx} = 4$ y $t_{step} = 0.05$. Ahora se presiona la tecla TRACE y después la tecla *flecha a la izquierda* manteniéndose oprimida hasta que el cursor esté en $t = 0$. La figura 5 muestra la pantalla de la graficadora con su nueva apariencia. Presione la tecla *flecha a la derecha* y observe que la pelota, representada por el cursor, se mueve hacia arriba y hacia abajo a lo largo de la recta vertical $x = 2$.

(b) Al aproximar el valor de y como 64 y el valor de t como 2 cuando la pelota está en su punto más alto, se estima que la pelota alcanzará su altura máxima de 64 pie a los 2 s.

(c) Para confirmar analíticamente las estimaciones del inciso (b), primero se calcula $v(t)$, el número de pies por segundo de la velocidad instantánea de la pelota a los t segundos. Como $v(t) = \dfrac{ds}{dt}$,

$$v(t) = -32t + 64 \qquad \textbf{(2)}$$

Debido a que la pelota alcanzará su altura máxima cuando el sentido del movimiento cambia, esto es, cuando $v(t) = 0$, se sustituye $v(t)$ por 0 en la ecuación (2) y se obtiene

$$-32t + 64 = 0$$
$$t = 2$$

De la ecuación de movimiento cuando $t = 2$, resulta que $s = 64$. Por tanto, la pelota alcanza su máxima altura en el punto a 64 pie del punto inicial a los 2 s. Estos resultados confirman las estimaciones del inciso (b).

(d) $v(1) = -32(1) + 64 \Leftrightarrow v(1) = 32$; de modo que al final de 1 s la pelota se eleva con una velocidad instantánea de 32 pie/s. $v(3) = -32(3) + 64 \Leftrightarrow v(3) = -32$; de manera que al final de 3 s la pelota cae con una velocidad instantánea de −32 pie/s.

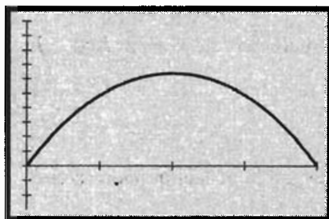
(e) $|v(t)|$ es el número de pies por segundo de la rapidez de la pelota a los t segundos; así, $|v(1)| = 32$ y $|v(3)| = 32$.

(f) Se determinó anteriormente que la pelota llegará al piso a los 4 s. Como $v(4) = -64$, su velocidad instantánea cuando alcance el piso será de −64 pie/s. ◀



EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 En el ejemplo 2, las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la pelota están dadas por

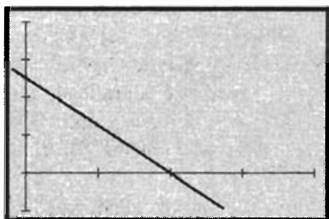
$$x_1(t) = 2 \quad \text{y} \quad y_1(t) = -16t^2 + 64t \qquad \textbf{(3)}$$



[0, 4] por [−25, 100]

$x_2(t) = t, \quad y_2(t) = -16t^2 + 64t$

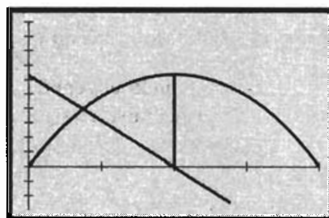
FIGURA 6



[0, 4] por [−25, 100]

$x_3(t) = t, \quad y_3(t) = -32t + 64$

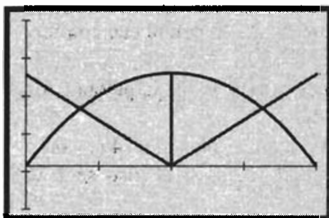
FIGURA 7



[0, 4] por [−25, 100]

$x_1(t) = 2, \quad y_1(t) = -16t^2 + 64t$
$x_2(t) = t, \quad y_2(t) = -16t^2 + 64t$
$x_3(t) = t, \quad y_3(t) = -32t + 64$

FIGURA 8



[0, 4] por [−25, 100]

$x_1(t) = 2, \quad y_1(t) = -16t^2 + 64t$
$x_2(t) = t, \quad y_2(t) = -16t^2 + 64t$
$x_4(t) = t, \quad y_4(t) = |-32t + 64|$

FIGURA 9

y sus gráficas se muestran en la figura 5. La ecuación de movimiento es

$$s = -16t^2 + 64t$$

Para trazar la gráfica de esta ecuación en modo paramétrico, se consideran

$$x_2(t) = t \quad \text{y} \quad y_2(t) = -16t^2 + 64t \tag{4}$$

La gráfica es una parábola cuyo punto más alto, el vértice, está en el punto (2, 64). La gráfica se muestra en la figura 6. La velocidad v de la pelota está dada por la ecuación

$$v = -32t + 64$$

cuya gráfica es una recta que tiene pendiente negativa. Las ecuaciones paramétricas de esta ecuación son

$$x_3(t) = t \quad \text{y} \quad y_3(t) = -32t + 64 \tag{5}$$

La figura 7 muestra esta recta. Refiérase ahora a la figura 8 que muestra las gráficas de los tres conjuntos de ecuaciones paramétricas en el mismo rectángulo de inspección. Observe que la velocidad es cero (en el punto donde la recta intersecta al eje x) cuando la pelota está en su punto más alto. También observe que cuando la pelota se está elevando, la velocidad es positiva, mientras que al caer, su velocidad es negativa. Además, la velocidad es siempre decreciente como lo indica la pendiente de la recta que representa la velocidad.

Como la rapidez de una partícula es el valor absoluto de su velocidad, las ecuaciones paramétricas de la rapidez de la pelota son

$$x_4(t) = t \quad \text{y} \quad y_4(t) = |-32t + 64| \tag{6}$$

La figura 9 presenta las gráficas de (3), (4) y (6) trazadas en el mismo rectángulo de inspección. Observe que la rapidez es decreciente cuando la pelota se está elevando, la rapidez es cero cuando la pelota alcanza su punto más alto, y la rapidez es creciente cuando la pelota está cayendo. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 6** Ahora se considerará el movimiento del ejemplo 1 y los ejemplos ilustrativos 2 a 4. Observe en la tabla 2 que la velocidad parece ser decreciente cuando $0 < t < 4$ y creciente cuando $4 < t$. Este hecho puede apoyarse gráficamente observando que el movimiento de la partícula de los ejemplos ilustrativos 3 y 4. Cuando $0 \le t \le 2$, $v \ge 0$ y la rapidez de la partícula es decreciente; cuando $2 \le t \le 4$, $v \le 0$ y la rapidez de la partícula es creciente de modo que para $0 < t < 4$, v es decreciente. Cuando $4 \le t \le 6$, $v \le 0$ y la rapidez es decreciente; cuando $6 \le t \le 8$, $v \ge 0$ y la rapidez es creciente; de manera que para $4 < t < 8$, v es creciente. ◀

En física, a la tasa de variación (o razón de cambio) instantánea de la velocidad se le llama **aceleracion instantánea.** Por tanto, si una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación de movimiento $s = f(t)$, donde a los t segundos la velocidad instantánea es v metros por segundo y la aceleración instantánea es a metros por segundo por segundo,

entonces a es la primera derivada de v con respecto a t o, equivalentemente, la segunda derivada de s con respecto a t; esto es,

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Cuando $a > 0$, v es creciente, y cuando $a < 0$, v es decreciente. Cuando $a = 0$, v no está cambiando. Como la rapidez de la partícula a los t segundos es $|v(t)|$ m/s, se tienen los resultados siguientes:

(i) Si $v \geq 0$ y $a > 0$, entonces la rapidez es creciente.
(ii) Si $v \geq 0$ y $a < 0$, entonces la rapidez es decreciente.
(iii) Si $v \leq 0$ y $a > 0$, entonces la rapidez es decreciente.
(iv) Si $v \leq 0$ y $a < 0$, entonces la rapidez es creciente

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 7** Para el movimiento rectilíneo del ejemplo 1 y los ejemplos ilustrativos 2 a 4,

$$s = t^3 - 12t^2 + 36t - 24$$

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad v = 3t^2 - 24t + 36$$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad a = 6t - 24$$

Por tanto, $a = 6(t - 4)$; de modo que para $0 < t < 4$, $a < 0$, y para $4 < t < 8$, $a > 0$. Estos resultados son consistentes con la discusión del ejemplo ilustrativo 6. ◀

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 8** Para la pelota del ejemplo 2

$$s = -16t^2 + 64t \quad \text{y} \quad v = -32t + 64$$

La aceleración de la pelota es a pies por segundo por segundo donde

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad a = -32$$

Por tanto, la aceleración es -32 pies/s^2. Esta aceleración constante de la pelota en la dirección hacia abajo, ya sea que la pelota suba o baje, se debe a la fuerza de gravedad. ◀

 ***EJEMPLO 3*** Una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal de acuerdo a la ecuación

$$s = 3t^2 - t^3 \qquad t \geq 0 \tag{7}$$

donde s metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Si v metros por segundo es la velocidad instantánea y a metros por segundo por segundo es la aceleración instantánea a los t segundos, encuentre v y a en términos de t. Describa la posición y movimiento de la partícula en una tabla que incluya los intervalos de tiempo en los que la partícula se mueve a la izquierda, y en los que se mueve a la derecha, los intervalos

en los que la velocidad es creciente y en los que es decreciente, los intervalos en los que la rapidez es creciente y en los que es decreciente, y la posición de la partícula con respecto al origen durante estos intervalos de tiempo. Muestre el comportamiento del movimiento mediante una figura análoga a la figura 2.

Solución Como $s = 3t^2 - t^3$ y $v = \dfrac{ds}{dt}$,

$$v = 6t - 3t^2 \tag{8}$$

Puesto que $a = \dfrac{dv}{dt}$,

$$a = 6 - 6t \tag{9}$$

Ahora se determinarán los valores de t cuando alguna de las cantidades s, v o a es cero. De (7),

$$s = 0 \quad \text{cuando} \quad t = 0 \quad \text{o} \quad t = 3$$

De (8),

$$v = 0 \quad \text{cuando} \quad t = 0 \quad \text{o} \quad t = 2$$

De (9),

$$a = 0 \quad \text{cuando} \quad t = 1$$

La tabla 3 muestra los valores de s, v y a cuando t es igual a 0, 1, 2 y 3. También se ha indicado el signo de s, v y a en los intervalos de t sin incluir a 0, 1, 2 y 3. Entonces se puede hacer una conclusión acerca de la posición y del movimiento de la partícula para los diferentes valores de t.

Tabla 3

	s	v	a	*Conclusión*
$t = 0$	0	0	6	La partícula está en el origen. La velocidad es 0 y es creciente. La rapidez es creciente.
$0 < t < 1$	+	+	+	La partícula está a la derecha del origen y se mueve hacia la derecha. La velocidad es creciente. La rapidez es creciente.
$t = 1$	2	3	0	La partícula está a 2 metros a la derecha del origen y se mueve hacia la derecha a 3 m/s. La velocidad no cambia, de modo que la rapidez tampoco.
$1 < t < 2$	+	+	−	La partícula está a la derecha del origen y su movimiento es hacia la derecha. La velocidad es decreciente. La rapidez es decreciente.
$t = 2$	4	0	−6	La partícula está a 4 metros a la derecha del origen y cambia el sentido de su movimiento de derecha a izquierda. La velocidad es decreciente. La rapidez es decreciente.
$2 < t < 3$	+	−	−	La partícula está a la derecha del origen y su movimiento es hacia la izquierda. La velocidad es decreciente. La rapidez es creciente.
$t = 3$	0	−9	−12	La partícula está en el origen y su movimiento es hacia la izquierda a 9 m/s. La velocidad es decreciente. La rapidez es creciente.
$3 < t$	−	−	−	La partícula está a la izquierda del origen y su movimiento es hacia la izquierda. La velocidad es decreciente. La rapidez es creciente.

La figura 10 presenta el movimiento de la partícula a lo largo de la recta horizontal. El comportamiento de la partícula, descrito en la tabla 3, se indica sobre la recta donde las flechas señalan el sentido del movimiento de la partícula sobre el eje horizontal. ◀

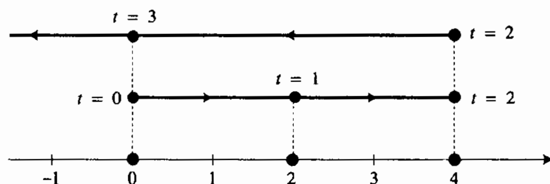


FIGURA 10

Los resultados del ejemplo 3 se pueden apoyar al simular el movimiento de la partícula en la graficadora, como se hizo en el ejemplo ilustrativo 3 para el movimiento del ejemplo 1 y del ejemplo ilustrativo 2. En el ejercicio 24 se le pedirá que haga esto.

▶ **EJEMPLO 4** Una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ecuación de movimiento

$$s = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4t}{t+1}$$

donde s metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Si v metros por segundo es la velocidad instantánea y a metros por segundo por segundo es la aceleración instantánea de la partícula a los t segundos, determine t, s y v cuando $a = 0$.

Solución

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad\qquad a = \frac{dv}{dt}$$

$$= t + \frac{4}{(t+1)^2} \qquad\qquad = 1 - \frac{8}{(t+1)^3}$$

Al considerar $a = 0$ se tiene

$$\frac{(t+1)^3 - 8}{(t+1)^3} = 0$$

$$(t+1)^3 = 8$$

De donde el único valor real de t se obtiene de la raíz cúbica principal de 8, de modo que $t + 1 = 2$; esto es, $t = 1$. Cuando $t = 1$,

$$s = \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{4 \cdot 1}{1+1} \qquad\qquad v = 1 + \frac{4}{(1+1)^2}$$

$$= 2.5 \qquad\qquad = 2$$

Conclusión: La aceleración es 0 en 1 s cuando la partícula está a 2.5 m del origen y se mueve hacia la derecha a una velocidad de 2 m/s. ◀

EJERCICIOS 2.5

En los ejercicios 1 a 8, una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal de acuerdo a la ecuación indicada, donde s metros es la distancia dirigida a partir del origen a los t segundos. Determine la velocidad instantánea v(t) metros por segundo a los t segundos, después calcule $v(t_1)$ para el valor particular de t_1.

1. $s = 3t^2 + 1;\ t_1 = 3$
2. $s = 8 - t^2;\ t_1 = 5$
3. $s = \frac{1}{4t};\ t_1 = \frac{1}{2}$

4. $s = \frac{3}{t^2}$; $t_1 = -2$

5. $s = 2t^3 - t^2 + 5$; $t_1 = -1$

6. $s = 4t^3 + 2t - 1$; $t_1 = \frac{1}{2}$

7. $s = \frac{2t}{4 + t}$; $t_1 = 0$

8. $s = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2}$; $t_1 = 2$

En los ejercicios 9 a 14, una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal de acuerdo a la ecuación indicada, donde s metros es la distancia dirigida a partir del punto O a los t segundos. El sentido positivo es hacia la derecha. Determine los intervalos de tiempo en los que la partícula se mueve hacia la derecha y en los que se mueve hacia la izquierda. También determine dónde la partícula cambia su dirección. Muestre el comportamiento del movimiento mediante una figura similar a la figura 2, y elija valores de t al azar pero incluya los valores de t cuando la partícula cambia de sentido. Apoye sus resultados simulando el movimiento de la particula en la graficadora.

9. $s = t^3 + 3t^2 - 9t + 4$

10. $s = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 8$

11. $s = \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 2t + 4$

12. $s = \frac{t}{1 + t^2}$

13. $s = \frac{t}{9 + t^2}$

14. $s = \frac{t + 1}{t^2 + 4}$

15. Para el movimiento rectilíneo del ejercicio 9, trace en el mismo rectángulo de inspección la recta $y = 2$ sobre la cual se desplaza la partícula realmente y una curva la cual represente una amplificación del movimiento de la partícula, semejante a la del ejemplo ilustrativo 4. Apoye los resultados del ejercicio 9 visualizando la partícula que se mueve sobre la curva (la cual no es en realidad la trayectoria de la partícula). Dibuje lo que ve en la pantalla de la graficadora y describa el movimiento de la partícula sobre la curva.

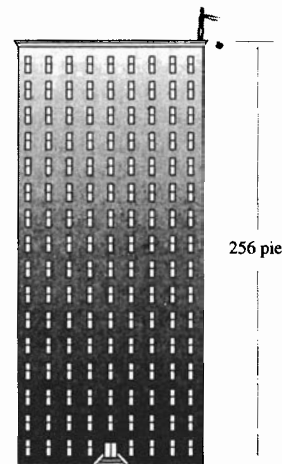
16. Siga las instrucciones del ejercicio 15 para el movimiento rectilíneo del ejercicio 10.

Para los ejercicios 17 a 21, utilice la siguiente ecuación de movimiento para un objeto que se mueve sobre una recta vertical y sujeto sólo a la fuerza de gravedad, donde el sentido (o dirección) positivo es hacia arriba:

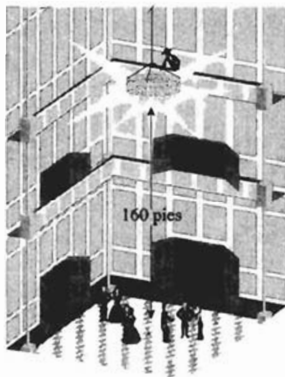
$$s = -16t^2 + v_0 t + s_0 \qquad (10)$$

donde s pies es la altura del objeto a los t segundos, s_0 pies es la altura inicial del objeto y v_0 pies por segundo es su velocidad inicial.

17. Una piedra cae desde un edificio de 256 pie de altura. **(a)** Utilice (10) para escribir una ecuación del movimiento de la piedra y simule este movimiento en la graficadora. **(b)** Determine la velocidad instantánea de la piedra en 1 s y 2 s. **(c)** Determine el tiempo que le tomará a la piedra llegar al piso. **(d)** ¿Cuál es la rapidez de la piedra cuando llega al piso?



18. En un teatro, la base de un candil está a 160 pie de altura sobre el piso del vestíbulo. Suponga que el fantasma de la ópera suelta el candil y lo deja caer desde el reposo hasta estrellarse en el piso. **(a)** Utilice (10) para escribir una ecuación del movimiento del candil y simule su movimiento en la graficadora. **(b)** Determine la velocidad instantánea del candil en 1 s y en 1.5 s. **(c)** Determine el tiempo que le tomará al candil llegar hasta el piso. **(d)** ¿Cuál es la rapidez del candil cuando llega al piso?



19. Realice el ejercicio 18 considerando ahora que el fantasma es capaz de darle al candil una velocidad inicial de 48 pie/s.

20. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde el piso con una velocidad inicial de 32 pie/s. **(a)** Emplee (10) para escribir una ecuación del movimiento de la pelota y simule este movimiento en la graficadora. **(b)** Estime que tan alto llegará la pelota y cuánto tiempo le tomará llegar hasta su punto más alto. **(c)** Confirme analíticamente las estimaciones del inciso (b). **(d)** Determine la velocidad instantánea de la pelota en 0.75 s y en 1.25 s. **(e)** Determine la rapidez de la pelota en 0.75 s y en 1.25 s **(f)** Determine la rapidez de la pelota cuando ésta llega al piso.

21. Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 560 pie/s. (**a**) Utilice (10) para escribir una ecuación del movimiento de la piedra y simule este movimiento en la graficadora. (**b**) Estime qué tan alto llegará la piedra y cuánto tiempo le tomará llegar hasta su punto más alto. (**c**) Confirme analíticamente las estimaciones del inciso (b). (**d**) Determine la velocidad instantánea de la piedra en 10 s y en 25 s. (**e**) Determine la rapidez de la piedra en 10 s y en 25 s. (**f**) Determine la rapidez de la piedra cuando ésta llega al piso.

22. Para la pelota del ejercicio 20, haga lo siguiente: (**a**) Trace en el mismo rectángulo de inspección la trayectoria de la pelota, la gráfica de la ecuación de movimiento y la gráfica de la ecuación que expresa la velocidad instantánea v como una función de t. Dibuje lo que ve en la pantalla de la graficadora y describa por qué esta visualización apoya la respuesta del inciso (b) del ejercicio 20.

23. Siga las instrucciones del ejercicio 22 para la piedra del ejercicio 21.

24. Simule el movimiento de la partícula del ejemplo 3 en la graficadora. Explique por qué esto apoya los resultados del ejemplo 3.

En los ejercicios 25 y 26, una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación indicada, donde s pies es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Determine el tiempo en el que la aceleración instantánea es cero, después determine la distancia dirigida de la partícula desde el origen y la velocidad instantánea en ese tiempo.

25. $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t + 1;\ t \geq 0$

26. $s = 2t^3 - 6t^2 + 3t - 4;\ t \geq 0$

En los ejercicios 27 y 28, una partícula se desplaza a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación indicada donde a los t segundos, s metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen, v metros por segundo es la velocidad instantánea de la partícula y a metros por segundo por segundo es la aceleración instantánea de la partícula. Determine v y a en términos de t. Elabore una tabla semejante a la tabla 3 que proporcione una descripción de la posición y del movimiento de la partícula. Incluya en la tabla los intervalos de tiempo en los que la partícula se mueve hacia la derecha y en los que se desplaza a la izquierda, los intervalos en los que la velocidad es creciente y en los que es decreciente, los intervalos en los que la rapidez es creciente y en los que es decreciente, y la posición de la partícula con respecto al origen durante estos intervalos de tiempo. Muestre el comportamiento del movimiento mediante una figura similar a la figura 10.

27. $s = t^3 - 9t^2 + 15t;\ t \geq 0$

28. $s = \frac{1}{6}t^3 - 2t^2 + 6t - 2;\ t \geq 0$

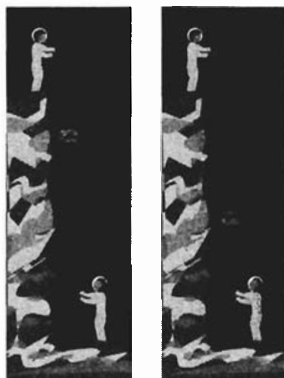
29. Simule el movimiento de la partícula del ejercicio 27 en la graficadora y explique por qué esto apoya sus resultados.

30. Simule el movimiento de la partícula del ejercicio 28 en la graficadora y explique por qué esto apoya sus resultados.

31. En la ecuación (10), el coeficiente -16 de t^2 es igual a $\frac{1}{2}(-32)$ donde -32 pie/s^2 es la aceleración debida a la gravedad de un objeto que se mueve sobre una recta vertical cercano a la superficie de la Tierra, donde la resistencia del aire no se considera. Como la aceleración debida a la gravedad de la Luna es -5.5 pie/s^2, la ecuación de movimiento para un objeto que se desplaza sobre una recta vertical cercano a la superficie de la Luna es

$$s = -2.75t^2 + v_0t + s_0$$

Suponga que un astronauta deja caer una piedra desde la orilla de un risco y la piedra llega al piso en 4 s. Después un segundo astronauta, en la parte inferior del risco, toma la piedra y la lanza de regreso al primer astronauta. (**a**) ¿Cuál es la altura del risco? (**b**) ¿Con qué velocidad llega la piedra al piso? (**c**) ¿Con qué velocidad, por lo menos, debe lanzar la piedra el segundo astronauta de modo que le llegue al primero?



32. En lugar de la Luna, suponga que los dos astronautas del ejercicio 31 realizan lo mismo en Marte, donde la aceleración debida a la gravedad es de -12 pie/s^2. Escriba la ecuación correspondiente al movimiento y responda las mismas preguntas que en el ejercicio 31, considerando ahora que la piedra llega al piso en 3 s.

33. Suponga que un corredor en una carrera de 100 metros está a s metros de la línea de meta t segundos después del inicio de la carrera, donde

$$s = 100 - \frac{1}{4}(t^2 + 33t)$$

Determine la rapidez del corredor (**a**) al inicio de la carrera, y (**b**) cuando el corredor cruza la línea de meta.



34. Si se empuja una pelota en un plano inclinado con una velocidad inicial de 24 pie/s, entonces $s = 24t + 10t^2$, donde s pies es la distancia de la pelota desde el punto inicial a los t segundos, y la dirección positiva se considera hacia abajo sobre el plano inclinado. **(a)** ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota a los t_1 segundos? **(b)** ¿Cuánto tardará la velocidad en llegar a 48 pies/s?

35. Se golpea una bola de billar de modo que se desplaza en línea recta. Si s centímetros es la distancia de la bola desde su posición inicial a los t segundos, entonces $s = 100t^2 + 100t$. Si la bola golpea una banda que se encuentra a 39 cm de su posición inicial, ¿a qué velocidad la golpea?



36. Dos partículas, A y B, se mueven hacia la derecha sobre una recta horizontal. Ellas inician su movimiento en un punto O, s metros es cada distancia dirigida de cada partícula desde O a los t segundos, y las ecuaciones de movimiento son

$$s = 4t^2 + 5t \qquad \text{(para la partícula } A\text{)}$$
$$s = 7t^2 + 3t \qquad \text{(para la partícula } B\text{)}$$

Si $t = 0$ en el inicio, ¿para qué valores de t la velocidad de la partícula A excederá la velocidad de la partícula B?

2.6 DERIVADA COMO TASA DE VARIACIÓN

En la sección 2.5 se dijo que si una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación de movimiento $s = f(t)$, entonces la velocidad de la partícula a las t unidades de tiempo está determinada por la derivada de s con respecto a t. Este concepto de velocidad en el movimiento rectilíneo corresponde al concepto más general de *tasa instantánea de variación*; esto es, la tasa de variación de s por unidad de variación de t es la derivada de s con respecto a t.

De manera semejante, si una cantidad y es función de una cantidad x, se puede expresar la tasa de variación de y por unidad de variación de x. Esta discusión es análoga a la discusión de la pendiente de la recta tangente a la gráfica y a la de la velocidad instantánea de una partícula que se mueve a lo largo de una recta.

Si la relación funcional entre y y x está dada por

$$y = f(x)$$

y si x varía del valor x_1 al $x_1 + \Delta x$, entonces y varía de $f(x_1)$ a $f(x_1 + \Delta x)$. De modo que la variación de y, denotada por Δy, es $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ cuando la variación de x es Δx. La tasa promedio de variación de y por unidad de variación de x, conforme x varía de x_1 a $x_1 + \Delta x$, está dada por

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

Si el límite de este cociente existe cuando $\Delta x \to 0$, este límite es el que se considera como la tasa instantánea de variación de y por unidad de variación de x en x_1. En consecuencia, se tiene la definición siguiente.

2.6.1 Definición de tasa de variación instantánea

Si $y = f(x)$, entonces la **tasa de variación instantánea de y por unidad de variación de x en x_1** es $f'(x_1)$ o, equivalentemente, la derivada de y con respecto a x en x_1, si ésta existe.

Para ilustrar esta definición geométricamente, sea $f'(x_1)$ la tasa instantánea de variación de y por unidad de variación de x en x_1. Entonces, si $f'(x_1)$ se multiplica por Δx (la variación de x), el producto es la variación que ocurriría en y si el punto (x, y) se desplazara a lo largo de la recta tangente a

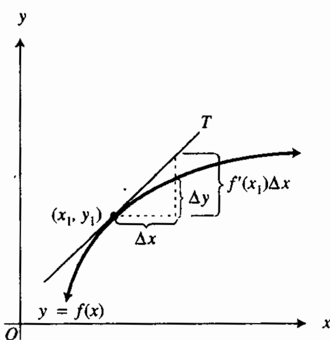


FIGURA 1

(x_1, y_1) de la gráfica de $y = f(x)$. Vea la figura 1. La tasa promedio de variación de y por unidad de variación de x está dada por la fracción en (1), y cuando esta fracción se multiplica por Δx, el producto es Δy, la cual es la variación real de y causada por una variación Δx en x cuando el punto (x, y) se mueve a lo largo de la gráfica.

EJEMPLO 1 Sea $V(x)$ centímetros cúbicos el volumen de un cubo cuyas aristas miden x centímetros, medidas con cuatro dígitos significativos. En una calculadora obtenga la tasa promedio de variación de $V(x)$ con respecto a x conforme x varía de **(a)** 3.000 a 3.200; **(b)** 3.000 a 3.100; **(c)** 3.000 a 3.010; **(d)** 3.000 a 3.001. **(e)** ¿Cuál es la tasa instantánea de variación de $V(x)$ con respecto a x cuando $x = 3.000$?

Solución

La tasa promedio de variación de $V(x)$ con respecto a x cuando x varía de x_1 a $x_1 + \Delta x$ es

$$\frac{V(x_1 + \Delta x) - V(x_1)}{\Delta x}$$

(a) $x_1 = 3.000,\ \Delta x = 0.200$

$$\frac{V(3.200) - V(3.000)}{0.200} = \frac{(3.200)^3 - (3.000)^3}{0.200} = 28.84$$

(b) $x_1 = 3.000,\ \Delta x = 0.100$

$$\frac{V(3.100) - V(3.000)}{0.100} = \frac{(3.100)^3 - (3.000)^3}{0.100} = 27.91$$

(c) $x_1 = 3.000, \Delta x = 0.010$

$$\frac{V(3.010) - V(3.000)}{0.010} = \frac{(3.010)^3 - (3.000)^3}{0.010} = 27.09$$

(d) $x_1 = 3.000, \Delta x = 0.001$

$$\frac{V(3.001) - V(3.000)}{0.001} = \frac{(3.001)^3 - (3.000)^3}{0.001} = 27.01$$

En el inciso (a) se ve que conforme la longitud de las aristas del cubo varía de 3.000 cm a 3.200 cm, la tasa promedio de variación del volumen es 28.84 cm^3 por centímetro de variación en la longitud de las aristas. Los incisos (b)-(d) pueden interpretarse de manera semejante.

(e) La tasa instantánea de variación de $V(x)$ con respecto a x cuando $x = 3$ es $V'(3)$.

$$V'(x) = 3x^2 \qquad V'(3) = 27$$

Conclusión: Cuando la longitud de las aristas del cubo es de 3 cm, la tasa instantánea de variación del volumen es 27 cm^3 por centímetro de variación en la longitud de las aristas. ◀

▶ ***EJEMPLO 2*** En un circuito eléctrico, si E volts es la fuerza electromotriz, I amperes es la corriente y R ohms es la resistencia, entonces de la ley de Ohms

$$IR = E$$

(a) Si se supone que E es una constante positiva, demuestre que I decrece a una tasa proporcional al inverso del cuadrado de R. **(b)** ¿Cuál es la tasa instantánea de variación de I con respecto a R en un circuito eléctrico de 90 volts cuando la resistencia es de 15 ohms?

Solución

(a) Si se resuelve la ecuación dada para I, se obtiene

$$I = E \cdot R^{-1}$$

Al diferenciar I con respecto a R, se tiene

$$\frac{dI}{dR} = -E \cdot R^{-2}$$

$$\frac{dI}{dR} = -\frac{E}{R^2} \tag{2}$$

Esta ecuación establece que la tasa de variación de I con respecto a R es negativa y proporcional a $1/R^2$. Por tanto, I decrece a una tasa proporcional al inverso del cuadrado de R.

(b) De la ecuación (2) con $E = 90$ y $R = 15$, se tiene

$$\frac{dI}{dR} = -\frac{90}{225}$$
$$= -0.4$$

<u>Conclusión:</u> La corriente decrece a una tasa de 0.4 amperes por ohm. ◀

En economía, la variación de una cantidad con respecto a otra puede describirse mediante el concepto de *variación promedio* o del concepto de *variación marginal*. El concepto de **variación promedio** expresa la variación de una cantidad sobre un intervalo de valores de una segunda cantidad, mientras que el concepto de **variación marginal** es la variación instantánea de la primera cantidad que resulta de una pequeña unidad de variación de la segunda cantidad. Se inician los ejemplos en economía con la definición de *costo promedio* y *costo marginal*.

Suponga que $C(x)$ es el costo total para producir x unidades de un artículo. La función C se denomina **función de costo total.** En circunstancias normales x y $C(x)$ son positivos. Debido a que x representa la cantidad de unidades de un artículo, usualmente x es un número entero no negativo. Sin embargo, a fin de aplicar el Cálculo, se supondrá que x es un número real no negativo para satisfacer los requerimientos de continuidad de la función C.

El **costo promedio** de producción de cada unidad de un artículo se obtiene al dividir el costo total entre el número de unidades producidas. Si $Q(x)$ dólares es el costo promedio, entonces

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$$

y Q se conoce como **función de costo promedio.**

Ahora suponga que el número de unidades producidas es x_1, y que se incrementa en Δx. Entonces la variación del costo total está determinado por $C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)$, y la variación promedio en el costo total con respecto a la variación del número de unidades producidas está dado por

$$\frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

Los economistas utilizan el término *costo marginal* para el límite de este cociente cuando Δx tiende a 0, suponiendo que el límite existe. Este límite, que es la derivada de C en x_1, establece que el **costo marginal,** cuando $x = x_1$, está dado por $C'(x_1)$, si existe. La función C' recibe el nombre de **función de costo marginal,** y $C'(x_1)$ puede interpretarse como la tasa de variación del costo total cuando se producen x_1 unidades de cierto artículo.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Supongase que $C(x)$ dólares es el costo total por la fabricación de x juguetes, y que

$$C(x) = 110 + 4x + 0.02x^2$$

(a) La función de costo marginal es C' y está definida por

$$C'(x) = 4 + 0.04x$$

(b) El costo marginal cuando $x = 50$ es $C'(50)$, y

$$\begin{aligned} C'(50) &= 4 + 0.04(50) \\ &= 6 \end{aligned}$$

<u>**Conclusión:**</u> La tasa de variación del costo total, cuando se fabrican 50 juguetes, es \$6 por juguete.

(c) El número de dólares del costo real de fabricación del juguete 51 es $C(51) - C(50)$, y

$$\begin{aligned} C(51) - C(50) &= [110 + 4(51) + 0.02(51)^2] - [110 + 4(50) + 0.02(50)^2] \\ &= 366.02 - 360 \\ &= 6.02 \end{aligned}$$

Observe que las respuestas de (b) y (c) difieren por 0.02. Esta discrepancia es debida a que el costo marginal es la tasa instantánea de variación de $C(x)$ con respecto a una variación de una unidad de x. En consecuencia, $C'(50)$ es el número aproximado de dólares del costo de fabricación del juguete 51. ◀

Note que el cálculo de $C'(50)$ en el ejemplo ilustrativo 1 es más simple que calcular $C(51) - C(50)$. Con frecuencia, los economistas aproximan el costo de producción de una unidad adicional utilizando la función de costo marginal.

Específicamente, $C'(k)$ dólares es el costo aproximado de la $(k + 1)$-ésima unidad después de que las primeras k unidades se han producido.

Otra función importante en economía es la **función de ingreso total,** denotada por R, la cual está definida por

$$R(x) = px$$

donde $R(x)$ dólares es el ingreso total recibido cuando se venden x unidades a p dólares por unidad.

El **ingreso marginal,** cuando $x = x_1$, está determinado por $R'(x_1)$, si existe. La función R' se denomina **función de ingreso marginal.** $R'(x_1)$ puede ser positivo, negativo o cero, y puede interpretarse como la tasa de variación del ingreso total cuando se venden x_1 unidades. $R'(k)$ dólares es el ingreso aproximado por la venta de la $(k + 1)$-ésima unidad después de que las primeras k unidades se han vendido.

▶ **EJEMPLO 3** Suponga que $R(x)$ dólares es el ingreso total por la venta de x mesas, y que

$$R(x) = 300x - \tfrac{1}{2}x^2$$

Determine (**a**) la función de ingreso marginal; (**b**) el ingreso marginal cuando $x = 40$; (**c**) el ingreso real por la venta de la mesa 41.

Solución

(**a**) La función de ingreso marginal es R' y está definida por

$$R'(x) = 300 - x$$

(**b**) El ingreso marginal cuando $x = 40$ está dado por $R'(40)$, y

$$\begin{aligned} R'(40) &= 300 - 40 \\ &= 260 \end{aligned}$$

Conclusión: La tasa de variación del ingreso total cuando se han vendido 40 mesas es $260 por mesa.

(**c**) El número de dólares del ingreso real por la venta de la mesa 41 es $R(41) - R(40)$, y

$$\begin{aligned} R(41) - R(40) &= \left[300(41) - \frac{(41)^2}{2}\right] - \left[300(40) - \frac{(40)^2}{2}\right] \\ &= 11\,459.50 - 11\,200 \\ &= 259.50 \end{aligned}$$

Conclusión: El ingreso real por la venta de la mesa 41 es $259.50. ◀

Observe que en el inciso (b) del ejemplo 3 se obtuvo $R'(40) = 260$, y $260 es una aproximación del ingreso recibido por la venta de la mesa 41, el cual es $259.50, según el inciso (c).

Como $f'(x)$ proporciona la tasa instantánea de variación de $f(x)$ con respecto a x, $f''(x)$, la cual es la derivada de $f'(x)$, proporciona la tasa instantánea de variación de $f'(x)$ respecto a x. Además, si (x, y) es cualquier punto de la gráfica de $y = f(x)$, entonces $\frac{dy}{dx}$ proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto (x, y). Por tanto, $\frac{d^2y}{dx^2}$ es la tasa de variación de la pendiente de la recta tangente con respecto a x en el punto (x, y).

▶ **EJEMPLO 4** Sea $m(x)$ la pendiente de la recta tangente a la curva

$$y = x^3 - 2x^2 + x$$

en el punto (x, y). Determine la tasa instantánea de variación de $m(x)$ con respecto a x en el punto $(2, 2)$.

Solución

$$m(x) = \frac{dy}{dx}$$
$$= 3x^2 - 4x + 1$$

La tasa instantánea de variación de $m(x)$ con respecto a x está determinada por $m'(x)$ o, equivalentemente, $\frac{d^2y}{dx^2}$,

$$m'(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$
$$= 6x - 4$$

En el punto $(2, 2)$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 8$. ◀

EJERCICIOS 2.6

1. Sea $A(x)$ centímetros cuadrados el área de un cuadrado cuyos lados miden x centímetros, medidos con cuatro cifras significativas. En la calculadora obtenga la tasa promedio de variación de $A(x)$ con respecto a x cuando x varía **(a)** de 4.000 a 4.600; **(b)** de 4.000 a 4.300; **(c)** de 4.000 a 4.100; **(d)** de 4.000 a 4.050. **(e)** ¿Cuál es la tasa instantánea de variación de $A(x)$ con respecto a x cuando $x = 4.000$?

2. El largo de un rectángulo mide 4 pulg más que su ancho, y las 4 pulg de diferencia se mantienen conforme el rectángulo aumenta de tamaño. Sea $A(w)$ pulgadas cuadradas el área del rectángulo cuyo ancho es de w pulgadas, medido con cuatro cifras significativas. En la calculadora obtenga la tasa promedio de variación de $A(w)$ con respecto a w cuando w varía **(a)** de 3.000 a 3.200; **(b)** de 3.000 a 3.100; **(c)** de 3.000 a 3.010; **(d)** de 3.000 a 3.001. **(e)** ¿Cuál es la tasa instantánea de variación de $A(w)$ con respecto a w cuando $w = 3.000$?

3. La ley de Stefan establece que un cuerpo emite energía radiante de acuerdo con la fórmula $R = kT^4$, donde R es la medida de la tasa de emisión de energía radiante por unidad cuadrada de área, T es la medida de la temperatura Kelvin de la superficie, y k es una constante. Determine **(a)** la tasa promedio de variación de R con respecto a T cuando T se incrementa de 200 a 300; **(b)** la tasa instantánea de variación de R con respecto a T cuando $T = 200$.

4. Suponga que un cilindro circular recto tiene una altura constante de 10.00 pulg. Sea V pulgadas cúbicas el volumen del cilindro circular recto, y r pulgadas el radio de su base. Determine la tasa promedio de variación de V con respecto a r cuando r varía de **(a)** de 5.00 a 5.40; **(b)** de 5.00 a 5.10; **(c)** de 5.00 a 5.01. **(d)** Determine la tasa instantánea de variación de V con respecto a r cuando $r = 5.00$.

5. Sea r pulgadas el radio de un plato metálico circular de área $A(r)$ pulgadas cuadradas y circunferencia de $C(r)$ pulgadas. Si el calor expande el plato, determine **(a)** la tasa instantánea de variación de $A(r)$ con respecto a r, y **(b)** la tasa instantánea de variación de $C(r)$ con respecto a r. **(c)** Compare las respuestas de los incisos (a) y (b) y explique en cuánto difieren estas tasas.

6. Un sólido consiste de un cilindro circular recto y una semiesfera en cada extremo, y la longitud del cilindro es el doble de su radio. Sean r unidades el radio del cilindro y de las semiesferas y $V(r)$ unidades cúbicas el volumen del sólido. Determine la tasa instantánea de variación de $V(r)$ con respecto a r.

7. Sean x la longitud total del sólido del ejercicio 6, y $V(x)$ unidades cúbicas el volumen del sólido en términos de x. Determine la tasa instantánea de variación de $V(x)$ con respecto a x.

8. La *ley de Boyle* para la expansión de un gas es $PV = C$, donde P unidades de fuerza por unidad cuadrada de área es la presión, V unidades cúbicas es el volumen del gas y C es una constante. **(a)** Muestre que V decrece a un tasa proporcional al inverso del cuadrado de P. **(b)** Determine la tasa instantánea de variación de V con respecto a P cuando $P = 4$ y $V = 8$.

9. La temperatura de una persona es $f(t)$ grados Fahrenheit t días después de adquirir una enfermedad que dura 10 días, donde

$$f(t) = 98.6 + 1.2t - 0.12t^2 \qquad 0 \leq t \leq 10$$

(a) Determine la tasa de variación de $f(t)$ con respecto a t cuando $0 < t < 10$. ¿Cuál es la temperatura de la persona y la tasa de variación de la temperatura cuando la persona ha estado enferma por **(b)** 3 días, y **(c)** 8 días? **(d)** Trace la gráfica de f, estime cuando la temperatura es un máximo así como la temperatura máxima.

10. Suponga que un tumor del cuerpo de una persona tiene forma esférica. Determine la tasa de variación del volumen del tumor con respecto a su radio cuando éste mide (**a**) 0.5 cm, y (**b**) 1 cm.

11. Una bacteria tiene forma esférica. Determine la tasa de variación del volumen de la bacteria con respecto al radio cuando éste mide (**a**) 1.5 μm (micras), y (**b**) 2 μm.

12. Para el tumor del ejercicio 10, determine la tasa de variación del área de la superficie del tumor con respecto al radio cuando éste mide (**a**) 0.5 cm, y (**b**) 1 cm.

13. Para la bacteria del ejercicio 11, determine la tasa de variación del área de la superficie de la bacteria con respecto al radio cuando éste mide (**a**) 1.5 μm (micras), y (**b**) 2 μm.

14. Se vierte arena en un montículo de forma cónica de modo que la altura de éste es el doble de su radio. Determine la tasa de variación del volúmen del montículo con respecto al radio cuando la altura de éste es (**a**) 4 m, y (**b**) 8 m.

15. Una masa de aire frío se aproxima a un campus universitario de modo que si la temperatura es $T(t)$ grados Fahrenheit t horas después de la media noche, entonces

$$T(t) = 0.1(400 - 40t + t^2) \qquad 0 \leq t \leq 12$$

(**a**) Determine la tasa promedio de variación de $T(t)$ con respecto a t entre 5 a.m. y 6 a.m. (**b**) Determine la tasa instantánea de variación de $T(t)$ con respecto a t a las 5 a.m.

16. Se estimó que un trabajador en una tienda donde se fabrican marcos para pinturas puede pintar y marcos x horas después de comenzar a trabajar a las 8 a.m., donde

$$y = 3x + 8x^2 - x^3 \qquad 0 \leq x \leq 4$$

(**a**) Determine la tasa a la que el trabajador está pintando a las 10 a.m. (**b**) Determine el número de marcos que el trabajador pintará entre las 10 y las 11 a.m.

17. Se está extrayendo el agua de una piscina y el volumen del agua, después de t minutos de iniciada la extracción, es $V(t)$ litros, donde $V(t) = 250\,(1600 - 80t + t^2)$. (**a**) Determine la tasa promedio de la salida del agua de la piscina durante los 5 primeros minutos, y (**b**) ¿qué tan rápido sale el agua de la piscina 5 minutos después de iniciada la extracción?

18. Se lanza una piedra a un charco, generándose ondas circulares concéntricas. Determine la tasa de variación del área de la superficie afectada cuando su radio es (**a**) 4 cm, y (**b**) 7 cm.

19. El número de dólares del costo total de fabricación de x relojes en cierta fábrica está dado por $C(x) = 1500 + 3x + x^2$. Determine (**a**) la función de costo marginal; (**b**) el costo marginal cuando $x = 40$; (**c**) el costo real de fabricación del reloj 41.

20. El ingreso total recibido por la venta de x escritorios es $R(x)$ dólares, donde $R(x) = 200x - \frac{1}{3}x^2$. Determine (**a**) la función de ingreso marginal; (**b**) el ingreso marginal cuando $x = 30$; (**c**) el ingreso real por la venta del escritorio 31.

21. Si $R(x)$ dólares es el ingreso total recibido por la venta de x equipos de televisión, donde $R(x) = 600x - \frac{1}{20}x^3$, determine (**a**) la función de ingreso marginal; (**b**) el ingreso marginal cuando $x = 20$; (**c**) el ingreso real por la venta del equipo de televisión 21.

22. Si $C(x)$ dólares es el costo total por fabricar x pisapapeles, y

$$C(x) = 200 + \frac{50}{x} + \frac{x^2}{5}$$

determine (**a**) la función de costo marginal; (**b**) el costo marginal cuando $x = 10$; (**c**) el costo real por la fabricación del onceavo pisapapeles.

En los ejercicios 23 a 25, se utiliza el concepto de tasa relativa definido como sigue: si $y = f(x)$, la ***tasa relativa de variación*** *de y con respecto a x en x_1 está determinada por $\dfrac{f'(x_1)}{f(x_1)}$ o, equivalentemente, $\dfrac{dy/dx}{y}$ y evaluada en $x = x_1$.*

23. Las utilidades anuales brutas de una compañía t años después del 1o. de enero de 1994 es p millones de dólares, donde $p = \frac{2}{5}t^2 + 2t + 10$. Determine (**a**) la tasa a la que las utilidades brutas crecieron el 1o. de enero de 1996; (**b**) la tasa relativa de crecimiento de las utilidades brutas el 1o. de enero de 1996 con aproximación del 0.1 %; (**c**) la tasa a la que las utilidades brutas crecerán el 1o. de enero de 2000; (**d**) la tasa relativa de crecimiento prevista de las utilidades brutas el 1o. de enero de 2000 con aproximación del 0.1 %.

24. Cierta compañía inició sus operaciones el 1o. de abril de 1993. Las utilidades anuales brutas de la compañía después de t años de operación son p dólares, donde $p = 50\,000 + 18\,000t - 600t^2$. Determine (**a**) la tasa a la que crecieron las utilidades brutas el 1o. de abril de 1995; (**b**) la tasa relativa de crecimiento de las utilidades brutas el 1o. de abril de 1995 con aproximación del 0.1 %; (**c**) la tasa a la que crecerán las utilidades brutas el 1o. de abril de 2003; (**d**) la tasa relativa de crecimiento prevista de las utilidades brutas el 1o. de abril de 2003 con aproximación del 0.1 %.

25. Suponga que el número de personas de la población de cierta ciudad t años después del 1o. de enero de 1995 se espera que sea $40t^2 + 200t + 10\,000$. Determine (**a**) la tasa a la que se espera crezca la población el 1o. de enero de 2004; (**b**) la tasa relativa de crecimiento esperada de la población el 1o. de enero de 2004 con aproximación del 0.1 %; (**c**) la tasa a la que la población se espera que crezca el 1o. de enero de 2010; (**d**) la tasa relativa de crecimiento prevista de la población el 1o. de enero de 2010 con aproximación del 0.1 %.

26. Sea r el recíproco de un número n. Determine la tasa instantánea de variación de r con respecto a n y la tasa relativa de variación de r por unidad de variación de n cuando n es igual a (**a**) 4, y (**b**) 10.

27. Las utilidades de una tienda que vende al menudeo son $100y$ dólares cuando se gastan diariamente x dólares en publicidad y $y = 2500 + 36x - 0.2x^2$. Utilice la deri-

vada para determinar si sería ventajoso que se incrementase el presupuesto para publicidad si éste es de **(a)** \$60, y **(b)** \$300. **(c)** ¿Cuál es el valor máximo para x bajo el cual es ventajoso incrementar el presupuesto de publicidad?

28. La ecuación de oferta para cierto tipo de playeras es $x = 3p^2 + 2p$, donde p dólares es el precio rebajado por playera cuando se ofrecen $1000x$. **(a)** Determine la tasa promedio de variación de la oferta para una variación de \$1 en el precio rebajado cuando éste aumenta de \$10 a \$11. **(b)** Determine la tasa instantánea (o marginal) de variación para una variación de \$1 en el precio rebajado cuando ese precio es de \$10.

29. Calcule la pendiente de la recta tangente en cada punto de la gráfica de $y = x^4 + x^3 - 3x^2$ donde la tasa de variación de la pendiente es cero.

30. Determine la tasa instantánea de variación de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = 2x^3 - 6x^2 - x + 1$ en el punto $(3, -2)$.

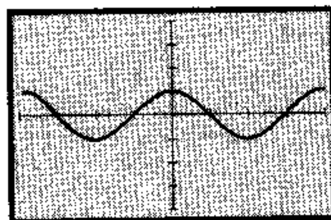
31. Para el derrame de petróleo del ejercicio 53 de la sección 1.8 y del ejercicio 31 de la sección 2.2, calcule la tasa a la que el radio de la abertura está variando a los **(a)** 0.4 min; **(b)** 2 min; **(c)** 3.2 min.

32. Demuestre que para cualquier función lineal f, la tasa promedio de variación de $f(x)$ cuando x varía de x_1 a $x_1 + k$ es la misma que la tasa instantánea de variación de $f(x)$ en x_1.

33. Demuestre que en cualquier instante **(a)** la razón de la tasa de variación del área de un círculo a la tasa de variación del radio es igual a la longitud de la circunferencia, y **(b)** la razón de la tasa de variación del volumen de una esfera a la tasa de variación del radio es igual al área de la superficie de la esfera.

2.7 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En la sección 1.10 se demostró que las funciones trigonométricas son continuas en sus respectivos dominios. En esta sección se demostrará que también son diferenciables en sus dominios. Después se emplearán estos hechos para dibujar de manera formal sus gráficas, las cuales se obtuvieron en los cursos previos al de Cálculo aplicando sólo consideraciones intuitivas.



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$

NDER(sen x, x)

FIGURA 1

Antes de calcular la derivada de la función seno, trace la gráfica de NDER(sen x, x) en el rectángulo de inspección de $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$, la cual se muestra en la figura 1. Puesto que esta gráfica se parece a la gráfica de la función coseno, con la que se familiarizó en los cursos previos al de Cálculo, puede sospecharse que la derivada de la función seno es la función coseno. A continuación se confirmará esta sospecha analíticamente al aplicar la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b \tag{1}$$

así como los teoremas 1.10.2 y 1.10.5.

Sea f la función seno, de modo que

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

De la definición de derivada,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen}(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Se emplea la fórmula (1) para $\operatorname{sen}(x + \Delta x)$, por lo que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos(\Delta x) + \cos x \operatorname{sen}(\Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x[\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x}\left(\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} x\right) + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \cos x\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \quad (2)$$

De los teoremas 1.10.5 y 1.10.2 se tiene

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} = 1 \quad (3)$$

Al sustituir de estas ecuaciones en (2) se obtiene

$$f'(x) = -0 \cdot \operatorname{sen} x + \cos x \cdot 1$$
$$= \cos x$$

De este modo, se ha demostrado el teorema siguiente.

2.7.1 Teorema Derivada de la función seno

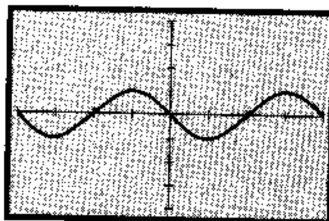
$D_x(\operatorname{sen} x) = \cos x$

EJEMPLO 1 Calcule $f'(x)$ si

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$$

Solución Al aplicar la regla del producto se obtiene

$$f'(x) = x^2 D_x(\operatorname{sen} x) + D_x(x^2)\operatorname{sen} x$$
$$= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$$



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$

NDER$(\cos x, x)$

FIGURA 2

Ahora está preparado para obtener la derivada de la función coseno, pero antes se trazará la gráfica de NDER$(\cos x,\ x)$ en el rectángulo de inspección de $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$, la cual se muestra en la figura 2. La gráfica se parece a la gráfica de la función seno reflejada con respecto al eje x, lo que sugiere que la derivada de la función coseno puede ser la negativa de la función seno. Para confirmar esta sospecha analíticamente, se procede como con la función seno. En este caso se aplicará la identidad

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \quad (4)$$

Si g es la función coseno, entonces

$$g(x) = \cos x$$

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

Se emplea la fórmula (4) para $\cos(x + \Delta x)$, de donde se tiene

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cos(\Delta x) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x[\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x}\left(\lim_{\Delta x \to 0} \cos x\right) - \left(\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} x\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (5)$$

Si se sustituye de las ecuaciones (3) en (5) se obtiene

$$\begin{aligned} g'(x) &= -0 \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot 1 \\ &= -\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

De este modo se ha demostrado el teorema siguiente.

2.7.2 Teorema Derivada de la función coseno

$D_x(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

Observe el signo menos antes de sen x para la derivada de cos x; esto es, la derivada de cos x es el negativo de sen x, mientras que la derivada de sen x es cos x.

EJEMPLO 2 Determine $\dfrac{dy}{dx}$ si

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{1 - 2\cos x}$$

Solución

Al aplicar la regla del cociente se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(1 - 2\cos x)D_x(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \cdot D_x(1 - 2\cos x)}{(1 - 2\cos x)^2} \\ &= \frac{(1 - 2\cos x)(\cos x) - \operatorname{sen} x(2 \operatorname{sen} x)}{(1 - 2\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x - 2(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}{(1 - 2\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x - 2}{(1 - 2\cos x)^2} \end{aligned}$$

◀

EJEMPLO 3 Calcule

$$\frac{d^3}{dx^3}(2 \operatorname{sen} x + 3\cos x - x^3)$$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(2 \operatorname{sen} x + 3\cos x - x^3) &= 2\cos x - 3 \operatorname{sen} x - 3x^2 \\ \frac{d^2}{dx^2}(2 \operatorname{sen} x + 3\cos x - x^3) &= -2 \operatorname{sen} x - 3\cos x - 6x \\ \frac{d^3}{dx^3}(2 \operatorname{sen} x + 3\cos x - x^3) &= -2\cos x + 3 \operatorname{sen} x - 6 \end{aligned}$$

◀

Las derivadas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante se obtiene de las identidades trigonométricas que contienen al seno y coseno, así como las derivadas de seno y coseno y los teoremas de diferenciación. Para la derivada de la función tangente se aplican las identidades

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

2.7.3 Teorema Derivada de la función tangente

$D_x(\tan x) = \sec^2 x$

Demostración

$$\begin{aligned} D_x(\tan x) &= D_x\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) \\ &= \frac{\cos x \cdot D_x(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \cdot D_x(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x \end{aligned}$$

■

2.7.4 Teorema Derivada de la función cotangente

$D_x(\cot x) = -\csc^2 x$

La demostración de este teorema, análoga a la del teorema 2.7.3, se deja como ejercicio (vea el ejercicio 1). En la demostración utilizará las identidades

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

2.7.5 Teorema Derivada de la función secante

$D_x(\sec x) = \sec x \tan x$

Demostración

$$\begin{aligned} D_x(\sec x) &= D_x\left(\frac{1}{\cos x}\right) \\ &= \frac{\cos x \cdot D_x(1) - 1 \cdot D_x(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot 0 - 1 \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \\ &= \sec x \tan x \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 Calcule

$$\frac{d}{dx}(\tan x \ \sec x)$$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x \ \sec x) &= \tan x \cdot \frac{d}{dx}(\sec x) + \frac{d}{dx}(\tan x) \cdot \sec x \\ &= \tan x(\sec x \tan x) + \sec^2 x(\sec x) \\ &= \sec x \tan^2 x + \sec^3 x\end{aligned}$$

◀

2.7.6 Teorema Derivada de la función cosecante

$D_x(\csc x) = -\csc x \cot x$

La demostración de este teorema también se deja como ejercicio (refiérase al ejercicio 2).

Como se dijo al principio de esta sección, ahora se mostrará cómo pueden dibujarse las gráficas de las funciones trigonométricas aplicando la continuidad y la diferenciabilidad de estas funciones. Primero se tratarán las gráficas de las funciones seno y coseno, cuyos dominios son el conjunto de los números reales y sus contradominios son el intervalo $[-1, 1]$. Sean

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad f'(x) = \cos x$$

Para determinar dónde tiene rectas tangentes horizontales la gráfica, se considera $f'(x) = 0$, de donde se obtiene que $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, donde k es cualquier número entero. En estos valores de x, sen x es igual a $+1$ o -1, y estos son los valores más grande y más pequeño que sen x puede tomar. La gráfica intersecta al eje x en los puntos donde sen $x = 0$, es decir, en los puntos en los que $x = k\pi$, donde k es cualquier número entero. Además, cuando k es un número entero par, $f'(k\pi) = 1$, y cuando k es un número entero impar $f'(k\pi) = -1$. Así, en los puntos de intersección de la gráfica con el eje x la pendiente de la recta tangente es 1 o -1. A partir de esta información se dibuja la gráfica de la función seno la cual se muestra en la figura 3.

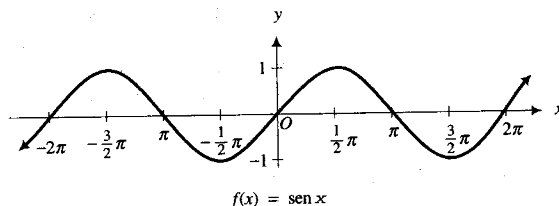
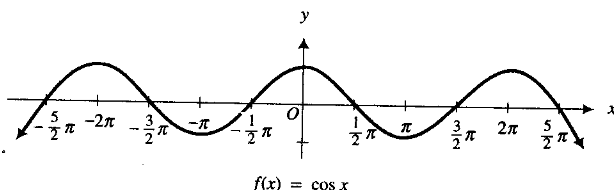


FIGURA 3

Para la gráfica de la función coseno se utiliza la identidad

$$\cos x = \operatorname{sen}(x + \tfrac{1}{2}\pi)$$

Por lo que la gráfica del coseno se obtiene a partir de la gráfica del seno al trasladar $\frac{1}{2}\pi$ unidades a la derecha al eje y. Vea la figura 4.



$f(x) = \cos x$

FIGURA 4

▶ ***EJEMPLO 5*** Obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función coseno en el punto $(\frac{3}{2}\pi, 0)$.

Solución

Si $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\operatorname{sen} x$. Por lo que $f'(\frac{3}{2}\pi) = -\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi$. Como $\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi = -1$, $f'(\frac{3}{2}\pi) = 1$. De la forma punto-pendiente para la ecuación de la recta tangente que tiene pendiente 1 y que pasa por el punto $(\frac{3}{2}\pi, 0)$, se obtiene

$$y - 0 = 1(x - \tfrac{3}{2}\pi)$$
$$y = x - \tfrac{3}{2}\pi$$

◀

Ahora se considerará la gráfica de la función tangente. Debido a que

$$\tan(-x) = -\tan x$$

la gráfica es simétrica con respecto al origen. Además,

$$\tan(x + \pi) = \tan x$$

por lo que la tangente es periódica con periodo π. La función tangente es continua en cualquier número de su dominio, el cual es el conjunto de todos los números reales excepto los puntos de la forma $\frac{1}{2}\pi + k\pi$, donde k es cualquier número entero. El contradominio de esta función es el conjunto de todos los números reales. Si k es cualquier número entero, entonces $\tan k\pi = 0$. Por tanto, la gráfica intersecta al eje x en los puntos de la forma $(k\pi, 0)$. Sean

$$f(x) = \tan x \quad \text{y} \quad f'(x) = \sec^2 x$$

Como $f'(k\pi) = \sec^2 k\pi$ y $\sec^2 k\pi = 1$ para cualquier número entero k, se deduce que donde la gráfica intersecta al eje x, la pendiente de la recta tangente es 1. Si se considera $f'(x) = 0$, entonces $\sec^2 x = 0$. Puesto que $\sec^2 x \geq 1$ para toda x, se concluye que la gráfica no tiene rectas tangentes horizontales.

Considere el intervalo $[0, \frac{1}{2}\pi)$ en el que la función tangente está definida en cualquier número.

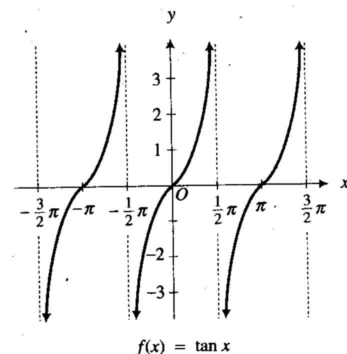
$$\lim_{x \to \pi/2^-} \tan x = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Puesto que $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} \operatorname{sen} x = 1$ y $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} \cos x = 0$, donde $\cos x$ tiende a 0 a través de valores positivos, entonces

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \tan x = +\infty$$

Tabla 1

x	$\tan x$
0	0
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.58$
$\frac{1}{4}\pi$	1
$\frac{1}{3}\pi$	$\sqrt{3} \approx 1.73$



$f(x) = \tan x$

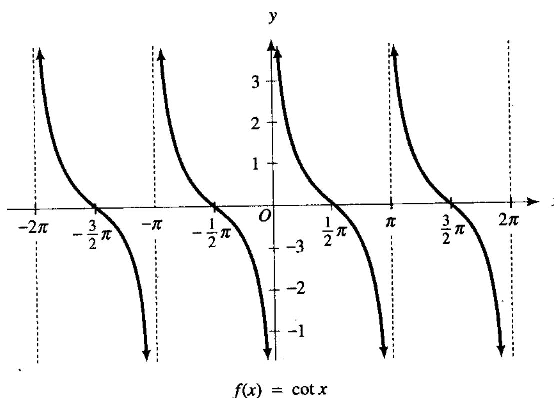
FIGURA 5

Por tanto, la recta $x = \frac{1}{2}\pi$ es una asíntota vertical de la gráfica. La tabla 1 muestra algunos valores de x del intervalo $[0, \frac{1}{2}\pi)$ y los valores correspondientes de tan x. Al localizar los puntos cuyas coordenadas son los pares de números (x, tan x), se obtiene la porción de la gráfica para x en $[0, \frac{1}{2}\pi)$. Debido a la simetría con respecto al origen, se obtiene la porción de la gráfica para x en $(-\frac{1}{2}\pi, 0]$. Como el periodo de la función tangente es π, se completa la gráfica de tan x, como se muestra en la figura 5.

La gráfica de la función cotangente se puede obtener a partir de la gráfica de la tangente empleando la identidad

$$\cot x = -\tan(x + \tfrac{1}{2}\pi)$$

De esta identidad se deduce que la gráfica de la cotangente se obtiene de la gráfica de la tangente, al trasladar $\frac{1}{2}\pi$ unidades a la derecha al eje y después considerar la reflexión de la gráfica con respecto al eje x. La gráfica de la función cotangente se presenta en la figura 6.



$f(x) = \cot x$

FIGURA 6

Como

$$\sec(x + 2\pi) = \sec x$$

la función secante es periódica con periodo 2π. El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales excepto aquéllos de la forma $\frac{1}{2}\pi + k\pi$, donde k es cualquier número entero. El contradominio de esta función es $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. La función es continua en todo número de su dominio. La gráfica no intersecta al eje x porque sec x nunca toma el valor cero.

Se utilizará la derivada para determinar si la gráfica tiene alguna recta tangente horizontal. Sean

$$f(x) = \sec x \quad \text{y} \quad f'(x) = \sec x \tan x$$

Al considerar $f'(x) = 0$ se tiene que $\sec x \tan x = 0$. Como $\sec x \neq 0$, entonces $f'(x) = 0$ cuando $\tan x = 0$, lo que ocurre cuando $x = k\pi$, donde k es cualquier número entero.

Primero se obtendrá la gráfica para x en $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) \cup (\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Se tienen rectas tangentes horizontales en $x = 0$ y $x = \pi$. Además, como

$$\lim_{x\to -\pi/2^+} \sec x = \lim_{x\to -\pi/2^+} \frac{1}{\cos x} = +\infty \qquad \lim_{x\to \pi/2^-} \sec x = \lim_{x\to \pi/2^-} \frac{1}{\cos x} = +\infty$$

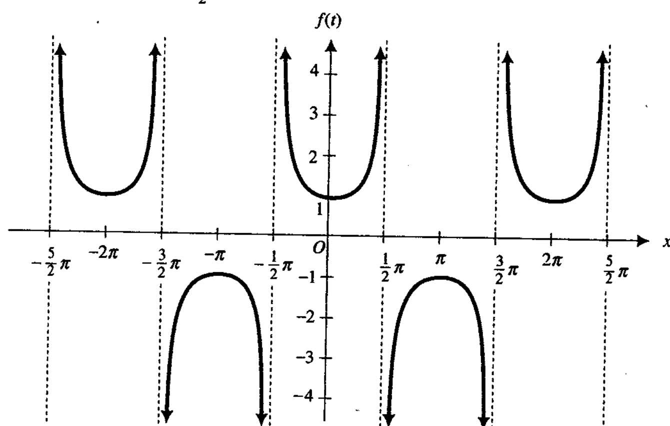
$$\lim_{x\to \pi/2^+} \sec x = \lim_{x\to \pi/2^+} \frac{1}{\cos x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 3\pi/2^-} \sec x = \lim_{x\to 3\pi/2^-} \frac{1}{\cos x} = -\infty$$

entonces las rectas $x = -\frac{1}{2}\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$ y $x = \frac{3}{2}\pi$ son asíntotas verticales de la gráfica.

Con la información anterior y localizando algunos puntos se dibuja la gráfica de la función secante para x en $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) \cup (\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Debido a que el periodo de esta función es 2π, se obtiene la gráfica mostrada en la figura 7.

De la identidad

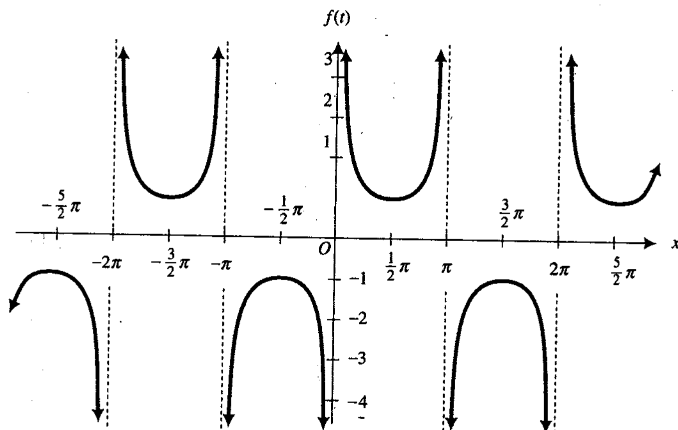
$$\csc x = \sec(x - \tfrac{1}{2}\pi)$$



$f(x) = \sec x$

FIGURA 7

se obtiene la gráfica de la función cosecante a partir de la gráfica de la secante al trasladar $\frac{1}{2}\pi$ unidades a la izquierda al eje y. La gráfica de la función cosecante se muestra en la figura 8.



$f(x) = \csc x$

FIGURA 8

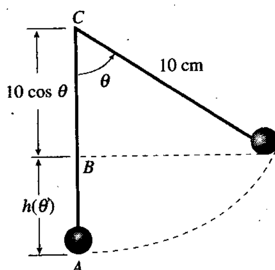


FIGURA 9

EJEMPLO 6 Un péndulo de 10 cm de longitud ha oscilado de modo que θ es la medida en radianes del ángulo formado por el péndulo y una recta vertical. Si $h(\theta)$ centímetros es la altura vertical del extremo del péndulo por arriba de su posición más baja, determine la tasa instantánea de variación de $h(\theta)$ con respecto a θ cuando $\theta = \frac{1}{6}\pi$.

Solución

Refiérase a la figura 9. Como $h(\theta) = |\overline{AC}| - |\overline{BC}|$, se tiene

$$\begin{aligned} h(\theta) &= 10 - 10\cos\theta \\ h'(\theta) &= -10(-\operatorname{sen}\theta) \\ &= 10\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Así, $h'(\frac{1}{6}\pi) = 10\operatorname{sen}\frac{1}{6}\pi$, esto es, $h'(\frac{1}{6}\pi) = 5$.

<u>Conclusión:</u> Cuando $\theta = \frac{1}{6}\pi$ la tasa de variación instantánea de $h(\theta)$ con respecto a θ es 5 cm/rad. ◀

EJERCICIOS 2.7

1. Demuestre: $D_x(\cot x) = -\csc^2 x$.
2. Demuestre: $D_x(\csc x) = -\csc x \cot x$.

En los ejercicios 3 a 18, calcule la derivada de la función.

3. $f(x) = 3\operatorname{sen} x$
4. $g(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$
5. $g(x) = \tan x + \cot x$
6. $f(x) = 4\sec x - 2\csc x$
7. $f(t) = 2t\cos t$
8. $f(x) = 4x^2\cos x$
9. $g(x) = x\operatorname{sen} x + \cos x$
10. $g(y) = 3\operatorname{sen} y - y\cos y$
11. $h(x) = 4\operatorname{sen} x\cos x$
12. $f(x) = x^2\operatorname{sen} x + 2x\cos x$
13. $f(x) = x^2\cos x - 2x\operatorname{sen} x - 2\cos x$
14. $h(y) = y^3 - y^2\cos y + 2y\operatorname{sen} y + 2\cos y$
15. $f(x) = 3\sec x\tan x$
16. $f(t) = \operatorname{sen} t\tan t$
17. $f(y) = \cos y\cot y$
18. $h(x) = \cot x\csc x$

En los ejercicios 19 a 30, obtenga la derivada.

19. $D_z\left(\dfrac{2\cos z}{z+1}\right)$
20. $D_t\left(\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\right)$
21. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\right)$
22. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x+4}{\cos x}\right)$
23. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\tan t}{\cos t - 4}\right)$
24. $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\cot y}{1-\operatorname{sen} y}\right)$
25. $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1+\operatorname{sen} y}{1-\operatorname{sen} y}\right)$
26. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x - 1}{\cos x + 1}\right)$
27. $D_x[(x - \operatorname{sen} x)(x + \cos x)]$
28. $D_z[(z^2 + \cos z)(2z - \operatorname{sen} z)]$
29. $D_t\left(\dfrac{2\csc t - 1}{\csc t + 2}\right)$
30. $D_y\left(\dfrac{\tan y + 1}{\tan y - 1}\right)$

En los ejercicios 31 a 42, calcule NDER($f(x)$, a) *en la graficadora. Después confirme su respuesta analíticamente obteniendo el valor exacto de* $f'(a)$.

31. $f(x) = x\cos x$; $a = 0$
32. $f(x) = x\operatorname{sen} x$; $a = \frac{3}{2}\pi$
33. $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$; $a = \frac{1}{2}\pi$
34. $f(x) = \dfrac{\sec x}{x^2}$; $a = \pi$
35. $f(x) = x^2\tan x$; $a = \pi$
36. $f(x) = x^2\cos x - \operatorname{sen} x$; $a = 0$
37. $f(x) = \operatorname{sen} x(\cos x - 1)$; $a = \pi$
38. $f(x) = (\cos x + 1)(x\operatorname{sen} x - 1)$; $a = \frac{1}{2}\pi$
39. $f(x) = x\cos x + x\operatorname{sen} x$; $a = \frac{1}{4}\pi$
40. $f(x) = \tan x + \sec x$; $a = \frac{1}{6}\pi$
41. $f(x) = 2\cot x - \csc x$; $a = \frac{2}{3}\pi$
42. $f(x) = \dfrac{1}{\cot x - 1}$; $a = \frac{3}{4}\pi$
43. **(a)** Utilice la calculadora para tabular con cuatro cifras decimales los valores de $\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{1}{3}\pi + h) - \operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi}{h}$ cuando h es igual a 1, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001, y cuando h es igual a $-1, -0.5, -0.1, -0.01, -0.001$ ¿A qué valor parece que se aproxima el cociente conforme h tiende a 0? **(b)** Determine $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{3}\pi + h) - \operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi}{h}$ interpretándolo como una derivada.

44. **(a)** Utilice la calculadora para tabular con cuatro cifras decimales los valores de $\dfrac{\cos(\frac{5}{6}\pi + h) - \cos n\frac{5}{6}\pi}{h}$ cuando h es igual a 1, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001, y cuando h es igual a −1, −0.5, −0.1, −0.01, −0.001. ¿A qué valor parece que se aproxima el cociente conforme h tiende a 0?
(b) Determine $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(\frac{5}{6}\pi + h) - \cos\frac{5}{6}\pi}{h}$ interpretándolo como una derivada.

45. **(a)** Utilice la calculadora para tabular con cuatro cifras decimales los valores de $\dfrac{\tan(\frac{1}{4}\pi + h) - \tan\frac{1}{4}\pi}{h}$ cuando h es igual a 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, y cuando h es igual a −0.1, −0.01, −0.001, −0.0001, −0.00001. ¿A qué valor parece que se aproxima el cociente conforme h tiende a 0? **(b)** Determine $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\tan(\frac{1}{4}\pi + h) - \tan\frac{1}{4}\pi}{h}$ interpretándolo como una derivada.

46. **(a)** Utilice la calculadora para tabular con cuatro cifras decimales los valores de $\dfrac{\sec(\frac{1}{6}\pi + h) - \sec\frac{1}{6}\pi}{h}$ cuando h es igual a 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, y cuando h es igual a −0.1, −0.01, −0.001, −0.0001, −0.00001. ¿A qué valor parece que se aproxima el cociente conforme h tiende a 0? **(b)** Determine $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sec(\frac{1}{6}\pi + h) - \sec\frac{1}{6}\pi}{h}$ interpretándolo como una derivada.

47. **(a)** Utilice la calculadora para tabular con cuatro cifras decimales los valores de $\dfrac{\cos x - \cos\frac{1}{6}\pi}{x - \frac{1}{6}\pi}$ cuando x es igual a $\frac{3}{20}\pi$, $\frac{19}{120}\pi$, $\frac{33}{200}\pi$, $\frac{199}{1200}\pi$, $\frac{333}{2000}\pi$, y cuando x es igual a $\frac{11}{60}\pi$, $\frac{7}{40}\pi$, $\frac{101}{600}\pi$, $\frac{67}{400}\pi$, $\frac{1001}{6000}\pi$. ¿A qué valor parece que se aproxima el cociente conforme x tiende a $\frac{1}{6}\pi$? **(b)** Determine $\lim\limits_{x \to \pi/6} \dfrac{\cos x - \cos\frac{1}{6}\pi}{x - \frac{1}{6}\pi}$ interpretándolo como una derivada.

48. **(a)** Utilice la calculadora para tabular con cuatro cifras decimales los valores de $\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi}{x - \frac{1}{3}\pi}$ cuando x es igual a $-\frac{3}{10}\pi$, $\frac{19}{60}\pi$, $\frac{33}{100}\pi$, $\frac{199}{600}\pi$, $\frac{333}{1000}\pi$, y cuando x es igual a $-\frac{11}{30}\pi$, $\frac{7}{20}\pi$, $\frac{101}{300}\pi$, $\frac{67}{200}\pi$, $\frac{1001}{3000}\pi$. ¿A qué valor parece que se aproxima el cociente conforme x tiende a $\frac{1}{3}\pi$? **(b)** Determine $\lim\limits_{x \to \pi/3} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi}{x - \frac{1}{3}\pi}$ interpretándolo como una derivada.

49. **(a)** Utilice la calculadora para tabular con cuatro cifras decimales los valores de $\dfrac{\csc x - \csc\frac{2}{3}\pi}{x - \frac{2}{3}\pi}$ cuando x es igual a $\frac{3}{5}\pi$, $\frac{19}{30}\pi$, $\frac{33}{50}\pi$, $\frac{199}{300}\pi$, $\frac{333}{500}\pi$, y cuando x es igual a $\frac{11}{15}\pi$, $\frac{7}{10}\pi$, $\frac{101}{150}\pi$, $\frac{67}{100}\pi$, $\frac{1001}{1500}\pi$. ¿A qué valor parece que se aproxima el cociente conforme x tiende a $\frac{2}{3}\pi$?
(b) Determine $\lim\limits_{x \to \pi/3} \dfrac{\csc x - \csc\frac{2}{3}\pi}{x - \frac{2}{3}\pi}$ interpretándolo como una derivada.

50. **(a)** Utilice la calculadora para tabular con cuatro cifras decimales los valores de $\dfrac{\cot x - \cot\frac{3}{4}\pi}{x - \frac{3}{4}\pi}$ cuando x es igual a $\frac{29}{40}\pi$, $\frac{59}{80}\pi$, $\frac{299}{400}\pi$, $\frac{599}{800}\pi$, $\frac{2999}{4000}\pi$, y cuando x es igual a $\frac{31}{40}\pi$, $\frac{61}{80}\pi$, $\frac{301}{400}\pi$, $\frac{601}{800}\pi$, $\frac{3001}{4000}\pi$. ¿A qué valor parece que se aproxima el cociente conforme x tiende a $\frac{3}{4}\pi$? **(b)** Determine $\lim\limits_{x \to 3\pi/4} \dfrac{\cot x - \cot\frac{3}{4}\pi}{x - \frac{3}{4}\pi}$ interpretándolo como una derivada.

51. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función seno en el punto donde **(a)** $x = 0$, **(b)** $x = \frac{1}{3}\pi$, **(c)** $x = \pi$.

52. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función coseno en el punto donde **(a)** $x = \frac{1}{2}\pi$, **(b)** $x = -\frac{1}{2}\pi$, **(c)** $x = \frac{1}{6}\pi$.

53. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función tangente en el punto donde **(a)** $x = 0$; **(b)** $x = \frac{1}{4}\pi$; **(c)** $x = -\frac{1}{4}\pi$.

54. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función secante en el punto donde **(a)** $x = \frac{1}{4}\pi$; **(b)** $x = -\frac{1}{4}\pi$; **(c)** $x = \frac{3}{4}\pi$.

En los ejercicios 55 a 58, una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ecuación, donde s centímetros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. (a) ¿Cuáles son la velocidad instantánea y la aceleración instantánea de la partícula a los t_1 segundos? (b). Determine la velocidad instantánea y la aceleración instantánea a los t_1 segundos para cada valor de t_1.

55. $s = 4 \operatorname{sen} t$; t_1 es igual a 0, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, y π

56. $s = 6 \cos t$; t_1 es igual a 0, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, y π

57. $s = -3 \cos t$; t_1 es igual a 0, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$ y π

58. $s = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} t$; t_1 es igual a 0, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$ y π

59. Si un cuerpo de peso W libras es arrastrado a lo largo de un piso horizontal a una velocidad constante por una fuerza de magnitud F libras y dirigida en un ángulo de θ radianes con respecto al plano del piso, entonces F está dada por la ecuación

$$F = \frac{kW}{k \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

donde k es una constante llamada *coeficiente de fricción.* Si $k = 0.5$, determine la tasa instantánea de variación de F con respecto a θ cuando **(a)** $\theta = \frac{1}{4}\pi$; **(b)** $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

60. Se dispara un proyectil desde un cañón que tiene un ángulo de elevación de $\frac{1}{2}\alpha$ radianes y una velocidad inicial de v_0 pies por segundo. Si R pies es el alçance del proyectil, entonces

$$R = \frac{{v_0}^2}{g} \operatorname{sen} \alpha \qquad 0 \leq \alpha \leq \pi$$

donde g pie/s^2 es la aceleración debida a la gravedad. **(a)** Si $v_0 = 480$, determine la tasa de variación de R con respecto a α cuando $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ (esto es, el ángulo de elevación tiene una medida en radianes de $\frac{1}{4}\pi$). Considere $g = 32$. **(b)** Determine los valores de α para los que $D_\alpha R > 0$.

61. Si k es un número entero positivo, demuestre por inducción matemática que

$$D_x^n(\operatorname{sen} x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } n = 4k \\ \cos x & \text{si } n = 4k + 1 \\ -\operatorname{sen} x & \text{si } n = 4k + 2 \\ -\cos x & \text{si } n = 4k + 3 \end{cases}$$

62. Obtenga una fórmula semejante a la del ejercicio 61 para $D_x{}^n(\cos x)$.

2.8 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA Y REGLA DE LA CADENA

Para calcular la derivada de una función compuesta, se aplica la *regla de la cadena,* uno de los teoremas más importantes en Cálculo. Antes de establecer este teorema, se presentarán tres ejemplos ilustrativos que muestran cómo pueden emplearse los teoremas anteriores para determinar las derivadas de algunas funciones compuestas particulares. En cada ejemplo ilustrativo, se escribe la expresión final de la derivada en cierta forma que podrá parecerle inusual pero que puede ser fácilmente asociada con la regla de la cadena.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Si

$$F(x) = (4x^3 + 1)^2$$

se puede obtener $F'(x)$ al aplicar la regla del producto como sigue:

$$\begin{aligned} F(x) &= (4x^3 + 1)(4x^3 + 1) \\ F'(x) &= (4x^3 + 1)\, D_x(4x^3 + 1) + (4x^3 + 1)\, D_x(4x^3 + 1) \\ &= (4x^3 + 1)(12x^2) + (4x^3 + 1)(12x^2) \end{aligned}$$

Así,

$$F'(x) = 2(4x^3 + 1)(12x^2) \tag{1}$$

Observe que F es la función compuesta $f \circ g$, donde $f(x) = x^2$ y $g(x) = 4x^3 + 1$; esto es,

$$\begin{aligned} F(x) &= f(g(x)) \\ &= f(4x^3 + 1) \\ &= (4x^3 + 1)^2 \end{aligned}$$

Como $f'(x) = 2x$ y $g'(x) = 12x^2$, se tiene de (1)

$$F'(x) = f'(g(x))\, g'(x) \tag{2}$$

◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Si

$$G(x) = \text{sen } 2x$$

para determinar $G'(x)$ se puede emplear la regla del producto con las identidades trigonométricas

$$\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x \quad \text{y} \quad \cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

Se tiene

$$\begin{aligned} G(x) &= 2 \text{ sen } x \cos x \\ G'(x) &= (2 \text{ sen } x)\ D_x(\cos x) + (2 \cos x)\ D_x(\text{sen } x) \\ &= (2 \text{ sen } x)(-\text{sen } x) + (2 \cos x)(\cos x) \\ &= 2(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$G'(x) = (\cos 2x)(2) \tag{3}$$

Si se consideran $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = 2x$, entonces G es la función compuesta $f \circ g$; esto es,

$$\begin{aligned} G(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x) \\ &= \text{sen } 2x \end{aligned}$$

Debido a que $f'(x) = \cos x$ y $g'(x) = 2$, se puede escribir (3) en la forma

$$G'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{4}$$

◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Si

$$H(x) = (\cos x)^{-1}$$

se puede calcular $H'(x)$ usando primero la identidad $(\cos x)^{-1} = \sec x$.

$$\begin{aligned} H(x) &= \sec x \\ H'(x) &= \sec x \tan x \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\text{sen } x}{\cos x} \\ &= (-1)\ \frac{1}{\cos^2 x}\ (-\text{sen } x) \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$H'(x) = [-1(\cos x)^{-2}](-\text{sen } x) \tag{5}$$

Con $f(x) = x^{-1}$ y $g(x) = \cos x$, H es la función compuesta $f \circ g$; esto es,

$$\begin{aligned} H(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\cos x) \\ &= (\cos x)^{-1} \end{aligned}$$

Puesto que $f'(x) = -1 \cdot x^{-2}$ y $g'(x) = -\text{sen}\ x$, se puede expresar (5) en la forma

$$H'(x) = f'(g(x))\, g'(x) \qquad (6)$$

◀

Observe que los miembros derechos de (2), (4) y (6) se expresan como $f'(g(x))\, g'(x)$, que es exactamente el miembro derecho de la regla de la cadena, la cual se establece en el teorema siguiente.

2.8.1 Teorema Regla de la cadena

Si la función g es diferenciable en x y la función f es diferenciable en $g(x)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ es diferenciable en x, y

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x) \qquad (7)$$

La demostración de la regla de la cadena para todas las funciones diferenciables es sofisticada, por lo que se presenta en la sección suplementaria de esta sección. Una demostración simplificada concerniente a funciones que satisfacen una hipótesis adicional se bosqueja en el ejercicio 57.

A continuación se presentarán ejemplos y ejemplos ilustrativos que le ayudarán a familiarizarse con el enunciado de la regla de la cadena.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 Sean

$$f(x) = x^{10} \quad \text{y} \quad g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$$

Entonces la función compuesta $f \circ g$ está definida por

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= (2x^3 - 5x^2 + 4)^{10}\end{aligned}$$

Para aplicar (7) se necesita calcular $f'(g(x))$ y $g'(x)$. Como $f(x) = x^{10}$, $f'(x) = 10x^9$, así

$$\begin{aligned}f'(g(x)) &= 10[g(x)]^9\\ f'(g(x)) &= 10(2x^3 - 5x^2 + 4)^9 \qquad (8)\end{aligned}$$

Además, como $g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$,

$$g'(x) = 6x^2 - 10x \qquad (9)$$

Por tanto, de (7), (8) y (9) se tiene

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x)\\ &= 10(2x^3 - 5x^2 + 4)^9(6x^2 - 10x)\end{aligned}$$

◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 Sean

$$f(x) = \text{sen}\ x \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 + 3$$

Entonces la función compuesta $f \circ g$ está definida por

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= \text{sen}(x^2 + 3)\end{aligned}$$

A fin de aplicar (7), se calcula $f'(g(x))$ y $g'(x)$. Como $f(x) = \text{sen } x$, $f'(x) = \cos x$. En consecuencia,

$$f'(g(x)) = \cos[g(x)]$$
$$f'(g(x)) = \cos(x^2 + 3) \qquad \textbf{(10)}$$

Puesto que $g(x) = x^2 + 3$,

$$g'(x) = 2x \qquad \textbf{(11)}$$

Por tanto, de (7), (10) y (11) se obtiene

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x)\\ &= [\cos(x^2 + 3)](2x)\\ &= 2x\cos(x^2 + 3)\end{aligned}$$

◀



EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Suponga que

$$h(x) = \left(\frac{2}{x - 1}\right)^5$$

Para determinar $h'(x)$, sean

$$f(x) = x^5 \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{2}{x - 1}$$

Entonces

$$f'(x) = 5x^4 \quad \text{y} \quad g'(x) = \frac{-2}{(x - 1)^2}$$

Como $h(x) = f(g(x))$, de la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned}h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x)\\ &= 5\left(\frac{2}{x - 1}\right) \cdot \frac{-2}{(x - 1)^2}\\ &= \frac{-160}{(x - 1)^6}\end{aligned}$$

◀

Cuando se calculan derivadas por medio de la regla de la cadena, en realidad no se escriben las funciones f y g como se hizo en los ejemplos ilustrativos 4, 5 y 6, pero se deben tener en mente. Por ejemplo, en el ejemplo ilustrativo 6, como $h(x)$ es la quinta potencia de un cociente, cuando se aplica la regla de la cadena primero se utiliza là regla de la potencia y después la regla del cociente. Se puede escribir el cálculo como sigue:

$$\begin{aligned}h(x) &= \left(\frac{2}{x - 1}\right)^5\\ h'(x) &= 5\left(\frac{2}{x - 1}\right)^4 \cdot D_x\left(\frac{2}{x - 1}\right)\\ &= 5\left(\frac{2}{x - 1}\right)^4 \cdot \frac{-2}{(x - 1)^2}\\ &= \frac{-160}{(x - 1)^6}\end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Determine $f'(x)$ mediante la regla de la cadena si

$$f(x) = \frac{1}{4x^3 + 5x^2 - 7x + 8}$$

Solución Se escribe $f(x) = (4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-1}$ y se aplica la regla de la cadena para obtener

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-2} \cdot D_x(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8) \\ &= -1(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-2}(12x^2 + 10x - 7) \\ &= \frac{-12x^2 - 10x + 7}{(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^2} \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Calcule

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^4\right]$$

Solución De la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^4\right] &= 4\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^3 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right) \\ &= 4\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)\frac{(3x-1)(2) - (2x+1)(3)}{(3x-1)^2} \\ &= \frac{4(2x+1)^3(-5)}{(3x-1)^5} \\ &= -\frac{20(2x+1)^3}{(3x-1)^5} \end{aligned}$$

Si se utiliza la notación de Leibniz para la derivada, la regla de la cadena puede enunciarse como sigue:

Si y es una función de u, definida por $y = f(u)$ y $\frac{dy}{du}$ existe, y si u es una función de x, definida por $u = g(x)$ y $\frac{du}{dx}$ existe, entonces y es una función de x y $\frac{dy}{dx}$ existe la cual está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{12}$$

Observe de esta ecuación la forma conveniente para recordar la regla de la cadena. El enunciado formal sugiere la "división" simbólica de du en el numerador y denominador del miembro derecho. Sin embargo, recuerde de la sección 2.1 cuando se introdujo la notación de Leibniz $\frac{dy}{dx}$, se enfatizó que dy ni dx se les ha dado significado independiente. Por tanto, debe considerarse a (12) como una ecuación que implica una notación especial de diferenciación.

Para escribir la regla de la cadena en otra forma, considere que $u = g(x)$. Entonces

$$(f \circ g)(x) = f(u) \qquad (f \circ g)'(x) = D_x f(u) \qquad f'(g(x)) = f'(u) \qquad g'(x) = D_x u$$

Con estas sustituciones (7) se transforma en

$$D_x[f(u)] = f'(u)D_xu$$

Se utilizará esta forma de la regla de la cadena para establecer fórmulas de diferenciación importantes. En particular, se tiene de los teoremas 2.7.1-2.7.6 las fórmulas siguientes que implican las derivadas de las funciones trigonométricas. Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(\text{sen } u) = \cos u\, D_xu \qquad D_x(\cos u) = -\text{sen } u\, D_xu$$
$$D_x(\tan u) = \sec^2 u\, D_xu \qquad D_x(\cot u) = -\csc^2 u\, D_xu$$
$$D_x(\sec u) = \sec u \tan u\, D_xu \qquad D_x(\csc u) = -\csc u \cot u\, D_xu$$

EJEMPLO 3 Calcule $F'(t)$ si

$$F(t) = \tan(3t^2 + 2t)$$

Solución Al utilizar la regla de la cadena se obtiene

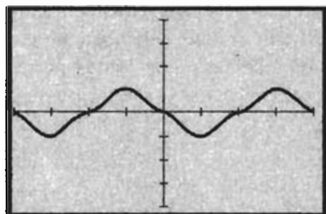
$$\begin{aligned} F'(t) &= \sec^2(3t^2 + 2t) \cdot D_t(3t^2 + 2t) \\ &= \sec^2(3t^2 + 2t) \cdot (6t + 2) \\ &= 2(3t + 1) \sec^2(3t^2 + 2t) \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ si

$$y = \text{sen}(\cos x)$$

Solución Al aplicar la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cos(\cos x)[D_x(\cos x)] \\ &= \cos(\cos x)[-\text{sen } x] \\ &= -\text{sen } x[\cos(\cos x)] \end{aligned}$$



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$

$f(x) = -\text{sen } x\,[\cos(\cos x)]$

y NDER(sen(cos x), x)

FIGURA 1

Por supuesto, los cálculos de las derivadas de los ejemplos anteriores pueden apoyarse gráficamente. Para confirmar la respuesta del ejemplo 4, se trazan las gráficas de la funciones definidas por $f(x) = -\text{sen } x[\cos(\cos x)]$ y NDER(sen(cos x), x) en el rectángulo de inspección de $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$ como se muestra en la figura 1. Las gráficas son idénticas.

EJEMPLO 5 Calcule

$$D_x(\sec^4 2x^2)$$

Solución Se empleará dos veces la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} D_x(\sec^4 2x^2) &= 4 \sec^3 2x^2[D_x(\sec 2x^2)] \\ &= 4 \sec^3 2x^2[(\sec 2x^2 \tan 2x^2)\, D_x(2x^2) \\ &= (4 \sec^4 2x^2 \tan 2x^2)(4x) \\ &= 16x \sec^4 2x^2 \tan 2x^2 \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 En el ejemplo 3 de la sección 1.3, se tuvo la situación siguiente: en un bosque, un depredador se alimenta de su presa, y la población de depredadores es una función de x, el número de presas en el bosque, el cual es a su vez una función g de t, el número de semanas que han transcurrido desde que terminó la temporada de caza. Estas funciones se expresaron como

$$f(x) = \tfrac{1}{48}x^2 - 2x + 50 \quad \text{y} \quad g(t) = 4t + 52$$

donde $0 \leq t \leq 15$. Determine la tasa a la cual está creciendo la población de depredadores 11 semanas después de que se cerró la temporada de caza. Utilice la regla de la cadena sin expresar $f \circ g$ en términos de t.

Solución La tasa a la cual está creciendo la población de depredadores 11 semanas después de cerrada la temporada de caza está dada por $(f \circ g)'(11)$. Se empleará la regla de la cadena para calcular $(f \circ g)'(t)$. Como

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{24}x - 2 \quad \text{y} \quad g'(t) = 4 \\ (f \circ g)'(t) &= f'(g(t))g'(t) \\ &= [\tfrac{1}{24}(4t + 52) - 2]\,4 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(11) &= \tfrac{1}{6}(44 + 52) - 8 \\ &= 8 \end{aligned}$$

<u>Conclusión:</u> Once semanas después de cerrada la temporada de caza, la población de depredadores está creciendo a la tasa de 8 animales por semana. ◀

Ahora se presentará una aplicación de las funciones seno y coseno en el *movimiento armónico simple*. Se dice que un objeto, el cual se mueve sobre una recta, tiene **movimiento armónico simple** si la medida de su aceleración es siempre proporcional a la medida de su desplazamiento a partir de un punto fijo sobre la recta, y su aceleración y desplazamiento tienen sentidos opuestos. Los modelos matemáticos que describen el movimiento armónico simple, vibraciones u oscilaciones, están dados por las funciones

$$f(t) = a \operatorname{sen} b(t - c) \tag{13}$$

y

$$f(t) = a \cos b(t - c) \tag{14}$$

donde $f(t)$ representa el desplazamiento del objeto después de t unidades de tiempo, y a, b y c son constantes.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 7** Se mostrará que la función definida por la ecuación (13) describe un movimiento armónico simple. El desplazamiento esta determinado por

$$f(t) = a \operatorname{sen} b(t - c)$$

y la función que proporciona la aceleración es $f''(t)$, la cual se calcula a continuación

$$f'(t) = ab\cos b(t - c) \quad \text{y} \quad f''(t) = -ab^2 \operatorname{sen} b(t - c)$$

Por tanto, $f''(t) = -b^2 f(t)$. Como $-b^2$ es una constante, la aceleración es proporcional al desplazamiento. Además, como $-b^2$ es negativa, la aceleración y el desplazamiento tienen sentido opuesto. En consecuencia, el movimiento es armónico simple. ◀

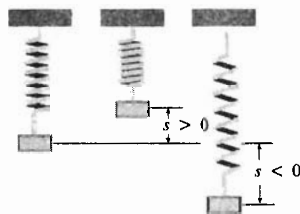


FIGURA 2

Un ejemplo de movimiento armónico simple se presenta cuando se suspende un cuerpo de un resorte, el cual vibra verticalmente. Sea s centímetros la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central, o de reposo, después de t segundos de tiempo. Vea la figura 2, donde un valor positivo de s indica que el cuerpo está por arriba de su posición central. Si en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares se marcan los valores de s para valores específicos de t, y si la fricción no se toma en cuenta, entonces la gráfica resultante tendrá una ecuación de la forma (13) o (14). Las constantes a, b y c están determinadas por el peso del cuerpo y el resorte, así como la forma en que se pone en movimiento al cuerpo. Por ejemplo, cuanto más se tire del cuerpo hacia abajo antes de liberarlo, tanto mayor será a, la *amplitud* del movimiento. Además, cuanto más rígido sea el resorte, tanto más rápido vibrará el cuerpo de modo que el menor valor será el *periodo* del movimiento. Si P es el periodo, entonces $P = \dfrac{2\pi}{|b|}$. La *frecuencia* de un movimiento armónico simple es el número de vibraciones u oscilaciones, por unidad de tiempo. Si n es la frecuencia del movimiento, entonces $n = \dfrac{1}{P}$.

▶ **EJEMPLO 7** Un cuerpo vibra verticalmente de acuerdo con la ecuación

$$s = 8\cos \tfrac{1}{3}\pi t$$

donde s centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central (el origen) a los t segundos y el sentido positivo es hacia arriba. **(a)** Determine la velocidad y la aceleración del movimiento para cualquier t. **(b)** Muestre que el movimiento es armónico simple. **(c)** determine la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento. **(d)** Simule el movimiento hacia arriba y hacia abajo del resorte en la graficadora. **(e)** Trace la gráfica de la ecuación del movimiento.

Solución

(a) Si v centímetros por segundo es la velocidad y a centímetros por segundo por segundo es la aceleración, entonces

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ &= 8(-\operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\pi t)(\tfrac{1}{3}\pi) \\ &= -\tfrac{8}{3}\pi \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\pi t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ &= -\tfrac{8}{3}\pi(\cos \tfrac{1}{3}\pi t)(\tfrac{1}{3}\pi) \\ &= -\tfrac{8}{9}\pi^2 \cos \tfrac{1}{3}\pi t \end{aligned}$$

(b) Del valor de s en la ecuación dada y el valor de a del inciso (a), se observa que

$$a = -\tfrac{1}{9}\pi^2 s$$

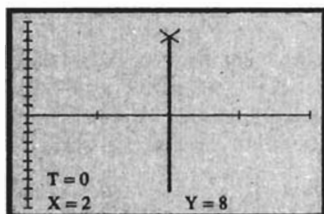
Como a es proporcional a s y de sentido opuesto, entonces el movimiento es armónico simple.

(c) La ecuación dada es el caso especial de (14) donde $a = 8$, $b = \frac{1}{3}\pi$ y $c = 0$. La amplitud del movimiento es a, la cual es 8; por tanto, el desplazamiento máximo es 8 cm. Si P es el periodo, $P = \dfrac{2\pi}{|b|}$; esto es, $P = 6$. Por tanto, se necesitan 6 s para una vibración completa del cuerpo. Como la frecuencia n está dada por $1/P$, $n = \frac{1}{6}$. Así, se tiene $\frac{1}{6}$ de vibración por segundo.

(d) Para simular el movimiento, suponga que el cuerpo se mueve sobre la recta $x = 2$. Con la graficadora en modo paramétrico, sean

$$x_1(t) = 2 \quad \text{y} \quad y_1(t) = 8 \cos \tfrac{1}{3}\pi t$$

El movimiento se efectúa indefinidamente, sin embargo, se simulará el movimiento para $0 \leq t \leq 12$. En el rectángulo de inspección de [0, 4] por [−10, 10], sean $t_{mín} = 0$, $t_{máx} = 12$ y $t_{step} = 0.05$. Ahora presione la tecla TRACE (*rastreo*) y después la tecla *flecha a la izquierda* manteniéndola oprimida hasta que el cursor esté en $t = 0$. La figura 3 muestra la pantalla de la graficadora como se ha indicado. Presione la tecla *flecha a la derecha* y manténgala oprimida para observar que el cuerpo, representado por el cursor, se mueve hacia arriba y hacia abajo a lo largo de la recta vertical $x = 2$.

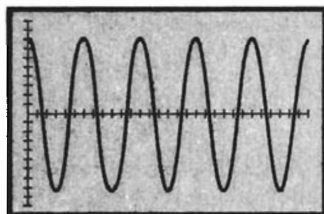


[0, 4] por [−10, 10]

$x_1(t) = 2, \quad y_1(t) = 8 \cos \frac{1}{3}\pi t$

FIGURA 3

Note que inicialmente, cuando $t = 0$, la velocidad v es igual a cero, la aceleración a es negativa y $s = 8$ de modo que el cuerpo está a 8 cm arriba del origen, la posición central. En el primer 1.5 s, la velocidad es negativa pero la rapidez, $|v|$, es creciente. Durante este tiempo, el cuerpo se mueve hacia abajo una distancia de 8 cm a su posición central porque cuando $t = 1.5$, $s = 0$. Observe que cuando $t = 1.5$, $a = 0$, de modo que la aceleración del cuerpo es cero en su posición central. En el siguiente 1.5 s, el movimiento del cuerpo continúa hacia abajo, cuando su rapidez es decreciente hasta después de un total de 3 s, el cuerpo está 8 cm debajo de su posición central. Entonces el cuerpo cambia su dirección y su rapidez es creciente hasta que alcanza su posición central; posteriormente, su rapidez decrece hasta que regresa a su posición inicial después de 6 s. Luego, el cuerpo cambia de dirección y el movimiento hacia arriba y hacia abajo se repite indefinidamente.



[0, 30] por [−10, 10]

$s = 8 \cos \frac{1}{3}\pi t$

FIGURA 4

(e) La figura 4 muestra la gráfica de la ecuación de movimiento trazada en el rectángulo de inspección de [0, 30] por [−10, 10]. ◀

En el ejemplo anterior no se consideró la fricción, la cual ocasiona que, eventualmente, el cuerpo alcance el estado de reposo. En la sección 5.4 se discutirá el *movimiento armónico amortiguado* en el que se toma en cuenta la fricción, como una aplicación de la *función exponencial natural.*

EJERCICIOS 2.8

En los ejercicios 1 a 12, calcule la derivada de la función.

1. $f(x) = (2x + 1)^3$
2. $f(x) = (10 - 5x)^4$
3. $F(x) = (x^2 + 4x - 5)^4$
4. $g(r) = (2r^4 + 8r^2 + 1)^5$
5. $f(t) = (2t^4 - 7t^3 + 2t - 1)^2$

6. $H(z) = (z^3 - 3z^2 + 1)^{-3}$

7. $f(x) = (x^2 + 4)^{-2}$

8. $g(x) = \operatorname{sen} x^2$

9. $f(x) = 4 \cos 3x - 3 \operatorname{sen} 4x$

10. $G(x) = \sec^2 x$

11. $h(t) = \frac{1}{3} \sec^3 2t - \sec 2t$

12. $f(x) = \cos(3x^2 + 1)$

En los ejercicios 13 a 16, determine la derivada de la función.

13. $\frac{d}{dx} (\sec^2 x \tan^2 x)$

14. $\frac{d}{dt} (2 \operatorname{sen}^3 t \cos^2 t)$

15. $\frac{d}{dt} (\cot^4 t - \csc^4 t)$

16. $\frac{d}{dx} [(4x^2 + 7)^2 (2x^3 + 1)^4]$

En los ejercicios 17 a 24, calcule la derivada de la función y apoye su respuesta trazando las gráficas de su respuesta y de la derivada numérica en x en el mismo rectángulo de inspección.

17. $f(x) = \left(\frac{x - 7}{x + 2}\right)^2$

18. $f(t) = \left(\frac{2t^2 + 1}{3t^3 + 1}\right)^2$

19. $g(t) = \operatorname{sen}^2 (3t^2 - 1)$

20. $g(x) = \tan^2 x^2$

21. $f(x) = (\tan^2 x - x^2)^3$

22. $G(x) = (2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x)^3$

23. $F(x) = 4 \cos(\operatorname{sen} 3x)$

24. $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos 2x)$

En los ejercicios 25 y 26, obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado, y apoye su respuesta trazando la gráfica de la curva y la recta tangente en el mismo rectángulo de inspección.

25. $y = (x^2 - 1)^2$ en el punto $(2, 9)$

26. $y = 4 \tan 2x$ en el punto $(\frac{1}{8}\pi, 4)$

En los ejercicios 27 a 30, la ecuación describe el movimiento de un cuerpo suspendido de un resorte que vibra verticalmente, donde s centímetros es la distancia del cuerpo desde su posición central (el origen) a los t segundos y el sentido positivo es hacia arriba. (a) Calcule la velocidad y la aceleración del movimiento para cualquier t. (b) Muestre que el movimiento es armónico simple. (c) Determine la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento. (d) Simule el movimiento hacia arriba y hacia abajo del resorte en la graficadora. (e) Trace la gráfica de la ecuación del movimiento.

27. $s = 6 \operatorname{sen} \frac{1}{4}\pi t$

28. $s = 3 \cos \frac{1}{6}\pi t$

29. $s = 4 \cos \pi(2t - \frac{1}{3})$

30. $s = 8 \operatorname{sen} \pi(3t + \frac{1}{2})$

En los ejercicios 31 y 32, una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación de movimiento dada, donde s metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Determine (a) la velocidad y (b) la aceleración de la partícula a los t segundos, y (c) muestre que el movimiento es armónico simple.

31. $s = b \cos(kt + c)$, donde b, k y c son constantes.

32. $s = A \operatorname{sen} 2\pi kt + B \cos 2\pi kt$, donde A, B y k son constantes.

En los ejercicios 33 a 36, una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación de movimiento dada, donde a los t segundos, s pies es la distancia dirigida de la partícula desde el origen, v pies por segundo es la velocidad y a pies por segundo por segundo es la aceleración de la partícula. (a) Determine v y a en términos de t. (b) Muestre que el movimiento es armónico simple. (c) Simule el movimiento en la graficadora.

33. $s = 5 \operatorname{sen} \pi t + 3 \cos \pi t$

34. $s = \operatorname{sen}(6t - \frac{1}{3}\pi) + \operatorname{sen}(6t + \frac{1}{6}\pi)$

35. $s = 5 - 10 \operatorname{sen}^2 2t$

36. $s = 8 \cos^2 6t - 4$

37. **(a)** Para el péndulo del ejemplo 6 de la sección 2.7, muestre que otra ecuación que define $h(\theta)$ es

$$h(\theta) = 20 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\theta$$

Sugerencia: utilice una identidad trigonométrica. A partir de esta ecuación calcule la tasa instantánea de variación de $h(\theta)$ con respecto a θ cuando **(b)** $\theta = \frac{1}{6}\pi$; **(c)** $\theta = \frac{1}{3}\pi$; **(d)** $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

38. Si K unidades cuadradas es el área de un triángulo rectángulo, 10 unidades es la longitud de la hipotenusa, y α es la medida en radianes de un ángulo agudo, entonces $K = 25 \operatorname{sen} 2\alpha$. Determine la tasa instantánea de variación con respecto a α, cuando **(a)** $\alpha = \frac{1}{6}\pi$; **(b)** $\alpha = \frac{1}{4}\pi$; **(c)** $\alpha = \frac{1}{3}\pi$.

39. La ley de Dulong establece que si P atmosferas es la presión absoluta de un vapor saturado a una temperatura de T grados Celsius, entonces

$$P = \left(\frac{40 + T}{140}\right)^5 \qquad T > 80$$

Calcule la tasa instantánea de variación de P con respecto a T, cuando **(a)** $T = 100$; **(b)** $P = 32$.

40. Si a los t segundos, q coulombs es la carga en un capacitor e i amperes es la corriente en el capacitor, entonces i es la tasa de variación de q con respecto a t. Suponga que para cierto capacitor

$$q = -\frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \phi)$$

donde A, ω y ϕ son constantes. Exprese i en términos de t.

41. Se construye un péndulo de torsión al suspender horizontalmente un disco metálico uniforme mediante un alambre desde su centro. Si se desplaza el péndulo y después se impulsa de manera perpendicular a dicho desplazamiento se obtendrá el movimiento armónico angular simple. Suponga que a los t segundos el desplazamiento angular de θ radianes desde la posición inicial está dado por la ecuación

$$\theta = 0.2 \cos \pi(t - 0.5)$$

Determine con aproximación de décimos de radián por segundo, que tan rápido cambia el ángulo a los 3.1 s.

42. Denote la función obtenida como modelo matemático en el ejercicio 28 de la sección 1.3 por V. Determine con aproximación de décimos la tasa instantánea de variación de $V(x)$ con respecto a x cuando **(a)** $x = 0.9$, **(b)** $x = 1.0$, y **(c)** $x = 1.1$.

43. La fuerza electromotriz para un circuito eléctrico con un generador simplificado es $E(t)$ volts a los t segundos, donde $E(t) = 50 \text{ sen } 120\pi t$. Calcule la tasa instantánea de variación de $E(t)$ con respecto a t cuando **(a)** $t = 0.02$ s y **(b)** $t = 0.2$ s.

44. Una onda producida por un sonido simple tiene la ecuación $P(t) = 0.003 \text{ sen } 1\,800pt$, donde $P(t)$ dinas por centímetro cuadrado es la diferencia entre la presión atmosférica y la presión del aire en el tímpano del oído a los t segundos. Determine la tasa instantánea de variación de $P(t)$ con respecto a t cuando t es igual a **(a)** $\frac{1}{9}$ s; **(b)** $\frac{1}{8}$ s; **(c)** $\frac{1}{7}$ s.

45. La ecuación de demanda para un juguete particular es $p^2x = 5\,000$ donde x es el número de juguetes que se venden por mes, cuando p dólares es el precio por juguete. Se espera que en t meses el precio del juguete será p dólares, donde $20p = t^2 + 7t + 100$ y $t \in [0, 6]$. ¿Cuál es la tasa de variación esperada de la demanda después de 5 meses? No exprese x en términos de t, utilice la regla de la cadena.

46. Para el derrame de petróleo y la función A del ejercicio 54 de la sección 1.8 haga lo siguiente: **(a)** Demuestre que A es diferenciable en 2. **(b)** Obtenga $A'(t)$. Determine la tasa a la que el área de la grieta está cambiando a los **(c)** 0.4 min, **(d)** 2 min y **(e)** 3.2 min.

47. Sean $f(x) = x^3$ y $g(x) = f(x^2)$. Calcule **(a)** $f'(x^2)$; **(b)** $g'(x)$.

48. Sean $f(u) = u^2 + 5u + 5$ y $g(x) = (x + 1)/(x - 1)$. Determine la derivada de $f \circ g$ en dos formas: **(a)** primero calcule $(f \circ g)(x)$ y luego obtenga $(f \circ g)'(x)$; **(b)** utilice la regla de la cadena.

49. Obtenga la fórmula para la derivada de la función coseno empleando la fórmula de la derivada para la función seno, la regla de la cadena y las identidades

$$\cos x = \text{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - x) \quad \text{y} \quad \text{sen } x = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - x)$$

50. Utilice la regla de la cadena para demostrar que **(a)** la derivada de una función par es una función impar, **(b)** la derivada de una función impar es una función par, suponiendo que las derivadas existen.

51. Emplee el resultado del ejercicio 50(a) para demostrar que si g es una función par y $g'(x)$ existe y si $h(x) = (f \circ g)(x)$ y f es diferenciable en cualquier número entonces $h'(0) = 0$.

52. Suponga que f y g son funciones tales que $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ y $(f \circ g)(x) = x$. Demuestre que si $g'(x)$ existe, entonces $g'(x) = g(x)$.

53. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ sen } \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Demuestre que f es continua en 0. **(b)** Calcule $f'(x)$. **(c)** Demuestre que f' es discontinua en 0.

54. Si f'' y g'' existen y si $h = f \circ g$, exprese $h''(x)$ en términos de las derivadas de f y g.

55. Discuta el movimiento armónico simple del cuerpo del ejercicio 27, como se hizo en el inciso **(d)** del ejemplo 7.

56. Siga las instrucciones del ejercicio 55 para el movimiento armónico simple del cuerpo descrito por la ecuación del ejercicio 28.

57. Suponga que f y g son dos funciones tales que **(i)** $g'(x_1)$ y $f'(g(x_1))$ existen y **(ii)** para todo $x \neq x_1$ de algún intervalo abierto que contenga a x_1, $g(x) - g(x_1) \neq 0$. Entonces

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_1)}{x - x_1} = \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \cdot \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1}$$

(a) Demuestre que conforme $x \to x_1$, $g(x) \to g(x_1)$ y en consecuencia que $(f \circ g)'(x_1) = f'(g(x_1))g'(x_1)$ simplificándose así la demostración de la regla de la cadena bajo la hipótesis adicional (ii). **(b)** Explique por qué la demostración de la regla de la cadena dada en el inciso **(a)** se aplica si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$, pero no se aplica si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \text{sgn } x$.

2.9 DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIA PARA EXPONENTES RACIONALES Y DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

En la sección 2.4 se mostró que la derivada de la **función potencia,** definida por

$$f(x) = x^r \qquad \textbf{(1)}$$

está dada por la fórmula siguiente, donde r es un entero positivo o negativo:

$$f'(x) = rx^{r-1} \qquad \textbf{(2)}$$

Ahora se demostrará que esta fórmula se cumple cuando r es un número racional, con ciertas estipulaciones cuando $x = 0$.

Primero considere que $x \neq 0$, y $r = 1/q$, donde q es un número entero positivo. Entonces la ecuación (1) se puede escribir como

$$f(x) = x^{1/q} \tag{3}$$

De la definición 2.1.3,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^{1/q} - x^{1/q}}{\Delta x} \tag{4}$$

A fin de evaluar el límite en (4) se debe racionalizar el numerador. Para lograr esto se emplea la fórmula siguiente:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{5}$$

Puede considerar esta fórmula de sus cursos anteriores al de Cálculo. Si no, refiérase al suplemento de la sección 1.5 donde se obtuvo como la ecuación (12).

El numerador de la fracción en (4) se racionaliza al aplicar (5) donde $a = (x + \Delta x)^{1/q}$, $b = x^{1/q}$ y $n = q$. De modo que se multiplica el numerador y el denominador por

$$[(x + \Delta x)^{1/q}]^{(q-1)} + [(x + \Delta x)^{1/q}]^{(q-2)}x^{1/q} + \ldots + (x^{1/q})^{(q-1)}$$

Entonces, de (4), $f'(x)$ es igual a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x + \Delta x)^{1/q} - x^{1/q}][(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q}x^{1/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}]}{\Delta x[(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q}x^{1/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}]} \tag{6}$$

Ahora, si se aplica (5) al numerador, se obtiene $(x + \Delta x)^{q/q} - x^{q/q}$, lo cual es Δx. Así, de (6),

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x[(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q}x^{1/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q}x^{1/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x^{(q-1)/q} + x^{(q-2)/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}}$$

como hay exactamente q términos en el denominador de la fracción anterior,

$$f'(x) = \frac{1}{qx^{1-(1/q)}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{q}x^{1/q-1} \tag{7}$$

la cual es la fórmula (2) con $r = 1/q$. Con esto se ha completado una etapa crucial de la demostración. A continuación se debe mostrar que la función definida por (3) es diferenciable; además, que su derivada está dada por (7).

Ahora, en (1) con $x \neq 0$, sea $r = p/q$, donde p es cualquier número entero diferente de cero y q es cualquier número entero positivo; esto es, r es cualquier número racional excepto cero. Entonces, (1) se puede escribir como

$$f(x) = x^{p/q} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x^{1/q})^p$$

De la regla de la cadena y de la regla de la potencia para números enteros positivos y negativos, se tiene

$$f'(x) = p(x^{1/q})^{p-1} \cdot D_x(x^{1/q})$$

Al aplicar la fórmula (7) para $D_x(x^{1/q})$ se obtiene

$$f'(x) = p(x^{1/q})^{p-1} \cdot \frac{1}{q} x^{1/q-1}$$

$$f'(x) = \frac{p}{q} x^{p/q-1/q+1/q-1}$$

$$f'(x) = \frac{p}{q} x^{p/q-1}$$

Esta fórmula es la misma que (2) con $r = p/q$.

Si $r = 0$ y $x \neq 0$, (1) se transforma en $f(x) = x^0$; esto es, $f(x) = 1$. De modo que $f'(x) = 0$, lo cual puede escribirse como $f(x) = 0 \cdot x^{0-1}$. Por tanto, se cumple (2) si $r = 0$ y $x \neq 0$. En consecuencia, se ha mostrado que la fórmula (2) se cumple cuando r es cualquier número racional y $x \neq 0$.

Ahora bien, 0 está en el dominio de la función potencia f si y sólo si r es un número positivo, porque cuando $r \leq 0$, $f(0)$ no está definido. En consecuencia, se desea determinar para que valores positivos de r, $f'(0)$ estará dado por la fórmula (2). Se deben excluir los valores de r para los cuales $0 < r \leq 1$ porque para estos valores de r, x^{r-1} no es un número real cuando $x = 0$. Entonces, suponga que $r > 1$. Por la definición de derivada,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{x^r - 0^r}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} x^{r-1} \end{aligned}$$

Cuando $r > 1$, $\lim\limits_{x \to 0} x^{r-1}$ existe y es igual a cero, suponiendo que r es número tal que x^{r-1} está definido en algún intervalo abierto que contiene a 0. Por ejemplo, si $r = \frac{3}{2}$, entonces $x^{r-1} = x^{1/2}$, el cual no está definido en cualquier intervalo abierto que contenga a 0 (ya que $x^{1/2}$ no existe cuando $x < 0$). Sin embargo, si $r = \frac{5}{3}$, $x^{r-1} = x^{2/3}$, el cual está definido en cualquier intervalo abierto que contenga a 0. Por tanto, la fórmula (2) proporciona la derivada de la función potencia cuando $x = 0$, suponiendo que r es un número para el cual x^{r-1} está definido para algún intervalo que contiene a 0. De este modo se ha demostrado el teorema siguiente.

2.9.1 Teorema Regla de diferenciación de la función potencia (para exponentes racionales)

Si f es la función potencia definida por $f(x) = x^r$, donde r es cualquier número racional, entonces f es diferenciable y

$$f'(x) = rx^{r-1}$$

Para obtener $f'(0)$ a partir de esta fórmula, r debe ser un número tal que x^{r-1} esté definido en algún intervalo abierto que contenga a 0.

EJEMPLO 1 Calcule $f'(x)$ si

$$f(x) = 4\sqrt[3]{x^2}$$

Solución Del teorema 2.9.1 con $f(x) = 4x^{2/3}$ se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cdot \tfrac{2}{3}(x^{2/3-1}) \\ &= \tfrac{8}{3}x^{-1/3} \\ &= \frac{8}{3x^{1/3}} \\ &= \frac{8}{3\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

El próximo teorema se deduce inmediatamente a partir del teorema 2.9.1 y de la regla de la cadena.

2.9.2 Teorema

Si f y g son dos funciones tales que $f(x) = [g(x)]^r$, donde r es cualquier número racional, y si $g'(x)$ existe, entonces f es diferenciable, y

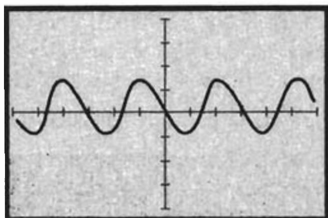
$$f'(x) = r[g(x)]^{r-1}g'(x)$$

EJEMPLO 2 Determine $f'(t)$ si

$$f(t) = \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 t + 9 \cos^2 t}$$

Solución Se escribe $f(t) = (4 \operatorname{sen}^2 t + 9 \cos^2 t)^{1/2}$ y se aplica el teorema 2.9.2.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \tfrac{1}{2}(4 \operatorname{sen}^2 t + 9 \cos^2 t)^{-1/2} \cdot D_t(4 \operatorname{sen}^2 t + 9 \cos^2 t) \\ &= \frac{8 \operatorname{sen} t \cdot D_t(\operatorname{sen} t) + 18 \cos t \cdot D_t(\cos t)}{2\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 t + 9 \cos^2 t}} \\ &= \frac{8 \operatorname{sen} t \cos t + 18 \cos t(-\operatorname{sen} t)}{2\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 t + 9 \cos^2 t}} \\ &= \frac{-10 \operatorname{sen} t \cos t}{2\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 t + 9 \cos^2 t}} \\ &= -\frac{5 \operatorname{sen} t \cos t}{\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 t + 9 \cos^2 t}} \end{aligned}$$



[−6, 6] por [4, 4]

$$f'(t) = -\frac{5 \operatorname{sen} t \cos t}{\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 t + 9 \cos^2 t}}$$

y NDER $(\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 t + 9 \cos^2 t}, t)$

FIGURA 1

Como es usual, los cálculos del ejemplo anterior pueden apoyarse gráficamente. En particular, la gráfica de la figura 1, la cual muestra que la gráfica de la respuesta y la gráfica de la derivada numérica de f parecen la misma, apoya el cálculo del ejemplo 2.

Ahora se tratará otra técnica de diferenciación llamada **diferenciación (o derivación) implícita,** la cual está basada en la regla de la cadena. Si $f = \{(x, y) \mid y = 3x^2 + 5x + 1\}$, entonces la ecuación

$$y = 3x^2 + 5x + 1$$

define a la función explícitamente. Sin embargo, no todas las funciones pueden ser definidas explícitamente mediante una ecuación. Por ejemplo, no se puede resolver la ecuación

$$x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2 \tag{8}$$

para y en términos de x. No obstante, pueden existir una o más funciones tales que si $y = f(x)$, entonces la ecuación (8) se satisface; es decir, funciones tales que la ecuación

$$x^6 - 2x = 3[f(x)]^6 + [f(x)]^5 - [f(x)]^2$$

se cumple para todos los valores de x en el dominio de f. En este caso, la función f está definida *implícitamente* por la ecuación dada.

Con la suposición de que (8) define a y como al menos una función diferenciable de x, la derivada de y con respecto a x puede determinarse mediante la *diferenciación implícita*.

La ecuación (8) es un tipo especial en el que aparecen x y y debido a que puede escribirse de modo que todos los términos que contienen x estén en un miembro de la ecuación y todos los términos en y se ubiquen en el otro miembro. Esta ecuación sirve como primer ejemplo para ilustrar el proceso de diferenciación implícita.

El miembro izquierdo de (8) es una función de x, y el miembro derecho es una función de y. Sea F la función definida por el miembro izquierdo y G la función definida por el miembro derecho. Así,

$$F(x) = x^6 - 2x \quad \text{y} \quad G(y) = 3y^6 + y^5 - y^2$$

donde y es una función de x, por decir $y = f(x)$. De este modo, (8) puede escribirse como

$$F(x) = G(f(x))$$

Esta ecuación es satisfecha por todos los valores de x del dominio de f para los cuales $G(f(x))$ existe.

Entonces, para todos los valores de x para los cuales f es diferenciable, se tiene

$$D_x(x^6 - 2x) = D_x(3y^6 + y^5 - y^2) \tag{9}$$

La derivada del miembro derecho de (9) se puede determinar fácilmente, por lo que se obtiene

$$D_x(x^6 - 2x) = 6x^5 - 2 \tag{10}$$

Por medio de la regla de la cadena se determina la derivada del miembro derecho de (9).

$$D_x(3y^6 + y^5 - y^2) = 18y^5 \cdot \frac{dy}{dx} + 5y^4 \cdot \frac{dy}{dx} - 2y \cdot \frac{dy}{dx} \tag{11}$$

Al sustituir los valores de (10) y (11) en (9) se obtiene

$$6x^5 - 2 = (18y^5 + 5y^4 - 2y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^5 - 2}{18y^5 + 5y^4 - 2y}$$

Observe que al emplear la diferenciación implícita se ha obtenido una expresión para $\frac{dy}{dx}$ que contiene a las variables x y y. En el ejemplo ilustrativo siguiente se utiliza el método de diferenciación implícita para determinar $\frac{dy}{dx}$ de un tipo más general de ecuación.



EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Considere la ecuación

$$3x^4y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y \tag{12}$$

y suponga que existe al menos una función diferenciable f tal que si $y = f(x)$, entonces la ecuación (12) se satisface. Al diferenciar ambos miembros de (12) (teniendo en mente que y es una función diferenciable de x) y aplicando la regla del producto, la regla de la potencia y la regla de la cadena, se obtiene

$$\begin{aligned}12x^3y^2 + 3x^4(2yD_xy) - 7y^3 - 7x(3y^2D_xy) &= 0 - 8\ D_xy\\ D_xy(6x^4y - 21xy^2 + 8) &= 7y^3 - 12x^3y^2\\ D_xy &= \frac{7y^3 - 12x^3y^2}{6x^4y - 21xy^2 + 8}\end{aligned}$$

◀

Recuerde que se supuso que tanto (8) como (12) definen al menos una función diferenciable de x. Puede suceder que una ecuación en x y y no impliquen la existencia de cualquier función de valores reales, como es el caso para la ecuación

$$x^2 + y^2 + 4 = 0$$

la cual no se satisface por cualesquiera valores reales de x y y. Además, es posible que una ecuación en x y y pueda ser satisfecha por muchas funciones diferentes, de las cuales algunas son diferenciables y otras no. Una discusión general está más allá del alcance de este texto, pero puede encontrarse en un libro de Cálculo avanzado. En las discusiones siguientes cuando se indique que una ecuación en x y y define a y implícitamente como una función de x, se supondrá que al menos una de estas funciones es diferenciable. El ejemplo 5, el cual se tratará posteriormente, ilustra el hecho de que la diferenciación implícita proporciona la derivada de dos funciones diferenciables definidas por la ecuación dada.



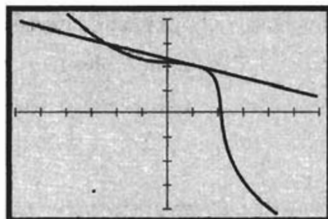
EJEMPLO 3 (**a**) Utilice la diferenciación implícita para determinar la pendiente de la recta tangente a la curva $x^3 + y^3 = 9$ en el punto (1, 2). (**b**) Encuentre una ecuación de la recta tangente y apoye la respuesta gráficamente trazando la curva y la recta tangente en el mismo rectángulo de inspección.

Solución

(**a**) Al diferenciar implícitamente con respecto a x se obtiene

$$\begin{aligned}3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} &= 0\\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x^2}{y^2}\end{aligned}$$

En el punto (1, 2), $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$.



[−6, 6] por [−4, 4]

$y = \sqrt[3]{9 - x^3}$ y $y = \frac{1}{4}(9 - x)$

FIGURA 2

(**b**) Una ecuación de la recta tangente es

$$y - 2 = -\tfrac{1}{4}(x - 1)$$
$$x + 4y - 9 = 0$$

La figura 2 muestra las gráficas de

$$y = \sqrt[3]{9 - x^3} \quad \text{y} \quad y = \tfrac{1}{4}(9 - x)$$

trazadas en el rectángulo de inspección de [−6, 6] por [−4, 4]. La recta es tangente a la curva en el punto (1, 2), lo que apoya la respuesta. ◀

▶ **EJEMPLO 4** Dada $x \cos y + y \cos x - 1 = 0$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

Solución Al diferenciar implícitamente con respecto a x se tiene

$$1 \cdot \cos y + x(-\operatorname{sen} y)\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}(\cos x) + y(-\operatorname{sen} x) = 0$$
$$\frac{dy}{dx}(\cos x - x \operatorname{sen} y) = y \operatorname{sen} x - \cos y$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \operatorname{sen} x - \cos y}{\cos x - x \operatorname{sen} y}$$ ◀

▶ **EJEMPLO 5** Dada la ecuación $x^2 + y^2 = 9$, determine (**a**) $\dfrac{dy}{dx}$ mediante la diferenciación implícita; (**b**) dos funciones definidas por la ecuación; (**c**) la derivada de cada una de las funciones del inciso (b) por medio de la diferenciación explícita. (**d**) Verifique que el resultado obtenido en el inciso (a) es acorde con el resultado del inciso (c).

Solución

(**a**) Al diferenciar implícitamente se obtiene

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(**b**) Si la ecuación dada se resuelve para y, entonces

$$y = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{9 - x^2}$$

Sean f_1 y f_2 las dos funciones para las que

$$f_1(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2}$$

(**c**) Como $f_1(x) = (9 - x^2)^{1/2}$ y $f_2(x) = -(9 - x^2)^{1/2}$, de la regla de la cadena se obtiene

$$f_1'(x) = \tfrac{1}{2}(9 - x^2)^{-1/2}(-2x) \qquad f_2'(x) = -\tfrac{1}{2}(9 - x^2)^{1/2}(-2x)$$
$$= -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} \qquad\qquad = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

(d) Para $y = f_1(x)$, donde $f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$, se deduce del inciso (c) que

$$f_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$
$$= -\frac{x}{y}$$

lo cual es acorde con la respuesta del inciso (a).

Para $y = f_2(x)$, donde $f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2}$, se deduce del inciso (c) que

$$f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$
$$= -\frac{x}{-\sqrt{9 - x^2}}$$
$$= -\frac{x}{y}$$

lo cual es acorde con la respuesta del inciso (a). ◀

El ejemplo siguiente muestra cómo calcular la segunda derivada para funciones definidas implícitamente.

▶ ***EJEMPLO 6*** Dado que

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

determine $\frac{d^2y}{dx^2}$ mediante diferenciación implícita.

Solución Al diferenciar implícitamente con respecto a x se tiene

$$8x + 18y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{9y} \tag{13}$$

Para calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$ se obtiene la derivada de un cociente teniéndose en mente que y es una función de x. Así,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9y(-4) - (-4x)\left(9 \cdot \frac{dy}{dx}\right)}{81y^2}$$

Si se sustituye el valor de $\frac{dy}{dx}$ de (13) en esta ecuación se obtiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-36y + (36x)\frac{-4x}{9y}}{81y^2}$$
$$= \frac{-36y^2 - 16x^2}{81y^3}$$
$$= \frac{-4(9y^2 - 4x^2)}{81y^3}$$

Puesto que cualesquiera valores de x y y que satisfacen esta ecuación deben también satisfacer la ecuación original, entonces se puede sustituir $9y^2 + 9x^2$ por 36 para obtener

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4(36)}{81y^3}$$
$$= -\frac{16}{9y^3}$$

EJERCICIOS 2.9

En los ejercicios 1 a 12, obtenga la derivada de la función.

1. $f(x) = 4x^{1/2} + 5x^{-1/2}$
2. $f(x) = 3x^{2/3} - 6x^{1/3} + x^{-1/3}$
3. $g(x) = \sqrt{1 + 4x^2}$
4. $f(s) = \sqrt{2 - 3s^2}$
5. $f(x) = (5 - 3x)^{2/3}$
6. $g(x) = \sqrt[3]{4x^2 - 1}$
7. $g(y) = \dfrac{1}{\sqrt{25 - y^2}}$
8. $f(x) = (5 - 2x^2)^{-1/3}$
9. $h(t) = 2\cos\sqrt{t}$
10. $f(x) = 4\sec\sqrt{x}$
11. $g(r) = \cot\sqrt{3r}$
12. $g(x) = \sqrt{3\operatorname{sen} x}$

En los ejercicios 13 a 16, calcule la derivada y apoye la respuesta trazando las gráficas de la respuesta y la derivada numérica en el mismo rectángulo de inspección.

13. $\dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} t}{1 - \operatorname{sen} t}}\right)$
14. $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{\dfrac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x}}\right)$
15. $D_x(\sqrt{9 + \sqrt{9 - x}})$
16. $D_x\left(\sqrt{x}\tan\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)$

En los ejercicios 17 a 32, determine $\dfrac{dy}{dx}$ por medio de diferenciación implícita.

17. $x^2 + y^2 = 16$
18. $4x^2 - 9y^2 = 1$
19. $x^3 + y^3 = 8xy$
20. $x^2 + y^2 = 7xy$
21. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$
22. $\dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{y} = 2x$
23. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$
24. $2x^3y + 3xy^3 = 5$
25. $x^2y^2 = x^2 + y^2$
26. $(2x + 3)^4 = 3y^4$
27. $y = \cos(x - y)$
28. $x = \operatorname{sen}(x + y)$
29. $\sec^2 x + \csc^2 y = 4$
30. $\cot xy + xy = 0$
31. $x\operatorname{sen} y + y\cos x = 1$
32. $\cos(x + y) = y\operatorname{sen} x$

En los ejercicios 33 a 36, encuentre una ecuación de la recta tangente o de la recta normal, según se indica, y apoye la respuesta trazando la recta y la curva en el mismo rectángulo de inspección.

33. La recta tangente a la curva $y = \sqrt{x^2 + 9}$ en el punto $(4, 5)$.
34. La recta normal a la curva $y = x\sqrt{16 + x^2}$ en el origen.
35. La recta normal a la curva $9x^3 - y^3 = 1$ en el punto $(1, 2)$.
36. La recta tangente a la curva $16x^4 + y^4 = 32$ en el punto $(1, 2)$.
37. ¿En qué punto de la curva $xy = (1 - x - y)^2$ la recta tangente es paralela al eje x?
38. Dos rectas que pasan por el punto $(-1, 3)$, son tangentes a la curva $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 3 = 0$. Encuentre una ecuación de cada una de las rectas.

En los ejercicios 39 a 42, haga lo siguiente: (a) Encuentre dos funciones definidas por la ecuación; (b) dibuje las gráficas de cada una de las funciones obtenidas en el inciso (a); (c) dibuje la gráfica de la ecuación; (d) calcule la derivada de cada una de las funciones obtenidas en el inciso (a) y determine los dominios de las derivadas; (e) obtenga $\dfrac{dy}{dx}$ mediante diferenciación implícita de la ecuación dada, y verifique que el resultado así obtenido es acorde con los resultados del inciso (d); (f) encuentre una ecuación de cada recta tangente en el valor indicado de x_1.

39. $y^2 = 4x - 8;\ x_1 = 3$
40. $y^2 - x^2 = 16;\ x_1 = -3$
41. $x^2 - y^2 = 9;\ x_1 = -5$
42. $x^2 + y^2 = 25;\ x_1 = 4$
43. Dado que $x^2 + y^2 = 1$, demuestre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{y^3}$.
44. Sea $x^{1/2} + y^{1/2} = 2$, pruebe que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$.
45. Si $x^3 + y^3 = 1$, muestre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2x}{y^5}$.
46. Sea $x^2 + 25y^2 = 100$, demuestre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{4}{25y^3}$.
47. Una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación de movimiento $s = \sqrt{4t^2 + 3}$, con $t \geq 0$. Determine el valor de t para el cual la medida de la velocidad es **(a)** 0; **(b)** 1; **(c)** 2.
48. Una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación de movimiento $s = \sqrt{5 + t^2}$, con $t \geq 0$. Determine el valor de t para el cual la medida de la velocidad es **(a)** 0; **(b)** 1.
49. Suponga que se produce un líquido mediante un proceso químico y que la función de costo total C está dada por $C(x) = 6 + 4\sqrt{x}$, donde $C(x)$ dólares es el costo total

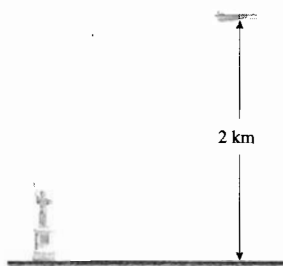
al producir x litros del líquido. Determine (**a**) el costo marginal cuando se producen 16 litros, y (**b**) el número de litros producidos cuando el costo marginal es de \$0.40 por litro.

50. El número de dólares del costo total por producir x unidades de cierto artículo está dado por $C(x) = 40 + 3x + 9\sqrt{2x}$. Determine (**a**) el costo marginal cuando se producen 50 unidades, y (**b**) el número de unidades producidas cuando el costo marginal es \$4.50.

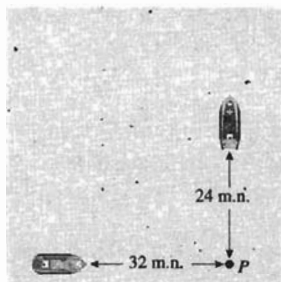
51. Una compañía inmobiliaria renta cada departamento a p dólares por mes cuando x departamentos son rentados, y $p = 30\sqrt{300 - 2x}$. Si $R(x)$ dólares son las utilidades totales recibidas por la renta de los x departamentos, entonces $R(x) = px$. ¿Cuántos departamentos deben rentarse antes de que las utilidades sean cero? *Nota:* como x es el número de departamentos rentados, x es un número entero no negativo, Sin embargo, para aplicar el Cálculo, suponga que x es un número real no negativo.

52. La producción diaria de una fábrica es $f(x)$ unidades cuando el capital invertido es x miles de dólares, y $f(x) = 200\sqrt{2x + 1}$. Si la capitalización actual es de \$760 000, utilice la derivada para estimar la variación de la producción diaria si el capital invertido es aumentado en \$1 000.

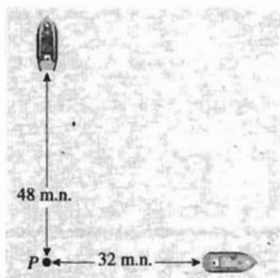
53. Un avión vuela en forma paralela al suelo a una altura de 2 km y con una rapidez de $4\frac{1}{2}$ km/min. Si el avión vuela directamente sobre la Estatua de la Libertad, ¿a qué tasa está variando la distancia de la recta visual entre el avión y la estatua 20 s después?



54. A las 8 a.m. un barco, que navega hacia el norte a 24 nudos (millas náuticas por hora), se encuentra en un punto P. A las 10 a.m. un segundo barco, que navega hacia el este a 32 nudos, está en el punto P. ¿A qué tasa está cambiando la distancia entre los dos barcos (**a**) a las 9 a.m.; (**b**) a las 11 a.m.?



(**a**) 9 A. M.



(**b**) 11 A. M.

55. En el ejercicio 41 de la sección 2.2, aplicó la definición de derivada para demostrar que

$$D_x(|x|) = \frac{|x|}{x} \quad \text{si } x \neq 0$$

Ahora utilice la regla de la cadena y los teoremas de diferenciación para la demostración. *Sugerencia:* considere $|x| = \sqrt{x^2}$.

56. Determine $D_x^{\,2}(|x|)$ cuando exista. Considere la sugerencia del ejercicio 55.

En los ejercicios 57 y 58, calcule la derivada de la función. Considere la sugerencia del ejercicio 55.

57. $f(x) = |x^2 - 4|$ **58.** $g(x) = x|x|$

59. Si $f(x) = |x|^3$, determine $f'(x)$ y $f''(x)$ cuando existan.

60. Sea $g(x) = |f(x)|$. Demuestre que si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces $|g'(x)| = |f'(x)|$.

61. Se deja caer una pelota desde una ventana que se encuentra a h pies sobre el piso y rebota de modo que t segundos después de que la pelota cae, su altura es $s(t)$ pies, donde

$$s(t) = \frac{h\,|\cos t|}{(1 - t)^2}$$

Determine la tasa a la que la altura de la pelota está cambiando a los (**a**) 1.4 s, (**b**) 1.6 s, (**c**) 1.8 s y (**d**) 2.2 s.

62. Demuestre que la suma de las intercepciones x y y de la recta tangente a la curva $x^{1/2} + y^{1/2} = k^{1/2}$, donde k es una constante, es igual a k.

63. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ en el punto donde $x = -\frac{1}{8}$. Apoye la respuesta trazando las rectas y la curva en el mismo rectángulo de inspección.

64. Suponga que $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ y $h(x) = f(g(x))$, donde f es diferenciable en 3. Demuestre que $h'(0) = 0$.

65. Demuestre que si $xy = 1$, entonces $\dfrac{d^2y}{dx^2} \cdot \dfrac{d^2y}{dx^2} = 4$.

66. Sea f la función potencia definida por $f(x) = x^r$, donde r es cualquier número racional. Bajo la suposición de que f es diferenciable, utilice la diferenciación implícita para demostrar que $f'(x) = rx^{r-1}$. *Sugerencia:* sea $r = \dfrac{p}{q}$, donde p y q son números enteros y $q > 0$. Después sus-

tituya $f(x)$ por y y escriba la ecuación como $y^q = x^p$. Emplee la diferenciación implícita y determine $\frac{dy}{dx}$.

67. Para una demostración rigurosa del teorema 2.9.1, la regla de diferenciación de la potencia (para potencias racionales), ¿pudo haberse empleado el procedimiento del ejercicio 66 en lugar del que se presentó en la sección? Explique su respuesta.

68. Calcule $(f \circ g)'(0)$ si $f(x) = x^6 + 7x^3$ y $g(x) = x^{1/3}$. Explique por qué no se puede emplear la regla de la cadena para efectuar este cálculo.

2.10 TASAS DE VARIACIÓN RELACIONADAS

Un problema de *tasas de variación relacionadas* es aquel que involucra tasas de variación de variables relacionadas. En aplicaciones del mundo real que implican tasas de variación relacionadas, las variables tienen una relación específica para valores de t, donde t es una medida de tiempo. En general, esta relación se expresa mediante una ecuación, la cual representa un modelo matemático. Esta sección se inicia con un ejemplo ilustrativo que muestra el camino paso a paso de cómo se resuelven la mayoría de los problemas de tasas de variación relacionadas.

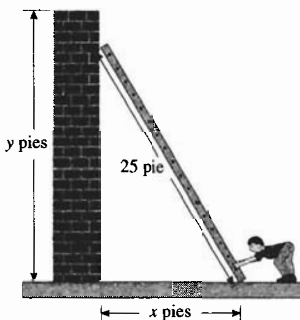


FIGURA 1

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Una escalera de 25 pie de longitud está apoyada contra una pared vertical como se muestra en la figura 1. La base de la escalera se jala horizontalmente alejándola de la pared a 3 pie/s. Suponga que se desea determinar qué tan rápido se desliza hacia abajo la parte superior de la escalera sobre la pared cuando su base se encuentra a 15 pie de la pared.

Paso 1 Primero defina las variables comenzando con t.

t: el número de segundos del tiempo que ha transcurrido desde que la escalera comenzó a deslizarse hacia abajo sobre la pared.

x: el número de pies de la distancia desde la base de la escalera a la pared a los t segundos.

y: el número de pies de la distancia desde el piso a la parte superior de la escalera a los t segundos.

Paso 2 Escriba cualquier hecho numérico acerca de x, y y sus derivadas con respecto a t.

Como la base de la escalera es jalada horizontalmente alejándola de la pared a 3 pie/s, $\frac{dx}{dt} = 3$.

Paso 3 Escriba lo que desea determinar.

Se desea determinar $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 15$.

Paso 4 Escriba una ecuación que relacione a x y y.

Del teorema de Pitágoras,

$$y^2 = 625 - x^2 \qquad (1)$$

Paso 5 Derive los dos miembros de (1) con respecto a t

$$2y\frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\cdot\frac{dx}{dt} \qquad (2)$$

Paso 6 Sustituya los valores conocidos de x, y y $\frac{dx}{dt}$ en la ecuación anterior y resuélvala para $\frac{dy}{dt}$.

Cuando $x = 15$, de (1) $y = 20$. Como $\frac{dx}{dt} = 3$, se obtiene de (2)

$$\left.\frac{dy}{dt}\right]_{y=20} = -\frac{15}{20}\cdot 3$$
$$= -\frac{9}{4}$$

El signo menos indica que y decrece conforme t aumenta.

Paso 7 Escriba una conclusión.

Conclusión: La parte superior de la escalera se desliza hacia abajo sobre la pared a la tasa de 2.25 pie/s cuando la base está a 15 pie de la pared. ◀

Ahora se hará un resumen de los pasos del ejemplo ilustrativo anterior. Ellos le darán un procedimiento a seguir. Conforme lea los ejemplos siguientes, refiérase a estos pasos para ver cómo se aplican.

Sugerencias para resolver un problema de tasas de variación relacionadas

Lea el problema cuidadosamente de modo que lo entienda. Para poder entenderlo, con frecuencia es útil inventar un ejemplo específico que contemple una situación semejante en la que todas las cantidades sean conocidas. Otra ayuda es dibujar una figura, si es factible, como en el ejemplo ilustrativo 1 y los ejemplo 1, 2 y 4. Después aplique los siguientes pasos.

1. Defina las variables de la ecuación que obtendrá. Debido a que éstas representan números, las definiciones de las variables deben indicar este hecho. Por ejemplo, si el tiempo se mide en segundos, entonces la variable t debe definirse como el número de segundos de tiempo o, equivalentemente, t segundos es el tiempo. Asegúrese de definir primero t, y las otras variables deben indicar su dependencia de t.
2. Escriba los hechos numéricos conocidos acerca de las variables y de sus derivadas con respecto a t.
3. Escriba lo que se desea determinar.
4. Escriba una ecuación que relacione las variables que dependen de t. Esa ecuación será un modelo matemático de la situación.
5. Derive con respecto a t los dos miembros de la ecuación obtenida en el paso 4 para relacionar las tasas de variación de las variables.
6. Sustituya los valores de las cantidades conocidas en la ecuación del paso 5, y despeje la cantidad deseada.
7. Escriba una conclusión que consista de una o más oraciones completas y que responda las preguntas del problema. No olvide que la conclusión debe contener las unidades correctas de medición.

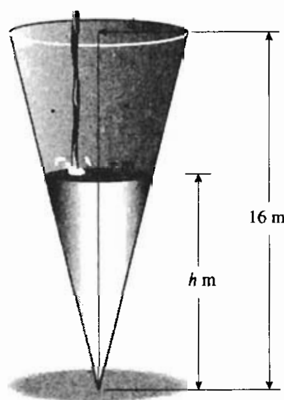


FIGURA 2

EJEMPLO 1 Cierta cantidad de agua fluye a una tasa de 2 m^3/min hacia el interior de un depósito cuya forma es la de un cono invertido de 16 m de altura y 4 m de radio. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta ha alcanzado 5 m de profundidad?

Solución Refiérase a la figura 2.

Paso 1 Se definen las variables, primero t y después las otras variables en términos de t.

t: el número de minutos del tiempo que ha transcurrido desde que el agua comenzó a fluir dentro del tanque.

h: el número de metros de la altura del nivel del agua a los t minutos.

r: el número de metros del radio de la superficie del agua a los t minutos.

V: el número de metros cúbicos del volumen de agua en el tanque a los t minutos. Observe que V, r y h, son funciones de t.

Paso 2 Puesto que el agua fluye dentro del tanque a una tasa de 2 m^3/min, entonces $\dfrac{dV}{dt} = 2$.

Paso 3 Se desea determinar $\dfrac{dh}{dt}$ cuando $h = 5$.

Paso 4 En cualquier tiempo, el volumen del agua en el tanque puede expresarse como el volumen de un cono, como indica la figura 2.

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h \qquad \textbf{(3)}$$

Como se estableció en los pasos 2 y 3, se conoce $\dfrac{dV}{dt}$, y se desea determinar $\dfrac{dh}{dt}$. Por tanto, se necesita una ecuación que involucre a V y h. Así, primero se expresa r en términos de h observando que, de los triángulos semejantes de la figura 2, se tiene

$$\frac{r}{h} = \frac{4}{16} \qquad \Leftrightarrow \qquad r = \frac{1}{4}h$$

Si se sustituye este valor de r en (3), se obtiene

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{4}h\right)^2(h) \qquad \Leftrightarrow \qquad V = \frac{1}{48}\pi h^3$$

Paso 5 Al diferenciar los dos miembros de esta ecuación con respecto a t, resulta:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{16}\pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

Paso 6 Ahora se sustituye 2 por $\dfrac{dV}{dt}$ y se resuelve la ecuación para $\dfrac{dh}{dt}$, obtiéndose

$$\frac{dh}{dt} = \frac{32}{\pi h^2}$$

Así,

$$\left.\frac{dh}{dt}\right]_{h=5} = \frac{32}{25\pi} \approx 0.4074$$

Al convertir metros a centímetros se tiene: 0.4074 m/min = 40.74 cm/min.

Paso 7 A continuación se escribirá la conclusión.

Conclusión: El nivel del agua sube a una tasa de 40.74 cm/min cuando el agua ha alcanzado una profundidad de 5 m. ◀

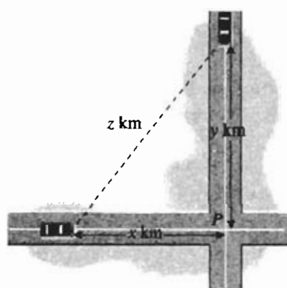


FIGURA 3

▶ ***EJEMPLO 2*** Dos automóviles, uno va hacia el este a una tasa de 90 km/h, y el otro hacia el sur a 60 km/h, se dirigen hacia la intersección de dos carreteras. ¿A qué tasa se están aproximando uno al otro en el instante en que el primer automóvil está a 0.2 km de la intersección y el segundo se encuentra a 0.15 km de dicha intersección?

Solución Consulte la figura 3, donde el punto P es la intersección de las dos carreteras.

Paso 1

t: el número de horas del tiempo que ha transcurrido desde que los automóviles empezaron a aproximarse a P.

x: el número de kilómetros de la distancia a partir del primer automóvil a P a las t horas.

y: el número de kilómetros de la distancia a partir del segundo automóvil a P a las t horas.

z: el número de kilómetros de la distancia entre los dos automóviles a las t horas.

Paso 2 Como el primer carro se acerca a P a una tasa de 90 km/h, y x está decreciendo conforme t crece, entonces $\frac{dx}{dt} = -90$. De la misma manera, $\frac{dy}{dt} = -60$.

Paso 3 Se desea determinar $\frac{dz}{dt}$ cuando $x = 0.2$ y $y = 0.15$.

Paso 4 Del teorema de Pitágoras

$$z^2 = x^2 + y^2 \tag{4}$$

Paso 5 Al diferenciar los dos miembros de (4) con respecto a t, se obtiene

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{z} \tag{5}$$

Paso 6 Cuando $x = 0.2$ y $y = 0.15$, de (4) se tiene que $z = 0.25$. En (5) se sustituyen $\frac{dx}{dt}$ por -90, $\frac{dy}{dt}$ por -60, x por 0.2, y por 0.15 y z por 0.25 para obtener

$$\left.\frac{dz}{dt}\right]_{z=0.25} = \frac{(0.2)(-90) + (0.15)(-60)}{0.25}$$

$$= -108$$

Paso 7

Conclusión: En el instante en cuestión, los carros se aproximan uno al otro a una tasa de 108 km/h. ◀

▶ **EJEMPLO 3** Suponga que en cierto mercado, x miles de canastillas de naranjas se surten diariamente cuando p dólares es el precio por canastilla. La ecuación de oferta es

$$px - 20p - 3x + 105 = 0$$

Si el suministro diario decrece a una tasa de 250 canastillas por día, ¿a qué tasa está variando el precio cuando la oferta diaria es de 5 000 canastillas?

Solución Sea t días el tiempo que ha transcurrido desde que el suministro diario empezó a decrecer.

Las variables p y x están definidas como funciones de t en el enunciado del problema.

Debido a que el suministro diario está decreciendo a una tasa de 250 canastillas por día, entonces $\frac{dx}{dt} = -\frac{250}{1\,000}$; esto es, $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{4}$. Se desea determinar $\frac{dp}{dt}$ cuando $x = 5$. De la ecuación de oferta dada, al diferenciar implícitamente con respecto a t se obtiene

$$p\frac{dx}{dt} + x\frac{dp}{dt} - 20\frac{dp}{dt} - 3\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{3-p}{x-20} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Cuando $x = 5$, se deduce de la ecuación de oferta que $p = 6$. Debido a que $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{4}$, se tiene de la ecuación anterior

$$\left.\frac{dp}{dt}\right]_{p=6} = \frac{3-6}{5-20}\left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$= -\frac{1}{20}$$

<u>Conclusión:</u> El precio de una canastilla de naranjas está decreciendo a la tasa de \$0.05 por día cuando la oferta diaria es de 5 000 canastillas. ◀

▶ **EJEMPLO 4** Un avión vuela hacia el oeste con una velocidad de 500 pie/s a una altura de 4 000 pie y un rayo de luz de un faro de rastreo ubicado en tierra, incide en la parte inferior del avión. Si la luz se mantiene sobre el avión, ¿qué tan rápido gira el rayo de luz cuando el avión se encuentra a una distancia horizontal de 2 000 pie al este del faro.

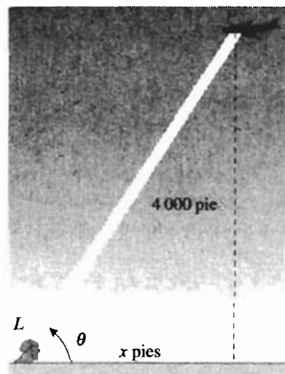


FIGURA 4

Solución Consulte la figura 4, en la que el faro está en el punto L y en un instante particular el avión se encuentra en el punto P.

Sea t segundos el tiempo que transcurre desde que la luz del faro incidió en el avión.

x: el número de pies hacia el este de la distancia horizontal del avión desde el faro a los t segundos.

θ: el número de radianes del ángulo de elevación del avión desde el faro a los t segundos.

Puesto que $\frac{dx}{dt} = -500$, y como se desea determinar $\frac{d\theta}{dt}$ cuando $x = 2\,000$, se considera

$$\tan\theta = \frac{4\,000}{x}$$

Al diferenciar los dos miembros de esta ecuación con respecto a t se obtiene

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{4\,000}{x^2}\frac{dx}{dt}$$

Si se sustituye $\frac{dx}{dt}$ por -500 en la ecuación anterior y al dividir entre $\sec^2 \theta$ se tiene

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\,000\,000}{x^2 \sec^2 \theta} \qquad \textbf{(6)}$$

Cuando $x = 2\,000$, $\tan \theta = 2$. Como $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$, $\sec^2 \theta = 5$. Al sustituir estos valores en (6) se tiene, cuando $x = 2\,000$,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\,000\,000}{4\,000\,000(5)} = \frac{1}{10}$$

Conclusión: En el instante dado, la medida del ángulo está creciendo a la tasa de $\frac{1}{10}$ rad/s, y ésta es la rapidez con la que está girando el faro. ◀

EJERCICIOS 2.10

En los ejercicios 1 a 8, x y y son funciones de la tercera variable t.

1. Si $2x + 3y = 8$ y $\frac{dy}{dt} = 2$, obtenga $\frac{dx}{dt}$.

2. Si $\frac{x}{y} = 10$ y $\frac{dx}{dt} = -5$, calcule $\frac{dy}{dt}$.

3. Si $xy = 20$ y $\frac{dy}{dt} = 10$, encuentre $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 2$.

4. Si $2 \operatorname{sen} x + 4 \cos y = 3$ y $\frac{dy}{dt} = 3$, obtenga $\frac{dx}{dt}$ en $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi)$.

5. Si $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{5}{4}$ y $\frac{dx}{dt} = -1$, calcule $\frac{dy}{dt}$ en $(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi)$.

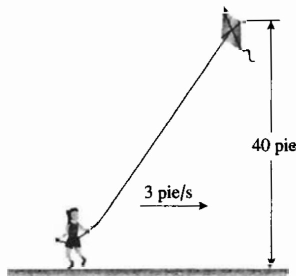
6. Si $x^2 + y^2 = 25$ y $\frac{dx}{dt} = 5$, calcule $\frac{dy}{dt}$ cuando $y = 4$.

7. Si $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ y $\frac{dy}{dt} = 3$, obtenga $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 1$.

8. Si $y(\tan x + 1) = 4$ y $\frac{dy}{dt} = -4$, determine $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = \pi$.

En los problemas de tasas de variación relacionadas de los ejercicios siguientes, defina precisamente todas las variables como cantidades (números y unidades de medición). Utilice la variable t para representar el tiempo y defina las otras variables de modo que dependan de t. Asegúrese de escribir una conclusión.

9. Un niño vuela una cometa a una altura de 40 pie, y lo hace moviéndose horizontalmente a una tasa de 3 pie/s. Si la cuerda está tensa, ¿a qué tasa se afloja cuando la longitud de la cuerda suelta es de 50 pie?



10. Se infla un globo esférico de modo que su volumen se incrementa a una tasa de 5 m^3/min. ¿A qué tasa aumenta el diámetro cuando éste es de 12 m?

11. Se está formando una bola de nieve de modo que su volumen se incrementa a una tasa de 8 pie^3/min. Determine la tasa a la que el radio aumenta cuando el diámetro de la bola es de 4 pie.

12. Suponga que cuando el diámetro de bola de nieve, del ejercicio 11, es de 6 pie se detiene su crecimiento y comienza a derretirse a una tasa de $\frac{1}{4}$ pie^3/min. Calcule la tasa a la que el radio varía cuando éste es de 2 pie.

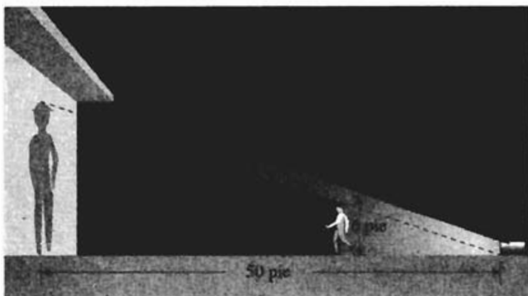
13. Se deja caer arena en un montículo de forma cónica a una tasa de 10 m^3/min. Si la altura del montículo siempre es el doble del radio de la base, ¿a qué tasa se incrementa la altura cuando ésta es de 8 m?

14. Una lámpara se encuentra suspendida a 15 pie sobre una calle horizontal y reeta. Si un hombre de 6 pie de estatura camina alejándose de la lámpara a una tasa de 5 pie/s, ¿qué tan rápido se alarga su sombra?



15. En el ejercicio 14, ¿a qué tasa se desplaza la punta de la sombra del hombre?

16. Un hombre de 6 pie de estatura camina hacia un edificio a una tasa de 5 pie/s, si en el piso se encuentra una lámpara a 50 pie del edificio, ¿qué tan rápido se acorta la sombra del hombre proyectada en el edificio cuando él está a 30 pie de éste?



17. Suponga que un tumor en el cuerpo de una persona es de forma esférica. Si cuando el radio del tumor es de 0.5 cm, éste crece a una tasa de 0.001 cm por día, ¿cuál es la tasa de crecimiento del volumen del tumor en ese tiempo?

18. Una bacteria celular es de forma esférica. Si el radio de la bacteria crece a una tasa de 0.01 μm (micra) por día cuando el radio de ésta es de 1.5 μm, ¿cuál es la tasa de crecimiento del volumen de la bacteria en ese tiempo?

19. Para el tumor del ejercicio 17, ¿cuál es la tasa de crecimiento del área de la superficie cuando el radio es de 0.5 cm?

20. Para la bacteria del ejercicio 18, ¿cuál es la tasa del área de la superficie de la bacteria cuando su radio es de 1.5 μm?

21. Un tanque para almacenar agua tiene la forma de un cono invertido y se está vaciando a una tasa de 6 m^3/min. La altura del cono es de 24 m y su radio mide 12 m. Determine qué tan rápido disminuye el nivel del agua cuando está tiene una profundidad de 10 m.

22. La longitud de un abrevadero es de 12 pie y sus extremos tienen la forma de un triángulo isósceles invertido que tiene una altura de 3 pie y su base mide 3 pie. Se introduce agua al abrevadero a una tasa de 2 pie^3/min. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta tiene una profundidad de 1 pie?

23. La ley de Boyle para la expansión de una gas es $PV = C$, donde P es la presión expresada como el número de libras por unidad cuadrada de área, V es el número de unidades cúbicas del volumen del gas y C es una constante. En cierto momento, la presión es de 3 000 lb/pie^2, el volumen es de 5 pie^3 y el volumen crece a una tasa de 3 pie^3/min. Determine la tasa de variación de la presión en ese momento.

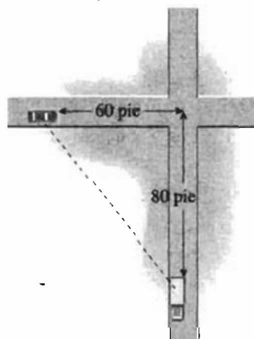
24. La ley adiabática (sin pérdida ni ganancia de calor) para la expansión del aire es $PV^{1.4} = C$, donde P es la presión expresada como el número de libras por unidad cuadrada de área, V es el número de unidades cúbicas del volumen y C es una constante. En un instante específico, la presión es de 40 lb/pulg^2 y está creciendo a una tasa de 8 lb/pulg^2 cada segundo. Si $C = 5/16$, ¿cuál es la tasa de variación del volumen en ese instante?

25. Se arroja una piedra en un estanque tranquilo, formándose ondas circulares concéntricas que se dispersan. Si el radio de la región afectada crece a una tasa de 16 cm/s, ¿a qué tasa crece el área de la región afectada cuando su radio es de 4 cm?

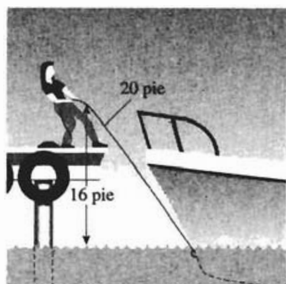


26. Cierta cantidad de aceite fluye hacia el interior de un depósito que tiene forma de cono invertido a una tasa de $3\pi\,m^3$/min. Si el depósito tiene un radio de 2.5 m en su parte superior y una altura de 10 m, ¿qué tan rápido varía el nivel del aceite cuando éste ha alcanzado 8 m de profundidad?

27. Un automóvil se desplaza a una tasa de 30 pie/s y se aproxima a un crucero. Cuando el automóvil está a 120 pie del crucero, un camión que viaja a una tasa de 40 pie/s pasa por el crucero. El automóvil y el camión se encuentran sobre carreteras que son perpendiculares. ¿Qué tan rápido se separan el automóvil y el camión 2 s después de que el camino deja el crucero?



28. Una cuerda está atada a un bote sobre la superficie del agua y una mujer, en el muelle, tira del bote a una tasa de 50 pie/min. Si sus manos están a 16 pie sobre el nivel del agua ¿qué tan rápido se aproxima el bote al muelle cuando la cantidad de cuerda suelta es de 20 pie?



29. Esta semana, en una fábrica se produjeron 50 unidades de un artículo determinado, y la cantidad producida aumenta a una tasa de 2 unidades por semana. Si $C(x)$ dólares es el costo total por producir x unidades y $C(x) = 0.08x^3 - x^2 + 10x + 48$, determine la tasa actual a la que el costo de producción crece.

30. La demanda de cierto cereal para el desayuno está dada por la ecuación de demanda $px + 50p = 16\ 000$, donde x miles de cajas de cereal son demandadas cuando el precio por caja es de p centavos. Si el precio actual de la caja de cereal es de \$1.6 y éste se incrementa a una tasa de 0.4 centavos cada semana, calcule la tasa de variación de la demanda.

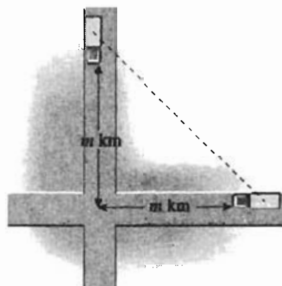
31. La ecuación de oferta para cierta mercancía es $x = 1\ 000\sqrt{3p^2 + 20p}$, donde cada mes se suministran x unidades cuando p dólares es el precio por unidad. Determine la tasa de variación de la oferta si el precio actual es de \$20 por unidad y el precio crece a una tasa de \$0.50 por mes.

32. Suponga que y trabajadores se necesitan para producir x unidades de cierta mercancía, y $x = 4y^2$. Si la producción de la mercancía este año es de 250 000 unidades y la producción crece a una tasa de 18 000 unidades por año, ¿cuál es la tasa actual a la que la fuerza laboral debe incrementarse?

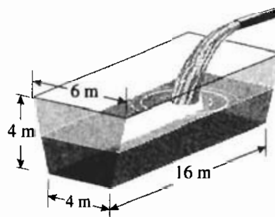
33. La ecuación de demanda para cierto tipo de camisa es $2px + 65p - 4\ 950 = 0$, donde x cientos de camisas son demandadas por semana cuando p dólares es el precio por camisa. Si una camisa se vende por \$30 esta semana, y el precio crece a una tasa de \$0.20 por semana, calcule la tasa de variación de la demanda.

34. La medida de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo decrece a una tasa de $\frac{1}{36}\pi$ rad/s. Si la longitud de la hipotenusa es constante y de 40 cm, determine qué tan rápido varía el área del triángulo cuando la medida del ángulo agudo es de $\frac{1}{6}\pi$ rad.

35. Dos camiones, uno de los cuales viaja hacia el oeste y el otro hacia el sur, se aproximan a un crucero. Si los dos camiones se desplazan a una tasa de k km/h, muestre que ellos se aproximan a una tasa de $k\sqrt{2}$ km/h cuando cada uno de ellos se encuentra a m kilómetros del crucero.



36. Un depósito horizontal para agua mide 16 m de longitud y sus extremos son trapecios isósceles con una altura de 4 m, base menor de 4 m y base mayor de 6 m. Se vierte agua en el depósito a una tasa de 10 m^3/min. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta ha alcanzado una profundidad de 2 m?



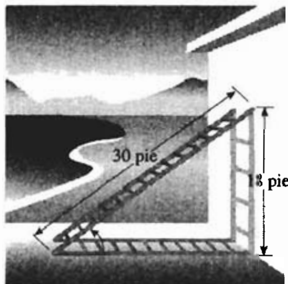
37. En el ejercicio 36, si el nivel del agua decrece a una tasa de 25 cm/min cuando el agua tiene una profundidad de 3 m, ¿a qué tasa sale el agua del depósito?

38. Una escalera de 7 m de longitud está apoyada sobre una pared. Si la base de la escalera se empuja horizontalmente hacia la pared a una tasa de 1.5 m/s, ¿qué tan rápido se desliza hacia arriba la parte superior de la escalera sobre la pared cuando su base se encuentra a 2 metros de la pared?

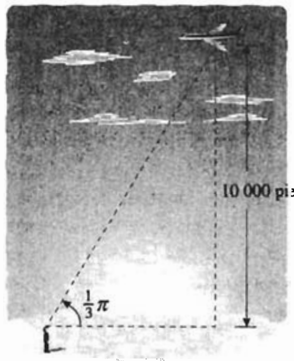


39. Una escalera de 20 pie de longitud está recargada sobre un terraplén inclinado a 60° con respecto a la horizontal. Si la base de la escalera se mueve horizontalmente hacia el terraplén a una tasa de 1 pie/s, qué tan rápido se desliza la parte superior de la escalera cuando la base está a 4 pies del terraplén.

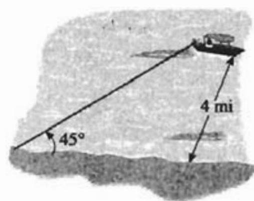
40. Una escalera de 30 pie de longitud está apoyada contra una pared, de modo que su extremo superior se desliza hacia abajo a una tasa de $\frac{1}{2}$ pie/s, ¿cuál es la tasa de variación de la medida del ángulo agudo formado por la escalera con el piso cuando el extremo superior está a 18 pie sobre el piso?



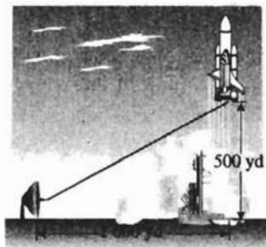
41. Un avión que vuela con rapidez constante a una altura de 10 000 pie sobre una trayectoria recta que lo llevará directamente sobre un observador en tierra. En un instante dado, el observador nota que el ángulo de elevación del avión es de $\frac{1}{3}\pi$ rad y aumenta a una tasa de $\frac{1}{60}$ rad/s. Determine la rapidez del avión.



42. Un bote está ubicado a 4 millas de la costa y tiene un radar transmisor que gira 32 veces por minuto. ¿Qué tan rápido se desplaza la onda emitida por el radar a lo largo de la costa cuando dicha onda forma un ángulo de 45° con la costa.



43. Después de la explosión de despegue, un transbordador espacial se eleva verticalmente y un radar, ubicado a 1 000 yd de la rampa de lanzamiento, sigue al transbordador. ¿Qué tan rápido gira el radar 10 segundos después de la explosión de despegue si en ese instante la velocidad del transbordador es de 100 yd/s encontrándose éste a 500 yd del suelo?



44. Se vierte agua en un depósito que tiene forma de cono invertido a una tasa de 8 pie^3/min. El cono tiene una altura de 20 pie y un diámetro de 10 pie en la parte superior. Si hay una fuga en la parte inferior del depósito y el nivel del agua sube a una tasa de 1 pulg/min cuando el agua tiene una profundidad de 16 pies, ¿qué tan rápido escapa el agua del depósito?

45. Muestre que si el volumen de un globo decrece a una tasa proporcional al área de su superficie, el radio del globo se contrae a una tasa constante.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 2

▶ SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 2

1. Defina la *recta tangente* a la gráfica de una función en el punto $P(x_1, f(x_1))$.
2. Defina la *recta normal* a una gráfica en un punto dado.
3. Defina la *derivada* de una función f en un número x del dominio de f.
4. Establezca dos fórmulas que proporcionen $f'(x_1)$, la derivada de la función f en el número x_1.
5. ¿Cuál es la interpretación geométrica de la derivada de la función f en el número x_1?
6. ¿Cuál es la *notación de Lagrange* para la derivada de la función f en el número x_1? ¿Cuál es la *notación de Leibniz* para la derivada?
7. ¿Es posible que una función sea diferenciable en un número y no sea continua en ese número? Si la respuesta es sí, dé un ejemplo. Si la respuesta es no, establezca la razón.

8. ¿Es posible que una función sea continua en un número y no sea diferenciable en ese número? Si la respuesta es sí, dé un ejemplo, si la respuesta es no, establezca la razón.

9. Enuncie el teorema que proporciona la relación entre diferenciabilidad y continuidad de una función en un número.

10. Establezca tres razones por las que una función no sea diferenciable en un número c y dibuje la gráfica de tal función en cada caso.

11. Defina la *derivada por la derecha* y la *derivada por la izquierda* de una función f en el número x_1.

12. Invente un ejemplo de una función que no sea diferenciable en un número x_1 debido a que las derivadas por la derecha y por la izquierda de x_1 no son iguales aunque las dos derivadas laterales existan.

13. Invente un ejemplo de una función que no sea diferenciable en un número x_1, para la cual la gráfica de la función en el punto donde $x = x_1$ tiene una recta tangente vertical.

14. Invente un ejemplo de una función que no sea continua ni diferenciable en un número particular de su dominio.

15. ¿Qué es el *cociente de diferencias simétricas* de la función f en el número a?

16. ¿Cuál es la mejor aproximación a $f'(a)$ para una tolerancia específica: el cociente de diferencias simétricas o el cociente de diferencias estándar?

17. Defina la *derivada numérica* de una función f en un número a.

18. ¿Por qué es más importante ahora la derivada numérica que antes del advenimiento de las computadoras electrónicas?

19. ¿La derivada numérica de una función en un número siempre proporciona una aproximación de la derivada real de la función en el número? Si la respuesta es sí, explique por qué. Si la respuesta es no, dé un ejemplo de una función que justifique su respuesta.

20. ¿Cómo se puede apoyar en la graficadora la derivada de una función calculada analíticamente?

21. Enuncie los tres teoremas que permiten diferenciar cualquier función polinomial.

22. Si la función h es el producto de las funciones f y g, establezca la regla de diferenciación para el producto que expresa la derivada de h en términos de f, g y sus derivadas.

23. Si la función h es el cociente (f/g) de las funciones f y g, establezca la regla de diferenciación para el cociente que expresa la derivada de h en términos de f, g y sus derivadas.

24. Si f es una función, ¿qué se entiende por la *segunda derivada* de f? ¿Qué se entiende por la *tercera derivada* de f?

25. ¿Cuántas derivadas diferentes tiene una función polinomial?

26. ¿Cuál es la notación de Leibniz para la segunda derivada?

27. Suponga que una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ecuación $s = f(t)$. Defina la *velocidad* y la *aceleración* de la partícula en $t = t_1$.

28. ¿Cuál es la diferencia entre la velocidad y la rapidez en el movimiento rectilíneo?

29. Si $s = f(t)$ es la ecuación de movimiento de una partícula sobre una recta horizontal, ¿cómo se puede simular el movimiento en la graficadora?

30. Efectúe la sugerencia 29 si un objeto (por ejemplo, una pelota o una piedra) se mueve sobre una recta vertical.

31. Si $s = f(t)$ es una ecuación de movimiento de un objeto que se mueve sobre una recta vertical, describa cómo determinaría analíticamente lo siguiente: qué tan alto llegará el objeto y cuánto tiempo le tomará alcanzar el punto más alto; la velocidad instantánea del objeto en un tiempo particular; la rapidez del objeto en un tiempo particular; la velocidad instantánea del objeto cuando éste vuelve al punto inicial.

32. Interprete la derivada de una función f como una tasa de variación.

33. Suponga que $V(x)$ proporciona el volumen de un sólido en términos de la medida x. Interprete $V'(x_1)$ como una tasa de variación.

34. En economía, suponga que $C(x)$ proporciona el costo total de x unidades de cierta mercancía y que $R(x)$ es la utilidad total recibida cuando x unidades son vendidas. Interprete el costo marginal, $C'(x)$, y la utilidad marginal, $R'(x)$, como tasas de variación.

35. ¿Cómo aplican los economistas la derivada para aproximar el costo de producción de una unidad adicional después de que se han producido k unidades y cómo aproximan la utilidad por la venta de una unidad adicional después de que se han vendido k unidades?

36. Proporcione ejemplos en los que se aplique la derivada como tasa de variación en dos disciplinas diferentes de la geometría y de la economía.

37. Enuncie los teoremas que proporcionan las derivadas de sen x, cos x, tan x, cot x, sec x y csc x, donde x es un número real.

38. Indique dos de los límites importantes del capítulo 1 que se utilizan para demostrar los teoremas que proporcionan la derivada de sen x y cos x.

39. Para aplicar los teoremas de la sugerencia 37 a fin de obtener las derivadas de las funciones trigonométricas de θ, donde θ es la medida de un ángulo, ¿por qué θ debe medirse en radianes?

40. ¿Cómo se aplican las derivadas de las seis funciones trigonométricas para dibujar sus gráficas?

41. ¿Por qué es necesario el Cálculo para dibujar de manera formal las gráficas de las seis funciones trigonométricas, las cuales pueden obtenerse en cursos previos al de Cálculo sólo aplicando consideraciones intuitivas?

42. Si la función h es la composición de las funciones f y g, esto es, $h = f \circ g$, ¿en qué números deben ser diferenciables las funciones f y g si h es diferenciable en el número x_1?

43. Enuncie la *regla de la cadena* que proporciona la fórmula para la derivada de la composición de las funciones f y g.

44. Invente un ejemplo que muestre cómo se utiliza la regla de la cadena para calcular la derivada de una función h, la cual es la composición de dos funciones siendo una de ellas una función trigonométrica.

45. Invente un ejemplo que muestre cómo se aplica la regla de la cadena para calcular la derivada de la función h, la cual es la composición de dos funciones algebraicas, siendo sólo una de ellas un polinomio.

46. ¿Qué condiciones son necesarias para que el movimiento de una partícula sobre una recta horizontal sea *armónico simple*?

47. Enuncie la fórmula para la derivada de la función potencia para exponentes racionales.

48. Invente un ejemplo que muestre el cálculo de la derivada de la función compuesta $f \circ g$, donde f es la función potencia para un exponente racional no entero y g es una función trigonométrica.

49. ¿Cómo se calcula la derivada de la función valor absoluto empleando teoremas de diferenciación en lugar de la definición de derivada? Muéstrelo al calcular la derivada de $|x - 5|$.

50. Distinga entre la definición de *función explícita* y *función implícita*.

51. ¿Qué significa *diferenciación implícita*?

52. ¿Cómo se aplica la regla de la cadena cuando se utiliza diferenciación implícita para determinar $\frac{dy}{dx}$ a partir de una ecuación en x y y?

53. Cuando se calcula $\frac{dy}{dx}$ mediante diferenciación implícita a partir de una ecuación en x y y, ¿para qué funciones $\frac{dy}{dx}$ es la derivada?

54. ¿Qué es un problema de *tasas de variación relacionadas*? Invente un ejemplo.

55. Cuando se definen las variables en la solución de un problema de tasas de variación relacionadas, ¿cuál es la variable que debe definirse primero y por qué?

56. Después de definir la primera variable en la solución de un problema de tasas de variación relacionadas, ¿cómo se deben definir las otras variables?

57. En la solución de un problema de tasas de variación relacionadas, cuando se obtiene una ecuación que relaciona las variables, ¿con respecto a qué variable se debe diferenciar?

58. ¿Cómo se utiliza la diferenciación implícita en la solución de un problema de tasas de variación relacionadas?

▶ EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 2

En los ejercicios 1 a 14, calcule la derivada de la función.

1. $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 2x - 3$
2. $g(x) = 5(x^4 + 3x^7)$
3. $g(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{4}{x^2}$
4. $f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^4}$
5. $F(x) = 2x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2}$
6. $G(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$
7. $G(t) = (3t^2 - 4)(4t^3 + t - 1)$
8. $f(x) = (x^4 - 2x)(4x^2 + 2x + 5)$
9. $g(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$
10. $h(y) = \frac{y^2}{y^3 + 8}$
11. $f(s) = (2s^3 - 3s + 7)^4$
12. $F(x) = (4x^4 - 4x^2 + 1)^{-1/3}$
13. $F(x) = (x^2 - 1)^{3/2}(x^2 - 4)^{1/2}$
14. $g(x) = (x^4 - x)^{-3}(5 - x^2)^{-1}$

En los ejercicios 15 a 20, determine la derivada.

15. $D_x[(x + 1)\operatorname{sen} x - x \cos x]$
16. $D_t(\operatorname{sen}^2 3t)$
17. $\frac{d}{dt}(\sqrt{\tan 4t})$
18. $\frac{d}{dx}\left(x \cos \frac{1}{x}\right)$
19. $D_w[\operatorname{sen}(\cos 3w) - \operatorname{sen} w \cos 3w]$
20. $D_x[\tan 2x \sec x + \tan(2 \sec x)]$

En los ejercicios 21 a 24, calcule la derivada de la función y apoye la respuesta trazando las gráficas de la respuesta y la derivada numérica en x en el mismo rectángulo de inspección.

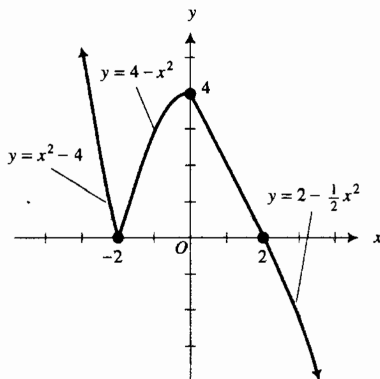
21. $f(x) = \left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)^2$
22. $g(x) = \sqrt{\frac{x}{4 - x^2}}$
23. $g(x) = \frac{\tan x}{1 + x}$
24. $f(x) = \frac{1 + x^2}{\operatorname{sen} x}$

En los ejercicios 25 a 28, obtenga $\frac{dy}{dx}$.

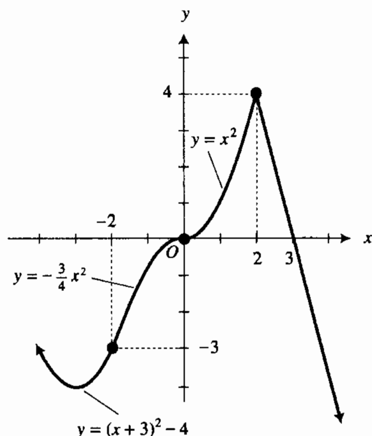
25. $4x^2 + 4y^2 - y^3 = 0$
26. $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$
27. $\tan x + \tan y = xy$
28. $\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) = 1$

Los ejercicios 29 y 30 tratan acerca de la función continua f cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales y su gráfica se presenta en la figura adjunta. Suponga que cada parte de la gráfica que parece ser un segmento de recta es un segmento de recta. En cada ejercicio haga lo siguiente: (a) Defina f a trozos. Calcule (b) $f'_-(-2)$, (c) $f'_+(-2)$, (d) $f'_-(0)$, (e) $f'_+(0)$, (f) $f'_-(2)$ y (g) $f'_+(2)$. (h) ¿En qué números f no es diferenciable?

29.



30



En los ejercicios 31 y 32, dibuje la gráfica de una función continua f cuyo dominio sea el conjunto de todos los números reales, la cual satisface las propiedades indicadas.

31. La función f es diferenciable en cualquier número excepto en -2 y 2; $f(x) > 0$ si $x < -2$; $f(-2) = 0$; $0 < f(x) < 3$ si $-2 < x < 2$; $f(0) = 3$; $f(2) = 0$; $f(x) < 0$ si $x > 2$; $f'_+(-2) = 1$; $f'(0) = 0$; $f'_-(2) = -1$; $f'_+(2) = -2$;

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = -\infty.$$

32. La función f es diferenciable en cualquier número excepto en -1, 0, y 1; el contradominio de f es $(-\infty, +\infty)$; $f(-1) = 0$; $f(0) = 1$; $f(1) = 3$; $f'_-(-1) = 1$; $f'_+(-1) = 2$; $f'_-(1) = 0$; $f'_+(1) = 1$; $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$.

33. Determine una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 3x - 1$ en el punto $(2, 1)$ y apoye su respuesta trazando la recta y la curva en el mismo rectángulo de inspección.

34. Obtenga una ecuación de la recta normal a la curva $y = \dfrac{8x}{x^2 + 3}$ en el punto $(3, 2)$ y apoye su respuesta trazando la recta y la curva en el mismo rectángulo de inspección.

35. Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = 2x^3 + 4x^2 - x$ que tengan pendiente $\frac{1}{2}$, y apoye su respuesta trazando las rectas y la curva en el mismo rectángulo de inspección.

36. Determine una ecuación de la recta normal a la curva $x - y = \sqrt{x + y}$ en el punto $(3, 1)$.

37. Obtenga ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$ en el punto $(2, 1)$.

38. Encuentre ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = 8 \operatorname{sen}^3 2x$ en el punto $(\frac{1}{12}\pi, 1)$ y apoye su respuesta trazando las rectas y la curva en el mismo rectángulo de inspección.

39. Demuestre que la recta tangente a la curva $y = -x^4 + 2x^2 + x$ en el punto $(1, 2)$ también es tangente a la curva en otro punto, y determine ese punto.

40. Demuestre que las rectas tangentes a las curvas

$$4y^3 - x^2y - x + 5y = 0$$

y

$$x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$$

son perpendiculares en el origen.

41. Encuentre $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ si $y = \sqrt{3 - 2x}$

42. Sea $\dfrac{dy}{dx} = y^k$, donde k es una constante y y es una función de x. Exprese $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ en términos de y y k.

43. Sea $f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 8x + 2$. Para qué valores de x se tiene que $f''(x) > 0$?

44. Determine la tasa de variación de y con respecto a x en el punto $(3, 2)$ si $7y^2 - xy^3 = 4$.

En los ejercicios 45 y 46, una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal de acuerdo a la ecuación dada, donde s metros es la distancia dirigida de la partícula desde un punto O a los t segundos. El sentido positivo se considera hacia la derecha. Determine los intervalos de tiempo en los que el movimiento es hacia la derecha y en los que es a la izquierda. También determine cuándo la partícula cambia su sentido. Muestre el comportamiento del movimiento mediante una figura similar a la figura 2 de la sección 2.5, eligiendo los valores de t al azar pero de modo que incluya los valores de t donde la partícula cambia de sentido. Apoye los resultados simulando el movimiento de la partícula en la graficadora.

45. $s = 2t^3 + 3t^2 - 12t - 5$

46. $s = \dfrac{t - 1}{t^2 - 2t + 5}$

En los ejercicios 47 y 48, una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal de acuerdo a la ecuación dada, donde a los t segundos s metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen, v metros por segundo es la velocidad, y a metros por segundo por segundo es la aceleración de la partícula. Calcule v y a en términos de t. Elabore una tabla semejante a la tabla 3 de la sección 2.5 que proporcione una descripción de la posición y movimiento de la par-

tícula. Incluya en la tabla los intervalos de tiempo en los que la partícula se mueve a la izquierda y en los que se mueve a la derecha; los intervalos en los que la velocidad es creciente y en los que es decreciente; los intervalos en los que la rapidez es creciente y en los que es decreciente; y la posición de la partícula con respecto al origen durante estos intervalos de tiempo. Muestre el comportamiento del movimiento mediante una figura similar a la figura 10 de la sección 2.5. Apoye los resultados simulando el movimiento de la partícula en la graficadora.

47. $s = 4 - 9t + 6t^2 - t^3 \quad t \geq 0$

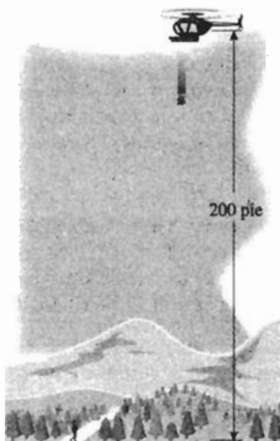
48. $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 13 \quad t \geq 0$

En los ejercicios 49 y 50, una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal de acuerdo a la ecuación dada, donde s pies es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Determine el tiempo cuando la aceleración instantánea es cero, después calcule la distancia dirigida de la partícula desde el origen y la velocidad instantánea en ese tiempo.

49. $s = 9t^2 + 2\sqrt{2t} + 1 \quad t \geq 0$

50. $s = \frac{4}{9}t^{3/2} + 2t^{1/2} \quad t \geq 0$

51. Un excursionista perdido en un bosque es descubierto desde un helicóptero. Los rescatistas lanzaron una valija con alimentos al excursionista desde una altura de 200 pie. **(a)** Utilice la ecuación (10) de la sección 2.5 para escribir una ecuación del movimiento de la valija, y simular el movimiento en la graficadora. **(b)** Determine la velocidad instantánea de la valija en 1 s y en 3 s. **(c)** Calcule el tiempo que le tomará a la valija llegar al suelo. **(d)** ¿Cuál es la rapidez de la valija al momento de tocar el suelo?



52. Realice el ejercicio 51 considerando ahora que la valija con alimentos se lanza hacia abajo desde el helicóptero con una velocidad inicial de 20 pie/s.

53. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde la parte superior de un edificio de 112 pie de altura con una velocidad inicial de 96 pie/s. **(a)** Emplee la ecuación (10) de la sección 2.5 para escribir una ecuación del movimiento de la pelota, y simular el movimiento en la graficadora. **(b)** Estime qué tan alto llegará la pelota y cuánto tiempo le tomará alcanzar el punto más alto. **(c)** Confirme las estimaciones del inciso (b) analíticamente. **(d)** Estime cuánto tiempo le tomará a la pelota llegar al suelo. **(e)** Confirme la estimación del inciso (d) analíticamente. **(f)** Calcule la velocidad instantánea de la pelota a los 2 s y a los 4 s. **(g)** Determine la rapidez de la pelota a los 2 s y a los 4 s. **(h)** Obtenga la velocidad instantánea de la pelota cuando ésta alcanza el suelo.

En los ejercicios 54 a 56, una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal de acuerdo a la ecuación de movimiento dada, donde a los t segundos, s metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen, v metros por segundo es la velocidad, y a metros por segundo por segundo es la aceleración de la partícula. (a) Calcule v y a en términos de t. (b) Muestre que el movimiento es armónico simple. (c) Simule el movimiento en la graficadora.

54. $s = 5 - 2\cos^2 t$

55. $s = \cos 2t + 2 \operatorname{sen} 2t$

56. $s = \operatorname{sen}(4t + \frac{1}{3}\pi) + \operatorname{sen}(4t + \frac{1}{6}\pi)$

57. Un fabricante puede obtener una ganancia de \$200 por cada artículo que no exceda a los 800 artículos producidos cada semana. La ganancia disminuye \$0.20 por artículo que exceda los 800. **(a)** Obtenga un modelo matemático que exprese la ganancia semanal del fabricante como una función del número de artículos producidos cada semana. Aunque la variable independiente, por definición, represente un número entero no negativo, considere que ésta denota un número real no negativo a fin de que se cumplan los requisitos necesarios para la continuidad. **(b)** Demuestre que la función del inciso (a) es continua en su dominio. **(c)** Determine si la función del inciso (a) es diferenciable en 800.

58. La ley de Stefan establece que un cuerpo emite energía radiante de acuerdo a la fórmula $R = kT^4$, donde R es la medida de la tasa de emisión de la energía radiante por unidad cuadrada de área, T es la medida de la temperatura Kelvin de la superficie, y k es una constante. Calcule **(a)** la tasa promedio de variación de R con respecto a T cuando T crece de 200 a 300; **(b)** la tasa instantánea de variación de R con respecto a T cuando $T = 200$.

59. Si A unidades cuadradas es el área de un triángulo rectángulo isósceles para el cual cada cateto mide x unidades de longitud, calcule **(a)** la tasa promedio de variación de A con respecto a x cuando x varía de 8.00 a 8.01; **(b)** la tasa instantánea de variación de A con respecto a x cuando $x = 8.00$.

60. Si $y = x^{2/3}$, calcule la tasa relativa de variación de y con respecto a x cuando **(a)** $x = 8$, y **(b)** $x = c$, donde c es una constante.

61. La ecuación de oferta para una calculadora es $y = m^2 + \sqrt{m}$, donde $100y$ calculadoras se suministran cuando el precio de cada calculadora es m dólares. Obtenga **(a)** la tasa promedio de variación de la oferta con respecto al precio cuando éste se incrementa de \$16 a \$17; **(b)** la tasa de variación instantánea (o marginal) de la oferta con respecto al precio cuando éste es de \$16.

62. El teorema del residuo de álgebra elemental establece que si $P(x)$ es un polinomio y x y r son cualesquiera dos números reales, entonces existe un polinomio $Q(x)$ tal que $P(x) = Q(x)(x - r) + P(r)$. ¿Cuál es el valor de $\lim_{x \to r} Q(x)$?

63. Utilice la definición de derivada para calcular $f'(-5)$ si $f(x) = \dfrac{3}{x + 2}$.

64. Utilice la definición de derivada para calcular $f'(x)$ si $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.

65. Utilice la definición de derivada para calcular $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt{4x - 3}$.

66. Utilice la definición de derivada para calcular $f'(5)$ si $f(x) = \sqrt{3x + 1}$.

67. Determine $f''(\pi)$ si $f(x) = \sqrt{2 + \cos x}$.

68. Calcule $f''(x)$ si $f(x) = 3 \operatorname{sen}^2 x - 4 \cos^2 x$.

69. Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = (|x + 1| - |x|)^2$.

70. Obtenga $f'(-3)$ si $f(x) = (|x| - x)\sqrt[3]{9x}$.

En los ejercicios 71 y 72, la ecuación describe el movimiento de un cuerpo suspendido de un resorte que vibra verticalmente, donde s centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central (el origen) a los t segundos y el sentido positivo es hacia arriba. (a) Obtenga la velocidad y la aceleración del cuerpo para cualquier t. (b) Muestre que el movimiento es armónico simple. (c) Determine la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento. (d) Simule el movimiento hacia arriba y hacia abajo del resorte en la graficadora. (e) Trace la gráfica de la ecuación de movimiento.

71. $s = 5 \operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi t$

72. $s = 6 \cos \pi(4t - \frac{1}{2})$

En los ejercicios 73 y 74, una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ecuación de movimiento dada, donde a los t segundos, s pies es la distancia dirigida de la partícula desde el origen, v pies por segundo es la velocidad y a pies por segundo es la aceleración. (a) Calcule v y a en términos de t. (b) Muestre que el movimiento es armónico simple. (c) Simule el movimiento en la graficadora.

73. $s = 2\cos(3t + \frac{1}{3}\pi) + 4 \operatorname{sen}(3t - \frac{1}{6}\pi)$

74. $s = 3 - 6 \operatorname{sen}^2 4t$

75. Si una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ecuación de movimiento $s = \cos 2t + \cos t$, demuestre que el movimiento no es armónico simple.

76. Una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ecuación de movimiento $s = \sqrt{a + bt^2}$, donde a y b son constantes positivas. Demuestre que la medida de la aceleración de la partícula es inversamente proporcional a s^3 para cualquier t.

77. Si $C(x)$ dólares es el costo total por fabricar x sillas, y $C(x) = x^2 + 40x + 800$, determine **(a)** la función de costo marginal; **(b)** el costo marginal cuando se producen 20 sillas; **(c)** El costo real por producir la silla 21.

78. La utilidad total recibida por la venta de x lámparas es $R(x)$ dólares y $R(x) = 100x - \frac{1}{6}x^2$. Calcule **(a)** la función de utilidad marginal; **(b)** la utilidad marginal cuando $x = 15$; **(c)** la utilidad real por la venta de la lámpara 16.

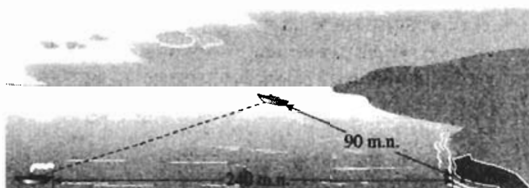
79. En un lago, un pez depredador se alimenta de un pez pequeño, y la población de depredadores en cualquier tiempo es una función del número de peces pequeños en el lago en ese tiempo. Suponga que cuando hay x peces pequeños en el lago, la población de depredadores es $y = \frac{1}{600\,000}x^2 - \frac{1}{100}x + 40$. Si la temporada de pesca terminó hace t semanas, $x = 300t + 375$. ¿A qué tasa crece la población de depredadores 10 semanas después de que se cerró la temporada de pesca. No exprese y en términos de t, utilice la regla de la cadena.

80. La ecuación de demanda para cierta barra de dulce es

$$px + x + 20p = 3\,000$$

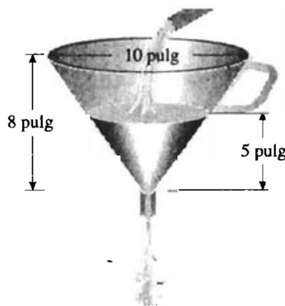
donde $1\,000x$ barras de dulce son requeridas por semana cuando p centavos es el precio por barra. Si el precio actual es de 49 centavos por barra y el precio por barra crece a una tasa de 0.2 centavos cada semana, determine la tasa de variación de la demanda.

81. Un barco zarpó a mediodía y viaja hacia el oeste a 20 nudos. A las 6 p.m. un segundo barco zarpó del mismo puerto y navega hacia el noroeste a 15 nudos. ¿Qué tan rápido se alejan los dos barcos cuando el segundo ha recorrido 90 millas náuticas?

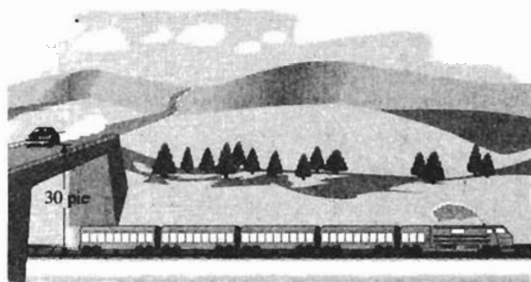


82. Un recipiente mide 80 m de longitud y su sección tranversal es un trapecio isósceles con lados iguales de 10 m, base mayor de 17 m y base menor de 5 m. En el instante en que el agua ha alcanzado una profundidad de 5 m, determine la tasa a la cual el agua escapa si su nivel disminuye a una tasa de 0.1 m/h.

83. Un embudo de forma cónica tiene un diámetro de 10 pulg en su parte superior y 8 pulg de profundidad. El agua entra al embudo a una tasa de 12 pulg^3/s y sale de él a una tasa de 4 pulg^3/s. ¿Qué tan rápido se eleva la superficie del agua cuando ésta tiene una profundidad de 5 pulg?



84. Conforme el último carro de un tren pasa debajo de un puente, un automóvil cruza, por encima del puente, las vías del ferrocarril en forma perpendicular a 30 pie encima de ellas. El tren se desplaza a una tasa de 80 pie/s y el automóvil a una tasa de 40 pie/s. ¿Qué tan rápido se separan el tren y el automóvil después de 2 s?



85. Un hombre de 6 pie de estatura camina hacia un edificio a una tasa de 4 pie/s. Si hay una lámpara en el piso a 40 pie del edificio, ¿qué tan rápido disminuye la sombra del hombre proyectada en el edificio cuando él está a 30 pie del edificio?

86. Una persona tiene una quemadura en su piel de forma circular. Si el radio de la quemadura decrece a una tasa de 0.05 cm por día, cuando éste es de 1.0 cm, ¿cuál es la tasa de decrecimiento del área de la quemadura en ese instante?

87. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \le 3 \\ 20 - x^2 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

(**a**) Dibuje la gráfica de f. (**b**) Determine si f es continua en 3. (**c**) Determine si f es diferenciable en 3.

88. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 16 & \text{si } x < 4 \\ 8x - 32 & \text{si } 4 \le x \end{cases}$$

(**a**) Dibuje la gráfica de f. (**b**) Determine si f es continua en 4. (**c**) Determine si f es diferenciable en 4.

89. Sea $f(x) = |x|^3$. (**a**) Dibuje la gráfica de f. (**b**) Calcule $\lim_{x \to 0} f(x)$ si existe. (**c**) Obtenga $f'(0)$ si existe.

90. Sea $f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$. (**a**) ¿En qué números es f diferenciable? (**b**) ¿Es f' continua en su dominio?

91. Sea

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

determine los valores de a y b tales que $f'(1)$ exista.

92. Suponga que

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

Determine los valores de a, b y c tales que $f''(1)$ exista.

93. Demuestre que la recta tangente en cualquier punto (x_1, y_1) de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = r^2$$

es perpendicular a la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y el centro de la circunferencia.

94. Si $f(u) = \dfrac{1}{u^2}$ y $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x^3 - 6x + 1}}$, calcule la derivada de $f \circ g$ en dos formas: (**a**) primero obtenga $(f \circ g)(x)$ y después calcule $(f \circ g)'(x)$; (**b**) utilice la regla de la cadena.

95. Suponga que $f(x) = 3x + |x|$ y $g(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}|x|$. Demuestre que $f'(0)$ ni $g'(0)$ existen pero que $(f \circ g)'(0)$ existe.

96. Dé un ejemplo de dos funciones f y g de modo que f sea diferenciable en $g(0)$, que g no sea diferenciable en 0, y que $f \circ g$ sea diferenciable en 0.

97. Dé un ejemplo de dos funciones f y g de modo que f no sea diferenciable en $g(0)$, que g sea diferenciable en 0, y $f \circ g$ sea diferenciable en 0.

98. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$

donde n es un número entero positivo. (**a**) ¿Para qué valores de n es f continua para todos los valores de x? (**b**) ¿Para qué valores de n es f diferenciable para todos los valores de x? (**c**) ¿Para qué valores de n es f' continua en todos los valores de x?

99. Si $f'(x)$ existe, demuestre que

$$\lim_{x \to x_1} \frac{xf(x_1) - x_1 f(x)}{x - x_1} = f(x_1) - x_1 f'(x_1)$$

100. Sean f y g dos funciones cuyos dominios son el conjunto de todos los números reales. Además, suponga que (**i**) $g(x) = xf(x) + 1$; (**ii**) $g(a + b) = g(a) \cdot g(b)$ para toda a y b; (**iii**) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. Demuestre que $g'(x) = g(x)$.

101. Si las dos funciones f y g son diferenciables en el número x_1, ¿es la función compuesta $f \circ g$ necesariamente diferenciable en el número x_1? Si la respuesta es sí, demuéstrelo. Si la respuesta es no, dé un contraejemplo.

102. Suponga que $g(x) = |f(x)|$. Si $f^{(n)}(x)$ existe y $f(x) \neq 0$, demuestre que

$$g^{(n)}(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} f^{(n)}(x)$$

103. Demuestre que $D_x^{\,n}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}(x + \frac{1}{2}n\pi)$. *Sugerencia:* utilice inducción matemática y las fórmulas $\operatorname{sen}(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos x$ o $\cos(x + \frac{1}{2}\pi) = -\operatorname{sen} x$ después de cada diferenciación.

104. Si $y = \dfrac{1}{1 - 2x}$, demuestre por medio de inducción matemática que $\dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{2^n\, n!}{(1 - 2x)^{n+1}}$

Comportamiento de las funciones y de sus gráficas, valores extremos y aproximaciones

Capítulo 3

VISIÓN PRELIMINAR

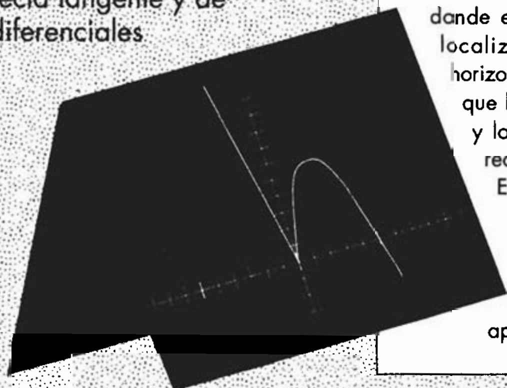
La interpretación de la derivada como la pendiente de la recta tangente proporciona información acerca del comportamiento de las funciones y de sus gráficas. Se inicia la sección 3.1 con la definición y determinación de *valores de función máximos* y *mínimos*. Las aplicaciones del mundo real de máximos y mínimos se presentan en muchos campos diversos como lo averiguará cuando estudie las secciones 3.2 y 3.9. En particular, se determinará la viga más resistente que pueda cortarse de un tronco cilíndrico así como las dimensiones de la caja que requiere la mínima cantidad de material para un volumen específico.

Uno de los teoremas más importantes en Cálculo es el *teorema del valor medio* el cual se trata en la sección 3.3. Este teorema se utiliza en la demostración de muchos teoremas tanto del Cálculo Diferencial como del Cálculo Integral, así como de otras materias como el Análisis Numérico.

En las secciones 3.4 a 3.6 se aplica la derivada en técnicas para graficar funciones. Estas técnicas son importantes debido a que proporcionan medios de confirmación analítica que pueden aplicarse a las conjeturas obtenidas a partir de la graficadora.

En ocasiones, el comportamiento de cierta gráfica no es evidente, si pasa o no por ciertos puntos, según se muestra en la pantalla de la graficadora, de modo que se necesita el Cálculo para determinar propiedades específicas de las gráficas. Por ejemplo, la derivada revela los intervalos en donde la función es *creciente* y en donde es *decreciente*. La derivada también permite localizar los puntos donde la recta tangente es horizontal, así como determinar los intervalos en los que la gráfica está por arriba de la recta tangente y los intervalos en los que está por debajo de la recta tangente.

En la sección 3.7 se estudiarán los *límites al infinito* y se aplicarán en la determinación de *asíntotas horizontales* de las gráficas. En la sección final del capítulo se estudian tres procesos numéricos utilizados para aproximar valores de función.



3.1 VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES

Una aplicación importante de la derivada es determinar dónde una función alcanza sus *valores máximos y mínimos* (*extremos*). En esta sección se iniciará el estudio de los valores extremos de una función con los *extremos relativos*, *extremos absolutos* y el *teorema del valor extremo*. Las aplicaciones de estos conceptos se presentan en la próxima sección.

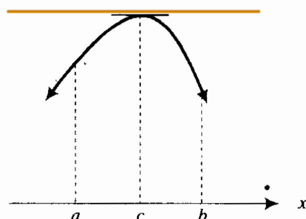


FIGURA 1

3.1.1 Definición de valor máximo relativo

La función f tiene un **valor máximo relativo** en el número c si existe un intervalo abierto que contiene a c, en el que f está definida, tal que $f(c) \geq f(x)$ para toda x en ese intervalo.

Las figuras 1 y 2 muestran una porción de la gráfica de una función que tiene un valor máximo relativo en c.

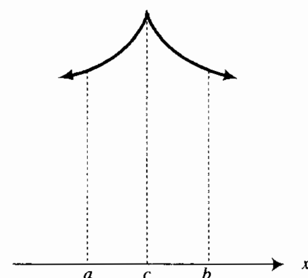


FIGURA 2

3.1.2 Definición de valor mínimo relativo

La función f tiene un **valor mínimo relativo** en el número c si existe un intervalo abierto que contiene a c, en el que f está definida, tal que $f(c) \leq f(x)$ para toda x en este intervalo.

Las figuras 3 y 4 muestran una porción de la gráfica de una función que tiene un valor mínimo relativo en c.

Si una función tiene un valor máximo relativo o mínimo relativo en c, entonces se dice que la función tiene un **extremo relativo** en c.

El teorema siguiente se utiliza para determinar los números posibles en los que una función tiene un extremo relativo.

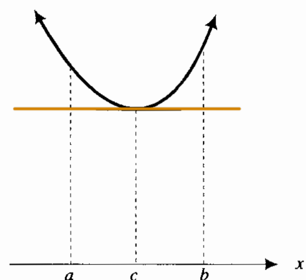


FIGURA 3

3.1.3 Teorema

Si $f(x)$ existe para todos los valores de x en el intervalo abierto (a, b), y si f tiene un extremo relativo en c, donde $a < c < b$, y además $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

La demostración de este teorema se dará al final de esta sección. En términos geométricos, el teorema establece que si f tiene un extremo relativo en c, y si $f'(c)$ existe, entonces la gráfica de f debe tener una recta tangente horizontal en el punto donde $x = c$. Observe que esta situación se presenta en las gráficas de las figuras 1 y 3. El teorema también indica que si f es una función diferenciable, entonces los únicos números posibles c para los cuales f puede tener un extremo relativo son aquellos en los que $f'(c) = 0$.

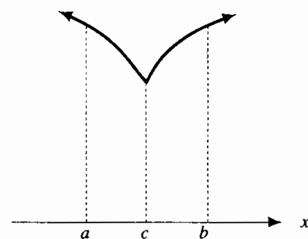


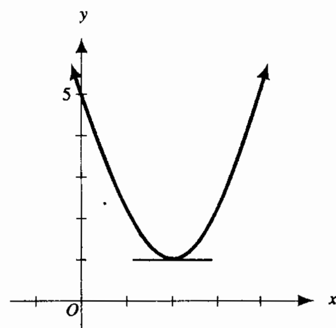
FIGURA 4



EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Sea f la función definida por

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

Entonces $f'(x) = 2x - 4$. Como $f'(2) = 0$, f puede tener un extremo relativo en 2. Puesto que $f(2) = 1$ y $1 < f(x)$ cuando $x < 2$ o $x > 2$, la definición 3.1.2 garantiza que f tiene un valor mínimo relativo en 2. La fi-



$f(x) = x^2 - 4x + 5$

FIGURA 5

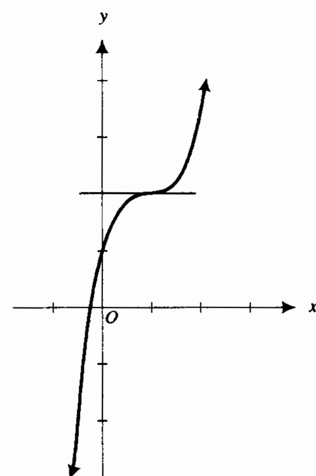
gura 5 muestra la gráfica de f, una parábola cuyo vértice está en el punto (2, 1) en donde la gráfica tiene una recta tangente horizontal. ◀

Observe que $f'(c)$ puede ser igual a cero aunque f no tenga un extremo relativo en c, como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Considere la función f definida por

$$f(x) = (x - 1)^3 + 2$$

Entonces $f'(x) = 3(x - 1)^2$. Debido a que $f'(1) = 0$, f puede tener un extremo relativo en 1. Sin embargo, como $f(1) = 2$ y $2 > f(x)$ cuando $x < 1$, y $2 < f(x)$ cuando $x > 1$, no se puede aplicar ninguna de las definiciones 3.1.1 y 3.1.2. De modo que f no tiene un extremo relativo en 1. La gráfica de esta función, mostrada en la figura 6, tiene una recta tangente horizontal en el punto (1, 2), lo cual es consistente con el hecho de que la derivada sea cero en ese punto. ◀



$f(x) = (x - 1)^3 + 2$

FIGURA 6

Una función puede tener un extremo relativo en un número en el que la derivada no exista. Esta situación se presenta para las funciones cuyas gráficas se muestran en las figuras 2 y 4, así como para la función del ejemplo ilustrativo siguiente.

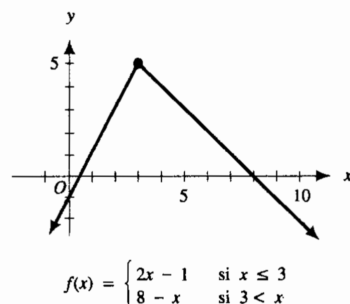
▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ 8 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

La gráfica de esta función se presenta en la figura 7, la cual muestra que f tiene un valor máximo relativo en 3. La derivada por la izquierda en 3 está dada por $f'_-(3) = 2$, y la derivada por la derecha en 3 está determinada por $f'_+(3) = -1$. Por tanto, se concluye que $f'(3)$ no existe. ◀

El ejemplo ilustrativo 3 muestra por qué la condición "$f'(c)$ existe" debe incluirse en la hipótesis del teorema 3.1.3.

Es posible que una función pueda estar definida en un número c donde $f'(c)$ no exista y sin embargo, f no tenga un extremo relativo en ese número. El ejemplo ilustrativo siguiente presenta una de estas funciones.



$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ 8 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$

FIGURA 7

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** Sea f la función definida por

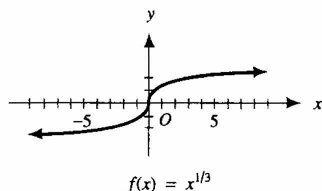
$$f(x) = x^{1/3}$$

El dominio de f es el conjunto de todos los números reales, y su derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \quad \text{si } x \neq 0$$

Además, $f'(0)$ no existe. La figura 8 muestra la gráfica de f. La función no tiene extremos relativos. ◀

En resumen, si una función f está definida en un número c, una condición necesaria para que f tenga un extremo relativo en c es que $f'(c) = 0$



$f(x) = x^{1/3}$

FIGURA 8

o que $f'(c)$ no exista. Tenga en cuenta que esta condición es necesaria pero no suficiente.

3.1.4 Definición de número crítico

Si c es un número del dominio de la función f, y si $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe, entonces c es un número crítico de f.

Una de las 2 posibilidades

Debido a esta definición y a la discusión anterior, una condición necesaria, pero no suficiente, para que una función tenga un extremo relativo en c es que c sea un número crítico.

▶ EJEMPLO 1

Sea f la función definida por

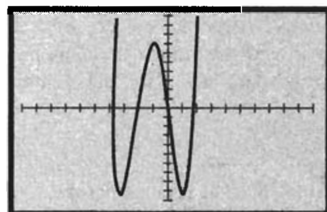
$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$$

(a) Estime gráficamente con aproximación de décimos los números críticos de f.

(b) Confirme analíticamente las respuestas del inciso (a).

Solución

(a) Como $f(x)$ es un polinomio, $f'(x)$ existe en todo número. Por tanto, los únicos números críticos son aquellos valores de x para los que $f'(x) = 0$, esto es, las coordenadas x de los puntos de la gráfica de f para los que la recta tangente es horizontal. La figura 9 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$. En la graficadora, la recta tangente parece horizontal en los puntos $(-3.0, -9.0)$, $(-1.0, 7.0)$ y $(1.0, -9.0)$. De este modo, se estima que los números críticos son -3.0, -1.0 y 1.0.



$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

$f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$

FIGURA 9

(b) Se calcula $f'(x)$, se iguala a cero y se despeja x.

$$\begin{aligned} 4x^3 + 12x^2 - 4x - 12 &= 0 \\ x^3 + 3x^2 - x - 3 &= 0 \\ x^2(x + 3) - (x + 3) &= 0 \\ (x + 3)(x^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$x + 3 = 0 \qquad\qquad x^2 - 1 = 0$$
$$x = -3 \qquad\qquad x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

De este modo se ha confirmado que los números críticos son -3, -1 y 1. ◀

▶ EJEMPLO 2

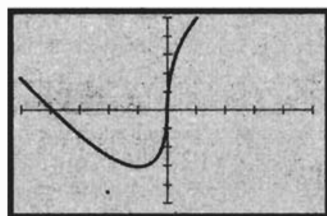
(a) Determine los números críticos de la función definida por

$$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$$

Apoye las respuestas del inciso (a) gráficamente en dos formas: **(b)** trace la gráfica de f; **(c)** trace la gráfica de NDER$(f(x), x)$.

Solución

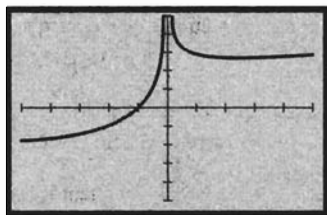
(a) $$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{4}{3}x^{1/3} + \tfrac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \tfrac{4}{3}x^{-2/3}(x + 1) \\ &= \frac{4(x + 1)}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$



[−5, 5] por [−5, 5]

$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

FIGURA 10



[−5, 5] por [−5, 5]

NDER $(x^{4/3} + 4x^{1/3}, x)$

FIGURA 11

Cuando $x = -1$, $f'(x) = 0$, y cuando $x = 0$, $f'(x)$ no existe. Tanto −1 como 0 están en el dominio de f; por tanto, los números críticos de f son −1 y 0.

(b) La figura 10 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [−5, 5] por [−5, 5]. La gráfica parece tener una rectatangente horizontal en el punto (−1, −3) y una recta tangente vertical en el punto (0, 0). Por tanto, la pendiente de la recta tangente es 0 cuando $x = -1$ y la recta tangente no tiene pendiente cuando $x = 0$. Estos hechos apoyan las respuestas del inciso (a).

(c) La figura 11 presenta la gráfica de NDER($f(x)$, x) trazada en el rectángulo de inspección de [−5, 5] por [−5, 5]. Como la gráfica de $f'(x)$ intersecta al eje x en (−1, 0), $f'(-1) = 0$. La gráfica de $f'(x)$ tiene al eje y como asíntota vertical, lo cual indica que $f'(0)$ no existe. De nuevo, esto apoya las respuestas del inciso (a). ◀

▶ EJEMPLO 3 Determine los números críticos de la función definida por

$$g(x) = \operatorname{sen} x \cos x$$

Solución Como $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x \\ g'(x) &= \tfrac{1}{2}(\cos 2x)2 \\ &= \cos 2x \end{aligned}$$

Puesto que $g'(x)$ existe para toda x, los únicos números críticos son aquellos para los que $g'(x) = 0$. Como $\cos 2x = 0$ cuando

$$2x = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi \quad \text{donde } k \text{ es cualquier número entero}$$

así, los números críticos de g son $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$, donde k es cualquier número entero. ◀

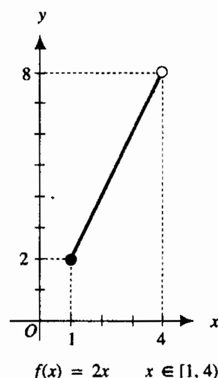
Con frecuencia se trata con funciones definidas en un intervalo dado, y se desea determinar el valor de función más grande o más pequeño en el intervalo. Estos intervalos pueden ser cerrados, abiertos o cerrados en un extremo y abiertos en el otro. El valor más grande de la función en un intervalo se denomina *valor máximo absoluto*, y el valor más pequeño de la función en el intervalo se llama *valor mínimo absoluto*. A continuación se dan las definiciones precisas.

3.1.5 Definición de valor máximo absoluto en un intervalo

La función f tiene un **valor máximo absoluto en un intervalo** si existe algún número c en el intervalo tal que $f(c) \geq f(x)$ para toda x del intervalo. El número $f(c)$ es el valor máximo absoluto de f en el intervalo.

3.1.6 Definición de valor mínimo absoluto en un intervalo

La función f tiene un **valor mínimo absoluto en un intervalo** si existe algún número c en el intervalo tal que $f(c) \leq f(x)$ para toda x del intervalo. El número $f(c)$ es el valor mínimo absoluto de f en el intervalo.



$f(x) = 2x \quad x \in [1, 4)$

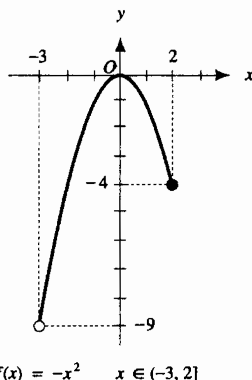
FIGURA 12

Un **extremo absoluto** de una función en un intervalo es un valor máximo absoluto o un valor mínimo absoluto de la función en el intervalo. Una función puede o no tener un extremo absoluto en un intervalo particular. En cada uno de los ejemplos ilustrativos siguientes se dan un intervalo y una función, y se determinan los extremos absolutos de la función en el intervalo, si es que existe alguno.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 Suponga que f es la función definida por

$$f(x) = 2x$$

La gráfica de f en el intervalo $[1, 4)$ se presenta en la figura 12. Esta función tiene un valor mínimo absoluto de 2 en $[1, 4)$. No existe un valor máximo absoluto de f en $[1, 4)$ porque $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 8$, pero $f(x)$ siempre es menor que 8 en el intervalo dado. ◀



$f(x) = -x^2 \quad x \in (-3, 2]$

FIGURA 13

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 Considere la función f definida por

$$f(x) = -x^2$$

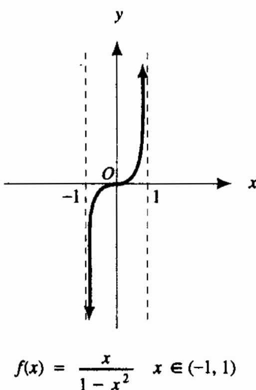
La gráfica de f en el intervalo $(-3, 2]$ se muestra en la figura 13. Esta función tiene valor máximo absoluto de 0 en $(-3, 2]$. No existe un valor mínimo absoluto de f en $(-3, 2]$ debido a que $\lim_{x \to -3^+} f(x) = -9$, pero $f(x)$ siempre es mayor que -9 en el intervalo dado. ◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7 La función f definida por

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

no tiene valor máximo absoluto ni valor mínimo absoluto en el intervalo $(-1, 1)$. La figura 14 muestra la gráfica de f en $(-1, 1)$. Observe que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$ ◀



$f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2} \quad x \in (-1, 1)$

FIGURA 14

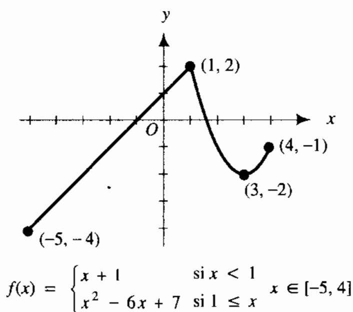
EJEMPLO ILUSTRATIVO 8 Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

La gráfica de f en $[-5, 4]$ se presenta en la figura 15. El valor máximo absoluto de f en $[-5, 4]$ ocurre en 1, y $f(1) = 2$; el valor mínimo absoluto de f en $[-5, 4]$ ocurre en -5, y $f(-5) = -4$. Observe que f tiene un valor máximo relativo en 1 y un valor mínimo relativo en 3. También note que 1 es un número crítco de f porque $f'(1)$ no existe, y 3 es un número crítico de f porque $f'(3) = 0$. ◀

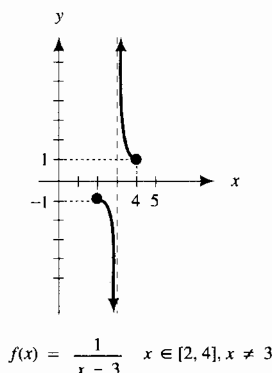
EJEMPLO ILUSTRATIVO 9 La función f definida por

$$f(x) = \frac{1}{x - 3}$$



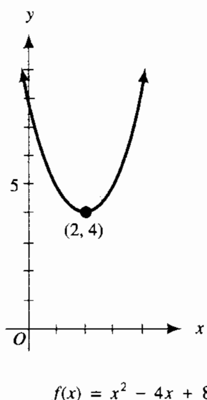
$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad x \in [-5, 4]$$

FIGURA 15



$$f(x) = \frac{1}{x - 3} \quad x \in [2, 4], x \neq 3$$

FIGURA 16



$f(x) = x^2 - 4x + 8$

FIGURA 17

no tiene valor máximo absoluto ni valor mínimo obsoluto en [2, 4]. La figura 16 muestra la gráfica de f en este intervalo. Como $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$; $f(x)$ puede hacerse menor que cualquier número negativo tomando $3 - x > 0$ y menor que una δ positiva adecuada. También se tiene que $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$, de modo que $f(x)$ puede hacerse mayor que cualquier número positivo tomando $x - 3 > 0$ y menor que una δ positiva conveniente. ◀

Se puede hablar del extremo absoluto de una función cuando no se ha especificado ningún intervalo. En tal caso se hace referencia al extremo absoluto de la función en su dominio.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 10** La gráfica de la función f definida por

$$f(x) = x^2 - 4x + 8$$

es la parábola mostrada en la figura 17. El punto más bajo de la parábola es el punto (2, 4), y la parábola abre hacia arriba. La función tiene un valor mínimo absoluto de 4 en $x = 2$. No existe el valor máximo absoluto de f. ◀

Con referencia a los ejemplos ilustrativos 5-10, se aprecia que el único caso en el que existen tanto el valor máximo absoluto como el valor mínimo absoluto de la función es en el ejemplo ilustrativo 8, donde la función es continua en el intervalo cerrado [−5, 4]. En los otros ejemplos ilustrativos no se tiene un intervalo cerrado o no se tiene una función continua. Si una función es continua en un intervalo cerrado, un teorema, llamado *teorema del valor extremo*, asegura que la función tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en el intervalo. La demostración de este teorema, más allá del alcance de este texto y puede encontrarse en algún libro de Cálculo avanzado.

3.1.7 Teorema del valor extremo

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en $[a, b]$.

El teorema del valor extremo establece que la continuidad de una función en un intervalo cerrado es una condición suficiente para garantizar que la función tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en el intervalo. Sin embargo, no es una condición necesaria. Por ejemplo, la función cuya gráfica se muestra en la figura 18 tiene un valor máximo absoluto en $x = c$ y un valor mínimo absoluto en $x = d$, aunque la función es discontinua en el intervalo abierto (−1, 1).

Un extremo absoluto de una función continua en un intervalo cerrado debe ser un extremo relativo o un valor de función en un extremo del intervalo. Debido a que una condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo en un número c es que c sea un número crítico, de modo que el valor máximo absoluto y el valor mínimo absoluto de una función f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ puede determinarse mediante el procedimiento siguiente:

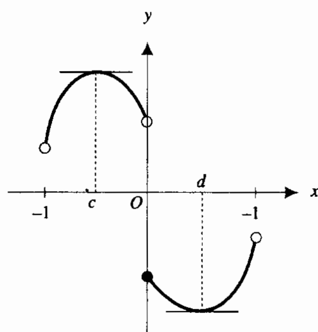


FIGURA 18

1. Determine los valores de la función en los números críticos de f en (a, b).
2. Determine los valores de $f(a)$ y $f(b)$.
3. El mayor de los valores determinados en los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto, y el menor de los valores es el valor mínimo absoluto.

▶ EJEMPLO 4

Determine los extremos absolutos de f en $[-2, 3]$ si

$$f(x) = x^3 - 6x - 1$$

y apoye la respuesta gráficamente.

Tabla 1

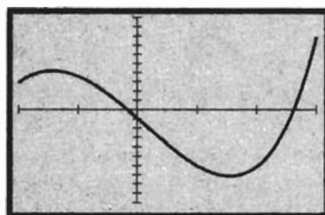
x	-2	-1.41	1.41	3
$f(x)$	3	4.66	-6.66	8

Solución Como f es continua en $[-2, 3]$, puede aplicarse el teorema del valor extremo. Para determinar los números críticos de f, primero se calcula $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6$$

Debido a que $f'(x)$ existe para todos los números reales, los únicos números críticos serán los valores de x para los que $f'(x) = 0$. Al igualar $f'(x)$ a cero y resolver para x se tiene

$$3x^2 - 6 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$
$$x \approx \pm 1.41$$



$[-2, 3]$ por $[-10, 10]$

$f(x) = x^3 - 6x - 1$

FIGURE 19

De modo que los números críticos de f son aproximadamente ± 1.41 y cada uno de estos números está en el intervalo cerrado $[-2, 3]$. Los valores de función de los números críticos y de los extremos se muestran en la tabla 1.

Por tanto, el valor máximo absoluto de f en el intervalo $[-2, 3]$ es 8, el cual ocurre en el extremo derecho 3, y el valor mínimo absoluto de f en el intervalo $[-2, 3]$ es aproximadamente -6.66, el cual ocurre en el número crítico 1.41.

La figura 19 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-2, 3]$ por $[-10, 10]$. Esta gráfica apoya las respuestas dadas. ◀

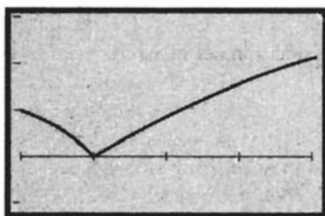
▶ EJEMPLO 5

Estime gráficamente los extremos absolutos de f en $[1, 5]$ si

$$f(x) = (x - 2)^{2/3}$$

y confirme las respuestas analíticamente.

Solución La gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[1, 5]$ por $[-1, 3]$ se muestra en la figura 20. De la gráfica, el valor mínimo absoluto es 0 y ocurre en $x = 2$. El valor máximo absoluto se tiene en el extremo derecho 5, y en la calculadora, se estima que $f(5) = 2.08$.



$[1, 5]$ por $[-1, 3]$

$f(x) = (x - 2)^{2/3}$

FIGURA 20

Al aplicar el teorema del valor extremo se confirman las respuestas analíticamente, puesto que f es continua en $[1, 5]$. Como

$$f'(x) = \frac{2}{3(x - 2)^{1/3}}$$

Tabla 2

x	1	2	5
$f(x)$	1	0	$\sqrt[3]{9}$

no existe valor de x para el cual $f'(x) = 0$. Sin embargo, como $f'(x)$ no existe en 2, se concluye que 2 es un número crítico de f; de modo que el valor mínimo absoluto ocurre en 2 o en un extremo del intervalo. Los valores de función de estos números se muestran en la tabla 2.

De la tabla se concluye que el valor mínimo asbsoluto de f en $[1, 5]$ es 0 y el valor máximo absoluto es $\sqrt[3]{9} \approx 2.08$, lo que confirma las respuestas anteriores. ◀

Antes de demostrar el teorema 3.1.3, como se indicó, se probará un teorema preliminar que se utilizará en la demostración del teorema 3.1.3, así como en las demostraciones de otros teoremas.

3.1.8 Teorema

(i) Si $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y es positivo, entonces existe un intervalo abierto que contiene a c tal que $f(x) > 0$ para toda $x \neq c$ del intervalo.

(ii) Si $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y es negativo, entonces existe un intervalo abierto que contiene a c tal que $f(x) < 0$ para toda $x \neq c$ del intervalo.

Demostración del inciso (i) Sea $\lim_{x \to c} f(x) = L$, donde, por hipótesis, $L > 0$. Al aplicar la definición de límite (1.5.1) con $\epsilon = \frac{1}{2}L$, se tiene que existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - c| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \tfrac{1}{2}L \qquad \textbf{(1)}$$

Como $0 < |x - c| < \delta$ equivale a la proposición

$$x \text{ está en el intervalo abierto } (c - \delta, c + \delta) \text{ donde } x \neq c \qquad \textbf{(2)}$$

y $|f(x) - L| < \frac{1}{2}L$ equivale a la desigualdad continua

$$\tfrac{1}{2}L < f(x) < \tfrac{3}{2}L \qquad \textbf{(3)}$$

Si se sustituyen (2) y (3) en (1), se tiene la proposición

si x está en el intervalo abierto $(c - \delta, c + \delta)$, donde $x \neq c$, entonces $\frac{1}{2}L < f(x) < \frac{3}{2}L$

Como $L > 0$, esta proposición significa que $f(x) > 0$ para cada $x \neq c$ del intervalo abierto $(c - \delta, c + \delta)$. ■

La demostración del inciso (ii) es semejante a la del inciso (i) y se deja como ejercicio (vea el ejercicio 57).

Demostración del teorema 3.1.3 Se desea probar que si $f(x)$ existe para todos los valores de x del intervalo abierto (a, b), y si f tiene un extremo relativo en c, donde $a < c < b$, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

Suponga que $f'(c) \neq 0$. Entonces $f'(c) > 0$ o $f'(c) < 0$. Si $f'(c) > 0$ entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

Por tanto, por el teorema 3.1.8 (i), existe un intervalo abierto I que contiene a c tal que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \qquad (4)$$

para toda $x \neq c$ en I. Además,

$$f(x) - f(c) = (x - c)\,\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{si } x \neq c \qquad (5)$$

De (4), el cociente del miembro derecho de (5) es positivo si x está en I. Por tanto, de (5) se concluye que si x está en I, entonces $f(x) - f(c)$ y $x - c$ tienen el mismo signo; esto es

$$f(x) > f(c) \quad \text{si} \quad x > c \qquad (6)$$

y

$$f(x) < f(c) \quad \text{si} \quad x < c \qquad (7)$$

De (6), f no puede tener un valor máximo relativo en c y de (7) f no puede tener un valor mínimo relativo en c, lo cual contradice la hipótesis de que f tiene un extremo relativo en c.

Si $f'(c) < 0$, se obtiene una contradicción semejante. Se le pedirá que pruebe esto en el ejercicio 58.

Así, la suposición de que $f'(c) \neq 0$ conduce a una contradición, por tanto, $f'(c) = 0$. ■

EJERCICIOS 3.1

En los ejercicios 1 a 8, (a) trace la gráfica de la función y estime los números críticos de la función gráficamente. (b) Confirme las respuestas del inciso (a) analíticamente.

1. $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x$
2. $g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 16x + 1$
3. $g(x) = x^{6/5} - 12x^{1/5}$
4. $f(x) = x^{7/3} + x^{4/3} - 3x^{1/3}$
5. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 5x + 4}$
6. $f(x) = \dfrac{2x - 9}{x^2 - 9}$
7. $G(x) = (x - 2)^3(x + 1)^2$
8. $F(x) = (5 + x)^3(2 - x)^2$

En los ejercicios 9 a 14, (a) determine los números críticos de la función f analíticamente. Apoye las respuestas del inciso (a) en dos formas: (b) trace la gráfica de f; (c) trace la gráfica de NDER $(f(x), x)$.

9. $f(x) = x^4 + 11x^3 + 34x^2 + 15x - 2$
10. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$
11. $f(t) = (t^2 - 4)^{2/3}$
12. $f(w) = (w^3 - 3w^2 + 4)^{1/3}$
13. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x - 2}$
14. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x - 1}$

En los ejercicios 15 a 18, determine los números críticos de la función.

15. $f(x) = \operatorname{sen} 2x \cos 2x$
16. $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 2x$
17. $F(x) = \sec^2 3x$
18. $G(x) = \tan^2 4x$

En los ejercicios 19 a 38, (a) dibuje la gráfica de la función en el intervalo indicado; (b) determine los extremos absolutos de la función en el intervalo, si existe alguno, y determine los valores de x en los que ocurren los extremos absolutos.

19. $f(x) = 4 - 3x$; $(-1, 2]$
20. $f(x) = x^2 - 2x + 4$; $(-\infty, +\infty)$
21. $g(x) = \dfrac{1}{x}$; $[-2, 3]$
22. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $[2, 3)$
23. $f(x) = 2\cos x$; $[-\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi)$
24. $G(x) = -3 \operatorname{sen} x$; $[0, \frac{3}{4}\pi)$
25. $f(x) = \sqrt{3 + x}$; $[-3, +\infty)$
26. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; $(-2, 2)$
27. $h(x) = \dfrac{4}{(x - 3)^2}$; $[2, 5)$
28. $g(x) = \dfrac{3x}{9 - x^2}$; $(-3, 2)$

29. $F(x) = |x - 4| + 1;\ (0, 6)$

30. $f(x) = |4 - x^2|;(-\infty, +\infty)$

31. $g(x) = \sqrt{4 + 7x};\ [0, 3)$

32. $f(x) = \begin{cases} |x + 1| & \text{si } x \neq -1 \\ 3 & \text{si } x = -1 \end{cases};\ [-2, 1]$

33. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x - 5} & \text{si } x \neq 5 \\ 2 & \text{si } x = 5 \end{cases};\ [3, 5]$

34. $F(x) = U(x) - U(x - 1)$ donde

$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases};\ (-1, 1)$

35. $f(x) = x - [\![x]\!];\ (1, 3)$

36. $h(x) = 2x + [\![2x - 1]\!];\ (1, 2]$

37. $g(x) = \sec 3x;\ [-\frac{1}{6}\pi,\ \frac{1}{6}\pi]$

38. $f(x) = \tan 2x;\ [-\frac{1}{4}\pi,\ \frac{1}{6}\pi]$

En los ejercicios 39 a 46, determine los extremos absolutos de la función en el intervalo indicado mediante el método del ejemplo 4 y apoye las respuestas gráficamente.

39. **(a)** $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16;\ [-4, 0]$
(b) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16;\ [-3, 2]$

40. **(a)** $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16;\ [0, 3]$
(b) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16;\ [-1, 4]$

41. $f(t) = 2 \operatorname{sen} t;\ [-\pi, \pi]$

42. $g(t) = \frac{1}{2}\csc 2t;\ [-\frac{1}{4}\pi,\ \frac{1}{6}\pi]$

43. $g(w) = \dfrac{w}{w + 2};\ [-1, 2]$

44. $f(r) = \dfrac{r + 5}{r - 3};\ [-5, 2]$

45. $f(x) = (x + 1)^{2/3};\ [-2, 1]$

46. $g(x) = 1 - (x - 3)^{2/3};\ [-5, 4]$

En los ejercicios 47 a 52, (a) estime gráficamente los extremos absolutos de la función en el intervalo indicado. (b) Confirme las respuestas analíticamente mediante el método del ejemplo 5.

47. $f(x) = x^3 + 5x - 4;\ [-3, -1]$

48. $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x;\ [-4, 4]$

49. $g(t) = 2 \sec \frac{1}{2}t;\ [-\frac{1}{3}\pi,\ \frac{1}{2}\pi]$

50. $f(t) = 3 \cos 2t;\ [\frac{1}{6}\pi,\ \frac{3}{4}\pi]$

51. $f(x) = (x - 1)^{1/3} + 4;\ [0, 2]$

52. $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x - 3};\ [0, 1]$

En los ejercicios 53 a 56, (a) dibuje la gráfica de la función en el intervalo indicado. (b) Determine los extremos absolutos de la función en el intervalo.

53. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } -3 \leq x \leq 2 \\ 4 - x & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases};\ [-3, 3]$

54. $f(x) = \begin{cases} 2x - 7 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 1 - x^2 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases};\ [-1, 4]$

55. $F(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases};\ [-3, 3]$

56. $G(x) = \begin{cases} 4 - (x + 5)^2 & \text{si } -6 \leq x \leq -4 \\ 12 - (x + 1)^2 & \text{si } -4 < x \leq 0 \end{cases};\ [-6, 0]$

57. Demuestre el inciso (ii) del teorema 3.1.8.

58. Demuestre el teorema 3.1.3 con la suposición de que $f'(c) < 0$.

59. Si la función f es diferenciable en todo número y $f'(c) = 0$, ¿puede concluirse que f tiene un extremo relativo en c? Explique su respuesta.

60. Si la función f tiene un extremo relativo en el número c, ¿puede concluirse que $f'(c) = 0$? Explique su respuesta.

61. Describa cómo obtendría analíticamente los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado.

3.2 APLICACIONES QUE INVOLUCRAN UN EXTREMO ABSOLUTO EN UN INTERVALO CERRADO

Ahora se aplicará el teorema del valor extremo a problemas en los que la solución es un extremo absoluto de una función en un intervalo cerrado. Como se dijo en la sección anterior, el teorema 3.1.7 asegura que una función continua en un intervalo cerrado tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en el intervalo. Se mostrará el procedimiento para obtener los extremos absolutos de una función en el ejemplo ilustrativo siguiente, al considerar la situación discutida en el ejemplo 4 de la sección 1.3 y en el ejemplo ilustrativo 2 de la sección 1.9.

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Un fabricante de cajas de cartón quiere elaborar cajas abiertas a partir de trozos rectangulares de cartón

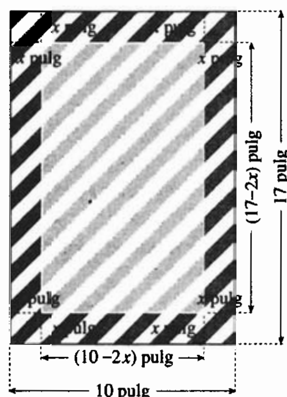


FIGURA 1

con dimensiones de 10 pulg por 17 pulg, cortando cuadrados en las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. Se desea determinar la longitud del lado de los cuadrados que se deben cortar de modo que la caja tenga el mayor volumen posible. La figura 1 muestra uno de los trozos de cartón indicados y la figura 2 representa la caja. En el ejemplo 4 de la sección 1.3 se mostró que si x pulgadas es la longitud de los lados de los cuadrados que se cortarán y $V(x)$ pulgadas cúbicas es el volumen de la caja, entonces

$$V(x) = 170x - 54x^2 + 4x^3$$

y el dominio de V es el intervalo cerrado $[0, 5]$. Como V es continua en $[0, 5]$, se sabe, por el teorema del valor extremo, que en este intervalo V tiene un valor máximo absoluto, el cual ocurre en un número crítico o en un extremo del intervalo. Para obtener los números críticos se calcula $V'(x)$ y se determinan los valores de x para los que $V'(x) = 0$ o $V'(x)$ no existe.

$$V'(x) = 170 - 108x + 12x^2$$

$V'(x)$ existe para todos los valores de x . Al igualar $V'(x)$ a cero y despejar x se tiene

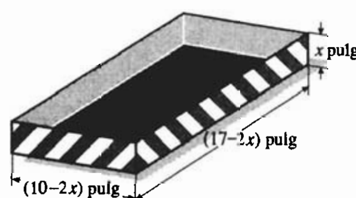


FIGURA 2

$$2(6x^2 - 54x + 85) = 0$$

$$x = \frac{54 \pm \sqrt{(-54)^2 - 4(6)(85)}}{12}$$

De donde se obtiene $x = 6.97$ y $x = 2.03$. De modo que el único valor crítico de V en $[0, 5]$ es 2.03. Como $V(0) = 0$ y $V(5) = 0$, mientras que $V(2.03) = 156.03$, el valor máximo absoluto de V ocurre cuando $x = 2.03$. Este resultado puede apoyarse en la graficadora como se hizo en el ejemplo 4 de la sección 1.3.

Conclusión: El mayor volumen posible es 156.03 pulg^3, y se obtiene cuando la longitud de los lados de los cuadrados que se cortarán es de 2.03 pulg. ◀

▶ ***EJEMPLO 1*** Los puntos A y B están en las orillas de un río recto de 3 km de ancho y son opuestos uno del otro. El punto C está en la misma orilla que B pero a k kilómetros de B río abajo. Una compañía telefónica desea tender un cable de A a C donde el costo por kilómetro de cable en tierra es de \$10 000 y el de cable subacuático es de \$12 500. Sea P un punto en la misma orilla que B y C de modo que el cable se tienda de A a P y luego a C. Consulte la figura 3. (**a**) Si x kilómetros es la distancia de B a P, obtenga una ecuación que defina a $C(x)$ si $C(x)$ dólares es el costo total del cable tendido y establezca el dominio de C. (**b**) Si $k = 2$, estime en la graficadora el valor de x para el cual el costo del cable tendido sea el menor costo posible. Después confirme la estimación analíticamente.

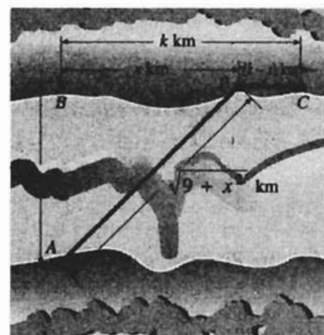


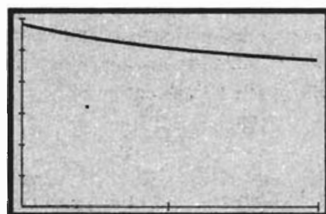
FIGURA 3

Solución

(**a**) La distancia de P a C es $(k - x)$ kilómetros, y, del teorema de Pitágoras, la distancia de A a P es $\sqrt{3^2 + x^2}$ kilómetros. Por tanto,

$$C(x) = 12\,500\sqrt{9 + x^2} + 10\,000(k - x) \qquad (1)$$

El dominio de C es $[0, k]$.



[0, 2] por [0, 60 000]

$C(x) = 12\,500\sqrt{9 + x^2} + 10\,000\,(2 - x)$

FIGURA 4

(b) Con $k = 2$ en la ecuacion (1), se tiene

$$C(x) = 12\,500\sqrt{9 + x^2} + 10\,000(2 - x) \qquad \textbf{(2)}$$

con $x \in [0, 2]$. La gráfica de esta ecuación trazada en el rectángulo de inspección de [0, 2] por [0, 60 000] se muestra en la figura 4, la cual indica que el valor mínimo absoluto de C en [0, 2] ocurre en el extremo derecho. Al utilizar la tecla TRACE (*rastreo*) de la graficadora, se obtiene $C(2) = 45\,069$. Por tanto, se estima que el costo del cable tendido es mínimo cuando $x = 2$ y el costo mínimo es de \$45 069.

Ahora se confirmará analíticamente esta estimación. Como C es continua en [0, 2], se aplica el teorema del valor extremo; por lo que C tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en [0, 2]. Se desea determinar el valor mínimo absoluto. De la ecuación (2),

$$C'(x) = \frac{12\,500x}{\sqrt{9 + x^2}} - 10\,000$$

$C'(x)$ existe para todos los valores de x. Al igualar $C'(x)$ a cero y resolver para x se tiene

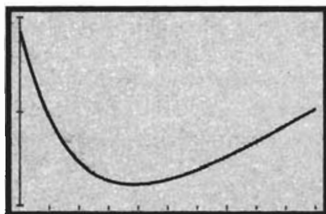
$$\begin{aligned} \frac{12\,500x}{\sqrt{9 + x^2}} - 10\,000 &= 0 \\ 12\,500x - 10\,000\sqrt{9 + x^2} &= 0 \\ 5x &= 4\sqrt{9 + x^2} \qquad \textbf{(3)} \\ 25x^2 &= 16(9 + x^2) \\ 9x^2 &= 16 \cdot 9 \\ x^2 &= 16 \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

El número -4 es una raíz extraña de la ecuación (3), y 4 no está en el intervalo [0, 2], lo cual indica que no existen números críticos de C en [0, 2]. Por tanto, el valor mínimo absoluto de C en [0, 2] debe ocurrir en algún extremo del intervalo. Si se calcula $C(0)$ y $C(2)$, se obtiene

$$C(0) = 57\,500 \quad \text{y} \quad C(2) = 45\,069$$

De modo que el valor mínimo absoluto de C en [0, 2] es 45 069 cuando $x = 2$, lo cual confirma lo estimado anteriormente.

Conclusión: El costo del cable es mínimo cuando éste se tiende directamente de A a C bajo el agua. ◀



[0, 10] por [120 000, 140 000]

$C(x) = 12\,500\sqrt{9 + x^2} + 10\,000\,(10 - x)$

FIGURA 5

▶ ***EJEMPLO 2*** Haga el inciso (b) del ejemplo 1 considerando ahora que $k = 10$.

Solución Con $k = 10$ en la ecuación (1), se tiene

$$C(x) = 12\,500\sqrt{9 + x^2} + 10\,000(10 - x) \qquad \textbf{(4)}$$

para $x \in [0, 10]$. La figura 5 muestra la gráfica de esta ecuación trazada en el rectángulo de inspección de [0, 10] por [120 000, 140 000]. Las coordenadas del punto más bajo de la curva son, aproximadamente, (4, 122 500). Por tanto, se estima que el costo del cable tendido, en este caso, es mínimo cuando $x = 4$ y el costo mínimo es de \$122 500.

Esta estimación se confirma analíticamente en la misma forma en que se hizo en el ejemplo 1. De la ecuación (4), la expresión para $C'(x)$ es igual a la que se obtuvo de la ecuación (2). Por tanto, otra vez se obtiene $x = \pm 4$ cuando $C'(x)$ se iguala a cero y se resuelve para x. Como 4 está en el intervalo cerrado $[0, 10]$, ahora 4 es un número crítico de C. Si se calculan $C(0)$, $C(4)$ y $C(10)$ se obtiene

$$C(0) = 137\,500 \qquad C(4) = 122\,500 \qquad C(10) = 130\,504$$

En consecuencia, el valor mínimo absoluto de C en $[0, 10]$ es 122 500 cuando $x = 4$, lo cual confirma lo estimado anteriormente.

Conclusión: En este caso, el costo del cable es mínimo cuando se tiende de A a P el cual debe estar a 4 km de B. ◀

Para la función C definida por la ecuación (1) con $x \in [0, k]$, se mostró en el ejemplo 1 que cuando $k = 2$, el valor mínimo absoluto de C ocurre en el extremo derecho del intervalo $[0, 2]$ mientras que en el ejemplo 2, cuando $k = 10$, se mostró que el valor mínimo absoluto de C ocurre en el intervalo abierto $(0, 10)$. En el ejercicio 36 se le pedirá que determine los valores de k para los que el valor mínimo absoluto de C ocurrirá en un número del intervalo abierto $(0, k)$.

▶ ***EJEMPLO 3*** Un terreno rectangular se encuentra en la orilla de un río y se desea delimitar de modo que no se utilice cerca a lo largo de la orilla. Si el material para la cerca de los lados cuesta \$12 por pie colocado y \$18 por pie colocado para al lado paralelo al río, determine las dimesiones del terreno de mayor área posible que pueda limitarse con \$5 400 de cerca. Apoye gráficamente a la respuesta.

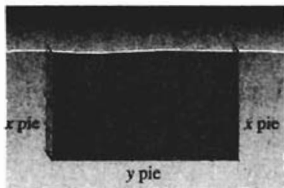


FIGURA 6

Solución Sean x pies la longitud de los lados del terreno no paralelos al río, y pies la longitud del lado paralelo al río y A pies cuadrados el área del terreno. Refiérase a la figura 6. En consecuencia,

$$A = xy \tag{5}$$

Como el costo del material para cada lado no paralelo al río es de \$12 por pie colocado y la longitud de estos lados es x pies, entonces el costo total de la cerca para cada uno de estos lados es $12x$ dólares. De manera similar, el costo de la cerca del tercer lado es $18y$ dólares. Por tanto,

$$12x + 12x + 18y = 5\,400 \tag{6}$$

A fin de expresar A en términos de sólo una variable, se resuelve (6) para y en términos de x y se sustituye este valor en (5), obteniéndose A como una función de x. Así

$$A(x) = x(300 - \tfrac{4}{3}x) \tag{7}$$

De (6), si $y = 0$, $x = 225$, y si $x = 0$, $y = 300$. Puesto que x y y no deben ser negativos, el valor de x que hará de A un máximo absoluto, debe estar en el intervalo cerrado $[0, 225]$. Como A es continua en el intervalo $[0, 225]$,

por el teorema del valor extremo, A tiene valor máximo absoluto en el intervalo. De (7), se tiene

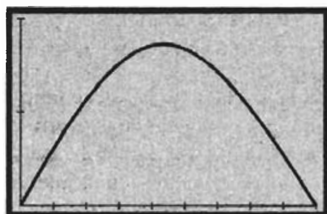
$$A(x) = 300x - \tfrac{4}{3}x^2$$
$$A'(x) = 300 - \tfrac{8}{3}x$$

Como $A'(x)$ existe para todo x, los números críticos de A se determinan al considerar $A'(x) = 0$, de lo que se obtiene

$$x = 112.5$$

El único número crítico de A es 112.5, el cual se encuentra en el intervalo cerrado $[0, 225]$. Por lo que el valor máximo absoluto de A debe ocurrir en 0, 112.5 o 225. Debido a que $A(0) = 0$, $A(225) = 0$ y $A(112.5) = 16\,875$, el valor máximo absoluto de A en $[0, 225]$ es 16 875, el cual ocurre cuando $x = 112.5$ y $y = 150$ (obtenido de (6) al sustituir 112.5 por x).

Con el fin de apoyar gráficamente la respuesta, se traza la gráfica de la función A definida por la ecuación (7) en el rectángulo de inspección de $[0, 225]$ por $[0, 20\,000]$, como se muestra en la figura 7. Se determina que el punto más alto de la gráfica es $(112.5, 16\,875)$, lo cual confirma la respuesta.



$[0, 225]$ por $[0, 20\,000]$

$A(x) = x(300 - \tfrac{4}{3}x)$

FIGURA 7

<u>Conclusión</u>: El terreno de mayor área posible que se puede encerrar con \$5 400 de cerca tiene un área de 16 875 pie^2, obtenido cuando la longitud del lado paralelo al río mide 150 pie y la longitud de cada lado no paralelo al río es de 112.5 pie. ◀

▶ ***EJEMPLO 4*** En el ejemplo 6 de la sección 1.3, se tuvo la situación siguiente: En una comunidad de 8 000 personas, la tasa a la cual se difunde un rumor es conjuntamente proporcional al número de persona que han escuchado el rumor y al número de personas que no lo han escuchado. Cuando 20 personas han escuchado el rumor, éste se difunde a una tasa de 200 personas por hora. Determine analíticamente cuántas personas han escuchado el rumor cuando éste se difunde a la mayor tasa posible.

Solución En la sección 1.3 se obtuvo el modelo matemático

$$f(x) = \tfrac{1}{798}(8\,000x - x^2)$$

donde $f(x)$ personas por hora es la tasa a la que se difunde el rumor cuando x personas lo han escuchado. Puesto que la comunidad tiene una población de 8 000, x está en el intervalo cerrado $[0, 8\,000]$. A fin de aplicar el concepto de continuidad, se considerará que x es cualquier número real de este intervalo. Como $f(x)$ es un polinomio, entonces f es continua en $[0, 8\,000]$, por lo que puede aplicarse el teorema del valor extremo. Al calcular $f'(x)$ se tiene

$$f'(x) = \tfrac{1}{798}(8\,000 - 2x)$$

El único número crítico de f se tiene cuando $f'(x) = 0$, y es $x = 4\,000$. Como

$$f(0) = 0 \qquad f(4\,000) = 20\,050.1 \qquad f(8\,000) = 0$$

el valor máximo absoluto de f ocurre cuando $x = 4\,000$. Este valor de x es acorde con el que se obtuvo gráficamente en la sección 1.3.

<u>Conclusión</u>: El rumor se difunde a la mayor tasa posible cuando 4 000 personas, la mitad de la población, han escuchado el rumor. ◀

EJEMPLO 5 En el ejemplo 4 de la sección 2.2 se tuvo la situación siguiente: En la planeación de una cafetería, la ganancia diaria se estimó en \$16 por lugar si la capacidad es de 40 a 80 lugares. Sin embargo, si la capacidad es mayor que 80 lugares, la ganancia diaria por lugar disminuirá en \$0.08 veces el número de lugares que exceden a 80. ¿Cuál debe ser la capacidad de la cafetería de modo que se obtenga la máxima ganancia diaria?

Solución En la sección 2.2 se obtuvo el modelo matemático

$$P(x) = \begin{cases} 16x & \text{si } 40 \leq x \leq 80 \\ 22.40x - 0.08x^2 & \text{si } 80 < x \leq 280 \end{cases}$$

donde $P(x)$ dólares es la ganancia diaria de la cafetería cuando su capacidad es de x lugares. Además, en la sección 2.2, se consideró que x toma todos los valores reales de su dominio $[40, 280]$ y se mostró que P es continua en ese intervalo cerrado y que no es diferenciable en 80.

De la continuidad de P en $[40, 280]$, el teorema del valor extremo garantiza que P tiene un valor máximo absoluto en ese intervalo. Como $P'(80)$ no existe, 80 es un número crítico de P. Para determinar cualquier otro número crítico de P, se calcula $P'(x)$:

$$P'(x) = \begin{cases} 16 & \text{si } 40 < x < 80 \\ 22.40 - 0.16x & \text{si } 80 < x < 280 \end{cases}$$

$P'(x) = 0$ cuando

$$\begin{aligned} 22.40 - 0.16x &= 0 \\ x &= 140 \end{aligned}$$

Por lo que 140 es un número crítico de P. Enseguida se calcula $P(x)$ en los extremos del intervalo $[40, 280]$ y en los números críticos de P:

$$P(40) = 640 \quad P(80) = 1\,280 \quad P(140) = 1\,568 \quad P(280) = 0$$

Por tanto, el valor máximo absoluto de P es 1 568 y ocurre cuando $x = 140$.

<u>Conclusión</u>: La capacidad de la cafetería debe ser de 140 lugares, lo que proporcionará una ganancia diaria de \$1 568. ◀

EJEMPLO 6 **(a)** En la graficadora, estime las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que pueda inscribirse en un cono circular recto cuyo radio mide 5 cm y su altura es de 12 cm. **(b)** Confirme analíticamente las estimaciones del inciso (a).

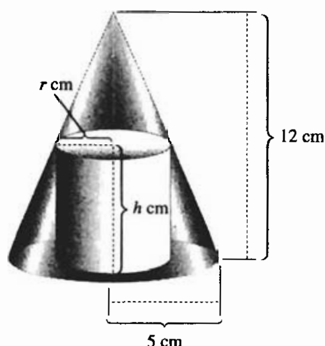


FIGURA 8

Solución

(a) Sean r centímetros la longitud del radio del cilindro, h centímetros su altura y V centímetros cúbicos su volumen.

La figura 8 muestra el cilindro inscrito en el cono, mientras que la figura 9 presenta una sección plana que contiene al eje del cono.

Si $r = 0$ y $h = 12$, se tiene un cilindro degenerado, el cual es el eje del cono. Si $r = 5$ y $h = 0$, también se tiene un cilindro degenerado, el cual es la base del cono. El número r está en el intervalo cerrado $[0, 5]$, y el número h pertenece al intervalo cerrado $[0, 12]$.

La fórmula siguiente expresa V en términos de r y h:

$$V = \pi r^2 h \tag{8}$$

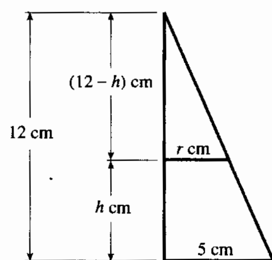
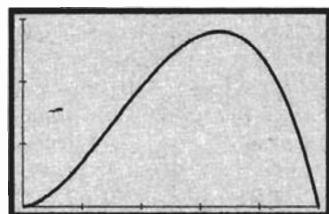


FIGURA 9



[0, 5] por [0, 150]

$V(x) = \frac{12}{5}\pi(5r^2 - r^3)$

FIGURA 10

A fin de expresar V en términos de sólo una variable se necesita otra ecuación que contenga a r y h. De los triángulos semejantes de la figura 9, se tiene

$$\frac{12 - h}{r} = \frac{12}{5}$$

$$h = \frac{60 - 12r}{5} \tag{9}$$

Si se sustituye de (9) en la fórmula (8), se obtiene V como una función de r, lo que se escribe como

$$V(r) = \tfrac{12}{5}\pi(5r^2 - r^3) \qquad r \in [0, 5] \tag{10}$$

La figura 10 muestra la gráfica de V trazada en el rectángulo de inspección de [0, 5] por [0, 150]. En la graficadora, se determina que el punto más alto es (3.33, 139.63). Por tanto, se estima que el radio del cilindro circular recto mide 3.33 cm y, en consecuencia, de (9) se estima que su altura es de 4.01 cm.

(b) Para confirmar analíticamente las estimaciones, se aplica el teorema del valor extremo ya que V, definida por la ecuación (10), es continua en el intervalo cerrado [0, 5]. Se desea determinar los valores de r y h que proporcionen el valor máximo absoluto de V. De (10) se tiene

$$V'(r) = \tfrac{12}{5}\pi(10r - 3r^2)$$

Con objeto de determinar los números críticos de V, se considera $V'(r) = 0$ y se despeja r:

$$r(10 - 3r) = 0$$

$$r = 0 \qquad\qquad r = \tfrac{10}{3}$$

Como $V'(r)$ existe para todos los valores de r, los únicos números críticos de V son 0 y $\frac{10}{3}$, los cuales están en el intervalo cerrado [0, 5]. El valor máximo absoluto de V en [0, 5] debe ocurrir en 0, $\frac{10}{3}$ o 5. De (10) se obtiene

$$V(0) = 0 \qquad V(\tfrac{10}{3}) = \tfrac{400}{9}\pi \qquad V(5) = 0$$

Por tanto, el valor máximo absoluto de V es $\frac{400}{9}\pi \approx 139.63$, el cual se obtiene cuando $r = \frac{10}{3} \approx 3.33$. Cuando $r = \frac{10}{3}$, se obtiene de (9), $h = 4$. Estos resultados confirman las estimaciones anteriores y proporcionan los valores exactos de r y h.

__Conclusión:__ El cilindro circular recto de mayor volumen inscrito en el cono dado tiene un volumen de $\frac{400}{9}\pi$ cm^3, lo que ocurre cuando $r = \frac{10}{3}$ cm y $h = 4$ cm. ◀

EJERCICIOS 3.2

En estos ejercicios defina precisamente todas las variables como números. Asegúrese de escribir una conclusión al final de cada ejercicio.

1. Determine un número del intervalo [$\frac{1}{3}$, 2] tal que la suma del número y su recíproco sea **(a)** un mínimo y **(b)** un máximo. Apoye gráficamente las respuestas.

2. Determine un número del intervalo [−1, 1] tal que la diferencia del número menos su cuadrado sea **(a)** un máximo y **(b)** un mínimo. Apoye gráficamente las respuestas.

En los ejercicios 3 a 14, confirme analíticamente la estimación obtenida en la graficadora en el inciso (c) del ejercicio indicado de la sección 1.3.

3. Ejercicio 13 **4.** Ejercicio 14 **5.** Ejercicio 15

6. Ejercicio 16 **7.** Ejercicio 17 **8.** Ejercicio 18

9. Ejercicio 19 **10.** Ejercicio 20 **11.** Ejercicio 25

12. Ejercicio 26 **13.** Ejercicio 27 **14.** Ejercicio 28

15. ¿Cuántos estudiantes deben asistir a la excursión, del ejercicio 37 de la sección 2.2, para que la escuela reciba el máximo ingreso bruto?

16. ¿Cuántos estudiantes deben asistir a la excursión, del ejercicio 38 de la sección 2.2, para que la escuela reciba el máximo ingreso bruto?

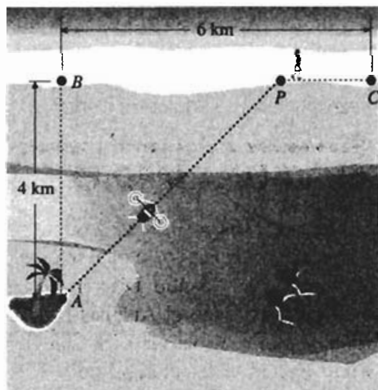
17. Del modelo matemático obtenido en el ejercicio 30 de la sección 2.2, determine cuántos naranjos deben plantarse por acre en California de modo que se obtenga el mayor número de naranjas.

18. ¿Cuántos miembros proporcionarán el mejor ingreso, debido a las cuotas anuales, al club privado del ejercicio 40 de la sección 2.2?

19. **(a)** Encuentre dos números no negativos cuya suma sea 12 tales que su producto sea un máximo absoluto, y apoye gráficamente las respuestas. **(b)** Determine dos números no negativos cuya suma sea 12 tales que la suma de sus cuadrados sea un mínimo absoluto, y apoye gráficamente las respuestas.

20. Suponga que se tiene un cuerpo suspendido por debajo de la recta horizontal AB mediante un alambre en forma de Y. Si la distancia entre los puntos A y B es de 8 pie, **(a)** estime en la graficadora con aproximación de pies, la longitud más corta del alambre que pueda emplearse. **(b)** Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.

21. Una isla está ubicada en el punto A, 4 km mar adentro del punto más cercano B de una playa recta. Una mujer, en la isla, desea ir al punto C, a 6 km de B playa abajo. La mujer puede dirigirse hacia el punto P, entre B y C, en un bote de remos a 5 km/h y después caminar en forma recta de P a C a 8 km/h. **(a)** Estime en la graficadora la ruta de A a C que ella pueda recorrer en el menor tiempo. **(b)** Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.



22. Resuelva el ejercicio 21 considerando ahora que el punto C está a 3 km de B playa abajo.

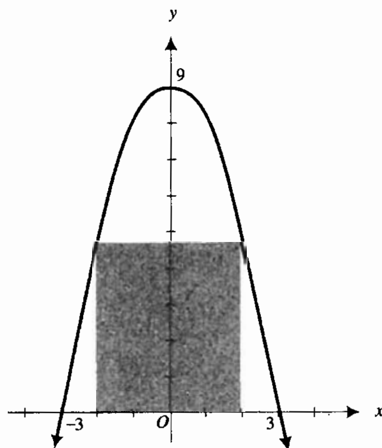
23. **(a)** Utilice la graficadora para estimar las dimensiones del cilindro circular recto de mayor área lateral que pueda inscribirse en una esfera cuyo radio mide 6 pulg. **(b)** Confirme analíticamente la estimación del inciso (a).



24. **(a)** Utilice la graficadora para estimar las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que pueda inscribirse en una esfera cuyo radio mide 6 pulg. **(b)** Confirme analíticamente la estimación del inciso (a).

25. Dada la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 9$, determine **(a)** la distancia más corta del punto (4, 5) a un punto de la circunferencia, y **(b)** la distancia más grande del punto (4, 5) a un punto de la circunferencia. **(c)** Apoye las respuestas de los incisos (a) y (b) gráficamente.

26. **(a)** Determine el área del rectángulo más grande que tenga dos vértices en el eje x y los otros dos en la parábola $y = 9 - x^2$, por arriba del eje x. **(b)** Apoye gráficamente la respuesta del inciso (a).



27. Considere que la disminución de la presión sanguínea de una persona depende de la cantidad de cierta sustancia administrada a la persona. De modo que si se administran x miligramos de la sustancia, la disminución de la presión sanguínea es una función de x. Suponga que $f(x)$ define esta función y que

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2(k - x)$$

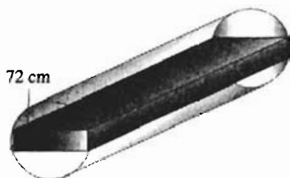
si $x \in [0, k]$, donde k es una constante positiva. Determine el valor de x que ocasiona la mayor disminución de la presión sanguínea.

28. Al toser el radio de la tráquea de una persona disminuye. Suponga que el radio normal de la tráquea es de R centímetros, mientras que al toser, el radio de la misma es de r centímetros, donde R es una constante y r es una variable. La velocidad del aire a través de la tráquea puede expresarse como una función de r, y si $V(r)$ centímetros por segundo es esta velocidad, entonces

$$V(r) = kr^2(R - r)$$

donde k es una constante positiva y r está en el intervalo $[\frac{1}{2}R, R]$. Determine el radio de la tráquea cuando se tose de modo que la velocidad del aire a través de la tráquea sea máxima.

29. La resistencia de una viga rectangular es conjuntamente proporcional a su anchura y al cuadrado de su espesor. Determine las dimensiones de la viga de mayor resistencia que pueda cortarse de un tronco con forma de cilindro circular recto cuyo radio es de 72 cm.



30. La rigidez de una viga rectangular es conjuntamente proporcional a su anchura y al cubo de su espesor. Determine las dimensiones de la viga de mayor rigidez que pueda cortarse de un tronco con forma de cilindro circular recto cuyo radio es de a centímetros.

31. Un trozo de alambre de 10 pie de longitud se corta en dos partes. Con una parte se hace una circunferencia y la otra se dobla en forma de cuadrado. ¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que **(a)** el área total de las dos figuras sea la mínima posible; **(b)** el área total de las dos figuras sea la máxima posible.

32. Resuelva el ejercicio 31 considerando ahora que una parte se dobla en forma de triángulo equilátero y la otra en forma de cuadrado.

33. Si R pies es el alcance de un proyectil, entonces

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} \qquad 0 \leq \theta \leq \tfrac{1}{2}\pi$$

donde v_0 pies por segundo es la velocidad inicial, g pie/s^2 es la aceleración debida a la gravedad, y θ es la medida en radianes del ángulo que el cañón forma con la horizontal. Determine el valor de θ que hace máximo el alcance del proyectil.

34. Si un cuerpo que pesa W libras se arrastra a lo largo de un piso horizontal a una velocidad constante mediante una fuerza de F libras de magnitud y dirigida un ángulo de θ radianes con respecto al plano del piso, entonces F está dada por la ecuación

$$F = \frac{kW}{k \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde k es una constante llamada *coeficiente de fricción* y $0 < k < 1$. Si $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$, determine $\cos \theta$ cuando F es mínima.

35. En una fábrica se elaboran dos productos, A y B. Si C es el costo total de producción de una jornada de 8 horas, entonces $C = 3x^2 + 42y$, donde x es el número de máquinas utilizadas en la elaboración del producto A, y y es el número de máquinas empleadas en la elaboración del producto B, y durante una jornada de 8 horas trabajan 15 máquinas. **(a)** Determine analíticamente cuántas de estas máquinas deben utilizarse para elaborar el producto A y cuántas para elaborar el producto B de modo que el costo total sea mínimo. **(b)** Apoye las respuestas del inciso (a) gráficamente.

36. **(a)** En el ejemplo 1, ¿para qué valores de k ocurrirá el valor máximo absoluto de C en un número del intervalo abierto $(0, k)$? **(b)** Los ejemplos 1 y 2, y los ejercicios 21 y 22 son casos especiales del siguiente problema más general: Sea

$$f(x) = u\sqrt{a^2 + x^2} + v(b - x)$$

donde x está en el intervalo $[0, b]$ y $u > v > 0$. Demuestre que para que el valor máximo absoluto de f ocurra en un número del intervalo abierto $(0, b)$, se debe satisfacer la desigualdad siguiente: $av < b\sqrt{u^2 - v^2}$.

3.3 TEOREMA DE ROLLE Y TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Como se indicó en la introducción de este capítulo, uno de los teoremas más importantes del Cálculo es el *teorema del valor medio*, el cual se emplea en la demostración de muchos teoremas tanto de Cálculo Diferencial como de Cálculo Integral así como de otras materias como el Análisis Numérico. La demostración del *teorema del valor medio* está basada sobre un caso especial conocido como *teorema de Rolle*, el cual se discutirá primero.

El matemático francés **Michel Rolle** (1652–1719) demostró que si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b), y si $f(a)$ y $f(b)$ son iguales a cero, entonces existe al menos un número c entre a y b para el cual $f'(c) = 0$.

A continuación se verá lo que significa geométricamente este teorema. La figura 1 muestra la gráfica de una función f que satisface las condiciones del párrafo anterior. Se aprecia intuitivamente que existe al menos un punto

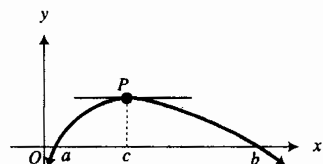


FIGURA 1

de la curva entre $(a, 0)$ y $(b, 0)$ en el que la recta tangente es paralela al eje x; esto es, la pendiente de la recta tangente es cero. Esta situación se ilustra en la figura 1 en el punto P. De modo que la abscisa de P es c, para la cual $f'(c) = 0$.

La función, cuya gráfica se muestra en la figura 1, no sólo es diferenciable en el intervalo abierto (a, b) sino que también lo es en los extremos del intervalo. Sin embargo, la condición de que f sea diferenciable en los extremos del intervalo no es necesaria para que la gráfica tenga una recta tangente horizontal en algún punto del intervalo; la figura 2 ilustra esto. En la figura 2 se aprecia que la función no es diferenciable en a ni en b; sin embargo, existe la recta tangente horizontal en el punto donde $x = c$, y c está entre a y b.

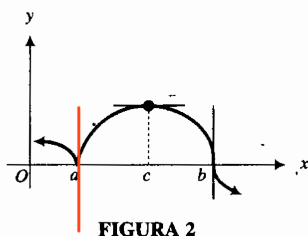


FIGURA 2

No obstante, es necesario que la función sea continua en los extremos del intervalo para garantizar una recta tangente horizontal en un punto interior del intervalo. La figura 3 muestra la gráfica de una función continua en el intervalo $[a, b)$ pero discontinua en b; la función es diferenciable en el intervalo abierto (a, b) y los valores de la función en los dos extremos son cero. Sin embargo, no existe un punto en el que la gráfica tenga una recta tangente horizontal.

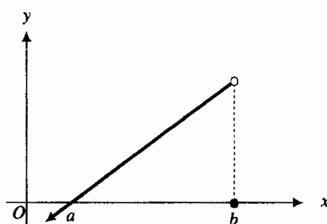


FIGURA 3

A continuación se establecerá y demostrará el teorema de Rolle.

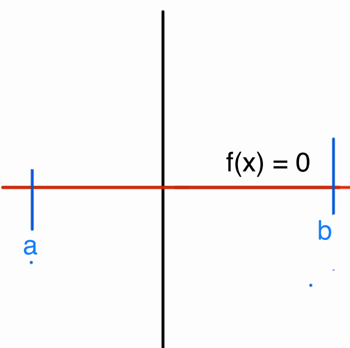
3.3.1 Teorema de Rolle

Sea f una función tal que

(i) es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$;
(ii) es diferenciable en el intervalo abierto (a, b);
(iii) $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$.

Entonces existe un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que

$$f'(c) = 0$$



Demostración Se considerarán dos casos.

Caso 1: $f(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$.

Entonces $f'(x) = 0$ para toda x en (a, b); por tanto, cualquier número entre a y b puede considerarse como c.

Caso 2: $f(x)$ es diferente de cero para algún valor de x en el intervalo (a, b).

Como f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces, por el teorema del valor extremo, f tiene un valor máximo absoluto en $[a, b]$ y un valor mínimo absoluto en $[a, b]$. De (iii), $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$. Además, $f(x)$ es diferente de cero para algún valor de x en el intervalo (a, b). En consecuencia, f tendrá un valor máximo absoluto positivo en c_1 del intervalo (a, b), o un valor mínimo absoluto negativo en c_2 del intervalo (a, b), o ambos. Así, para $c = c_1$ o $c = c_2$, según sea el caso, existe un extremo absoluto en un punto interior del intervalo $[a, b]$. Por tanto, el extremo absoluto $f(c)$ es también un extremo relativo, y como $f'(c)$ existe por hipótesis, se deduce, por el teorema 3.1.3, que $f'(c) = 0$. Esto demuestra el teorema. ■

FIGURA 4

Puede haber más de un número en el intervalo abierto (a, b) para los cuales la derivada de f es cero. Esto se ilustra geométricamente en la figura 4, en la que se muestra una recta tangente horizontal en el punto donde $x = c_1$ y también en el punto donde $x = c_2$, por lo que $f'(c_1) = 0$ y $f'(c_2) = 0$.

El recíproco del teorema de Rolle no es válido. Esto es, no se puede concluir que si una función f es tal que $f'(c) = 0$, con $a < c < b$, entonces las condiciones (1), (ii) y (iii) se cumplen. Vea el ejercicio 36.

EJEMPLO 1 Sea

$$f(x) = 4x^3 - 9x$$

verifique que las tres condiciones de la hipótesis del teorema de Rolle se satisfacen para cada uno de los intervalos siguientes: $[-\frac{3}{2}, 0]$, $[0, \frac{3}{2}]$ y $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$. Después haga una elección adecuada para c en cada uno de estos intervalos de modo que $f'(c) = 0$. Apoye la elección de c gráficamente trazando en el mismo rectángulo de inspección las gráficas de f y de la recta tangente horizontal en el punto $(c, f(c))$.

Solución Al diferenciar f se tiene

$$f'(x) = 12x^2 - 9$$

Como $f'(x)$ existe para todos los valores de x, f es diferenciable en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ y por tanto, continua en en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ Así, las condiciones (i) y (ii) del teorema de Rolle se cumplen en cualquier intervalo. A fin de determinar los intervalos en los que se cumple la condición (iii), se obtienen los valores de x para los cuales $f(x) = 0$. Si $f(x) = 0$, entonces

$$4x(x^2 - \tfrac{9}{4}) = 0$$
$$x = -\tfrac{3}{2} \qquad x = 0 \qquad x = \tfrac{3}{2}$$

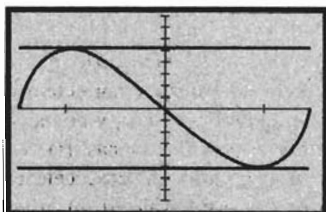
Con $a = -\frac{3}{2}$ y $b = 0$, el teorema de Rolle se cumple en $[-\frac{3}{2}, 0]$. De manera semejante, el teorema de Rolle se cumple en $[0, \frac{3}{2}]$ y $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

Con el fin de determinar valores adecuados para c, considere $f'(x) = 0$, de donde se obtiene

$$12x^2 - 9 = 0$$
$$x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \qquad x = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

Por tanto, en el intervalo $[-\frac{3}{2}, 0]$, una elección adecuada para c es $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$. En el intervalo $[0, \frac{3}{2}]$ se toma $c = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. En el intervalo $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ existen dos valores posibles para c: $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ o $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

La figura 5, que muestra las gráficas de f y de las rectas tangentes horizontales en los puntos donde $x = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx -0.87$ y $x = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0.87$, trazadas en el rectángulo de inspección de $[-1.5, 1.5]$ por $[-8, 8]$, apoya las elecciones de c. ◀



$[-1.5, 1.5]$ por $[-8, 8]$

$f(x) = 4x^3 - 9x$

FIGURA 5

Ahora se aplicará el teorema de Rolle en la demostración del teorema del valor medio. Debe conocer muy bien el significado de este teorema.

3.3.2 Teorema del valor medio

Sea f una función tal que

(i) es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$;
(ii) es diferenciable en el intervalo abierto (a, b).

Entonces existe un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Antes de demostrar este teorema, se interpretará geométricamente. Para la gráfica de la función f, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente del segmento de recta que une los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$. El teorema del valor medio establece que existe algún punto de la gráfica entre A y B en el que la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por A y B; esto es, existe algún número c en el intervalo (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

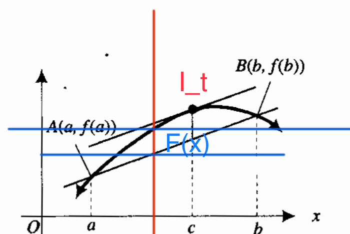


FIGURA 6

*Se ve que l_t ll AB

Refiérase a la figura 6.

Considere el eje x como el segmento AB y observe que el teorema del valor medio es una generalización del teorema de Rolle, el cual se emplea en su demostración.

Demostración del teorema 3.3.2 Una ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B de la figura 6 es

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Ahora, si $F(x)$ mide la distancia vertical entre el punto $(x, f(x))$ de la gráfica de la función f y el punto correspondiente de la recta secante que pasa por A y B, entonces

F(x) = f(x) – y

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a) \qquad \textbf{(1)}$$

Se mostrará que esta función F satisface las tres condiciones de la hipótesis del teorema de Rolle.

La función F es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ porque es la suma de f y una función lineal, las cuales son continuas. Por tanto, F satisface la condición (i). También F satisface la condición (ii) ya que f es diferenciable en (a, b). De (1), $F(a) = 0$ y $F(b) = 0$. Por tanto, F satisface la condición (iii) del teorema de Rolle.

g(x) = ax + b

La conclusión del teorema de Rolle establece que existe un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que $F'(c) = 0$. Pero

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

De modo que

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

En consecuencia, existe un número c en (a, b) tal que

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \blacksquare$$

En la mayoría de los casos no se puede determinar el valor exacto del número c garantizado por el teorema del valor medio. Sin embargo, el valor de c no es significativo porque el hecho crucial del teorema es que tal número c existe. Por esta razón, se dice que el teorema del valor medio es un **teorema de existencia**. Muchos conceptos importantes en matemáticas están basados en teoremas de existencia, otros ejemplos de estos teoremas son el teorema del valor intermedio y el teorema del valor extremo. La conclusión de un teorema de existencia usualmente asegura la existencia de uno o más números que tienen una propiedad específica, y el conocimiento de que el número existe es más significativo que determinar tal número.

El ejemplo siguiente, presentado para mostrar que se cumplen las condiciones del teorema del valor medio, implica una función para la cual es posible calcular el valor del número c garantizado por el teorema.

▶ **EJEMPLO 2** Sea

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x$$

verifique que se satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio para $a = 1$ y $b = 3$. Después determine un número c en el intervalo abierto $(1, 3)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

Apoye la elección de c gráficamente trazando en el mismo rectángulo de inspección la gráfica de f, la recta tangente en el punto donde $x = c$ y la recta secante que pasa por los puntos $(1, f(1))$ y $(3, f(3))$.

Solución Como f es una función polinomial, f es una función continua y diferenciable en cualquier número. Por tanto, se satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio para cualesquiera a y b.

Al diferenciar f se tiene

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$$

Como $f(1) = -2$ y $f(3) = 12$, entonces

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{12 - (-2)}{2} = 7$$

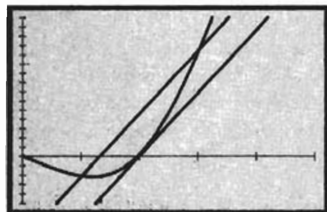
Si se considera $f'(c) = 7$ se obtiene

$$3c^2 - 2c - 2 = 7$$
$$3c^2 - 2c - 9 = 0$$

$$c = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-9)}}{2(3)}$$

$$c = \frac{2 + \sqrt{112}}{6} \approx 2.10 \qquad c = \frac{2 - \sqrt{112}}{6} \approx -1.43$$

Debido a que -1.43 no está en el intervalo abierto $(1, 3)$, el único valor posible para c es 2.10.



[0, 5] por [−5, 15]

$f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

FIGURA 7

La figura 7 muestra la gráfica de f, la recta tangente en el punto donde $x = 2.10$ y la recta secante que pasa por los puntos (1, −2) y (3, 12) trazadas en el rectángulo de inspección de [0, 5] por [−5, 15]. El hecho de que la recta tangente es paralela a la recta secante apoya la elección de c como 2.10. ◀



EJEMPLO 3

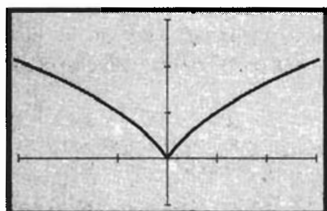
Sea

$$f(x) = x^{2/3}$$

trace la gráfica de f. Muestre analíticamente que no existe ningún número c en el intervalo abierto (−2, 2) tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}$$

¿Qué condición de la hipótesis del teorema del valor medio no cumple f cuando $a = -2$ y $b = 2$?



[−3, 3] por [−1, 3]

$f(x) = x^{2/3}$

FIGURA 8

Solución La gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [−3, 3] por [−1, 3] se muestra en la figura 8.

Al diferenciar f se tiene

$$f'(x) = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}$$

De modo que

$$f'(c) = \frac{2}{3c^{1/3}}$$

Además,

$$\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{4^{1/3} - 4^{1/3}}{4}$$

$$= 0$$

No existe ningún número c para el cual $\dfrac{2}{3c^{1/3}} = 0$.

La función f es continua en el intervalo cerrado [−2, 2]; no obstante, f no es diferenciable en el intervalo abierto (−2, 2) porque $f'(0)$ no existe. Por tanto, la condición (ii) del teorema del valor medio no es satisfecha por f cuando $a = -2$ y $b = 2$. ◀

El ejemplo siguiente muestra el poder del teorema del valor medio.



EJEMPLO 4

Utilice el teorema del valor medio para demostrar que si $x > 0$, entonces sen $x < x$.

Solución Si $x > 1$, entonces como sen $x \leq 1$, sen x es en verdad menor que x. Considere entonces que $0 < x \leq 1$ y sea

$$f(x) = x - \operatorname{sen} x$$

entonces

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

Como f es continua y diferenciable en cualquier número, se concluye, por el teorema del valor medio con $a = 0$ y $b = x$, que existe algún número c para el cual $0 < c < x \leq 1$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Debido a que $f(0) = 0$ y $f'(c) = 1 - \cos c$, de la ecuación anterior se tiene

$$x(1 - \cos c) = f(x) \qquad 0 < c < 1$$

En el miembro izquierdo de esta ecuación los dos factores son positivos. De modo que

$$\begin{aligned} 0 &< f(x) \\ 0 &< x - \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x &< x \end{aligned}$$

◀

En los ejercicios 28 a 30 se le pedirá que demuestre algunas otras desigualdades mediante un método semejante al del ejemplo anterior.

A fin de seguir mostrando el poder del teorema del valor medio, se mostrará su uso en la demostración del teorema siguiente, el cual se necesitará en el capítulo 4.

3.3.3 Teorema

Si f es una función tal que $f'(x) = 0$ para todos los valores de x en un intervalo I, entonces f es constante en I.

Demostración Suponga que f no es constante en el intervalo I. Entonces existen dos números diferentes x_1 y x_2 en I, donde $x_1 < x_2$, tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Puesto que, por hipótesis, $f'(x) = 0$ para toda x en I, entonces $f'(x) = 0$ para toda x en el intervalo cerrado $[x_1, x_2]$. En consecuencia, f es diferenciable en toda x del intervalo $[x_1, x_2]$, por lo que f es continua en $[x_1, x_2]$. Por tanto, las hipótesis del teorema del valor medio se satisfacen, de modo que existe un número c, con $x_1 < c < x_2$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \tag{2}$$

Pero como $f'(x) = 0$ para toda x en el intervalo $[x_1, x_2]$, entonces $f'(c) = 0$, y de (2) se deduce que $f(x_1) = f(x_2)$. Recuerde que se supuso que $f(x_1) \neq f(x_2)$. En consecuencia, se tiene una contradicción, y por tanto, f es constante en I. ■

En la próxima sección se verá otra aplicación del teorema del valor medio al demostrar el teorema 3.4.3.

EJERCICIOS 3.3

En los ejercicios 1 a 4, verifique que las tres condiciones de la hipótesis del teorema de Rolle son satisfechas por la función en el intervalo indicado. Después obtenga un valor adecuado para c que satisfaga la conclusión del teorema de Rolle. Apoye la elección de c gráficamente trazando en el mismo rectángulo de inspección las gráficas de f y de la recta tangente horizontal en el punto (c, f(c)).

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$; $[1, 3]$
2. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$; $[1, 2]$
3. $f(x) = \operatorname{sen} 2x$: $[0, \frac{1}{2}\pi]$
4. $f(x) = 3\cos^2 x$; $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$

En los ejercicios 5 a 10, haga lo siguiente: (a) trace la gráfica de la función en el intervalo indicado; (b) verifique las tres

condiciones de la hipótesis del teorema de Rolle, y determine qué condiciones son satisfechas y cuáles, si las hay, no se satisfacen; (c) si las tres condiciones del inciso (b) son satisfechas, entonces determine un punto de la gráfica en el que exista una recta tangente horizontal y apoye gráficamente la respuesta.

5. $f(x) = x^{4/3} - 3x^{1/3}$; $[0, 3]$

6. $f(x) = x^{3/4} - 2x^{1/4}$; $[0, 4]$

7. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 13}$; $[-3, 4]$

8. $f(x) = 1 - |x|$; $[-1, 1]$

9. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 1 \\ 5x - 8 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$; $[-2, \frac{8}{5}]$

10. $f(x) = \begin{cases} 3x + 6 & \text{si } x < 1 \\ x - 4 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$; $[-2, 4]$

En los ejercicios 11 a 20, verifique que las hipótesis del teorema del valor medio son satisfechas por la función en el intervalo indicado [a, b]. Después obtenga un valor adecuado para c que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio. Apoye la elección de c gráficamente trazando en el mismo rectángulo de inspección la gráfica de f en el intervalo cerrado, la recta tangente en el punto (c, f(c)), y la recta secante que pasa por los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)), observando que la recta tangente y la recta secante son paralelas.

11. $f(x) = x^2 + 2x - 1$; $[0, 1]$

12. $f(x) = x^3 + x^2 - x$; $[-2, 1]$

13. $f(x) = x^{2/3}$; $[0, 1]$

14. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x - 7}$; $[2, 6]$

15. $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$; $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

16. $f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}$; $[0, \frac{1}{2}\pi]$

17. $f(x) = x^2$; $[3, 5]$

18. $f(x) = x^2$; $[2, 4]$

19. $f(x) = \operatorname{sen} x$; $[0, \frac{1}{2}\pi]$

20. $f(x) = 2\cos x$; $[\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi]$

Para cada una de las funciones de los ejercicios 21 a 24, no existe número c en el intervalo (a, b) que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio. En cada ejercicio, determine qué parte de la hipótesis del teorema del valor medio no se cumple. Dibuje la gráfica de f y la recta que pasa por los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)).

21. $f(x) = \dfrac{4}{(x-3)^2}$; $a = 1, b = 6$

22. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x - 4}$; $a = 1, b = 2$

23. $f(x) = 3(x - 4)^{2/3}$; $a = -4, b = 5$

24. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 3 \\ 15 - 2x & \text{si } 3 \le x \end{cases}$; $a = -1, b = 5$

25. Si $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$, entonces $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$. Demuestre mediante el teorema de Rolle que la siguiente ecuación tiene al menos una raíz en el intervalo abierto (0, 1):

$$4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0$$

26. Demuestre mediante el teorema de Rolle que la ecuación $x^3 + 2x + k = 0$, donde k es cualquier constante, no puede tener más de una raíz real.

27. Utilice el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación

$$4x^5 + 3x^3 + 3x - 2 = 0$$

tiene exactamente una raíz en el intervalo abierto (0, 1). *Sugerencia:* primero muestre que el intervalo (0, 1) contiene al menos una raíz de la ecuación. Después muestre que la suposición de que el intervalo contiene más de una raíz conduce a una contradicción.

28. Emplee el teorema del valor medio para demostrar que si $x > 0$, entonces

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$$

Sugerencia: sea $f(x) = \cos x - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$ y aplique el que el teorema del valor medio a la función f para $a = 0$ y $b = x$ como se hizo en el ejemplo 4.

29. Use el teorema del valor medio para demostrar que si $x > 0$, entonces

$$\operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{6}$$

Consulte la sugerencia para el ejercicio 28.

30. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que si $x > 0$ y $r > 1$, donde r es un número racional, entonces

$$(1 + x)^r > 1 + rx$$

Vea la sugerencia para el ejercicio 28.

31. Emplee el teorema del valor medio para demostrar que si $a < b$, entonces la media aritmética de a y b, $\frac{1}{2}(a + b)$, está en el intervalo abierto (a, b). *Sugerencia*: considere $f(x) = x^2$.

32. Use el teorema del valor medio para demostrar que si $0 < a < b$, entonces la media geométrica de los dos números a y b, $\sqrt{ab}$, está en el intervalo abierto (a, b). *Sugerencia:* sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

33. El límite de velocidad en una autopista particular de California es 65 mi/h. Suponga que en un punto A un oficial de caminos midió la velocidad del conductor y 30 minutos después, a 35 millas de A, un segundo oficial también midió la velocidad del conductor. Aunque los dos oficiales determinaron que el conductor se mantuvo bajo el límite de velocidad en los puntos A y B, el segundo oficial detuvo al conductor por conducir a alta velocidad. Utilice el teorema del valor medio para verificar que en realidad el conductor rebasó el límite de velocidad en algún punto. *Sugerencia:* suponga que la ecuación de movimiento del conductor es $f(t)$ y que f es una función diferenciable.

34. Si $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$, utilice el teorema 3.3.3 para demostrar que $f(x) = 1$ para todo x en el $[-2\pi, 2\pi]$.

35. Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) = 1$ para todo x del intervalo abierto (a, b), demuestre que

$$f(x) = x - a + f(a)$$

para toda x en la $[a, b]$.

36. El recíproco del teorema de Rolle no es verdadero. Invente un ejemplo de una función para la cual la conclusión del teorema del Rolle es verdadera de modo que **(a)** la condición (i) no se satisfaga pero las condiciones (ii) y (iii) sí; **(b)** la condición (ii) no se cumpla pero las condiciones (i) y (iii) sí; **(c)** la condición (iii) no se satisfaga pero las condiciones (i) y (ii) sí. Dibuje la gráfica mostrando la recta tangente horizontal en cada caso.

37. Utilice el teorema de Rolle para demostrar que si toda función polinomial de segundo grado tienen a lo más dos raíces reales, entonces cada función polinomial de tercer grado tiene a lo más tres raíces reales. *Sugerencia:* muestre que la suposición de que un polinomio de tercer grado tiene cuatro raíces reales conduce a una contradicción.

38. Emplee el método del ejercicio 37 e inducción matemática para demostrar que un polinomio de n-ésimo grado tiene a lo más n raíces reales.

39. Suponga que $s = f(t)$ es una ecuación de movimiento de una partícula que se desplaza sobre una recta, donde f es una función diferenciable. Explique por qué se puede concluir que en algún instante de cualquier intervalo de tiempo, la velocidad instantánea será igual a la velocidad promedio durante ese intervalo de tiempo.

3.4 FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES, Y CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

En esta sección y en las siguientes, se aplicará la derivada a fin de obtener propiedades de las gráficas de las funciones. Estas propiedades no sólo se utilizarán para analizar el comportamiento de las funciones sino que también, en la sección 3.9, para determinar extremos absolutos de funciones para las que no se cumple el teorema del valor extremo. Se iniciará esta sección con una discusión sobre funciones *crecientes* y *decrecientes*.

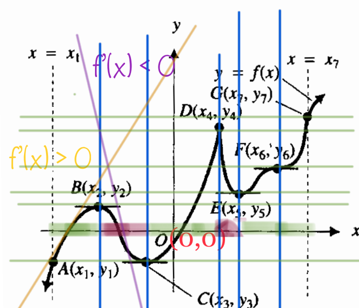


FIGURA 1

Consulte la figura 1, la cual presenta la gráfica de una función f continua para toda x del intervalo cerrado $[x_1, x_7]$. La figura muestra que cuando un punto se mueve a lo largo de la curva de A a B, los valores de función aumentan conforme la abscisa aumenta, y que cuando el punto se desplaza de B a C, los valores de función disminuyen conforme la abscisa aumenta. Entonces, se dice que f es *creciente* en el intervalo cerrado $[x_1, x_2]$ y que f es *decreciente* en el intervalo cerrado $[x_2, x_3]$. A continuación se presentan las definiciones precisas de función creciente y función decreciente en un intervalo.

3.4.1 Definición de función creciente

Una función definida en un intervalo es creciente en ese intervalo si y sólo si

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{siempre que} \quad x_1 < x_2$$

donde x_1 y x_2 son dos números cualesquiera del intervalo.

f(x_[n+1]) > f(x_n); ∀x_[n+1] > x_n & (x_[n+1], x_n ∈ I & n ∈ Z)

La función de la figura 1 es creciente en los intervalos cerrados siguientes: $[x_1, x_2]$; $[x_3, x_4]$; $[x_5, x_6]$;$[x_6, x_7]$; $[x_5, x_7]$.

3.4.2 Definición de función decreciente

Una función definida en un intervalo es decreciente en ese intervalo si y sólo si

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{siempre que} \quad x_1 < x_2$$

donde x_1 y x_2 son dos números cualesquiera del intervalo.

f(x_[n+1]) < f(x_n); ∀x_[n+1] > x_n & (x_[n+1], x_n ∈ I & n ∈ Z)

La función de la figura 1 es decreciente en los intervalos cerrados siguientes: $[x_2, x_3]$; $[x_4, x_5]$.

Si una función es creciente o decreciente en un intervalo, entonces se dice que es **monótona** en ese intervalo.

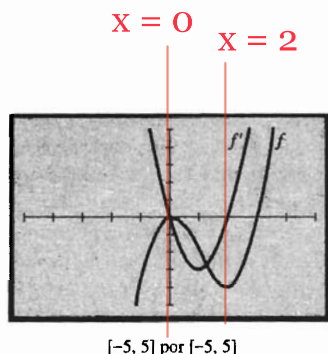
Antes de establecer un teorema que proporciona un criterio para determinar si una función es monótona en un intervalo, se verá lo que ocurre geométricamente. Refiérase a la figura 1, y observe que cuando la pendiente de la recta tangente es positiva, la función es creciente, y que cuando la pendiente es negativa, la función es decreciente. Puesto que $f'(x)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$, f es creciente cuando $f'(x) > 0$, y es decreciente cuando $f'(x) < 0$. También, como $f'(x)$ es la tasa de variación (o razón de cambio) de los valores de función $f(x)$ con respecto a x, cuando $f'(x) > 0$, los valores de función aumentan conforme x aumenta; y cuando $f'(x) < 0$, los valores de función disminuyen cuando x aumenta.

3.4.3 Teorema

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b):

(i) si $f'(x) > 0$ para toda x en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$;

(ii) si $f'(x) < 0$ para toda x en (a, b), entonces f es decreciente en $[a, b]$.



[−5, 5] por [−5, 5]

$f(x) = x^3 - 3x^2$ y $f'(x) = 3x^2 - 6x$

FIGURA 2

Antes de demostrar este teorema se presentará un ejemplo ilustrativo que mostrará su significado.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 La figura 2 muestra las gráficas de

$$f(x) = x^3 - 3x^2 \quad \text{y} \quad f'(x) = 3x^2 - 6x$$

trazadas en el rectángulo de inspección de $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$. Observe que cuando $x < 0$, $f'(x) > 0$ y f es creciente en el intervalo $(-\infty, 0]$; cuando $0 < x < 2$, $f'(x) < 0$ y f es decreciente en el intervalo $[0, 2]$; y cuando $x > 2$, $f'(x) > 0$ y f es creciente en el intervalo $[2, +\infty)$. ◀

Demostración del teorema 3.4.3 (i) Sean x_1 y x_2 dos números cualesquiera del intervalo $[a, b]$ tales que $x_1 < x_2$. Entonces f es continua en $[x_1, x_2]$ y diferenciable en (x_1, x_2). Por el teorema del valor medio, existe un número c en (x_1, x_2) tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Como $x_1 < x_2$ entonces $x_2 - x_1 > 0$. También, $f'(c) > 0$ por hipótesis. Por tanto, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, de modo que $f(x_2) > f(x_1)$. Así, se ha mostrado que $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$, cuando x_1 y x_2 son dos números cualesquiera del intervalo $[a, b]$. Por tanto, por la definición 4.3.1, f es creciente en $[a, b]$.

La demostración del inciso (ii) es semejante a la del inciso (i) y se deja como ejercicio (consulte el ejercicio 51). ■

Se aplicará el teorema 3.4.3 en la demostración del *criterio de la primera derivada para extremos relativos* de una función.

3.4.4 Teorema Criterio de la primera derivada para extremos relativos

Sea f una función continua en todos los puntos del intervalo abierto (a, b) que contiene al número c, y suponga que f' existe en todos los puntos de (a, b) excepto posiblemente en c:

f'(x) > 0; Vx € (a,c) & f'(x) < 0; Vx € (c,b) => f(c) >= f(x), Vx € (a,b)/{c}

(i) si $f'(x) > 0$ para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contenga a c como su extremo derecho, y si $f'(x) < 0$ para todos los valores de x de algún intervalo abierto que contenga a c como su extremo izquierdo, entonces f tiene un valor máximo relativo en c;

(ii) si $f'(x) < 0$ para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contenga a c como su extremo derecho, y si $f'(x) > 0$ para todos los valores de x de algún intervalo abierto que contenga a c como su extremo izquierdo, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c.

f'(x) < 0; Vx € (a,c) & f'(x) > 0; Vx € (c,b) => f(c) <= f(x); Vx € (a,b)/{c}

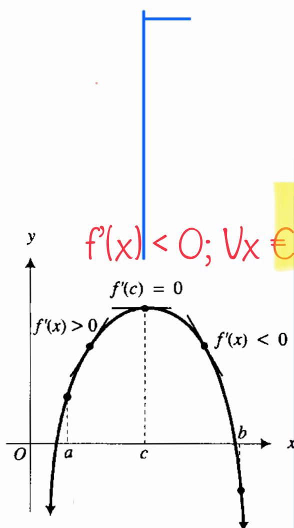


FIGURA 3

Como se hizo con el teorema 3.4.3, se presentará un ejemplo ilustrativo para mostrar el contenido del teorema 3.4.4 antes de su demostración.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Consulte otra vez la figura 2. Observe que $f'(x) > 0$ para todos los valores de x de algún intervalo abierto que tiene a 0 como su extremo derecho, y que $f'(x) < 0$ para todos los valores de x de algún intervalo abierto que contiene a 0 como su extremo izquierdo. Además, f tiene un valor máximo relativo en 0. Esto ilustra el inciso (i) del teorema 3.4.4.

También en la figura 2, observe que $f'(x) < 0$ para todos los valores de x de algún intervalo abierto que tiene a 2 como su extremo derecho, y que $f'(x) > 0$ para todos los valores de x de algún intervalo abierto que contiene a 2 como su extremo izquierdo; además, f tiene un valor mínimo relativo en 2. Esto ilustra el inciso (ii) del teorema 3.4.4. ◀

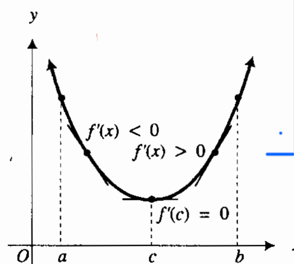


FIGURA 4

Demostración del teorema 3.4.4 (i) Sea (d, c) (donde $d > a$) el intervalo abierto que contiene a c como su extremo derecho para el cual $f'(x) > 0$ para toda x del intervalo. Del teorema 3.4.3 (i), f es creciente en $[d, c]$. Sea (c, e) (donde $e < b$) el intervalo abierto que contiene a c como su extremo izquierdo para el cual $f'(x) < 0$ para toda x del intervalo. Por el teorema 3.4.3 (ii), f es decreciente en $[c, e]$. Puesto que f es creciente en $[d, c]$, se sabe de la definición 3.4.1 que si x_1 está en $[d, c]$ y $x_1 \neq c$, entonces $f(x_1) < f(c)$. También, como f es decreciente en $[c, e]$, se sabe de la definición 3.4.2 que si x_2 está en $[c, e]$ y $x_2 \neq c$, entonces $f(c) > f(x_2)$. Por tanto, de la definición 3.1.1, f tiene un valor máximo relativo en c.

La demostración del inciso (ii) es semejante a la del inciso (i) y se deja como ejercicio (consulte el ejercicio 52). ■

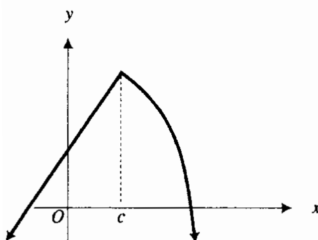


FIGURA 5

El criterio de la primera derivada para extremos relativos establece que si f es continua en c y $f'(x)$ cambia de signo algebraico de positivo a negativo al pasar por c conforme x crece, entonces f tiene un valor máximo relativo en c; y si $f'(x)$ cambia de signo algebraico de negativo a positivo al pasar por c conforme x crece, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c.

Las figuras 3 y 4 ilustran los incisos (i) y (ii), respectivamente, del criterio de la primera derivada cuando $f'(c)$ existe. La figura 5 muestra la gráfica

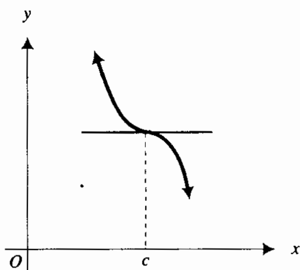


FIGURA 6

de una función f que tiene un valor máximo relativo en un número c, pero $f'(c)$ no existe; Sin embargo, $f'(x) > 0$ cuando $x < c$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > c$. En la figura 6, se tiene la gráfica de una función f para la que c es un número crítico, y $f'(x) < 0$ cuando $x < c$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > c$; f no tiene un extremo relativo en c.

Otras ilustraciones del criterio de la primera derivada se tienen en la figura 1. En x_2 y x_4 la función tiene un valor máximo relativo, y en x_3 y x_5 la función tiene un valor mínimo relativo; aunque x_6 es un número crítico, no se tiene un extremo relativo en x_6. f'(x) > 0; x < x_6 f'(x) > 0; x > x_6

A continuación se resume el procedimiento para obtener los extremos relativos de una función.

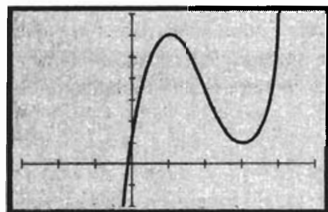
> Para determinar analíticamente los extremos relativos de f:
>
> 1. Calcule $f'(x)$.
> 2. Determine los números críticos de f, es decir, los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$ o para los que $f'(x)$ no existe.
> 3. Aplique el criterio de la primera derivada (teorema 3.4.4).

Los ejemplos siguientes muestran cómo se aplica este procedimiento.

EJEMPLO 1 Trace la gráfica de la función definida por

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Determine a partir de la gráfica los extremos relativos de f, los valores de x en los que ocurren los extremos relativos, los intervalos en los que f es creciente, y en los que f es decreciente. Confirme analíticamente la información obtenida gráficamente.



$[-3, 5]$ por $[-2, 6]$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

FIGURA 7

Solución La figura 7 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-3, 5]$ por $[-2, 6]$. A partir de la gráfica, se determina que f tiene un valor máximo relativo de 5 en $x = 1$, y un valor mínimo relativo de 1 en $x = 3$. También, a partir de la gráfica se determina que f es creciente en los intervalos $(-\infty, 1]$ y $[3, +\infty)$, y es decreciente en el intervalo $[1, 3]$.

Ahora se confirmará esta información mediante el criterio de la primera derivada calculando primero la derivada de f:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Los únicos números críticos son aquellos para los que $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$
$$3(x - 3)(x - 1) = 0$$
$$x = 3 \qquad x = 1$$

Por tanto, los números críticos de f son 1 y 3. Para determinar si f tiene un extremo relativo en estos números, se aplica el criterio de la primera derivada y los resultados se presentan en la tabla 1.

Tabla 1

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusión*
$x < 1$		+	f es creciente
$x = 1$	5	0	f tiene un valor máximo relativo
$1 < x < 3$		−	f es decreciente
$x = 3$	1	0	f tiene un valor mínimo relativo
$3 < x$		+	f es creciente

Las conclusiones de la tabla confirman la información determinada gráficamente. ◀

▶ **EJEMPLO 2** Sea

$$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$$

Determine los extremos relativos de f y los valores de x en donde ellos ocurren. También determine los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente. Apoye las respuestas gráficamente.

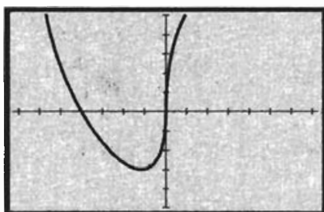
Solución Al diferenciar f se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{4}{3}x^{1/3} + \tfrac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \tfrac{4}{3}x^{-2/3}(x + 1) \end{aligned}$$

Como $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$, y $f'(x) = 0$ cuando $x = -1$, entonces los números críticos de f son -1 y 0. Se aplica el criterio de la primera derivada y se resumen los resultados en la tabla 2. En la tabla, la abreviación n.e. significa *no existe*.

Tabla 2

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusión*
$x < -1$		$-$	f es decreciente
$x = -1$	-3	0	f tiene un valor mínimo relativo
$-1 < x < 0$		$+$	f es creciente
$x = 0$	0	n.e.	f no tiene un extremo relativo en $x = 0$
$0 < x$		$+$	f es creciente



[−7,5, 7.5] por [−5, 5]

$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

FIGURA 8

La información de la tabla se apoya al trazar la gráfica de f en el rectángulo de inspección de [−7.5, 7.5] por [−5, 5], como se muestra en la figura 8. ◀

▶ **EJEMPLO 3** Dada

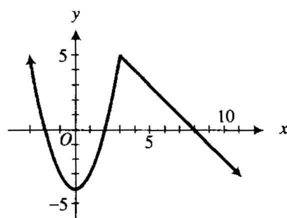
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 3 \\ 8 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

determine los extremos relativos de f y los valores de x en los que ellos ocurren. También determine analíticamente los intervalos en los que f es creciente y en los que f es decreciente. Dibuje la gráfica.

Solución Al calcular $f'(x)$ se obtiene

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 3 \\ -1 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

Observe que f es continua en 3. Como $f'_-(3) = 6$ y $f'_+(3) = -1$, $f'(3)$ no existe. Por tanto, 3 es un número crítico de f. Otro número crítico de f es 0 porque $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$. En la tabla 3 se resumen los resultados obtenidos al aplicar el criterio de la primera derivada. La gráfica de f se muestra en la figura 9.



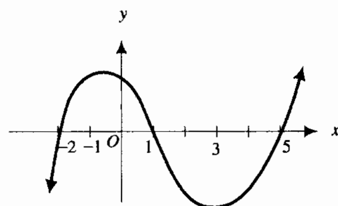
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 3 \\ 8 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

FIGURA 9

Tabla 3

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusión*
$x < 0$		$-$	f es decreciente
$x = 0$	-4	0	f tiene un valor mínimo relativo
$0 < x < 3$		$+$	f es creciente
$x = 3$	5	n.e.	f tiene un valor máximo relativo
$3 < x$		$-$	f es decreciente

Como se hizo en los ejemplos ilustrativos 1 y 2, ahora se mostrará en los dos ejemplos siguientes cómo puede obtenerse el comportamiento de una función a partir de la gráfica de su derivada.



Gráfica de f'

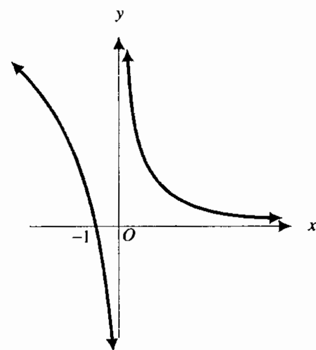
FIGURA 10

EJEMPLO 4 La figura 10 muestra la gráfica de la derivada de una función f cuyo dominio es el conjunto de los números reales. A partir de la gráfica determine los números críticos de f, los intervalos en los que f es creciente y en los que f es decreciente, y los extremos relativos de f.

Solución De la gráfica, se observa que $f'(x)$ existe en cualquier número real y que $f'(-2)$, $f'(1)$ y $f'(5)$ son iguales a cero. Por tanto, -2, 1 y 5 son números críticos de f. Como $f'(x) < 0$ cuando $x < -2$ o $1 < x < 5$, f es decreciente en los intervalos $(-\infty, -2]$ y $[1, 5]$. Debido a que $f'(x) > 0$ cuando $-2 < x < 1$ o $x > 5$, f es creciente en los intervalos $[-2, 1]$ y $[5, +\infty)$. La tabla 4 resume estos hechos, además de que f tiene valores mínimos relativos en $x = -2$ y $x = 5$, y f tiene un valor máximo relativo en $x = 1$, obtenidos al aplicar el criterio de la primera derivada.

Tabla 4

	$f'(x)$	*Conclusión*
$x < -2$	$-$	f es decreciente
$x = -2$	0	f tiene un valor mínimo relativo
$-2 < x < 1$	$+$	f es creciente
$x = 1$	0	f tiene un valor máximo relativo
$1 < x < 5$	$-$	f es decreciente
$x = 5$	0	f tiene un valor mínimo relativo
$5 < x$	$+$	f es creciente



Gráfica de g'

FIGURA 11

EJEMPLO 5 Siga las instrucciones del ejemplo 4 para la función g, continua en su dominio el cual es el conjunto de los números reales, para la cual la figura 11 muestra la gráfica de su derivada.

Solución De la gráfica, como $g'(-1) = 0$, -1 es un número crítico de g. Debido a que el eje y es una asíntota vertical de gráfica de g', $g'(0)$ no existe, aunque 0 esté en el dominio de g. En consecuencia, también 0 es número crítico de g. Como $g'(x) > 0$ cuando $x < -1$ o $x > 0$, g es creciente en los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[0, +\infty)$. Ya que $g'(x) < 0$ cuando $-1 < x < 0$, g es decreciente en el intervalo $[-1, 0]$. Estos hechos se resumen en la tabla 5, teniendo en cuenta que se aplicó el criterio de la primera derivada para determinar los extremos relativos.

Tabla 5

	$g'(x)$	*Conclusión*
$x < -1$	+	g es creciente
$x = -1$	0	g tiene un valor máximo relativo
$-1 < x < 0$	−	g es decreciente
$x = 0$	n.e.	g tiene un valor mínimo relativo
$0 < x$	+	g es creciente

◀

En la sección 3.6, se obtendrán algunas propiedades adicionales de la función f del ejemplo 4 y de la función g del ejemplo 5 a partir de las gráficas de sus derivadas; después, a partir de estas propiedades, así como de las obtenidas en esta sección, se dibujarán posibles gráficas de f y g.

EJERCICIOS 3.4

En los ejercicios 1 a 18, (a) trace la gráfica, y determine a partir de ella: (b) los extremos relativos de f, (c) los valores de x en los que ocurren los extremos relativos, (d) los intervalos en los que f es creciente, (e) los intervalos en los que f es decreciente. Confirme analíticamente la información obtenida gráficamente.

1. $f(x) = x^2 - 4x - 1$

2. $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$

3. $f(x) = x^3 - x^2 - x$

4. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15 - 5$

5. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$ **6.** $f(x) = x^4 - 4x$

7. $f(x) = 4 \text{ sen } \frac{1}{2}x;\ x \in [-2\pi, 2\pi]$

8. $f(x) = 2 \cos 3x;\ x \in [-\pi, \pi]$

9. $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **10.** $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 2}$

11. $f(x) = (1 - x)^2(1 + x)^3$

12. $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)^2$

13. $f(x) = x - 3x^{1/3}$ **14.** $f(x) = 4x - 6x^{2/3}$

15. $f(x) = x^{2/3} - x^{1/3}$ **16.** $f(x) = x^{2/3}(x - 1)^2$

17. $f(x) = x^{5/4} + 10x^{1/4}$ **18.** $f(x) = x^{5/3} - 10x^{2/3}$

En los ejercicios 19 a 32, haga lo siguiente analíticamente: (a) determine los extremos relativos de f; (b) determine los valores de x en los que ocurren los extremos relativos; (c) determine los intervalos en los que f es creciente; (d) determine los intervalos en los que f es decreciente. Apoye las respuestas gráficamente.

19. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$

20. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

21. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x + 1$

22. $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x - 2$

23. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ **24.** $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2x}$

25. $f(x) = 2x\sqrt{3 - x}$ **26.** $f(x) = x\sqrt{5 - x^2}$

27. $f(x) = 2 - 3(x - 4)^{2/3}$

28. $f(x) = 2 - (x - 1)^{1/3}$

29. $f(x) = \frac{1}{2}\sec 4x;\ x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

30. $f(x) = 3 \csc 2x;\ x \in [-\pi, \pi]$

31. $f(x) = x^{1/3}(x + 4)^{-2/3}$

32. $f(x) = (x + 1)^{2/3}(x - 2)^{1/3}$

En los ejercicios 33 a 38, haga lo siguiente analíticamente: (a) determine los extremos relativos de la función; (b) determine los valores de x en los que ocurren los extremos relativos; (c) determine los intervalos en los que la función es creciente; (d) determine los intervalos en los que la función es decreciente. (e) Dibuje la gráfica de la función a partir de las respuestas de los incisos (a)–(d).

33. $f(x) = \begin{cases} 2x + 9 & \text{si } x \le -2 \\ x^2 + 1 & \text{si } -2 < x \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 5 - 2x & \text{si } x < 3 \\ 3x - 10 & \text{si } 3 \le x \end{cases}$

35. $f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 \le x < 2 \\ 7 - x & \text{si } 2 \le x \end{cases}$

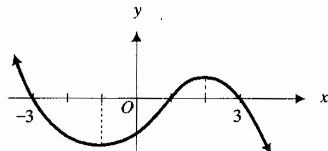
36. $f(x) = \begin{cases} 12 - (x + 5)^2 & \text{si } x \le -3 \\ 5 - x & \text{si } -3 < x \le -1 \\ \sqrt{100 - (x - 7)^2} & \text{si } -1 < x \le 17 \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} (x + 9)^2 - 8 & \text{si } x < -7 \\ -\sqrt{25 - (x + 4)^2} & \text{si } -7 \le x \le 0 \\ (x - 2)^2 - 7 & \text{si } 0 < x \end{cases}$

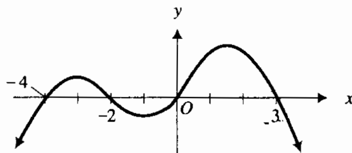
38. $f(x) = \begin{cases} 4 - (x + 5)^2 & \text{si } x < -4 \\ 12 - (x + 1)^2 & \text{si } -4 \le x \end{cases}$

En los ejercicios 39 a 44, la figura adjunta muestra la gráfica de la derivada de una función f continua en su dominio, el cual es el conjunto de los números reales. A partir de la gráfica, determine (a) los números críticos de f, (b) los intervalos en los que f es creciente, (c) los intervalos en los que f es decreciente, y (d) los números donde ocurren los extremos relativos de f.

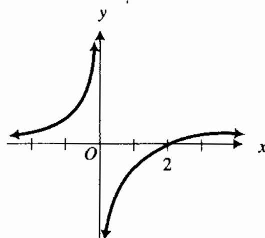
39.



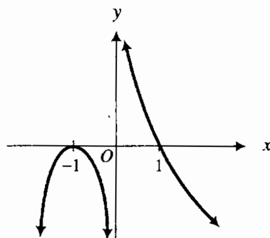
40.



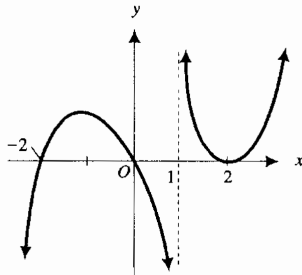
41.



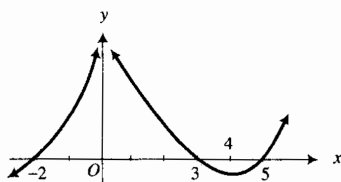
42.



43.



44.



45. Dado que la función f es continua para todos los valores de $x, f(0) = 0, f(4) = 2, f(8) = 0, f'(x) > 0$ si $x < 4$, y $f'(x) < 0$ si $x > 4$, dibuje una gráfica posible de f en cada uno de los siguientes casos donde la condición adicional se satisface: (**a**) f' es continua en 4; (**b**) $f'(x) = \frac{1}{2}$ si $x < 4$ y $f'(x) = -\frac{1}{2}$ si $x > 4$; (**c**) $\lim\limits_{x \to 4^-} f'(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 4^+} f'(x) = -\infty$, y $f'(a) \neq f'(b)$ si $a \neq b$.

46. Dado que la función f es continua para todos los valores de $x, f(3) = 2, f'(x) < 0$ si $x < 3$, y $f'(x) > 0$ si $x > 3$, dibuje una gráfica posible de f en cada uno de los siguientes casos donde la condición adicional se satisface: (**a**) f' es continua en 3; (**b**) $f'(x) = -1$ si $x < 3$ y $f'(x) = 1$ si $x > 3$; (**c**) $\lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = 1$, y $f'(a) \neq f'(b)$ si $a \neq b$.

47. Encuentre a y b tales que la función definida por

$$f(x) = x^3 + ax^2 + b$$

tenga un extremo relativo en el punto (2, 3).

48. Encuentre a, b y c tales que la función definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

tenga un valor máximo relativo de 7 en $x = 1$ y la gráfica de $y = f(x)$ pase por el punto (2, −2).

49. Encuentre a, b, c y d tales que la función definida por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tenga un extremo relativo en los puntos (1, 2) y (2, 3).

50. Sea $f(x) = x^p(1 - x)^q$, donde p y q son números enteros positivos mayores que 1, demuestre cada una de las siguientes proposiciones:

(**a**) Si p es par, f tiene un valor mínimo relativo en 0;
(**b**) Si q es par, f tiene un valor mínimo relativo en 1;
(**c**) f tiene un valor máximo relativo en $p/(p + q)$ independientemente de que p y q sean impares o pares.

51. Demuestre el teorema 3.4.3(ii).

52. Demuestre el teorema 3.4.4(ii).

53. Si $f(x) = x^k$, donde k es un número entero positivo impar, demuestre que f no tiene extremos relativos.

54. Demuestre que si f es creciente en $[a, b]$ y si g es creciente en $[f(a), f(b)]$, entonces si $g \circ f$ existe en $[a, b]$, $g \circ f$ es creciente en $[a, b]$.

55. La función f es creciente en el intervalo I. Demuestre que (**a**) si $g(x) = -f(x)$, entonces g es decreciente en I; (**b**) si $h(x) = 1/f(x)$ y $f(x) > 0$ en I, entonces h es decreciente en I.

56. La función f es diferenciable en cada número del intervalo cerrado $[a, b]$. Demuestre que si $f'(a) \cdot f'(b) < 0$, entonces existe un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

57. Si $f'(x)$ existe en cada número del intervalo abierto (a, b) que contiene al número c y $f'(c) = 0$, ¿puede concluirse que f tiene un extremo relativo en c? Explique su respuesta.

58. Describa cómo se aplica el criterio de la primera derivada para determinar los extremos relativos de una función.

3.5 CONCAVIDAD, PUNTOS DE INFLEXIÓN Y CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

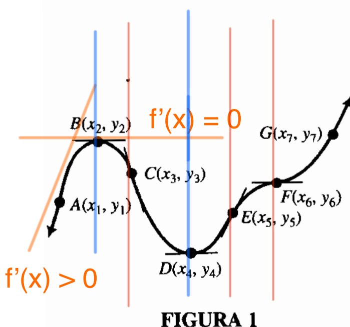


FIGURA 1

*O positiva y decreciente o cero y decreciente. Concavidad hacia abajo.

*O negativa y creciente o cero y creciente. Concavidad hacia arriba.

*Puntos en los que la concavidad cambia. Puntos de inflexión.

La segunda derivada, igual que la primera derivada, proporciona información acerca del comportamiento de una función y su gráfica, como se verá en esta sección.

Consulte la figura 1, la cual muestra la gráfica de una función f cuyas derivadas primera y segunda existen en el intervalo cerrado $[x_1, x_7]$. Debido a que f y f' son diferenciables en dicho intervalo, entonces f y f' son continuas en $[x_1, x_7]$.

Si se considera que el punto P se mueve a lo largo de la gráfica de la figura 1 desde A hasta G, entonces la posición de P varía cuando x crece de x_1 a x_7. Conforme P se mueve a lo largo de A a B, la pendiente de la recta tangente a la gráfica es positiva y decreciente; esto es, la recta tangente a la gráfica gira en el sentido de las manecillas del reloj, y la gráfica se encuentra debajo de su recta tangente. Cuando el punto P está en B, la pendiente de la recta tangente es cero y sigue decreciendo. Conforme P se desplaza de B a C, la pendiente de la recta tangente es negativa y sigue decreciendo; la recta tangente continúa girando en el sentido de las manecillas del reloj, y la gráfica está debajo de su recta tangente. Se dice que la gráfica es *cóncava hacia abajo* de A a C. A medida que P se mueve a lo largo de la gráfica de C a D, la pendiente de la recta tangente es negativa y creciente; esto es, la recta tangente gira en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj, y la gráfica está por arriba de su recta tangente. En el punto D, la pendiente de la recta tangente es ~~positiva~~ cero y creciente; la recta tangente sigue girando en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj, y la gráfica está por arriba de su recta tangente. Se dice que la gráfica es *cóncava hacia arriba* de C a E. En el punto C la gráfica cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba. El punto C se denomina *punto de inflexión*. Enseguida se presentan estas definiciones formalmente.

3.5.1 Definición de concavidad hacia arriba

Se dice que la gráfica de una función es **cóncava hacia arriba** en el punto $(c, f(c))$ si existen $f'(c)$ y un intervalo abierto I que contiene a c tal que para todos los valores de $x \neq c$ en I, el punto $(x, f(x))$ de la gráfica está arriba de la recta tangente a la gráfica en $(c, f(c))$.

3.5.2 Definición de concavidad hacia abajo

Se dice que la gráfica de una función es **cóncava hacia abajo** en el punto $(c, f(c))$ si existen $f'(c)$ y un intervalo abierto I que contiene a c tal que para todos los valores de $x \neq c$ en I, el punto $(x, f(x))$ de la gráfica está debajo de la recta tangente a la gráfica en $(c, f(c))$.

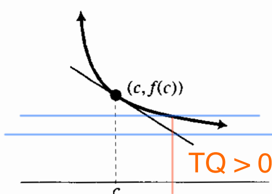


FIGURA 2

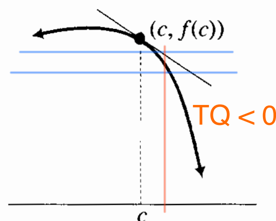


FIGURA 3

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 La figura 2 presenta una porción de la gráfica de una función f cóncava hacia arriba en el punto $(c, f(c))$, y la figura 3 muestra una porción de la gráfica de una función que es cóncava hacia abajo en el punto $(c, f(c))$. ◀

La gráfica de la figura 1 es cóncava hacia abajo en todos los puntos $(x, f(x))$ para los cuales x está en alguno de los dos intervalos abiertos siguien-

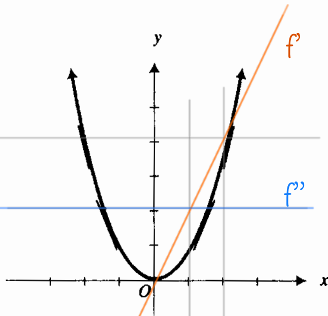


FIGURA 4

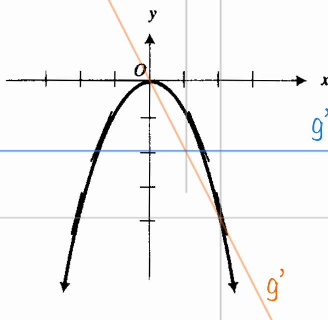


FIGURA 5

tes: (x_1, x_3) o (x_5, x_6). De manera semejante, la gráfica de la figura 1 es cóncava hacia arriba en todos los puntos $(x, f(x))$ para los cuales x está en (x_3, x_5) o en (x_6, x_7).

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Si f es la función definida por $f(x) = x^2$, entonces $f'(x) = 2x$ y $f''(x) = 2$. Por lo que $f''(x) > 0$ para toda x. Además, como la gráfica de f, mostrada en la figura 4, está arriba de todas sus rectas tangentes, la gráfica es cóncava hacia arriba en todos sus puntos.

Si g es la función definida por $g(x) = -x^2$, entonces $g'(x) = -2x$ y $g''(x) = -2$. En consecuencia, $g''(x) < 0$ para toda x. También, debido a que la gráfica de g, presentada en la figura 5, está debajo de sus rectas tangentes, g es cóncava hacia abajo en todos sus puntos. ◀

La función f del ejemplo ilustrativo 2 es tal que $f''(x) > 0$ para toda x, y la gráfica de f es cóncava hacia arriba en todo número. Para la función g del ejemplo ilustrativo 2, $g''(x) < 0$ para toda x, y la gráfica de g es cóncava hacia abajo en todo número. Estas dos situaciones son casos especiales del teorema siguiente.

3.5.3 Teorema

Sea f una función que es diferenciable en algún intervalo abierto que contiene a c. Entonces

(i) si $f''(c) > 0$, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(c, f(c))$.
(ii) si $f''(c) < 0$, la gráfica de f es cóncava hacia abajo en $(c, f(c))$.

Demostración de (i)

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}$$

Como $f''(c) > 0$,

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0$$

Entonces, por el teorema 3.1.8(i) existe un intervalo abierto I que contiene a c tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0 \qquad (1)$$

para cada $x \neq c$ en I.

Ahora considere la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$. Una ecuación de esta recta tangente es

$$y = f(c) + f'(c)(x - c) \qquad (2)$$

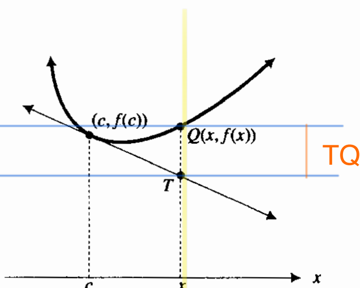
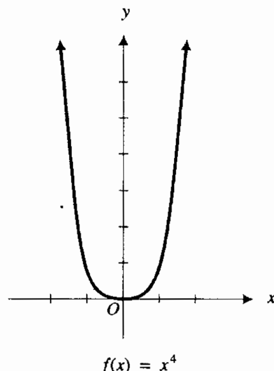


FIGURA 6

Sea x un número del intervalo I tal que $x \neq c$ y sea Q el punto de la gráfica de f cuya abscisa es x. A través de Q dibuje una recta paralela al eje y, y sea T el punto de intersección de esta recta con la recta tangente (vea la figura 6).

Para demostrar que la gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(c, f(c))$ se debe mostrar que el punto Q está arriba del punto T o, equivalentemente, que la distancia dirigida $\overline{TQ} > 0$ para todos los valores $x \neq c$ en I. $\overline{TQ}$ es igual a



$f(x) = x^4$

FIGURA 7

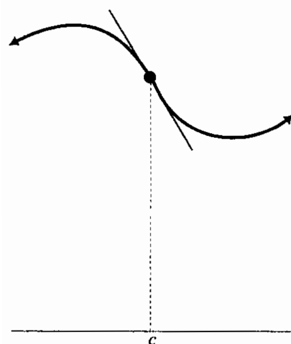


FIGURA 8

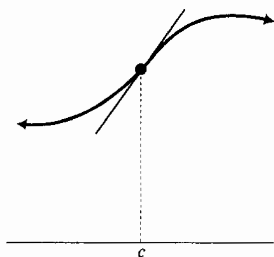


FIGURA 9

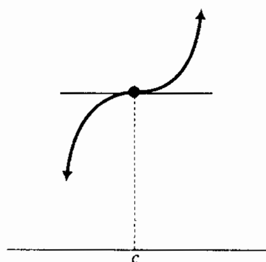


FIGURA 10

la ordenada de Q menos la ordenada de T. La ordenada de Q es $f(x)$ y la ordenada de T se obtiene de (2); así

$$\overline{TQ} = f(x) - [f(c) + f'(c)(x - c)]$$
$$\overline{TQ} = [f(x) - f(c)] - f'(c)(x - c) \tag{3}$$

Por el teorema del valor medio, existe algún número d entre x y c tal que

$$f'(d) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Esto es

$$f(x) - f(c) = f'(d)(x - c) \qquad \text{para alguna } d \text{ entre } x \text{ y } c$$

Al sustituir de esta ecuación en (3) se tiene

$$\overline{TQ} = f'(d)(x - c) - f'(c)(x - c)$$
$$\overline{TQ} = (x - c)[f'(d) - f'(c)] \tag{4}$$

Puesto que d está entre x y c, d está en el intervalo I, de modo que considerando $x = d$ en la ecuación (1) se obtiene

$$\frac{f'(d) - f'(c)}{d - c} > 0 \tag{5}$$

Para demostrar que $\overline{TQ} > 0$, se probará que los dos factores del miembro derecho de (4) tienen el mismo signo. Si $x - c > 0$, entonces $x > c$. Además, como d está entre x y c, entonces $d > c$; por tanto, de la desigualdad (5), $f'(d) - f'(c) > 0$. Si $x - c < 0$, entonces $x < c$, por lo que $d < c$; por tanto, de (5), $f'(d) - f'(c) < 0$. En consecuencia, $x - c$ y $f'(d) - f'(c)$ tienen el mismo signo, por tanto, $\overline{TQ}$ es un número positivo. Así, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en el punto $(c, f(c))$.

La demostración del inciso (ii) es semejante a la del inciso (i) por lo que se omite. ■

El recíproco del teorema 3.5.3 no es válido. Por ejemplo, si f es la función definida por $f(x) = x^4$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en el punto (0, 0) pero como $f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$ (vea la figura 7). En efecto, una condición suficiente para la que la gráfica de una función f sea cóncava hacia arriba en el punto $(c, f(c))$ es que $f''(c) > 0$, pero ésta no es una condición necesaria. De la misma forma, una condición suficiente –pero no necesaria– para que la gráfica de una función f sea cóncava hacia abajo en el punto $(c, f(c))$ es que $f''(c) < 0$.

Si existe un punto en la gráfica de una función en que el sentido de la concavidad cambia, y la gráfica tiene una recta tangente en este punto, entonces la gráfica cruza su recta tangente en ese punto, como se muestra en las figuras 8, 9 y 10. A dicho punto se le llama *punto de inflexión*.

3.5.4 Definición de punto de inflexión

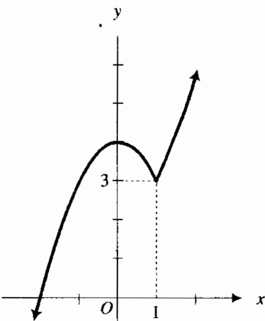
El **punto $(c, f(c))$ es un punto de inflexión** de la gráfica de la función f si la gráfica tiene una recta tangente en ese punto, y si existe un intervalo abierto I que contiene a c tal que si x está en I, entonces

(i) $f''(x) < 0$ si $x < c$ y $f''(x) > 0$ si $x > c$; o Fig. 8

(ii) $f''(x) > 0$ si $x < c$ y $f''(x) < 0$ si $x > c$. Fig. 9

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

La figura 8 muestra un punto de inflexión en el que la condición (i) de la definición 3.5.4 se cumple; en este caso la gráfica es cóncava hacia abajo en los puntos inmediatos ubicados a la izquierda del punto de inflexión, y es cóncava hacia arriba en los puntos localizados inmediatamente a la derecha del punto de inflexión. La condición (ii) se presenta en la figura 9, en donde el sentido de la concavidad cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo en el punto de inflexión. La figura 10 proporciona otro ejemplo de la condición (i), donde el sentido de la concavidad cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en el punto de inflexión. Observe que en la figura 10 la gráfica tiene una recta tangente horizontal en el punto de inflexión. ◀



$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 + x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

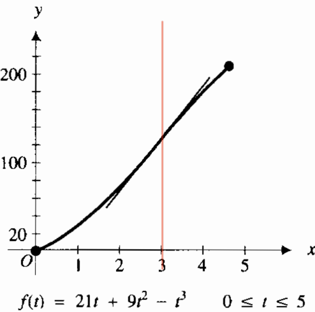
FIGURA 11

La gráfica de la figura 1 tiene puntos de inflexión en C, E y F.

Una parte crucial de la definición de punto de inflexión es que la gráfica debe tener una recta tangente en ese punto. Considere, por ejemplo, la función del ejemplo 2 de la sección 1.6 definida por

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 + x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

La gráfica de h se muestra en la figura 11. Observe que $h''(x) = -2$ si $x < 1$ y $h''(x) = 2$ si $x > 1$. De este modo, en el punto $(1, 3)$ de la gráfica el sentido de concavidad cambia de hacia abajo a hacia arriba. Sin embargo, $(1, 3)$ no es un punto de inflexión porque la gráfica no tiene una recta tangente en ese punto.



$f(t) = 21t + 9t^2 - t^3 \quad 0 \leq t \leq 5$

FIGURA 12

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Suponga que t horas después de iniciar un trabajo a las 7 a.m. un obrero, en una línea de ensamble, ha realizado una tarea particular de $f(t)$ unidades donde

$$f(t) = 21t + 9t^2 - t^3 \qquad 0 \leq t \leq 5$$

La tabla 1 presenta los valores de función para valores enteros de t, de 1 a 5, y la figura 12 muestra la gráfica de f en $[0, 5]$.

Tabla 1

t	1	2	3	4	5
$f(t)$	29	70	117	164	205

Al diferenciar dos veces f se tiene

$$f'(t) = 21 + 18t - 3t^2 \qquad f''(t) = 18 - 6t = 6(3 - t)$$

¿Porqué es así dicha inecuación? Porqué en la función original solo se toma el intervalo 0 <= t <= 5

Observe que $f''(t) > 0$ si $0 < t < 3$ y $f''(t) < 0$ si $3 < t < 5$. De la definición 3.5.4(ii), la gráfica de f tiene un punto de inflexión en $t = 3$. Del teorema 3.4.3, como $f''(t) > 0$ cuando $0 < t < 3$, $f'(t)$ es creciente en $[0, 3]$, y debido a que $f''(t) < 0$ cuando $3 < t < 5$, $f'(t)$ es decreciente en $[3, 5]$. Por tanto, ya que $f'(t)$ es la tasa de variación de $f(t)$ con respecto a t, se concluye que en las tres primeras horas (de 7 a.m. a 10 a.m.) el trabajador realiza la tarea a una tasa creciente, y durante las siguientes dos horas (de las 10 a.m. al medio día) el trabajador efectúa la tarea a una tasa decreciente. En $t = 3$ (10 a.m.) el trabajador es más eficiente, y cuando $3 < t < 5$ (después de las 10 a.m.) hay una reducción en la tasa de producción del trabajador. El punto en el que el trabajador produce con mayor eficiencia se

denomina *punto de rendimiento decreciente*; este punto es un punto de inflexión de la gráfica de f. ◀

La definición 3.5.4 expresa que la segunda derivada cambia de signo en un punto de inflexión, pero no indica nada acerca del valor de la segunda derivada en ese punto. Sin embargo, el teorema siguiente establece que si la segunda derivada existe en un punto de inflexión, debe ser cero.

3.5.5 Teorema

Suponga que la función f es diferenciable en algún intervalo abierto que contiene a c, y $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f. Entonces, si $f''(c)$ existe, $f''(c) = 0$.

Demostración Sea g la función tal que $g(x) = f'(x)$; entonces $g'(x) = f''(x)$. Como $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces $f''(x)$ cambia de signo en c, por lo que $g'(x)$ cambia de signo en c. Por tanto, por el criterio de la primera derivada, g tiene un extremo relativo en c, y c es un número crítico de g. Puesto que $g'(c) = f''(c)$, y como por hipótesis $f''(c)$ existe, se deduce que $g'(c)$ existe. Por tanto, por el teorema 3.1.3, $g'(c) = 0$ y $f''(c) = 0$, que es lo que se deseaba demostrar. ■

El recíproco del teorema 3.5.5 no es válido. Esto es, si la segunda derivada de una función es cero en un número c, la gráfica de la función no necesariamente tiene un punto de inflexión donde $x = c$. Este hecho se demuestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** Considere la función f cuya gráfica se muestra en la figura 7, para la cual

$$f(x) = x^4 \qquad f'(x) = 4x^3 \qquad f''(x) = 12x^2$$

Observe que $f''(0) = 0$, pero como $f''(x) > 0$ si $x < 0$ y $f''(x) > 0$ si $x > 0$, el origen no es un punto de inflexión. Además, la gráfica es cóncava hacia arriba en cualquier número. ◀

▶ ***EJEMPLO 1*** La función del ejemplo 1 de la sección 3.4 está definida por

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Encuentre el punto de inflexión de la gráfica de f y determine dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Apoye la respuesta trazando en el mismo rectángulo de inspección la gráfica de f y la tangente de inflexión (la recta tangente en el punto de inflexión).

Solución Las derivadas primera y segunda de f son

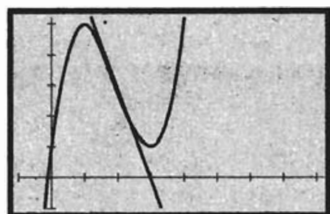
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \quad \text{y} \quad f''(x) = 6x - 12$$

Como $f''(x)$ existe para todos los valores de x, el único punto de inflexión posible de f ocurre donde $f''(x) = 0$, el cual ocurre en $x = 2$. Para determinar si se tiene un punto de inflexión en $x = 2$, debe verificarse si $f''(x)$ cambia de

signo, al mismo tiempo se determina la concavidad de la gráfica para los intervalos respectivos. Los resultados se resumen en la tabla 2.

Tabla 2

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < 2$			$-$	La gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 2$	3	-3	0	La gráfica de f tiene un punto de inflexión
$2 < x$			$+$	La gráfica de f es cóncava hacia arriba



[−1, 8.4] por [−1, 5.2]

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

FIGURA 13

En el ejemplo 1 de la sección 3.4, se mostró que f tiene un valor máximo relativo en 1 y un valor mínimo relativo en 3. La figura 13 muestra la gráfica de f y la tangente de inflexión en el rectángulo de inspección de [−1, 8.4] por [−1, 5.2], lo cual apoya la información de la tabla 2. ◀

La gráfica de una función puede tener un punto de inflexión en el punto donde la segunda derivada no existe, esto se ilustra en el ejemplo siguiente.

▶ ***EJEMPLO 2*** Dada

$$f(x) = x^{1/3}$$

encuentre el punto de inflexión de la gráfica de f y determine dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Apoye las respuestas gráficamente.

Solución Las derivadas primera y segunda de f son

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}x^{-2/3} \quad \text{y} \quad f''(x) = -\tfrac{2}{9}x^{-5/3}$$

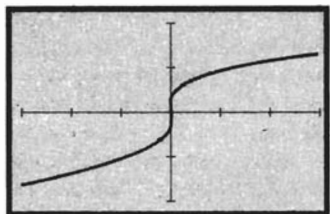
De las ecuaciones anteriores se observa que $f'(0)$ y $f''(0)$ no existen. En el ejemplo ilustrativo 3 de la sección 2.2, se mostró que el eje y es la recta tangente de la gráfica de esta función en el origen. Además,

$$f''(x) > 0 \quad \text{si } x < 0 \quad \text{y} \quad f''(x) < 0 \quad \text{si } x > 0$$

Por tanto, de la definición 3.5.4 (ii), f tiene un punto de inflexión en el origen. La concavidad de la gráfica se determina a partir del signo de $f''(x)$, los resultados se resumen en la tabla 3.

Tabla 3

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < 0$		$+$	$+$	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 0$	0	n.e.	n.e.	La gráfica de f tiene un punto de inflexión
$0 < x$		$+$	$-$	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo



[−3, 3] por [−2, 2]

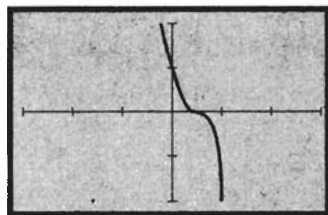
$f(x) = x^{1/3}$

FIGURA 14

La figura 14, que muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [−3, 3] por [−2, 2], apoya la información de la tabla 3. ◀

▶ ***EJEMPLO 3*** Sea

$$f(x) = (1 - 2x)^3$$



$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

$f(x) = (1 - 2x)^3$

FIGURA 15

Trace la gráfica, y a partir de ésta, estime el punto de inflexión y dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Confirme las estimaciones analíticamente.

Solución La figura 15 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$. De la gráfica se estima que el punto de inflexión está en $(0.5, 0)$, la gráfica es cóncava hacia arriba para $x < 0.5$, y la gráfica es cóncava hacia abajo para $x > 0.5$. Ahora se confirmarán estas estimaciones analíticamente. Las derivadas primera y segunda de f son

$$f'(x) = -6(1 - 2x)^2 \quad \text{y} \quad f''(x) = 24(1 - 2x)$$

Como $f''(x)$ existe para todos los valores de x, el único punto de inflexión posible es donde $f''(x) = 0$, esto es, en $x = 0.5$. De los resultados resumidos en la tabla 4, $f''(x)$ cambia de signo, de $+$ a $-$, en $x = 0.5$; de modo que la gráfica tiene un punto de inflexión ahí. Observe también que debido a que $f'(0.5) = 0$, la gráfica tiene una recta tangente horizontal en el punto de inflexión.

Tabla 4

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < 0.5$			$+$	La gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 0.5$	0	0	0	La gráfica de f tiene un punto de inflexión
$0.5 < x$			$-$	La gráfica de f es cóncava hacia abajo

◀

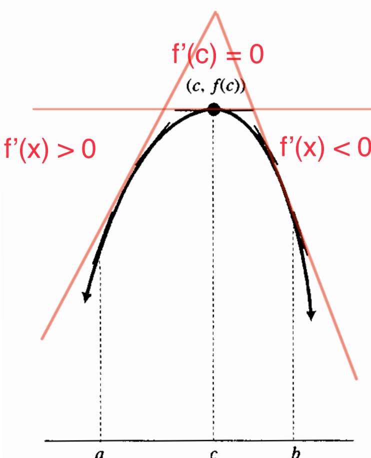


FIGURA 16

En la sección 3.4 se indicó cómo determinar si una función tiene un extremo relativo en un número crítico c al verificar el cambio de signo algebraico de la primera derivada en números de algún intervalo adecuado que tenga a c como extremo derecho y números de algún intervalo conveniente que tenga a c como extremo izquierdo, al pasar por c conforme x crece. Otro criterio para extremos relativos, denominado *criterio de la segunda derivada*, involucra sólo al número crítico c y a la segunda derivada. Antes de establecer el criterio, se presentará una discusión geométrica informal la cual recurrirá a su intuición.

Suponga que f es una función que tal que f'' existe en algún intervalo abierto (a, b) que contiene a c, y que $f'(c) = 0$. Suponga también que $f''(x) < 0$ si x está en (a, b). Entonces, del teorema 3.5.3(ii) la gráfica de f es cóncava hacia abajo en todos los punto de (a, b), y del teorema 3.4.3(ii) f' es decreciente en $[a, b]$. La figura 16 muestra la gráfica de una función que tiene estas propiedades, y también se muestra en algunos puntos un segmento de la recta tangente. La pendiente de la recta tangente es decreciente en $[a, b]$, lo cual es consistente con el hecho de que f' es decreciente en $[a, b]$. Observe que f tiene un valor máximo relativo en c.

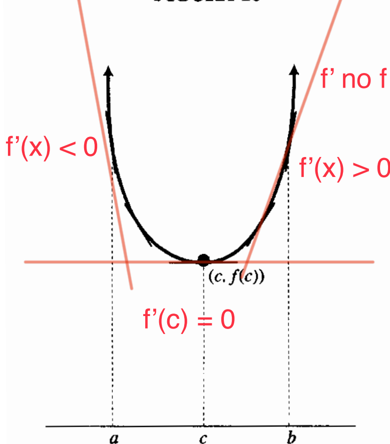


FIGURA 17

Ahora suponga que f es una función que tiene las propiedades de la función del párrafo anterior excepto que $f''(x) > 0$ si x está en (a, b). Entonces, por el teorema 3.5.3(i), la gráfica de f es cóncava hacia arriba en todos los puntos de (a, b), y del teorema 3.4.3(i), f' es creciente en $[a, b]$. La gráfica de una función que tiene estas propiedades se tiene en la figura 17. Las pendientes de la rectas tangentes, que se muestran en algunos puntos en la figura, son crecientes en $[a, b]$, y f tiene un valor mínimo relativo en c.

Ahora se establecerá y demostrará el *criterio de la segunda derivada para extremos relativos*, el cual confirma las observaciones geométricas de los dos párrafos precedentes.

*El criterio de la segunda derivada solo es válido aplicarlo cuando f'(c) existe en el número c y es igual a cero.

3.5.6 Teorema Criterio de la segunda derivada para extremos relativos

Sea c un número crítico de una función f en el que $f'(c) = 0$, y suponga que f'' existe para todos los valores de x en un intervalo abierto que contiene a c.

(i) Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un valor máximo relativo en c.
(ii) Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c.

Demostración del inciso (i) Por hipótesis, $f''(c)$ existe y es negativa; de modo que

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$$

Por tanto, por el teorema 3.1.8(ii), existe un intervalo abierto I que contiene a c tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0 \qquad \textbf{(6)}$$

para toda $x \neq c$ en el intervalo.

Sea I_1 el intervalo abierto que contiene todos los valores de x en I para los que $x < c$; por tanto, c es el extremo derecho del intervalo abierto I_1. Sea I_2 el intervalo abierto que contiene todos los valores de x en I para los que $x > c$; de modo que c es el extremo izquierdo del intervalo abierto I_2.

Entonces, si x está en I_1, $x - c < 0$, y de la desigualdad (6), $f'(x) - f'(c) > 0$ o, equivalentemente, $f'(x) > f'(c)$. Si x está en I_2, $x - c > 0$, y de (6), $f'(x) - f'(c) < 0$ o, equivalentemente, $f'(x) < f'(c)$.

Pero como $f'(c) = 0$, se concluye que si x está en I_1, $f'(x) > 0$, y si x está en I_2, $f'(x) < 0$. Por tanto, $f'(x)$ cambia de signo algebraico de positivo a negativo al pasar por c, conforme x crece; de modo que, por el criterio de primera derivada, f tiene un valor máximo relativo en c.

La demostración del inciso (ii) es semejante a la del inciso (i) y se deja como ejercicio (refiérase el ejercicio 56). ∎

EJEMPLO 4 Sea

$$f(x) = x^4 + \tfrac{4}{3}x^3 - 4x^2$$

determine los extremos relativos de f aplicando el criterio de la segunda derivada. Utilice esta información para dibujar la gráfica de f. Apoye los resultados en una graficadora.

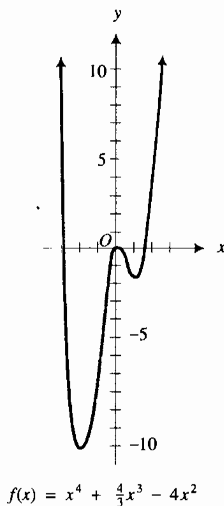
Solución Se calculan las derivadas primera y segunda de f:

$$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x \qquad f''(x) = 12x^2 + 8x - 8$$

Al considerar $f'(x) = 0$ se obtiene

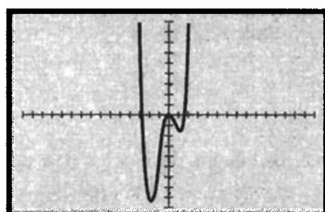
$$4x(x + 2)(x - 1) = 0$$
$$x = 0 \qquad x = -2 \qquad x = 1$$

Por tanto, los números críticos de f son -2, 0 y 1. Para determinar si existe o no un extremo relativo en alguno de estos números críticos, se considera



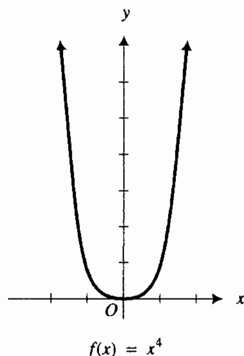
$f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$

FIGURA 18


[−15, 15] por [−11, 9]

$f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$

FIGURA 19



$f(x) = x^4$

FIGURA 20

el signo de la segunda derivada en ellos. Los resultados se resumen en la tabla 5.

Tabla 5

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x = -2$	$-\frac{32}{3}$	0	+	f tiene un valor mínimo relativo
$x = 0$	0	0	−	f tiene un valor máximo relativo
$x = 1$	$-\frac{5}{3}$	0	+	f tiene un valor mínimo relativo

A partir de la información de esta tabla y localizando algunos puntos más, se dibuja la gráfica de f, mostrada en la figura 18. La figura 19, que presenta la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [−15, 15] por [−11, 9], apoya los resultados. ◀

Si $f''(c) = 0$ y $f'(c) = 0$, nada puede concluirse acerca de un extremo relativo de f en c. Los tres ejemplos ilustrativos siguientes justifican esta afirmación. *El criterio de la segunda derivada no concluye algo cuando se tiene que f”(c) = 0.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 6** Si $f(x) = x^4$, entonces $f'(x) = 4x^3$ y $f''(x) = 12x^2$. De modo que, $f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$ son iguales a cero. Al aplicar el criterio de la primera derivada se aprecia que f tiene un valor mínimo relativo en 0. La gráfica de f se muestra en la figura 20. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 7** Si $g(x) = -x^4$, entonces $g'(x) = -4x^3$ y $g''(x) = -12x^2$. Por tanto, $g(0)$, $g'(0)$ y $g''(0)$ son iguales a cero. En este caso g tiene un valor máximo relativo en 0, como puede verse al aplicar el criterio de la primera derivada. La figura 21 muestra la gráfica de g. ◀

*No se aplica el criterio de la segunda derivada.

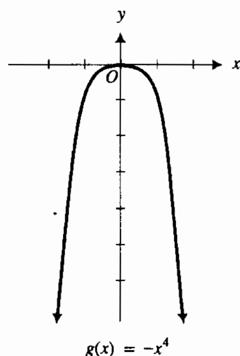
▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 8** Si $h(x) = x^3$, entonces $h'(x) = 3x^2$ y $h''(x) = 6x$, por lo que $h(0)$, $h'(0)$ y $h''(0)$ son iguales a cero. La función h no tiene extremo relativo en 0 porque si $x < 0$, $h(x) < h(0)$; y si $x > 0$, $h(x) > h(0)$. La gráfica de h se presenta en la figura 22. ◀

Los ejemplos ilustrativos 6-8 proporcionan ejemplos de tres funciones para las cuales su segunda derivada tiene un valor de cero en un punto cuya primera derivada es cero; en ese número, una función tiene un valor mínimo relativo, otra función tiene un valor máximo relativo, y la tercera función no tiene valor extremo relativo.

▶ ***EJEMPLO 5*** Para la función seno, determine los extremos relativos aplicando el criterio de la segunda derivada, y encuentre los puntos de inflexión de su gráfica. También determine las pendientes de las tangentes de inflexión. Trace la gráfica de la función seno en un intervalo de longitud 2π que contenga el punto de inflexión que posea la menor abscisa positiva. En el mismo rectángulo de inspección, trace la tangente de inflexión.

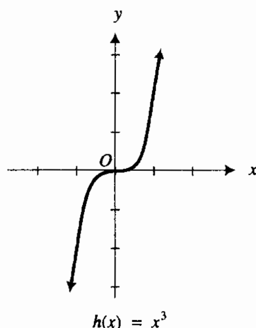
Solución Sean

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\operatorname{sen} x$$



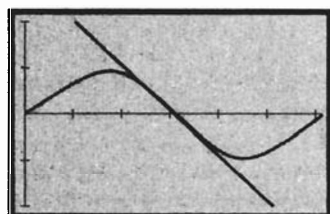
$g(x) = -x^4$

FIGURA 21



$h(x) = x^3$

FIGURA 22



[0, 2π] por [−2, 2]

$f(x) = \text{sen } x$

FIGURA 23

Las funciones f, f' y f'' están definidas para toda x. Los números críticos se obtiene al considerar $f'(x) = 0$:

$$\cos x = 0$$
$$x = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi \qquad k \text{ es cualquier número entero}$$

A fin de determinar si existe o no un extremo relativo en alguno de estos números críticos se obtiene el signo de la segunda derivada en cada uno de ellos.

$$\begin{aligned} f''(\tfrac{1}{2}\pi + k\pi) &= -\text{sen}(\tfrac{1}{2}\pi + k\pi) \\ &= -\cos k\pi \\ &= \begin{cases} -1 & \text{si } k \text{ es un entero par} \\ 1 & \text{si } k \text{ es un entero impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos al aplicar el criterio de la segunda derivada se resumen en la tabla 6.

Tabla 6

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ (k es un entero par)	1	0	−	f tiene un valor máximo relativo
$x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ (k es un entero impar)	−1	0	+	f tiene un valor mínimo relativo

Para determinar los puntos de inflexión se considera $f''(x) = 0$:

$$-\text{ sen } x = 0$$
$$x = k\pi \qquad k \text{ es cualquier entero}$$

Como $f''(x)$ cambia de signo en cada uno de estos valores de x, la gráfica tiene un punto de inflexión en cada punto que tiene alguna de estas abscisas. En cada punto de inflexión,

$$\begin{aligned} f'(k\pi) &= \cos k\pi \qquad k \text{ es cualquier entero} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es un entero par} \\ -1 & \text{si } k \text{ es un entero impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, las pendientes de las tangentes de inflexión son +1 o −1.

La figura 23 muestra la gráfica de la función seno y la tangente de inflexión en el punto $(\pi, 0)$ trazadas en el rectángulo de inspección de $[0, 2\pi]$ por $[-2, 2]$. ◀

EJERCICIOS 3.5

En los ejercicios 1 a 8, encuentre los puntos de inflexión de la función y determine dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Apoye las respuestas trazando en el mismo rectángulo de inspección la gráfica de la función y las tangentes de inflexión.

1. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

2. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 20$

3. $g(x) = x^4 - 8x^3$

4. $f(x) = x^4 - 2x^3$

5. $F(x) = \dfrac{2}{x^2 + 3}$

6. $G(x) = \dfrac{2}{x^2 + 4}$

7. $f(x) = 2 \text{ sen } 3x;\ x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

8. $f(x) = 3 \cos 2x;\ x \in [-\pi, \pi]$

En los ejercicios 9 a 16, trace la gráfica de la función y a partir de la gráfica estime el punto de inflexión y dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y en dónde lo es hacia abajo. Confirme las estimaciones analíticamente.

9. $f(x) = x^3 + 9x$

10. $g(x) = 2x^3 - 1$

11. $G(x) = (x - 1)^3$

12. $F(x) = (x + 2)^3$

13. $f(x) = (x + 2)^{1/3}$

14. $g(x) = (x - 1)^{1/3}$

15. $g(x) = \tan \frac{1}{2}x; x \in (-\pi, \pi)$

16. $f(x) = \cot 2x; x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$

En los ejercicios 17 a 22, encuentre el punto de inflexión de la gráfica de la función, si existe alguno, y determine dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Dibuje la gráfica.

17. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ 7 - x^2 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 - x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

19. $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{si } 0 < x \end{cases}$

20. $g(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

21. $F(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0 \\ x^4 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

22. $G(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^4 & \text{si } 0 < x \end{cases}$

En los ejercicios 23 a 30, dibuje una porción de la gráfica de alguna función f que pase por el punto donde $x = c$ si se satisfacen las condiciones dadas. Suponga que f es continua en algún intervalo abierto que contiene a c.

23. **(a)** $f'(x) > 0$ si $x < c$; $f'(x) < 0$ si $x > c$; $f''(x) < 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$
(b) $f'(x) > 0$ si $x < c$; $f'(x) < 0$ si $x > c$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x > c$

24. **(a)** $f'(x) > 0$ si $x < c$; $f'(x) > 0$ si $x > c$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$
(b) $f'(x) < 0$ si $x < c$; $f'(x) > 0$ si $x > c$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$

25. **(a)** $f''(c) = 0$; $f'(c) = 0$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$
(b) $f''(c) = 0$; $f'(x) = 0$; $f''(x) > 0$; si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x < c$

26. **(a)** $f'(c) = 0$; $f'(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x > c$
(b) $f'(c) = 0$; $f'(x) < 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x > c$

27. **(a)** $f''(c) = 0$; $f'(c) = -1$; $f''(x) < 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x > c$
(b) $f'(c)$ no existe; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x > c$

28. **(a)** $f''(c) = 0$; $f'(c) = \frac{1}{2}$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$
(b) $f'(c)$ no existe; $f''(x) < 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x > c$

29. $\lim\limits_{x \to c^-} f'(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to c^+} f'(x) = 0$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$

30. $\lim\limits_{x \to c^-} f'(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to c^+} f'(x) = -\infty$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x > c$

En los ejercicios 31 a 38, encuentre los extremos relativos de la función aplicando el criterio de la segunda derivada. Utilice esta información para dibujar la gráfica de la función. Apoye los resultados en la graficadora.

31. $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$

32. $h(x) = 2x^3 - 9x^2 + 27$

33. $g(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$ **34.** $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3$

35. $f(x) = \cos 3x; x \in [-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

36. $g(x) = 2 \operatorname{sen} 4x; x \in [0, \frac{1}{2}\pi]$

37. $h(x) = 4x^{1/2} + 4x^{-1/2}$ **38.** $f(x) = x\sqrt{x + 3}$

39. Dibuje la gráfica de alguna función f para la cual $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$ existan y sean **(a)** positivos para toda x; **(b)** negativos para toda x.

40. Para la función coseno, encuentre **(a)** los extremos relativos aplicando el criterio de la segunda derivada; **(b)** los puntos de inflexión de su gráfica; **(c)** las pendientes de las tangentes de inflexión. **(d)** Trace la gráfica de la función coseno en un intervalo de longitud 2π que contenga el punto de inflexión que posea la menor abscisa positiva. En el mismo rectángulo de inspección, trace la tangente de inflexión.

En los ejercicios 41 y 42, encuentre (a) los puntos de inflexión de la gráfica de la función, y (b) las pendientes de las tangentes de inflexión. (c) Trace la gráfica de la función en un intervalo de longitud π que contenga el punto de inflexión que posea la menor abscisa positiva. En el mismo rectángulo de inspección, trace la tangente de inflexión.

41. La función tangente. **42.** La función cotangente.

En los ejercicios 43 y 44, (a) encuentre los extremos relativos de la función aplicando el criterio de la segunda derivada. (b) Trace la gráfica de la función en un intervalo de longitud 2π.

43. La función cosecante. **44.** La función secante.

En los ejercicios 45 a 50, dibuje una porción de la gráfica de una función f que pase por los puntos $(c, f(c))$, $(d, f(d))$ y $(e, f(e))$ si se satisfacen las condiciones dadas. También dibuje un segmento de la recta tangente en cada uno de estos puntos, si existe la recta tangente. Suponga que $c < d < e$ y que f es continua en algún intervalo abierto que contiene a c, d y e.

45. **(a)** $f'(c) = 0$; $f'(d) = 1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(x) > 0$ si $x < d$; $f''(x) < 0$ si $x > d$
(b) $f'(c) = 0$; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(e) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < d$; $f''(x) > 0$ si $d < x < e$; $f''(x) < 0$ si $x > e$

46. **(a)** $f'(c) = 0$; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < d$; $f''(x) > 0$ si $x > d$
(b) $f'(c) = 0$; $f'(d) = 1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(e) = 0$; $f''(x) > 0$ si $x < d$; $f''(x) < 0$ si $d < x < e$; $f''(x) > 0$ si $x > e$

47. **(a)** $f'(c) = 0$; $f''(c) = 0$; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $c < x < d$; $f''(x) > 0$ si $x > d$
(b) $f'(c) = 0$; $\lim\limits_{x \to d^-} f'(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to d^+} f'(x) = +\infty$; $f'(e) = 0$; $f''(x) > 0$ si $x < d$; $f''(x) < 0$ si $x > d$

48. **(a)** $f'(c) = 0$; $f''(c) = 0$; $f'(d) = 1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $c < x < d$; $f''(x) < 0$ si $x > d$
(b) $f'(c) = 0$; $\lim_{x \to d^-} f'(x) = -\infty$; $\lim_{x \to d^+} f'(x) = -\infty$; $f'(e) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < d$; $f''(x) > 0$ si $x > d$

49. **(a)** $f'(c)$ no existe; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $c < x < d$; $f''(x) > 0$ si $x > d$
(b) $f'(c) = 0$; $f'(d)$ no existe; $f'(e) = 0$ $f''(e) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < d$; $f''(x) < 0$ si $d < x < e$; $f''(x) > 0$ si $x > e$

50. **(a)** $f'(c) = 0$; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f'(e)$ no existe; $f''(x) < 0$ si $x < d$; $f''(x) > 0$ si $d < x < e$; $f''(x) < 0$ si $x > e$
(b) $f'(c) = 0$; $f''(c) = 0$; $f'(d)$ no existe; $f'(e) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $c < x < d$; $f''(x) > 0$ si $x > d$

51. Si $f(x) = ax^3 + bx^2$, determine a, y b de modo que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en el punto $(1, 2)$. Apoye la respuesta gráficamente.

52. Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, determine a, b, y c de modo que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en el punto $(1, 2)$ y de modo que la pendiente de la tangente de inflexión sea igual a -2. Apoye la respuesta gráficamente.

53. Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determine a, b, c y d de modo que f tenga un extremo relativo en el punto $(0, 3)$ y que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en el punto $(1, -1)$. Apoye la respuesta gráficamente.

54. Si $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, determine a, b, c, d y e de modo que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en el punto $(1, -1)$, que contenga al origen y sea simétrica con respecto al eje y. Apoye la respuesta gráficamente.

55. Suponga que $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ son números críticos de una función f y que $f''(x) = x[\![\frac{1}{2}x^2 + 1]\!]$. En cada uno de estos números, determine si f tiene un extremo relativo y, en caso de ser así, si es un máximo relativo o un mínimo relativo.

56. Demuestre el inciso (ii) del criterio de la segunda derivada para extremos relativos.

57. Suponga que la gráfica de una función tiene un punto de inflexión en el punto $(c, f(c))$. ¿Qué puede concluirse acerca de **(a)** la continuidad de f en c; **(b)** la continuidad de f' en c; **(c)** la continuidad de f'' en c?

58. Suponga que f es una función para la cual $f''(x)$ existe para toda x de algún intervalo abierto I y que en un número c de I, $f''(c) = 0$ y $f'''(c)$ existe y es diferente de cero. Demuestre que el punto $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f. *Sugerencia:* la demostración es semejante a la del criterio de la segunda derivada.

59. **(a)** Explique por qué un punto de inflexión de la gráfica de una función que representa la productividad de un trabajador puede interpretarse como un punto de rendimiento decreciente. **(b)** Suponga que un trabajador de una fábrica que elabora marcos para pinturas puede hacer y marcos en x horas después de haber iniciado a las 8 a.m., y

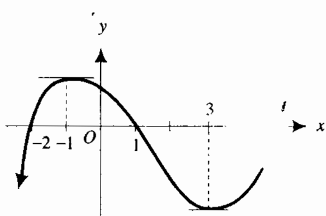
$$y = 3x + 8x^2 - x^3 \qquad 0 \le x \le 4$$

Determine en qué tiempo el trabajador se desempeña con mayor eficiencia; esto es, ¿cuándo el trabajador alcanza el punto de rendimiento decreciente?

60. Explique cuándo se utilizaría el criterio de la segunda derivada para determinar extremos relativos y cuándo emplearía el criterio de la primera derivada. En su explicación, indique las ventajas y desventajas de cada criterio.

3.6 TRAZO DE LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES Y DE SUS DERIVADAS

En las secciones 3.4 y 3.5 se indicó cómo pueden determinarse propiedades de las gráficas de funciones a partir de sus derivadas. Ahora se mostrará cómo estas propiedades pueden determinarse a partir de la gráfica de la derivada y después emplearse para dibujar una posible gráfica de la función original.



Gráfica de f'

FIGURA 1

EJEMPLO 1 La gráfica de la derivada de la función del ejemplo 4 de la sección 3.4 se muestra en la figura 1. A partir de esta gráfica determine las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f y dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Dibuje una posible gráfica de f que tenga estas propiedades así como las propiedades obtenidas en el ejemplo 4 de la sección 3.4. Suponga que los únicos ceros de f son 3.5 y 6.

Solución La segunda derivada f'' evaluada en el número c es la pendiente de la recta tangente en el punto donde $x = c$ de la gráfica de f'. En

consecuencia, como la gráfica de f' tiene rectas tangentes horizontales en $x = -1$ y en $x = 3$, $f''(-1) = 0$ y $f''(3) = 0$. En la figura 1 se observa que f' es creciente, es decir, $f''(x) > 0$ cuando $x < -1$ y cuando $x > 3$; por tanto, por el teorema 3.5.3(i), la gráfica de f es cóncava hacia arriba para estos valores de x. Además, f' es decreciente, esto es, $f''(x) < 0$ cuando $-1 < x < 3$; por tanto, por el teorema 3.5.3(ii), la gráfica de f es cóncava hacia abajo para estos valores de x. Más aún, de la definición 3.5.4, se puede concluir que la gráfica de f tiene puntos de inflexión donde $x = -1$ y $x = 3$. Estos hechos se resumen en la tabla 1.

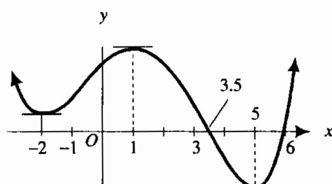
Tabla 1

	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < -1$	+	La gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = -1$	0	La gráfica de f tiene un punto de inflexión
$-1 < x < 3$	−	La gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 3$	0	La gráfica de f tiene un punto de inflexión
$3 < x$	+	La gráfica de f es cóncava hacia arriba

Ahora refiérase a la tabla 2, la cual contiene los hechos de la tabla 1 anterior y de la tabla 4 de la sección 3.4.

Tabla 2

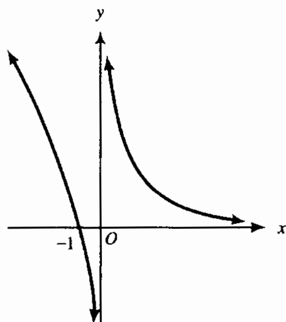
	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < -2$	−	+	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = -2$	0	+	f tiene un valor mínimo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$-2 < x < -1$	+	+	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = -1$	+	0	f es creciente; la gráfica de f tiene un punto de inflexión
$-1 < x < 1$	+	−	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 1$	0	−	f tiene un valor máximo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$1 < x < 3$	−	−	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 3$	−	0	f es decreciente; la gráfica de f tiene un punto de inflexión
$3 < x < 5$	−	+	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 5$	0	+	f tiene un valor mínimo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$5 < x$	+	+	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba.



Gráfica de f

FIGURA 2

Puesto que los únicos ceros de f son 3.5 y 6, estos números son las únicas intercepciones x de la gráfica. Con esta información y las propiedades de la tabla 2, se dibuja una posible gráfica de f, la cual se muestra en la figura 2. ◀



Gráfica de g'

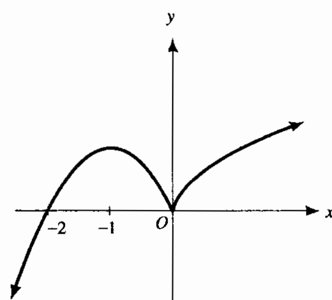
FIGURA 3

▶ ***EJEMPLO 2*** La figura 3 muestra la gráfica de la derivada de la función g del ejemplo 5 de la sección 3.4. A partir de esta gráfica determine las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de g y dónde la gráfica de g es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Dibuje una posible gráfica de g que tenga estas propiedades así como las propiedades obtenidas en el ejemplo 5 de la sección 3.4. Suponga que los únicos ceros de g son −2 y 0.

Solución De la gráfica de g', g' es decreciente, es decir, $g''(x) < 0$ cuando $x < 0$ y cuando $x > 0$. Por tanto, la gráfica de g es cóncava hacia abajo para estos valores de x. La gráfica de g nunca es cóncava hacia arriba. Como $g'(0)$ no existe, tampoco existe $g''(0)$. Puesto que $g''(x)$ no cambia de signo, la gráfica de g no tiene puntos de inflexión. Esta información se incorpora a la de la tabla 5 de la sección 3.4 para obtener la tabla 3.

Tabla 3

	$g'(x)$	$g''(x)$	*Conclusión*
$x < -1$	+	–	g es creciente; la gráfica de g es cóncava hacia abajo
$x = -1$	0	–	g tiene un valor máximo relativo; la gráfica de g es cóncava hacia abajo
$-1 < x < 0$	–	–	g es decreciente; la gráfica de g es cóncava hacia abajo
$x = 0$	n. e.	n. e.	g tiene un valor mínimo relativo
$0 < x$	+	–	g es creciente; la gráfica de g es cóncava hacia abajo



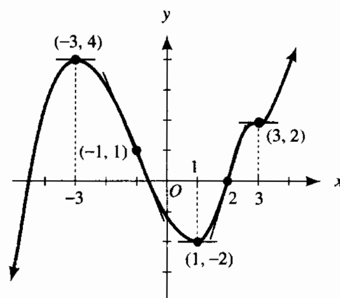
Gráfica de g

FIGURA 4

La figura 4 muestra una posible gráfica de g dibujada a partir de las propiedades de la tabla 3 y del hecho de que los únicos ceros de g son −2 y 0. ◀

En los dos ejemplos anteriores se obtuvo la gráfica de una función a partir de la gráfica de su derivada. En el ejemplo siguiente, se dibujarán las derivadas primera y segunda de una función a partir de la gráfica de la función.

▶ ***EJEMPLO 3*** En la figura 5 se muestran la gráfica de una función f y segmentos de las tangentes de inflexión. A partir de la figura, determine la información siguiente e incorpórela en una tabla semejante a las tabla 2 y 3: (i) los intervalos en los que f es creciente; (ii) los intervalos en los que f es decreciente; (iii) los extremos relativos de f; (iv) los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba; (v) los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia abajo; (vi) las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f. A partir de la información de la tabla, dibuje posibles gráficas de f' y f''.



Gráfica de f

FIGURA 5

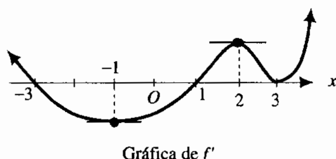
Solución De la figura se obtiene la información siguiente:

(i) f es creciente en $(-\infty, -3]$, $[1, 3]$ y $[3, +\infty)$;
(ii) f es decreciente en $[-3, 1]$;
(iii) f tiene un valor máximo relativo de 4 en $x = -3$, y un valor mínimo relativo de -2 en $x = 1$;
(iv) la gráfica de f es cóncava hacia arriba para x en los intervalos $(-1, 2)$ y $(3, +\infty)$;
(v) la gráfica de f es cóncava hacia abajo para x en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, 3)$;
(vi) la gráfica de f tiene puntos de inflexión donde $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$.

En la tabla 4, se incorpora esta información junto con los signos de f' y f'' en los intervalos especificados en (i)–(vi).

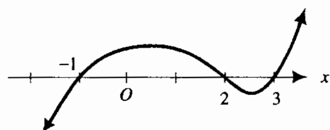
Tabla 4

	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < -3$	+	−	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = -3$	0	−	f tiene un valor máximo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$-3 < x < -1$	−	−	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = -1$	−	0	f es decreciente; la gráfica de f tiene un punto de inflexión
$-1 < x < 1$	−	+	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 1$	0	+	f tiene un valor mínimo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$1 < x < 2$	+	+	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 2$	+	0	f es creciente; la gráfica de f tiene un punto de inflexión
$2 < x < 3$	+	−	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 3$	0	0	La gráfica de f tiene un punto de inflexión con una recta tangente horizontal
$3 < x$	+	+	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba.



Gráfica de f'

FIGURA 6



Gráfica de f''

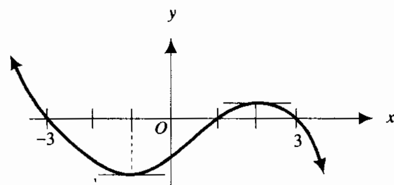
FIGURA 7

A partir de la tabla se han dibujado en las figuras 6 y 7 posibles gráficas de f' y f'', respectivamente. ◀

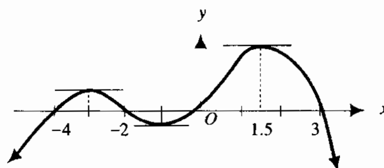
EJERCICIOS 3.6

En los ejercicios 1 a 6, la figura adjunta muestra la gráfica de la derivada de una función f cuyo dominio es el conjunto de los números reales y la cual es continua en cada número. Estas gráficas son las mismas que las mostradas en el ejercicio indicado de la sección 3.4. A partir de la gráfica, determine las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f y dónde la gráfica de f es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Incorpore esta información y la información obtenida en el ejercicio correspondiente de la sección 3.4 en una tabla similar a las tablas 2 y 3 de esta sección. Dibuje un posible gráfica de f que tenga las propiedades de la tabla si los únicos ceros de f son los indicados en cada ejercicio.

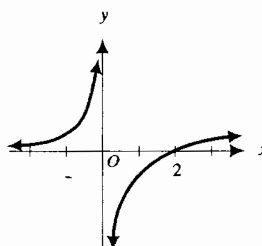
1. Refiérase al ejercicio 39 de la sección 3.4. Los ceros de f son $-4, -1, 2$ y 4.



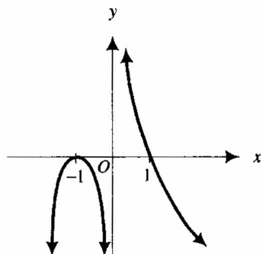
2. Refiérase al ejercicio 40 de la sección 3.4. Los ceros de f son $-1, 2$ y 4.



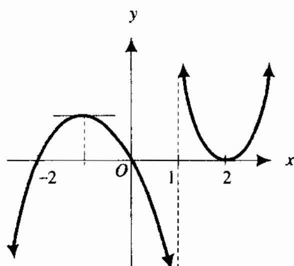
3. Refiérase al ejercicio 41 de la sección 3.4. Los ceros de f son 0 y 4.



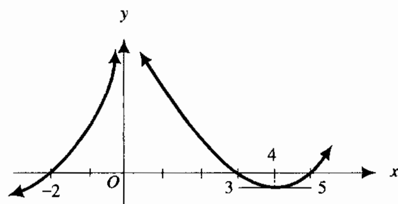
4. Refiérase al ejercicio 42 de la sección 3.4. Los ceros de f son -1 y 1.



5. Refiérase al ejercicio 43 de la sección 3.4. El cero de f es 1.

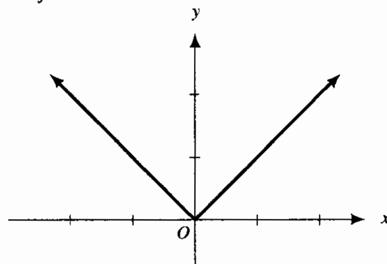


6. Refiérase al ejercicio 44 de la sección 3.4. Los ceros de f son -3 y 0.

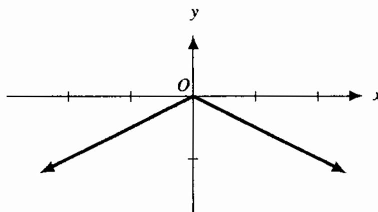


En los ejercicios 7 a 18, la figura adjunta muestra la gráfica de la derivada de una función f cuyo dominio es el conjunto de los números reales y la cual es continua en todo número. A partir de la gráfica, determine la información siguiente e incorpórela en una tabla similar a las tablas 2 y 3 de esta sección: (i) los intervalos en los que f es creciente; (ii) los intervalos en los que f es decreciente; (iii) los extremos relativos de f; (iv) los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba; (v) los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia abajo; (vi) las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f. Dibuje una posible gráfica de f que tenga las propiedades de la tabla si los únicos ceros de f son los indicados en cada ejercicio.

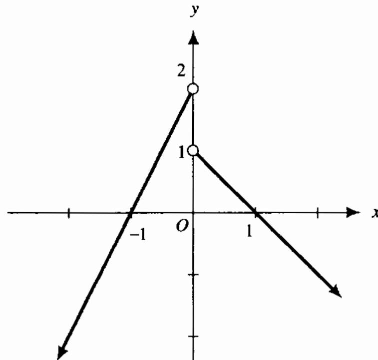
7. El cero de f es 0.



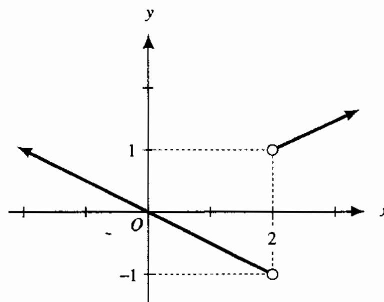
8. El cero de f es 0.



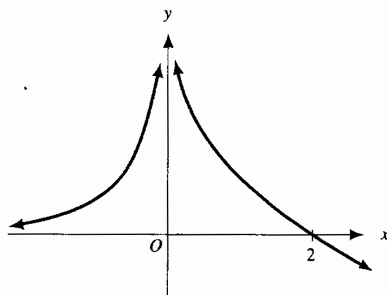
9. Los ceros de f son -2, 0 y 2.



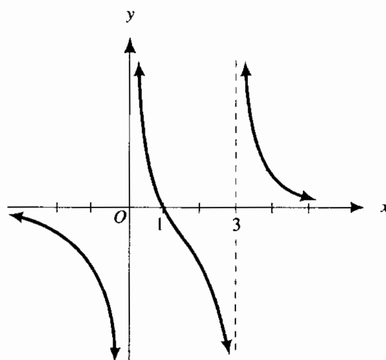
10. Los ceros de f son 0 y 4.



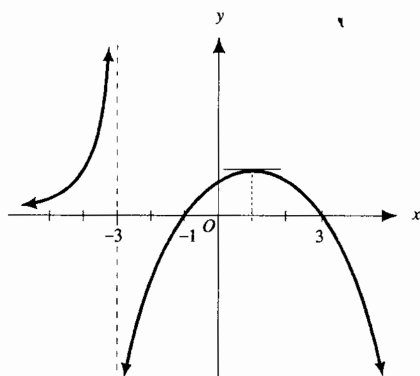
11. Los ceros de f son 0 y 3.



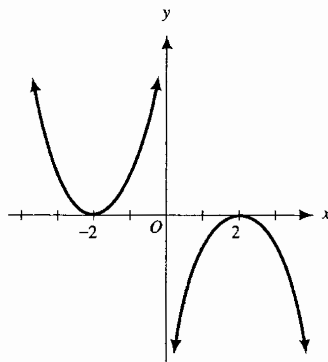
14. Los ceros de f son 0 y 3.



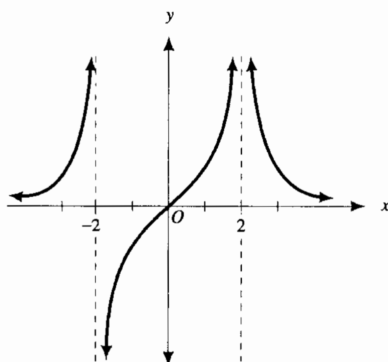
12. Los ceros de f son −4, −2, 1 y 5.



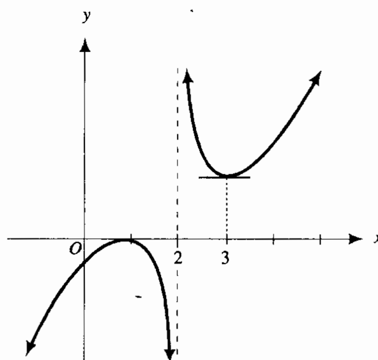
15. Los ceros de f son −2, y 2.



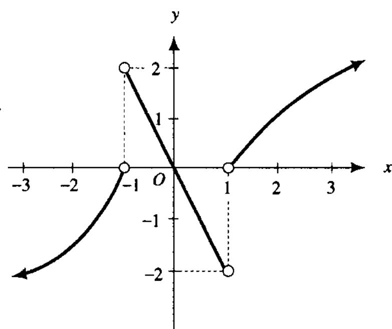
13. Los ceros de f son −3, −1 y 1.



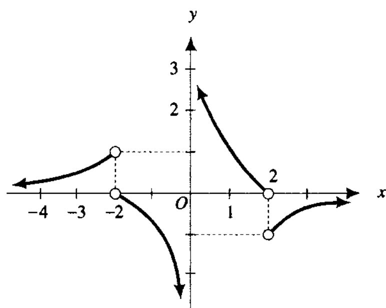
16. Los ceros de f son 1 y 3.



17. Los ceros de f son -2, 0 y 2.

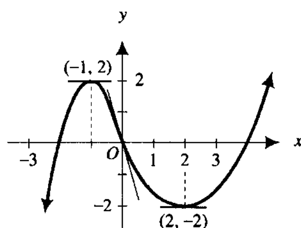


18. Los ceros de f son -3, 0 y 3.

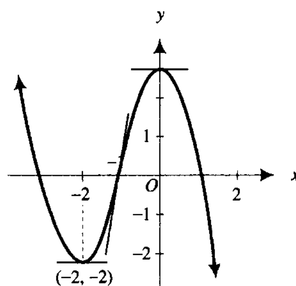


En los ejercicios 19 a 26, se muestran en la figura adjunta la gráfica de una función f y algunos segmentos de las tangentes de inflexión. A partir de la figura determine la siguiente información e incorpórela en una tabla semejante a la tabla 4: (i) los intervalos en los que f es creciente; (ii) los intervalos en los que f es decreciente; (iii) los extremos relativos de f; (iv) los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba; (v) los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia abajo; (vi) las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f. A partir de la información de la tabla, dibuje posibles gráficas de f' y f''.

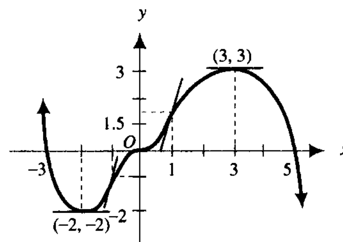
19.



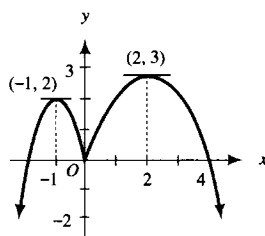
20.



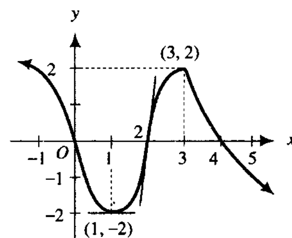
21.



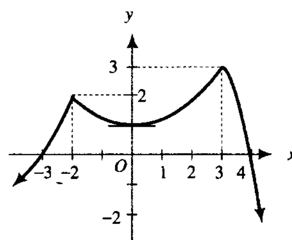
22.



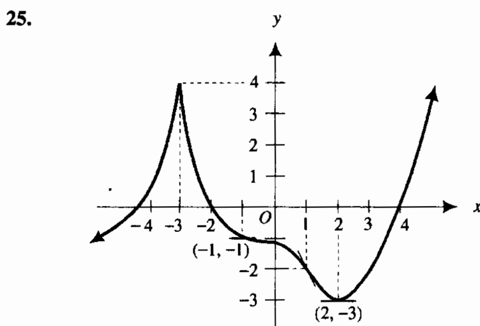
23.



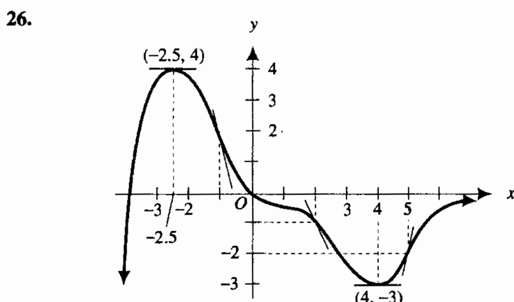
24.



25.



26.



27. Si $f(x) = 3x^2 + x|x|$ demuestre que $f''(0)$ no existe, sin embargo, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en todo número. Apoye este resultado gráficamente trazando la gráfica de f y la gráfica de NDER2 $(f(x), x)$ en rectángulos de inspección separados.

28. Dada $f(x) = x^r - rx + k$, donde $r > 0$ y $r \neq 1$, demuestre que: **(a)** si $0 < r < 1$, entonces f tiene un valor máximo relativo en 1; **(b)** si $r > 1$, entonces f tiene un valor mínimo relativo en 1.

29. Dada $f(x) = x^3 + 3rx + 5$, demuestre que: **(a)** si $r > 0$ entonces f no tiene extremos relativos; **(b)** si $r < 0$, entonces f tiene un valor máximo relativo y un valor mínimo relativo.

30. Dada $f(x) = x^2 + rx^{-1}$, demuestre que, independientemente del valor de r, f tiene un valor mínimo relativo y no tiene ningún valor máximo relativo.

31. Dibuje la gráfica de la ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. La gráfica no es la de una función. Sin embargo, la porción de la gráfica del primer cuadrante es la gráfica de una función. Obtenga esta porción por medio de las propiedades de las gráficas que se han estudiado en este capítulo, y después complete la gráfica mediante las propiedades de simetría. Recuerde, la concavidad juega un papel importante. Apoye los resultados trazando las gráficas de las dos funciones

$$f_1(x) = (1 - x^{2/3})^{3/2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = -(1 - x^{2/3})^{3/2}$$

en el mismo rectángulo de inspección.

32. Explique cómo pueden determinarse las propiedades de la gráfica de una función a partir de las gráficas de las derivadas primera y segunda de la función.

33. Explique cómo puede emplearse la gráfica de una función para dibujar posibles gráficas de las derivadas primera y segunda de la función.

3.7 LÍMITES AL INFINITO

En la sección 1.7 se estudiaron límites infinitos donde los valores de función crecían o decrecían sin límite conforme la variable independiente se aproximaba a un número real. Ahora se considerarán límites de funciones cuando la variable independiente crece o decrece sin límite. Se inicia con la función definida por

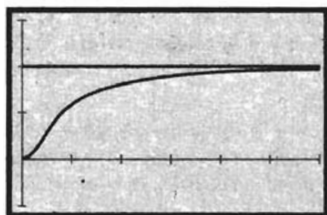
$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

Considere que x toma los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 100, 1 000, y así sucesivamente, permitiendo que x crezca sin límite. Los valores de función correspondientes, exactos o aproximados mediante calculadora a seis cifras decimales, se muestran en la tabla 1. Observe en la tabla que conforme x crece, a través de valores positivos, los valores de función cada vez se acercan más a 2. Este hecho está apoyado por la figura 1, la cual muestra la recta $y = 2$ y la gráfica de f trazadas en el rectángulo de inspección de [0, 6] por [−1, 3]. Ahora se examinará cómo se aproxima $f(x)$ a 2 para valores específicos de x. En particular,

$$\begin{aligned} 2 - f(4) &= 2 - 1.882353 \\ &= 0.117647 \end{aligned}$$

Tabla 1

x	$f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$
0	0
1	1
2	1.6
3	1.8
4	1.882353
5	1.923077
10	1.980198
100	1.999800
1 000	1.999998



[0, 6] por [−1, 3]

$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

$y = 2$

FIGURA 1

Por tanto, la diferencia entre 2 y $f(x)$ es 0.117647 cuando $x = 4$. Además,

$$2 - f(100) = 2 - 1.999800 = 0.000200$$

En consecuencia, la diferencia entre 2 y $f(x)$ es 0.000200 cuando $x = 100$.

Al continuar así, intuitivamente se aprecia que los valores de $f(x)$ pueden hacerse tan cercanos a 2 como se desee tomando x suficientemente grande. En otras palabras, la diferencia entre 2 y $f(x)$ puede hacerse tan pequeña como se quiera tomando cualquier número x mayor que algún número positivo suficientemente grande. O, avanzando un paso más, para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar qué tan pequeña sea, se puede determinar un número $N > 0$ tal que si $x > N$, entonces $|f(x) - 2| < \epsilon$.

Cuando la variable independiente x crece sin límite a través de valores positivos, se escribe "$x \to +\infty$". Del ejemplo anterior se puede decir que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$$

3.7.1 Definición del límite de $f(x)$ cuando x crece sin límite

Sea f una función que está definida en todo número de algún intervalo abierto $(a, +\infty)$. El **límite de $f(x)$ cuando x crece sin límite, es L,** lo que se escribe como

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar qué tan pequeña sea, existe un número $N > 0$ tal que

$$\text{si } x > N \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

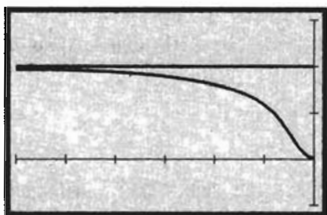
Tabla 2

x	$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$
−1	1
−2	1.6
−3	1.8
−4	1.882353
−5	1.923077
−10	1.980198
−100	1.999800
−1 000	1.999998

Nota: Cuando se escribe $x \to +\infty$, no tiene un significado similar al que se tiene cuando se escribe, por ejemplo, $x \to 1000$. El símbolo $x \to +\infty$ indica sólo el comportamiento de la variable x.

Ahora considere la misma función de modo que x tome los valores −1, −2, −3, −4, −5, −10, −100, −1000, y así sucesivamente, permitiendo que x decrezca sin límite a través de valores negativos. La tabla 2 proporciona los valores de función de $f(x)$ correspondientes.

Observe que los valores de función son los mismos para los números negativos que para los números positivos. Vea la figura 2, la cual muestra la recta $y = 2$ y la gráfica de f trazadas en el rectángulo de inspección de [−6, 0] por [−1, 3].



[−6, 0] por [−1, 3]

$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

$y = 2$

FIGURA 2

Intuitivamente se observa que conforme x decrece sin límite, $f(x)$ se aproxima a 2; esto es, $|f(x) - 2|$ puede hacerse tan pequeña como se desee tomando cualquier número x menor que algún número negativo que tenga valor absoluto suficientemente grande. Formalmente se dice que para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar qué tan pequeña sea, se puede determinar un número $N < 0$ tal que si $x < N$, entonces $|f(x) - 2| < \epsilon$. Utilizando el símbolo $x \to -\infty$ para denotar que la variable x decrece sin límite esto se expresa como

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$$

3.7.2 Definición del límite de $f(x)$ cuando x decrece sin límite

Sea f una función que está definida en todo número de algún intervalo abierto $(-\infty, a)$. El **límite de $f(x)$ cuando x decrece sin límite, es L,** lo que se escribe como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar qué tan pequeña sea, existe un número $N < 0$ tal que

$$\text{si } x < N \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Nota: Como en la nota posterior a la definición 3.7.1, el símbolo $x \to -\infty$ indica sólo el comportamiento de la variable x.

Los teoremas de límites 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 de la sección 1.5 y el teorema 12 de límites de la sección 1.7 son válidos cuando "$x \to a$" se sustituye por "$x \to +\infty$" o "$x \to -\infty$". Además, se tienen los teoremas de límites siguientes.

3.7.3 Teorema 13 de límites

Si r es cualquier número entero positivo, entonces

(i) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

(ii) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

Demostración de (i) Para demostrar el inciso (i) se debe probar que se cumple la definición 3.7.1 para $f(x) = 1/x^r$ y $L = 0$; esto es, se debe demostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que

$$\text{si } x > N \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{1}{x^r} - 0 \right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } x > N \quad \text{entonces} \quad |x|^r > \frac{1}{\epsilon}$$

o equivalentemente, puesto que $r > 0$,

$$\text{si } x > N \quad \text{entonces} \quad |x| > \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{1/r}$$

Para que lo anterior se cumpla, se toma $N = (1/\epsilon)^{1/r}$. Así,

$$\text{si } N = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{1/r} \quad \text{y} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{1}{x^r} - 0 \right| < \epsilon$$

Esto demuestra el inciso (i). ■

La demostración del inciso (ii) es análoga a la demostración del inciso (i) y se deja como ejercicio (véase el ejercicio 62).

EJEMPLO 1 Sea

$$f(x) = \frac{4x - 3}{2x + 5}$$

Determine $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y apoye la respuesta gráficamente.

Solución A fin de aplicar el teorema 13 de límites, se divide el numerador y el denominador entre x, obteniéndose

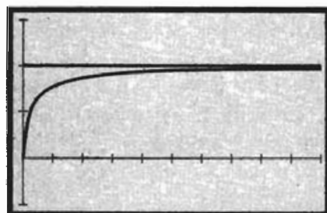
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x - 3}{2x + 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{5}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 4 - \lim\limits_{x \to +\infty} 3 \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \lim\limits_{x \to +\infty} 5 \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{4 - 3 \cdot 0}{2 + 5 \cdot 0}$$

$$= 2$$

Se apoya la respuesta al trazar la gráfica de f y la recta $y = 2$ en el rectángulo de inspección de [0, 100] por [−1, 3], como se muestra en la figura 3. ◀



[0, 100] por [−1, 3]

$f(x) = \frac{4x - 3}{2x + 5}$

$y = 2$

FIGURA 3

EJEMPLO 2 Sea

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1}$$

Determine $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y apoye la respuesta gráficamente.

Solución Con el fin de aplicar el teorema 13 de límites, se divide el numerador y el denominador entre la potencia más grande de x que ocurra en el numerador o denominador, la cual es x^3.

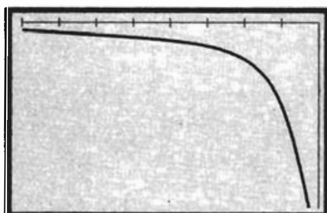
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{4 - \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} 2 \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} - \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} + \lim\limits_{x \to -\infty} 5 \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x \to -\infty} 4 - \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{2 \cdot 0 - 0 + 5 \cdot 0}{4 - 0}$$

$$= 0$$

La figura 4, que muestra la gráfica de f en el rectángulo de inspección de [−80, 0] por [−0.25, 0], apoya la respuesta. ◀



[−80, 0] por [−0.25, 0]

$f(x) = \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1}$

FIGURA 4

EJEMPLO 3 Sea

$$g(x) = \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}}$$

Determine $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ y apoye la respuesta gráficamente.

Solución Como el mayor exponente de x es 2 y se tiene bajo el signo radical, se divide el numerador y el denominador entre $\sqrt{x^2}$, que equivale a $|x|$. Al efectuar la división se tiene,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{3x}{\sqrt{x^2}} + \dfrac{4}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{\sqrt{2x^2 - 5}}{\sqrt{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{3x}{|x|} + \dfrac{4}{|x|}}{\sqrt{2 - \dfrac{5}{x^2}}}$$

Debido a que $x \to +\infty$, $x > 0$; por tanto, $|x| = x$. Así se tiene

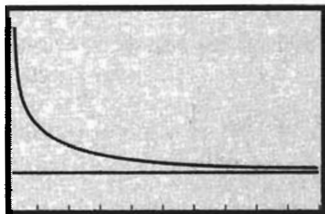
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{3x}{x} + \dfrac{4}{x}}{\sqrt{2 - \dfrac{5}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 3 + \lim\limits_{x \to +\infty} 4 \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \lim\limits_{x \to +\infty} 5 \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{3 + 4 \cdot 0}{\sqrt{2 - 5 \cdot 0}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}$$

A fin de apoyar gráficamente la respuesta, se trazan las gráficas de g y de la recta $y = 3/\sqrt{2}$ en el rectángulo de inspección de [2, 100] por [2, 3], como se muestra en la figura 5. ◀



[2, 100] por [2, 3]

$f(x) = \dfrac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}}$

$y = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

FIGURA 5

▶ EJEMPLO 4 Para la función del ejemplo 3, determine $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ y apoye la respuesta gráficamente.

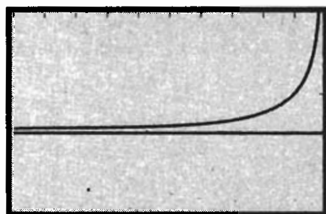
Solución De nuevo se inicia dividiendo el numerador y el denominador entre $|x|$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{3x}{|x|} + \dfrac{4}{|x|}}{\sqrt{2 - \dfrac{5}{x^2}}}$$

Puesto que $x \to -\infty$, $x < 0$; por tanto, $|x| = -x$. Se tiene, entonces,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{3x}{-x} + \dfrac{4}{-x}}{\sqrt{2 - \dfrac{5}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} (-3) - \lim\limits_{x \to -\infty} 4 \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty} 2 - \lim\limits_{x \to -\infty} 5 \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}}}$$



$[-100, -2]$ por $[-2.5, -1.5]$

$$g(x) = \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}}$$

$$y = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

FIGURA 6

$$= \frac{-3 - 4 \cdot 0}{\sqrt{2 - 5 \cdot 0}}$$
$$= -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

La figura 6 muestra la gráfica de g y la recta $y = -3/\sqrt{2}$ en el rectángulo de inspección de $[-100, -2]$ por $[-2.5, -1.5]$, la cual apoya la respuesta. ◀

A continuación se considerarán límites "infinitos" al infinito mediante definiciones formales para cada uno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Por ejemplo, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si la función f está definida en algún intervalo abierto $(a, +\infty)$ y si para cualquier número $N > 0$ existe un número $M > 0$ tal que si $x > M$, entonces $f(x) > N$. Las otras definiciones se dejan como ejercicio (consulte el ejercicio 61).

▶ EJEMPLO 5 Determine

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x + 1}$$

Solución Si se divide el numerador y el denominador entre x^2, se obtiene

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Al evaluar el límite del denominador se tiene

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$$
$$= 0 + 0$$
$$= 0$$

Por tanto, el límite del denominador es 0, y el denominador se aproxima a 0 a través de valores positivos.

El límite del numerador es 1, y así, por el teorema 12(i) de límites (1.7.4), se tiene

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x + 1} = +\infty$$ ◀

▶ EJEMPLO 6 Calcule

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5}$$

Solución

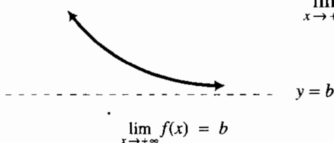
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{x} - 1}{\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}$$

Los límites del numerador y del denominador se consideran por separado:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x} - 1 \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x \to +\infty} 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{x^2}$$

$$= 0 - 1 \qquad\qquad = 0 + 0$$

$$= -1 \qquad\qquad = 0$$

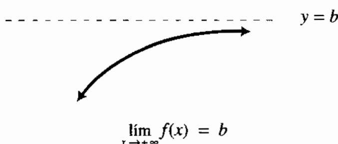


$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$

FIGURA 7

Por tanto, se tiene el límite de un cociente en el que el límite del numerador es -1 y el límite del denominador es 0, cuando el denominador se aproxima a 0 a través de valores positivos. Por el teorema 12 (iii) de límites,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5} = -\infty$$ ◀



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$

FIGURA 8

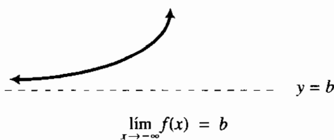
En la sección 1.7 se estudiaron las asíntotas verticales de una gráfica como una aplicación de los límites infinitos. Las *asíntotas horizontales* proporcionan una aplicación de los límites al infinito.

3.7.4 Definición de asíntota horizontal

La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función f si al menos una de las proposiciones siguientes es verdadera:

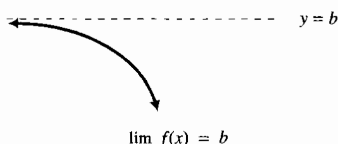
(i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, **y para algún número** N, **si** $x > N$, **entonces** $f(x) \neq b$;

(ii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$, **y para algún numero** N, **si** $x < N$, **entonces** $f(x) \neq b$.



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

FIGURA 9

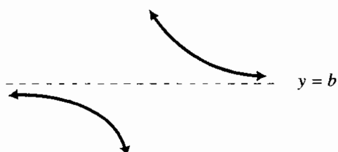


$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

FIGURA 10

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Cada una de las figuras 7 a 10 muestra la gráfica de una función para la cual la recta $y = b$ es una asíntota horizontal. En las figuras 7 y 8, se aplica el inciso (i) de la definición 3.7.4, y para las figuras 9 y 10, el inciso (ii) es verdadero. Los dos incisos (i) y (ii) se cumplen para la función de la figura 11.

La figura 12 muestra la gráfica de una función f para la cual $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, pero no existe ningún número N tal que si $x > N$, entonces $f(x) \neq b$. En consecuencia, la recta $y = b$ no es una asíntota horizontal de la gráfica de f. Un ejemplo de este tipo de funciones se presenta en el ejercicio 63 de la sección 5.4. ◀



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

FIGURA 11

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Al principio de esta sección se motivó la definición de límites al infinito con la función definida por

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

y se mostró que $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ son igual a 2. Por tanto, la recta $y = 2$ es una asintota horizontal de la gráfica de f. La gráfica trazada junto con la recta $y = 2$ en las figuras 1 y 2 apoyan este hecho. ◀



FIGURA 12

▶ ***EJEMPLO 7*** Obtenga las asíntotas horizontales de la gráfica de la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

y utilícelas para dibujar la gráfica de f. Apoye los resultados trazando la gráfica de f y las asíntotas en el mismo rectángulo de inspección.

Solución Primero se considerará el límite $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Al dividir el numerador y el denominador entre $\sqrt{x^2}$ se tiene

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

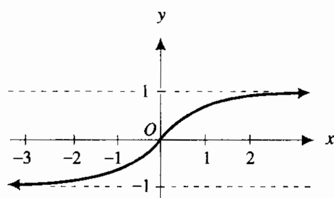
Puesto que $x \to +\infty$, $x > 0$; por tanto, $|x| = x$. Así,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to +\infty} 1}{\sqrt{\lim_{x \to +\infty} 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 0}}$$

$$= 1$$



$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

FIGURA 13

En consecuencia, por la definición 3.7.4(i), la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

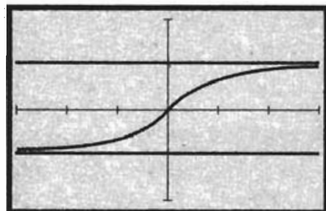
Ahora se considerará el límite $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, de nuevo se dividirá el numerador y el denominador entre $\sqrt{x^2}$, que equivale a $|x|$. Como $x \to -\infty$, $x < 0$; por lo que $|x| = -x$. Entonces se tiene

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x}{-x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to -\infty} (-1)}{\sqrt{\lim_{x \to -\infty} 1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1 + 0}}$$

$$= -1$$



[-3, 3] por [-2, 2]

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$y = 1$ y $y = -1$

FIGURA 14

De acuerdo con la definición 3.7.4(ii), la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

Con las dos asíntotas horizontales como guías, de dibuja la gráfica de f obteniéndose la figura 13. Con el fin apoyar los resultados obtenidos, se traza la gráfica de f y las rectas $y = 1$ y $y = -1$ en el rectángulo de inspección de [-3, 3] por [-2, 2], como se muestra en la figura 14. ◀

A continuación se definirá el término *asíntota oblicua*, aquella que no es vertical ni horizontal. Observe que la definición de asíntota horizontal es un caso especial.

3.7.5 Definición de asíntota oblicua

La gráfica de la función f tiene la recta $y = mx + b$ como una **asíntota oblicua** si alguna de las proposiciones siguientes es verdadera:

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$, y para algún número $M > 0$, $f(x) \neq mx + b$ siempre que $x > M$;

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$, y para algún número $M < 0$, $f(x) \neq mx + b$ siempre que $x < M$.

El inciso (i) de la definición indica que para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número $N > 0$ tal que

$$\text{si } x > N \quad \text{entonces} \quad 0 < |f(x) - (mx + b)| < \epsilon$$

esto es, se puede hacer que el valor de función $f(x)$ esté tan cerca del valor de $mx + b$ como se quiera tomando x suficientemente grande. Este enunciado es consistente con la noción intuitiva de asíntota de una gráfica. Se tiene un enunciado similar al anterior para el inciso (ii) de la definición.

La gráfica de una función racional de la forma $P(x)/Q(x)$, donde el grado del polinomio $P(x)$ es mayor en 1 que el grado de $Q(x)$ y $Q(x)$ no es factor de $P(x)$, tiene una asíntota oblicua. Para demostrar esto, se considera $f(x) = P(x)/Q(x)$ y se divide $P(x)$ entre $Q(x)$ a fin de expresar $f(x)$ como la suma de una función lineal y una función racional; esto es,

$$f(x) = mx + b + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde el grado del polinomio $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Entonces

$$f(x) - (mx + b) = \frac{R(x)}{Q(x)} \qquad \textbf{(1)}$$

Cuando el numerador y el denominador de $R(x)/Q(x)$ se dividen entre la potencia más grande de x que aparece en $Q(x)$, se tendrá un término constante en el denominador y todos los demás términos del denominador, y cada término del numerador, será de la forma k/x^r donde k es una constante y r es un número entero positivo. Por tanto, conforme $x \to +\infty$, el límite del numerador será cero y el límite del denominador será una constante. De este modo, $\lim\limits_{x \to +\infty} R(x)/Q(x) = 0$. En consecuencia, de (1) se tiene

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

de donde se concluye que, por la definición 3.7.5, la recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua de la gráfica de f.

▶ EJEMPLO 8 Sea

$$h(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

Determine las asíntotas de la gráfica de h. Apoye los resultados trazando la gráfica de h y sus asíntotas en el mismo rectángulo de inspección.

Solución Como

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} h(x) = +\infty$$

la recta $x = 1$ es una asíntota vertical. No existen asíntotas horizontales porque si el numerador y el denominador de $h(x)$ se dividen entre x^2, se obtiene

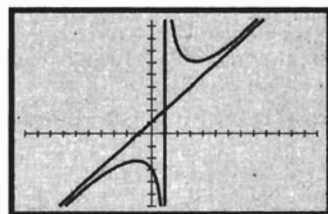
$$\frac{1 + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

y conforme $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$, el límite del numerador es 1 y el límite del denominador es 0. Sin embargo, el grado del numerador de $h(x)$ es mayor en 1 que el grado del denominador, y cuando se divide el numerador entre el denominador se obtiene

$$h(x) = x + 1 + \frac{4}{x - 1}$$

Por tanto, la recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua.

La figura 15, que muestra la gráfica de h y las asíntotas trazadas en el rectángulo de inspección de [−10, 13.5] por [−6, 9.7], apoya los resultados obtenidos. ◀



[−10, 13.5] por [−6, 9.7]

$h(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$

$x = 1$ y $y = x + 1$

FIGURA 15

EJERCICIOS 3.7

En los ejercicios 1 a 10, haga lo siguiente: Con la ayuda de la calculadora, tabule los valores de $f(x)$ para los valores indicados de x. (a) ¿A qué valor parece que se aproxima $f(x)$ conforme x crece sin límite? (b) ¿A qué valor parece que se aproxima $f(x)$ conforme x decrece sin límite? (c) Apoye las respuestas de los incisos (a) y (b) trazando la gráfica de f. (d) Confirme la respuesta del inciso (a) determinando el $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. (e) Confirme la respuesta del inciso (b) determinando el $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

1. $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$; x es igual a 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1 000 y x es igual a −1, −2, −4, −6, −8, −10, −100, −1 000.

2. $f(x) = \dfrac{3}{x^4}$; x es igual a 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1 000 y x es igual a −1, −2,−4, −6, −8, −10, −100, −1 000.

3. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$; x es igual a 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1 000 y x es igual a −1,−2, −4, −6, −8, −10, −100, −1 000.

4. $f(x) = -\dfrac{2}{x^3}$; x es igual a 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1 000 y x es igual −1, −2, −4, −6, −8, −10, −100, −1 000.

5. $f(x) = -\dfrac{3x^2}{x^2 + 1}$; x es igual a 0, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1 000 y x es igual a −1, −2, −4, −6, −8, −10, −100, −1 000.

6. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3 + 2}$; x es igual a 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1 000 y x es igual a −2, −4, −6, −8, −10, −100, −1 000.

7. $f(x) = \dfrac{4x + 1}{2x - 1}$; x es igual a 2, 6, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 y x es igual a −2, −6, −10, −100, −1 000, −10 000, −100 000.

8. $f(x) = \dfrac{5x - 3}{10x + 1}$; x es igual a 2, 6, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 y x es igual a −2, −6, −10, −100, −1 000, −10 000, −100 000.

9. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2}$; x es igual a 2, 6, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 y x es igual a −2, −6, −10, −100, −1 000, −10 000, −100 000.

10. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$; x es igual a 2, 6, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 y x es igual a −2, −6, −10, −100, −1 000, −10 000, −100 000.

En los ejercicios 11 a 30 determine el límite y apoye la respuesta gráficamente.

11. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{2t + 1}{5t - 2}$

12. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{6x - 4}{3x + 1}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x + 7}{4 - 5x}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1 + 5x}{2 - 3x}$

15. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^2 - 2x + 1}{3x^2 + 8x + 5}$

16. $\displaystyle\lim_{s\to-\infty} \frac{4s^2 + 3}{2s^2 - 1}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x + 4}{3x^2 - 5}$

18. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 5}{x^3}$

19. $\lim_{y\to+\infty} \dfrac{2y^2 - 3y}{y + 1}$

20. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 5}{7x^3 + x + 1}$

21. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3 + 2x^2 - 5}{8x^3 + x + 2}$

22. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^4 - 7x^2 + 2}{2x^4 + 1}$

23. $\lim_{y\to+\infty} \dfrac{2y^3 - 4}{5y + 3}$

24. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{5x^3 - 12x + 7}{4x^2 - 1}$

25. $\lim_{x\to-\infty} \left(3x + \dfrac{1}{x^2}\right)$

26. $\lim_{t\to+\infty} \left(\dfrac{2}{t^2} - 4t\right)$

27. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 4}$

28. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 4}$

29. $\lim_{w\to-\infty} \dfrac{\sqrt{w^2 - 2w + 3}}{w + 5}$

30. $\lim_{t\to-\infty} \dfrac{\sqrt{y^4 + 1}}{2y^2 - 3}$

En los ejercicios 31 a 34, realice lo siguiente: (a) trace la gráfica de la función f y haga una proposición acerca del comportamiento aparente de f(x) conforme x crece sin límite. (b) Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando el $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

31. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

32. $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$

33. $f(x) = \sqrt{3x^2 + x} - 2x$

34. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$

En los ejercicios 35 a 46, determine las asíntotas de la gráfica de la función y utilícelas para dibujar la gráfica. Apoye los resultados trazando la gráfica y las asíntotas en el mismo rectángulo de inspección.

35. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$

36. $h(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$

37. $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

38. $f(x) = \dfrac{4 - 3x}{x + 1}$

39. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 4}}$

40. $g(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$

41. $G(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 9}$

42. $F(x) = \dfrac{-3x}{\sqrt{x^2 + 3}}$

43. $h(x) = \dfrac{2x}{6x^2 + 11x - 10}$

44. $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$

45. $f(x) = \dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2 - 2}}$

46. $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}$

En los ejercicios 47 a 54, determine las asíntotas de la gráfica de la función. Apoye los resultados trazando la gráfica y las asíntotas en el mismo rectángulo de inspección.

47. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

48. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 4}$

49. $f(x) = \dfrac{x^2 - 8}{x - 3}$

50. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$

51. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x + 2}$

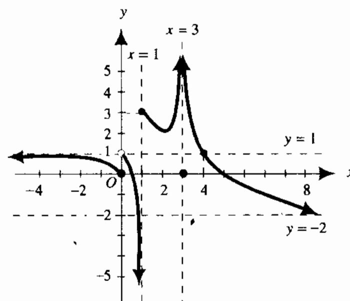
52. $f(x) = \dfrac{(x + 1)^3}{(x - 1)^2}$

53. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^2}$

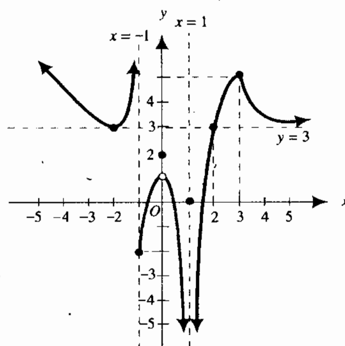
54. $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$

En los ejercicios 55 y 56, evalúe los límites de los incisos (a)-(h) a partir de la gráfica de la función f, mostrada en la figura adjunta y cuyo dominio es $(-\infty, +\infty)$.

55. **(a)** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to0^-} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to0^+} f(x)$
(d) $\lim_{x\to1^-} f(x)$ **(e)** $\lim_{x\to1^+} f(x)$ **(f)** $\lim_{x\to3} f(x)$
(g) $\lim_{x\to4} f(x)$ **(h)** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$



56. **(a)** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to-1^-} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to-1^+} f(x)$
(d) $\lim_{x\to0} f(x)$ **(e)** $\lim_{x\to1} f(x)$ **(f)** $\lim_{x\to2} f(x)$
(g) $\lim_{x\to3} f(x)$ **(h)** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$



En los ejercicios 57 y 58, dibuje la gráfica de una función f que tenga las propiedades dadas y cuyo dominio sea $(-\infty, +\infty)$.

57. $f(-4) = 0$; $f(-2) = 0$; $f(0) = 3$; $f(2) = -3$; $f(4) = 0$; $f(5) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$; $\lim_{x\to-4} f(x) = 0$; $\lim_{x\to-2} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to0} f(x) = 0$; $\lim_{x\to2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to4^-} f(x) = 0$; $\lim_{x\to4^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to5} f(x) = 0$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

58. $f(-5) = 0$; $f(-3) = 0$; $f(-2) = 0$; $f(0) = 0$; $f(2) = 3$; $f(3) = 0$; $f(4) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to-5} f(x) = 0$; $\lim_{x\to-3} f(x) = 1$; $\lim_{x\to-2} f(x) = 0$; $\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to2} f(x) = 0$; $\lim_{x\to3} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

59. Demuestre que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

aplicando la definición 3.7.1; esto es, para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que si $x > N$, entonces

$$\left| \frac{x}{x-1} - 1 \right| < \epsilon$$

60. Demuestre que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{8x+3}{2x-1} = 4$$

aplicando la definición 3.7.2; esto es, para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número $N < 0$ tal que si $x < N$, entonces

$$\left| \frac{8x+3}{2x-1} - 4 \right| < \epsilon$$

61. Escriba una definición formal para cada uno de los, siguientes límites:

(a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; (b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$;
(c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

62. Demuestre el inciso (ii) del teorema 13 de límites (3.7.3).

63. Demuestre que $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 4) = +\infty$ probando que para cualquier $N > 0$ existe una $M > 0$ tal que si $x > M$, entonces $x^2 - 4 > N$.

64. Demuestre que $\lim_{x \to +\infty} (6 - x - x^2) = -\infty$ aplicando la definición del ejercicio 61(a).

En los ejercicios 65 a 68, establezca en palabras lo que significa el simbolismo indicado sin emplear las palabras límite, se aproxima, infinito, crece sin límite o decrece sin límite y sin emplear símbolos tales como ϵ, N y M.

65. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ **66.** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

67. (a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; (b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

68. (a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; (b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

69. Si W es la medida del peso de un objeto a una distancia de x unidades de la superficie de la Tierra, entonces

$$W = \left(\frac{R}{R+x} \right)^2 W_0$$

donde R unidades es la longitud del radio de la Tierra y W_0 es la medida del peso del objeto a nivel del mar. Determine $\lim_{x \to +\infty} W$ e indique el significado de este resultado en un viaje espacial.

3.8 RESUMEN PARA EL TRAZO DE LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES

Ahora se resumirán los pasos que deben seguirse cuando se dibuje la gráfica de una función f. En este resumen también se han incorporado las propiedades estudiadas en este capítulo.

1. Determine el dominio de f.
2. Determine las intercepciones x y y. Cuando determine las intercepciones x, tal vez necesite aproximar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ en la graficadora.
3. Pruebe la simetría con respecto al eje y y al origen.
4. Verifique si la gráfica tiene asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.
5. Calcule $f'(x)$ y $f''(x)$.
6. Determine los números críticos de f. Estos son los valores de x del dominio de f para los que $f'(x)$ no existe o $f'(x) = 0$.
7. Aplique el criterio de la primera derivada o el criterio de la segunda derivada para determinar si en un número crítico existe un valor máximo relativo, un valor mínimo relativo o no se tiene ningún extremo relativo.
8. Determine los intervalos en los que f es creciente obteniendo los valores de x para los que $f'(x)$ es positiva; determine los intervalos en los que f es decreciente obteniendo los valores de x para los que $f'(x)$ es negativa. Al localizar los intervalos donde f es monótona, también verifique los números críticos en los que f no tiene un extremo relativo.

9. Determine los números críticos de f', esto es, los valores de x para los que $f''(x)$ no existe o $f''(x) = 0$, para obtener los puntos de inflexión posibles. En cada uno de estos valores de x verifique si $f''(x)$ cambia de signo y si la gráfica tiene una recta tangente ahí a fin de determinar si en realidad se tiene un punto de inflexión.
10. Verifique la concavidad de la gráfica. Obtenga los valores de x para los que $f''(x)$ es positiva a fin de obtener puntos en los cuales la gráfica es cóncava hacia arriba; para determinar los puntos en los que la gráfica es cóncava hacia abajo obtenga los valores de x en los que $f''(x)$ es negativa.
11. Calcule la pendiente de cada una de las tangentes de inflexión, esto le será de gran ayuda.

Se sugiere que incorpore toda la información obtenida en los pasos anteriores en una tabla como se mostró en las secciones 3.4-3.6 y en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 La función del ejemplo 8 de la sección 3.7 está definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

Dibuje la gráfica de f siguiendo el procedimiento sugerido anteriormente. Apoye los resultados en la graficadora.

Solución El dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto 1. La intercepción y es -3 y no se tienen intercepciones x. No hay simetría con respecto al eje y ni con respecto al origen.

En el ejemplo 8 de la sección 3.7, se determinó que las rectas $x = 1$ y $y = x + 1$ son asíntotas de la gráfica.

Ahora se calcularán $f'(x)$ y $f''(x)$.

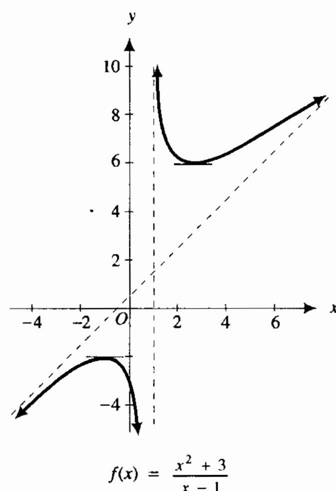
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x - 1) - (x^2 + 3)}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} \\ f''(x) &= \frac{(2x - 2)(x - 1)^2 - 2(x - 1)(x^2 - 2x - 3)}{(x - 1)^4} \\ &= \frac{8}{(x - 1)^3} \end{aligned}$$

Al considerar $f'(x) = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (x + 1)(x - 3) &= 0 \\ x = -1 \qquad x &= 3 \end{aligned}$$

$f''(x)$ nunca es cero. Ahora se construye la tabla 1 considerando los puntos en los que $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$, y los intervalos que excluyen estos valores de x:

$$x < -1 \qquad -1 < x < 1 \qquad 1 < x < 3 \qquad 3 < x$$



$f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$

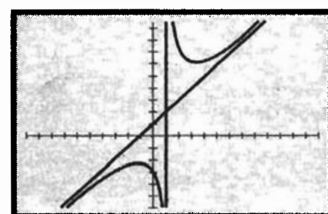
FIGURA 1

Tabla 1

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < -1$		+	−	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = -1$	−2	0	−	f tiene un valor máximo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$-1 < x < 1$		−	−	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 1$	n.e.	n.e.	n.e.	
$1 < x < 3$		−	+	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 3$	6	0	+	f tiene un valor mínimo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$3 < x$		+	+	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba

Si se indican las asíntotas, las rectas tangentes horizontales, se localizan algunos puntos, y considerando la información de la tabla 1, se dibuja la gráfica de f mostrada en la figura 1.

La figura 2 (la misma que la figura 15 de la sección 3.7) muestra la gráfica de f y las asíntotas trazadas en el rectángulo de inspección de $[-10, 13.5]$ por $[-6, 9.7]$, la cual apoya los resultados. ◀



$[-10, 13.5]$ por $[-6, 9.7]$

$f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 3}$

$x = 1$ y $y = x + 1$

FIGURA 2

▶ **EJEMPLO 2** Sea

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

(a) Determine las asíntotas de la gráfica de f. **(b)** Trace la gráfica de f y sus asíntotas en el mismo rectángulo de inspección. Estime a partir de la gráfica lo siguiente: los extrémos relativos de f; los puntos de inflexión de la gráfica de f; los intervalos en los que la gráfica es creciente y en los que es decreciente; los intervalos donde la gráfica es cóncava hacia arriba y los intervalos donde es cóncava hacia abajo. **(c)** Confirme las estimaciones del inciso (b) analíticamente.

Solución

(a) El dominio de f es el conjunto de los números reales excepto ± 2. Como -2 y 2 se excluyeron del dominio, se calculan los límites siguientes:

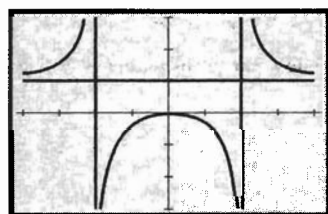
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = +\infty \qquad \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = +\infty$$

Por tanto, las rectas verticales $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas de la gráfica. Como

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1$$

entonces la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal. La gráfica no tiene asíntotas oblicuas.



$[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$

$f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

$y = 1$

$x = -2$ y $x = 2$

FIGURA 3

(b) La figura 3 muestra la gráfica de f y las asíntotas trazadas en el rectángulo de inspección de $[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$. A partir de la gráfica se pueden hacer las estimaciones siguientes: f tiene un valor máximo relativo en el origen; la gráfica no tiene puntos de inflexión; f es creciente en $(-\infty, -2)$ y $(-2, 0]$, y f es decreciente en $[0, 2)$ y $(2, +\infty)$; la gráfica es cóncava hacia arriba cuando x esta en $(-\infty, -2)$ o en $(2, +\infty)$, y la gráfica es cóncava hacia abajo cuando x está en $(-2, 2)$.

(c) Para confirmar analíticamente las estimaciones del inciso (b), primero se calcula $f'(x)$ y $f''(x)$:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2)}{(x^2 - 4)^2} \qquad f''(x) = \frac{-8(x^2 - 4)^2 + 8x[2(x^2 - 4)(2x)]}{(x^2 - 4)^4}$$

$$= \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} \qquad = \frac{24x^2 + 32}{(x^2 - 4)^3}$$

Al considerar $f'(x) = 0$ se obtiene $x = 0$; $f''(x)$ nunca es cero. La tabla 2 se construye teniendo en cuenta los puntos en los que $x = 0$ y $x = \pm 2$, y los intervalos que excluyen estos puntos:

$$x < -2 \qquad -2 < x < 0 \qquad 0 < x < 2 \qquad 2 < x$$

La información de la tabla 2 confirma las estimaciones.

Tabla 2

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < -2$		+	+	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = -2$	n.e.	n.e.	n.e.	
$-2 < x < 0$		+	−	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 0$	0	0	−	f tiene un valor máximo relativo
$0 < x < 2$		−	−	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 2$	n.e.	n.e.	n.e.	
$2 < x$		−	+	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba

EJEMPLO 3 Dibuje la gráfica de la función definida por

$$f(x) = x^{2/3} - 2x^{1/3}$$

e indique los puntos de inflexión. Dibuje un segmento de cada tangente de inflexión.

Solución Al calcular $f'(x)$ y $f''(x)$ se obtiene

$$f'(x) = \tfrac{2}{3}x^{-1/3} - \tfrac{2}{3}x^{-2/3} \qquad f''(x) = -\tfrac{2}{9}x^{-4/3} + \tfrac{4}{9}x^{-5/3}$$

Como $f'(0)$ no existe, 0 es un número crítico de f. Los otros números críticos de f se determinan al considerar $f'(x) = 0$.

$$\frac{2}{3x^{1/3}} - \frac{2}{3x^{2/3}} = 0$$
$$2x^{1/3} - 2 = 0$$
$$x^{1/3} = 1$$
$$x = 1$$

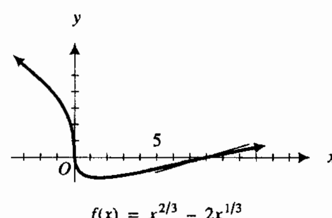
De este modo, 1 también es un número crítico. Se puede determinar si existe un extremo relativo en 1 aplicando el criterio de la segunda derivada. No se puede utilizar este criterio en el número crítico 0 porque $f'(0)$ no existe. Sin embargo, se aplica el criterio de la primera derivada en $x = 0$. La tabla 3 muestra los resultados obtenidos al emplear estos criterios.

Debido a que $f''(0)$ no existe, entonces $(0, 0)$ puede ser un punto de inflexión. Para obtener otros puntos de inflexión posibles se considera $f''(x) = 0$.

$$\begin{aligned} -\frac{2}{9x^{4/3}} + \frac{4}{9x^{5/3}} &= 0 \\ -2x^{1/3} + 4 &= 0 \\ x^{1/3} &= 2 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Para determinar si existen puntos de inflexión donde $x = 0$ y $x = 8$, se verifica si $f''(x)$ cambia de signo; y al mismo tiempo se revisa la concavidad de la gráfica en los intervalos respectivos. La gráfica debe tener una recta tangente en cada punto de inflexión. En el origen existe una recta tangente vertical porque

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f'(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{2x^{1/3} - 2}{3x^{2/3}} \\ &= -\infty \end{aligned}$$



$f(x) = x^{2/3} - 2x^{1/3}$

FIGURA 4

La tabla 3 resume los resultados y a partir de ellos se obtiene la gráfica de f dibujada en la figura 4, la cual muestra también un segmento de la tangente de inflexión en el punto $(8, 0)$. La recta tangente en el otro punto de inflexión, el origen, es el eje y.

Tabla 3

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < 0$		$-$	$-$	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 0$	0	n.e.	n.e.	f no tiene extremo relativo; la gráfica de f tiene un punto de inflexión
$0 < x < 1$		$-$	$+$	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 1$	-1	0	$+$	f tiene un valor mínimo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$1 < x < 8$		$+$	$+$	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 8$	0	$\frac{1}{6}$	0	f es creciente; la gráfica de f tiene un punto de inflexión
$8 < x$		$+$	$-$	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo

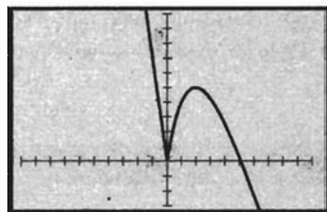
◀

Cuando trace la gráfica del ejemplo 3 en la graficadora, observe que no revela el punto de inflexión en $(8, 0)$ o el cambio de concavidad en ese punto. Esta situación prevalece para las gráficas de la mayoría de las funciones trazadas en la graficadora. Sin embargo, frecuentemente, al trazar la gráfica de NDER2, se puede estimar un punto de inflexión, y en consecuencia, donde la concavidad cambia. Esta información se puede confirmar analíticamente. El ejemplo siguiente muestra este procedimiento.

▶ EJEMPLO 4 Sea

$$f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$$

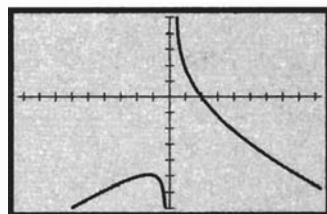
(a) Trace las gráficas de f, NDER($f(x)$, x) y NDER2($f(x)$, x) en rectángulos de inspección separados y estime lo siguiente: (i) los extremos relativos de f; (ii) los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente; (iii) los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba y donde lo es hacia abajo; (iv) los puntos de inflexión de la gráfica de f. **(b)** Confirme las estimaciones del inciso (a) analíticamente.



[−8, 10.8] por [−3, 9.4]

$f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$

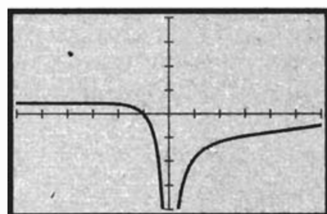
FIGURA 5



[−9.4, 9.4] por [−7.2, 5.2]

NDER $(5x^{2/3} - x^{5/3}, x)$

FIGURA 6



[−6, 6] por [−4, 4]

NDER2 $(5x^{2/3} - x^{5/3}, x)$

FIGURA 7

Solución

(a) La gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [−8, 10.8] por [−3, 9.4] y la gráfica de NDER($f(x)$, x) trazada en el rectángulo de inspección de [−9.4, 9.4] por [−7.2, 5.2], se muestran en las figuras 5 y 6, respectivamente.

(i) De la figura 5 se estima que f tiene un valor mínimo relativo en $x = 0$ y de las figuras 5 y 6, f tiene un valor máximo en $x = 2$.

(ii) De la figura 6, como $f'(x) < 0$ cuando $x < 0$ y cuando $x > 2$, se estima que f es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0]$ y $[2, +\infty)$. También de la figura 6, como $f'(x) > 0$ cuando $0 < x < 2$, se estima que f es creciente en el intervalo [0, 2]. Estas estimaciones son consistentes con lo que se observa en la gráfica de f de la figura 5.

(iii) De la figura 5, la gráfica de f parece ser cóncava hacia abajo cuando $x > 0$. No se tiene seguridad acerca de la concavidad o de los puntos de inflexión cuando $x < 0$. Por tanto, se necesita investigar la gráfica de NDER2($f(x)$, x), la cual está trazada en el rectángulo de inspección de [−6, 6] por [−4, 4] en la figura 7. A partir de esta gráfica, $f''(x) > 0$ cuando $x < -1$ y $f''(x) < 0$ cuando $-1 < x < 0$ y cuando $x > 0$. De este modo se estima que la gráfica de f es cóncava hacia arriba cuando $x < -1$ y cóncava hacia abajo cuando $-1 < x < 0$ y cuando $x > 0$.

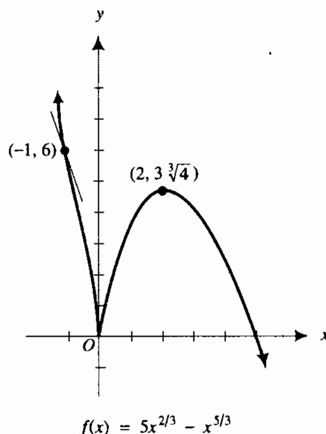
(iv) Como $f''(-1) = 0$ y la gráfica de f cambia de concavidad en $x = -1$, se estima que la gráfica de f tiene un punto de inflexión en $x = -1$.

(b) Ahora se confirmarán las estimaciones analíticamente. Considerando $f(x) = 0$, se obtienen los ceros de f los cuales son 0 y 5, es decir, las intercepciones x de la gráfica. A continuación se calculan $f'(x)$ y $f''(x)$:

$$f'(x) = \tfrac{10}{3}x^{-1/3} - \tfrac{5}{3}x^{2/3} \qquad f''(x) = -\tfrac{10}{9}x^{-4/3} - \tfrac{10}{9}x^{-1/3}$$
$$= \tfrac{5}{3}x^{-1/3}(2 - x) \qquad\qquad = -\tfrac{10}{9}x^{-4/3}(1 + x)$$

Cuando $x = 0$, $f'(x)$ y $f''(x)$ no existen. Al considerar $f'(x) = 0$ se obtiene $x = 2$. Por tanto, los números críticos de f son 0 y 2. A partir de $f''(x) = 0$ se obtiene $x = -1$. Al construir la tabla 4 se consideraron los puntos en los que x es igual a −1, 0 y 2, y los intervalos siguientes:

$$x < -1 \qquad -1 < x < 0 \qquad 0 < x < 2 \qquad 2 < x$$



$f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$

FIGURA 8

Tabla 4

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < -1$		−	+	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = -1$	6	−5	0	f es decreciente; la gráfica de f tienen un punto de inflexión
$-1 < x < 0$		−	−	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 0$	0	n.e.	n.e.	f tiene un valor mínimo relativo
$0 < x < 2$		+	−	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 2$	$3\sqrt[3]{4} \approx 4.8$	0	−	f tiene un valor máximo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$2 < x$		−	−	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo

A partir de la información de la tabla 4 y localizando algunos puntos, se dibuja la gráfica de f mostrada en la figura 8. La tabla y la gráfica confirman las estimaciones del inciso (a). ◀

EJERCICIOS 3.8

En los ejecicios 1 a 24, dibuje la gráfica de f determinando primero lo siguiente: los extremos relativos de f; los puntos de inflexión de la gráfica de f; los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente; los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba y donde lo es hacia abajo; la pendiente de las tangentes de inflexión; y las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, en caso de que tenga. Incorpore esta información en una tabla similar a las de esta sección. Apoye los resultados en la graficadora.

1. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$

2. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$

3. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$

4. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x$

5. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2$

6. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 4$

7. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 2x^2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 2(x-1)^3 & \text{si } x < 1 \\ (x-1)^4 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} -x^4 & \text{si } x < 0 \\ x^4 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} 3(x-2)^2 & \text{si } x \le 2 \\ (2-x)^3 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

12. $f(x) = 3x^5 + 5x^3$

13. $f(x) = (x+1)^3(x-2)^2$

14. $f(x) = x^2(x+4)^3$

15. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{2}\pi \\ \operatorname{sen}(x - \frac{1}{2}\pi) & \text{si } \frac{1}{2}\pi \le x \le \pi \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } -\pi \le x \le 0 \\ \cos(\pi - x) & \text{si } 0 < x \le \pi \end{cases}$

17. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

18. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$

19. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

20. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

21. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

22. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

23. $f(x) = (x+1)^{2/3}(x-2)^{1/3}$

24. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$

En los ejercicios 25 a 32, (a) trace las gráficas de f, NDER($f(x)$, x) *y* NDER2($f(x)$, x) *en rectángulos de inspección separados y estime lo siguiente: (i) los extremos relativos de f; (ii) los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente; (iii) los intervalos donde la gráfica es cóncava hacia arriba y donde lo es hacia abajo; (iv) los puntos de inflexión de la gráfica de f. (b) Confirme las estimaciones del inciso (a) analíticamente e incorpore la información en una tabla semejante a la tabla 4 de esta sección. A partir de la información de la tabla dibuje la gráfica de f y compárela con la gráfica de f trazada en el inciso (a).*

25. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

26. $f(x) = 2x^4 - 15x^3 + 32x^2 - 12x - 16$

27. $f(x) = |25 - x^2|$

28. $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x$

29. $f(x) = 4x^{1/3} + x^{4/3}$

30. $f(x) = x^2\sqrt{4-x}$

31. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, x \in [-\pi, \pi]$

32. $f(x) = 3 \operatorname{sen} 2x - 5 \cos 2x, x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

33. Antes de dibujar la gráfica de una función aplicando los pasos listados al principio de esta sección, ¿por qué es conveniente incorporar esta información en una tabla?

3.9 APLICACIONES ADICIONALES SOBRE EXTREMOS ABSOLUTOS

A fin de aplicar el teorema del valor extremo para determinar los extremos absolutos de una función, la función debe ser continua en un intervalo cerrado. En la sección 3.2 las aplicaciones trataron sobre tales funciones. Ahora se considerarán aplicaciones que involucran extremos absolutos para las cuales no puede emplearse el teorema del valor extremo. Sin embargo, primero se presentará un teorema, el cual en ocasiones es útil para determinar si un extremo relativo es un extremo absoluto.

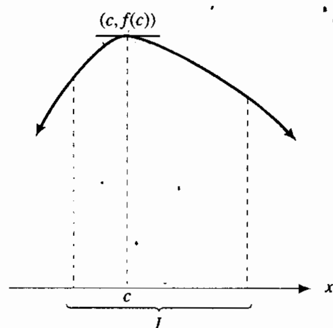


FIGURA 1

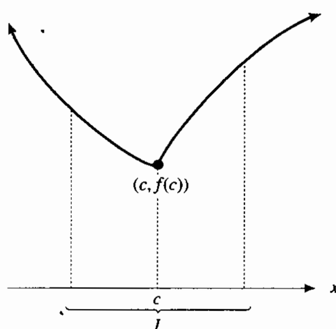


FIGURA 2



FIGURA 3

Para ilustrar el teorema, refiérase a las funciones cuyas gráficas se presentan en las figuras 1 y 2. Cada una de estas funciones es continua en el intervalo I y tiene sólo un extremo relativo, $f(c)$, en I. En los dos casos el teorema siguiente garantiza que el extremo relativo es un extremo absoluto.

3.9.1 Teorema

Suponga que la función f es continua en el intervalo I que contiene al número c. Si $f(c)$ es un extremo relativo de f en I y c es el único número en I para el cual f tiene un extremo relativo, entonces $f(c)$ es un extremo absoluto de f en I.

La demostración de este teorema se presentará al final de la sección.

El teorema 3.9.1 se emplea en los ejemplos siguientes, los cuales tratan con aplicaciones en las que se requiere un extremo absoluto pero no puede aplicárseles el teorema del valor extremo. En el primer ejemplo se trata de la situación del ejemplo 5 de la sección 1.3. Refiérase a este ejemplo en este momento.

EJEMPLO 1 Si un envase de hojalata cerrado de 60 pulg^3 de volumen tiene forma de cilindro circular recto, determine analíticamente el radio de la base del envase si se emplea la mínima cantidad de hojalata en su elaboración.

Solución La figura 3 muestra el envase cilíndrico donde el radio de la base mide r pulgadas. Se determinará el radio de la base para el cual el área de la superficie total del envase es un mínimo absoluto. En el ejemplo 5 de la sección 1.3, se mostró que si $S(r)$ pulgadas cuadradas es el área de la superficie total, entonces

$$S(r) = \frac{120}{r} + 2\pi r^2$$

*No se considera r < 0, ya que es una longitud.

El dominio de S es $(0, +\infty)$ y S es continua en su dominio.

Para terminar cualquier extremo relativo de S se calculan las derivadas primera y segunda de S:

$$S'(r) = -\frac{120}{r^2} + 4\pi r \qquad S''(r) = \frac{240}{r^3} + 4\pi$$

Observe que $S'(r)$ no existe cuando $r = 0$ y que 0 no pertenece al dominio de S. Por tanto, los únicos números críticos son aquellos que se obtienen al considerar $S'(r) = 0$, de donde se tiene

$$4\pi r^3 = 120$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}$$

En consecuencia, $\sqrt[3]{30/\pi}$ es un número crítico de S. Se aplica el criterio de la segunda derivada, y los resultados se resumen en la tabla 1.

Tabla 1

	$S'(r)$	$S''(r)$	*Conclusión*
$r = \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}$	0	+	S tiene un valor mínimo relativo

Debido a que S es continua en su dominio y el único extremo relativo de S en su dominio se tiene en $r \doteq \sqrt[3]{30/\pi}$, se concluye, por el teorema 3.9.1, que este valor mínimo relativo de S es su valor mínimo absoluto.

Al aproximar a centésimos se tiene $\sqrt[3]{30/\pi} \approx 2.12$, lo cual es acorde con la respuesta del ejemplo 5 de la sección 1.3.

Conclusión: La mínima cantidad de hojalata se empleará en la elaboración del envase cuando el radio de la base sea $\sqrt[3]{30/\pi}$ pulg $\approx$ 2.12 pulg. ◀

▶ ***EJEMPLO 2*** Una caja cerrada con base cuadrada tiene un volumen de 2 000 pulg^3. El material de la tapa y de la base cuesta 3 centavos la pulgada cuadrada mientras que el material para los lados cuesta 1.5 centavos la pulgada cuadrada. Estime en la graficadora las dimensiones de la caja de modo que el costo total del material sea mínimo. Confirme la estimación analíticamente.

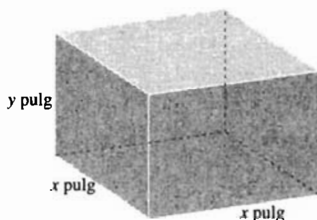


FIGURA 4

Solución Sean x pulgadas la longitud de un lado de la base cuadrada y $C(x)$ dólares el costo total del material. El área de la base es x^2 pulgadas cuadradas. Sea y pulgadas la profundidad de la caja. Vea la figura 4. Puesto que el volumen de la caja es el producto del área de la base y la profundidad, se tiene

$$x^2y = 2\,000$$

$$y = \frac{2\,000}{x^2} \tag{1}$$

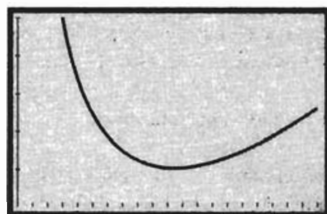
El número total de pulgadas cuadradas de las áreas de la tapa y de la base es $2x^2$, y el de los lados es $4xy$. Por tanto, el número de centavos del costo total del material es

$$3(2x^2) + \tfrac{3}{2}(4xy)$$

Al sustituir y de (1), se tiene

$$C(x) = 6x^2 + 6x\left(\frac{2\,000}{x^2}\right)$$

$$C(x) = 6x^2 + \frac{12\,000}{x}$$



[0, 20] por [1 000, 5 000]

$C(x) = 6x^2 + \dfrac{12\,000}{x}$

FIGURA 5

El dominio de C es $(0, +\infty)$. La figura 5 muestra la gráfica de C trazada en el rectángulo de inspección de [0, 20] por [1 000, 5 000]. Se estima que el punto más bajo de la gráfica se obtiene cuando $x = 10$. De (1), si $x = 10$, $y = 20$. Por tanto, se estima que el lado de la base del cuadrado debe medir 10 pulg y la profundidad debe ser de 20 pulg para que el costo del material se mínimo.

Para confirmar la estimación analíticamente, se calcula $C'(x)$ y $C''(x)$:

$$C'(x) = 12x - \frac{12\,000}{x^2} \qquad C''(x) = 12 + \frac{24\,000}{x^3}$$

Observe que $C'(x)$ no existe cuando $x = 0$ y que 0 no pertenece al dominio de C. Por tanto, los únicos números críticos son aquellos que se obtienen al considerar $C'(x) = 0$, de donde se tiene

$$12x - \frac{12\,000}{x^3} = 0$$

$$x^3 = 1000$$

La única solución real de esta ecuación es 10. De este modo, el único número crítico es 10. Para determinar si $C(10)$ es un valor mínimo relativo para C, se aplica el criterio de la segunda derivada, y los resultados se resumen en la tabla 2.

Tabla 2

	$C'(x)$	$C''(x)$	*Conclusión*
$x = 10$	0	+	C tiene un valor mínimo relativo

Como C es continua en su dominio y el único extremo relativo de C se tiene en $x = 10$, se concluye, por el teorema 3.9.1, que el valor mínimo relativo de C es su valor mínimo absoluto. Por tanto, se ha confirmado la estimación.

Conclusión: El costo del material será mínimo cuando el lado de la base cuadrada mida 10 pulg y la profundidad mida 20 pulg. ◀

En los ejemplos anteriores y en los ejercicios de la sección 3.2, la variable para la que se desea determinar un extremo relativo se expresó como una función de sólo una variable. En ocasiones este procedimiento es demasiado difícil o bastante laborioso, o en ocasiones es imposible. Con frecuencia, la información dada permite obtener dos ecuaciones que involucran tres variables. En lugar de eliminar una de las variables, puede ser más ventajoso diferenciar implícitamente. El ejemplo siguiente ilustra este método. El problema es similar al del ejemplo 1, pero en este caso el volumen del envase no se especifica.

▶ **EJEMPLO 3** Si un envase de volumen fijo tiene la forma de un cilindro circular recto, determine la razón de la altura al radio de la base si se emplea la cantidad mínima de material en su elaboración.

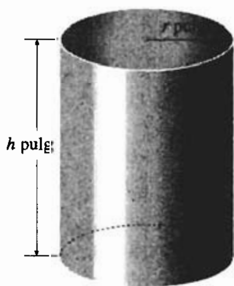


FIGURA 6

Solución Se desea determinar una relación entre la altura y el radio de la base de un cilindro circular recto, de modo que el área de la superficie sea un mínimo absoluto para un volumen fijo. Por tanto, se considerará el volumen del cilindro como una constante.

Sean V unidades cúbicas el volumen del cilindro (una constante).

A continuación se definen las variables.

Sean r unidades la longitud del radio del cilindro; $r > 0$. Sean h unidades la altura del cilindro; $h > 0$. Sean S unidades cuadradas el área de la superficie total del cilindro (refiérase a la figura 6).

Así, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad (2)$$
$$V = \pi r^2 h \quad (3)$$

Puesto que V es una constante, se puede resolver (3) para r o para h en términos de la otra y sustituirla en (2), lo que hace de S una función de una variable. El método alternativo consiste en considerar a S como una función de las dos variables r y h; sin embargo, no son independientes una de la otra. Esto es, si se elige r como variable independiente, entonces S depende de r; también, h depende de r.

Al diferenciar S y V con respecto a r, teniendo en mente que h es una función de r, se tiene

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi r\frac{dh}{dr} \tag{4}$$

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi rh + \pi r^2\frac{dh}{dr}$$

Como V es un constante, entonces $\frac{dV}{dr} = 0$; por tanto, de la ecuación anterior,

$$2\pi rh + \pi r^2\frac{dh}{dr} = 0$$

con $r \neq 0$. Si se divide entre r y se despeja $\frac{dh}{dr}$, se obtiene

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{2h}{r} \tag{5}$$

Al sustituir de (5) en (4) se tiene

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi\left[2r + h + r\left(-\frac{2h}{r}\right)\right]$$

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi(2r - h) \tag{6}$$

Con objeto de determinar cuándo S tiene un valor mínimo relativo, se considera $\frac{dS}{dr} = 0$, obteniéndose $2r - h = 0$, de donde,

$$r = \tfrac{1}{2}h$$

A fin de determinar si esta relación entre r y h hace de S un mínimo relativo se aplica el criterio de la segunda derivada. De (6) se obtiene

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 2\pi\left(2 - \frac{dh}{dr}\right)$$

Al sustituir de (5) en esta ecuación se tiene

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 2\pi\left[2 - \left(\frac{-2h}{r}\right)\right]$$

$$= 2\pi\left(2 + \frac{2h}{r}\right)$$

Los resultados del criterio de la segunda derivada se resumen en la tabla 3.

Tabla 3

	$\frac{dS}{dr}$	$\frac{d^2s}{dr^2}$	*Conclusión*
$r = \frac{1}{2}h$	0	+	S tiene un valor mínimo relativo

De (2) y (3), S es una función continua de r en $(0, +\infty)$. Como el único extremo relativo de S en $(0, +\infty)$ se tiene en $r = \frac{1}{2}h$, se concluye, por el teorema 3.9.1, que S tiene un valor mínimo absoluto cuando $h/r = 2$.

Conclusión: El área de la superficie total del envase será mínimo, para un volumen específico, cuando la razón de la altura al radio de la base sea 2. ◀

En ocasiones, los problemas geométricos que implican extremos absolutos son más fáciles de resolver utilizando funciones trigonométricas como se muestra en el ejemplo siguiente.

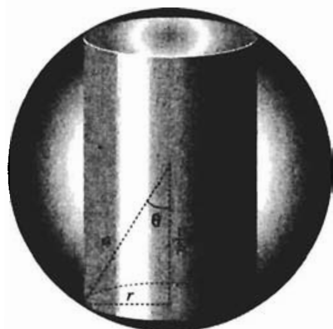


FIGURA 7

▶ ***EJEMPLO 4*** Se inscribe un cilindro circular recto en una esfera de radio dado. Determine la razón de la altura al radio de la base del cilindro de mayor superficie lateral.

Solución Refiérase a la figura 7, donde la medida del radio de la esfera es constante e igual a a.

Sean θ radianes la medida del ángulo central subtendido por el radio del cilindro, r unidades la longitud del radio del cilindro, h unidades la altura del cilindro y S unidades cuadradas el área de la superficie lateral del cilindro. De la figura 7,

$$r = a \operatorname{sen} \theta \quad \text{y} \quad h = 2a \cos \theta$$

Como $S = 2\pi r h$,

$$\begin{aligned} S &= 2\pi(a \operatorname{sen} \theta)(2a \cos \theta) \\ &= 2\pi a^2(2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \\ &= 2\pi a^2 \operatorname{sen} 2\theta \end{aligned}$$

Así, S es una función de θ y su dominio es $(0, \frac{1}{2}\pi)$.

Al obtener las derivadas primera y segunda de S, se tiene

$$\frac{dS}{d\theta} = 4\pi a^2 \cos 2\theta \quad \text{y} \quad \frac{d^2S}{d\theta^2} = -8\pi a^2 \operatorname{sen} 2\theta$$

Considere $\frac{dS}{d\theta} = 0$, entonces

$$\cos 2\theta = 0$$

Como $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, entonces

$$\theta = \frac{1}{4}\pi$$

Se aplica el criterio de la segunda derivada y los resultados se resumen en la tabla 4.

Tabla 4

	$\frac{ds}{d\theta}$	$\frac{d^2S}{d\theta^2}$	*Conclusión*
$\theta = \frac{1}{4}\pi$	0	$-$	S tiene un valor máximo relativo

Como S es continua y tiene un único extremo relativo en su dominio, se concluye que el valor máximo relativo es un valor máximo absoluto.

Cuando $\theta = \frac{1}{4}\pi$,

$$\begin{aligned} r &= a \operatorname{sen} \tfrac{1}{4}\pi & \qquad h &= 2a \cos \tfrac{1}{4}\pi \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, a & &= \sqrt{2}\, a \end{aligned}$$

Por tanto, $h/r = 2$.

<u>Conclusión:</u> Para el cilindro que tiene la superficie lateral de mayor área, la razón de la altura al radio es 2. ◀

Se concluye esta sección con la demostración del teorema 3.9.1.

Demostración del teorema 3.9.1 Se demuestra el teorema en el caso en que $f(c)$ es un valor máximo relativo en el intervalo I. Una demostración semejante puede darse cuando $f(c)$ es un valor mínimo relativo.

Como $f(c)$ es un un valor máximo relativo de f en I, entonces, por la definición 3.1.1, existe un intervalo abierto J, donde $J \subset I$, y donde J contiene a c, tal que

$$f(c) \geq f(x) \qquad \text{para toda } x \in J$$

Puesto que c es el único número en I para el que f tiene un valor máximo relativo, se deduce que

$$f(c) > f(k) \qquad \text{si } k \in J \quad \text{y} \quad k \neq c \tag{7}$$

A fin de probar que $f(c)$ es un valor máximo relativo de f en I, se demostrará que si d es cualquier número diferente de c en I, entonces $f(c) > f(d)$. Suponga que

$$f(c) \leq f(d) \tag{8}$$

Se probará que esta suposición conduce a una contradicción. Puesto que $d \neq c$, entonces $c < d$ o $d < c$. Considere el caso en el que $c < d$ (la demostracion es similar si $d < c$).

Como f es continua en I, entonces f es continua en el intervalo cerrado $[c, d]$. Por tanto, por el teorema del valor extremo, f tiene un valor mínimo absoluto en $[c, d]$. Suponga que este valor mínimo absoluto ocurre en e, donde $c \leq e \leq d$. De la desigualdad (7) $e \neq c$, y de las desigualdades (7) y (8) $e \neq d$. Por tanto $c < e < d$, y en consecuencia, f tiene un valor mínimo relativo en e. Pero esta última proposición contradice la hipótesis de que c es el único número en I para el cual f tiene un extremo relativo. Así, la suposición de que $f(c) \leq f(d)$ es falsa. Por tanto, $f(c) > f(d)$ si $d \in I$ y $d \neq c$, en consecuencia, $f(c)$ es un valor máximo absoluto de f en I. ■

EJERCICIOS 3.9

En cada ejercicio defina todas las variables precisamente como números y no olvide escribir una conclusión.

1. Para el envase del ejemplo 1, suponga que el costo del material para la tapa y la base es dos veces el de los lados. **(a)** Determine analíticamente la altura y el radio de la base de modo que el costo del material sea mínimo. **(b)** Compare la respuesta del inciso (a) con la solución gráfica de esta situación obtenida en el inciso (c) del ejercicio 21 de la sección 1.3. ¿La solución gráfica apoya la respuesta del inciso (a)?

2. **(a)** Haga el ejemplo 1 si el envase es abierto en lugar de cerrado. **(b)** Compare la respuesta del inciso (a) con la solución gráfica de esta situación en el inciso (c) del ejercicio 22 de la sección 1.3. ¿La solución gráfica apoya la respuesta del inciso (a)?

En los ejercicios 3 y 4, confirme analíticamente la estimación obtenida con la graficadora en el inciso (c) del ejercicio indicado de la sección 1.3.

3. Ejercicio 23

4. Ejercicio 24

5. Se va a cercar un terreno rectangular de 2 700 m^2 de área, y se utilizará una valla adicional para dividir el terreno a la mitad. El costo de la cerca empleado para dividir el terreno a la mitad es de $24 por metro colocado, y el costo de la cerca para los lados es de $36 por metro colocado. **(a)** Utilice la graficadora para estimar las dimensiones del terreno de modo que el costo total del material para la cerca sea mínimo. **(b)** Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.

6. Un tanque rectangular abierto, cuyo volumen es de 125 m^3, tiene base cuadrada. El costo del material para la

base es de \$24 por metro cuadrado y el del material para los lados es de \$12. **(a)** Utilice la graficadora para estimar las dimensiones del tanque de modo que el costo del material sea mínimo. **(b)** Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.

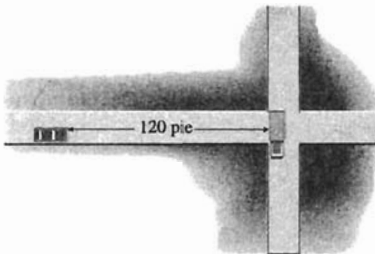
7. Un fabricante de cajas desea construir una caja cerrada que tenga un volumen de 288 pulg^3, y cuya base de forma rectangular tiene el largo igual al triple de su ancho. **(a)** Utilice la graficadora para estimar las dimensiones de la caja construida con la mínima cantidad de material. **(b)** Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.

8. Haga el ejercicio 7 considerando ahora que la caja se fabricará sin tapa.

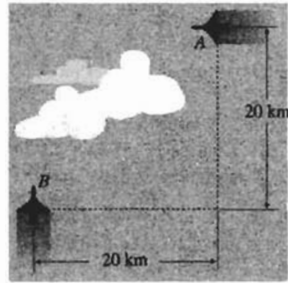
9. Si se excluyen los salarios, el número de dólares del costo por kilómetro de la operación de un camión es $8 + \frac{1}{300}x$, donde x kilómetros por hora es la velocidad promedio del camión. **(a)** Si los salarios combinados del conductor y del ayudante son \$27 por hora, estime en la calculadora, con aproximación de kilómetros por hora, cuál debe ser la velocidad promedio del camión para que el costo por kilómetro sea mínimo. **(b)** Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.

10. El número de dólares del costo de combustible por hora para un barco carguero es de $0.02v^3$, donde v nudos (millas náuticas por hora) es la velocidad promedio del barco. **(a)** Si hay costos adicionales de \$400 por hora, estime en la graficadora, con aproximación de nudos, a qué velocidad promedio debe navegar el barco para que el costo por milla náutica sea mínimo. **(b)** Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.

11. Un automóvil viaja a una tasa de 30 pie/s y se aproxima a un crucero. Cuando el automóvil está a 120 pie del crucero, un camión, que viaja a una tasa de 40 pie/s en una carretera perpendicular a la carretera del automóvil, pasa por el crucero. **(a)** Determine analíticamente en qué tiempo, después de que el camión deja el crucero, los vehículos están más cercanos. Apoye la respuesta del inciso (a) gráficamente.



12. Dos aviones A y B vuelan horizontalmente a la misma altura de modo que la posición de B está al suroeste de A, 20 km al oeste y 20 km al sur de A. Suponga que el avión A vuela hacia el oeste a 16 km/min y que el avión B vuela hacia el norte a 21.3 km/min. **(a)** Determine en cuántos segundos los aviones estarán lo más cerca posible y cuál será la distancia más corta. **(b)** Apoye las respuestas del inciso (a) gráficamente.



13. Determine una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2 + 5x$ que tenga la pendiente mínima.

14. Un generador de corriente directa tiene una fuerza electromotriz de E volts y una resistencia interna de r ohms, donde E y r son constantes. Si R ohms es la resistencia externa, entonces la resistencia total es $(r + R)$ ohms, y si P watts es la potencia, entonces

$$P = \frac{E^2 R}{(r + R)^2}$$

Demuestre que el consumo máximo de potencia ocurre cuando la resistencia externa es igual a la resistencia interna.

15. En una comunidad particular, cierta epidemia se propaga de modo que x meses después del inicio de la epidemia, P porcentaje de la población está infectada, donde

$$P = \frac{30x^2}{(1 + x^2)^2}$$

¿En cuántos meses se infectará el número máximo de personas de la comunidad y qué porcentaje de la población será éste?

16. Un cartel que contiene 32 pulg^2 de región impresa tiene un margen de 2 pulg en sus partes superior e inferior, mientras que en los lados los márgenes son de $\frac{4}{3}$ pulg. Determine las dimensiones del menor trozo de cartón que pueda emplearse para realizar el cartel.

En los ejercicios 17 y 18, se utiliza el término económico competencia perfecta. Cuando una compañía opera bajo competencia perfecta, existen muchas compañías pequeñas; por lo que ninguna de ellas puede afectar el precio aumentando la producción. Por tanto, bajo el régimen de competencia perfecta el precio de un artículo es constante, y la compañía puede vender lo que desee a ese precio constante.

17. En condiciones de competencia perfecta, una compañía puede vender los artículos que produce a \$200 por unidad. Si $C(x)$ dólares es el costo total de la producción diaria cuando se producen x artículos y $C(x) = 2x^2 + 40x + 1400$, determine el número de unidades que deben producirce diariamente a fin de que la compañía obtenga la máxima ganancia total diaria. *Sugerencia:* la ganancia total es igual al ingreso total menos el costo total.

18. Una compañía, que construye y vende escritorios, opera en condiciones de competencia perfecta y puede vender todos los escritorios que produce a un precio de \$400 por

escritorio. Si se producen x escritorios y se venden cada semana, y $C(x)$ dólares es el costo total de la producción semanal, entonces $C(x) = 2x^2 + 80x + 6\,000$. Determine cuántos escritorios deben producirse semanalmente para que el fabricante obtenga la máxima ganancia total semanal. ¿Cuál es la máxima ganancia total semanal? Considere la sugerencia del ejercicio 17.

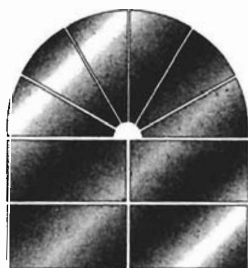
19. El término *en condiciones de monopolio*, significa que existe un único productor de cierto artículo, para el cual el precio y, en consecuencia, la demanda pueden ser controlados regulando la cantidad de artículos producidos. Suponga que en condiciones de monopolio, x unidades de un artículo son demandadas diariamente cuando el precio por unidad es de p dólares y $x = 140 - p$. Si el número de dólares del costo total por producir x unidades está dado por $C(x) = x^2 + 20x + 300$, determine la máxima ganancia total diaria.

20. Determine la distancia mínima desde el punto $P(2, 0)$ a un punto de la curva $y^2 - x^2 = 1$, y encuentre el punto de la curva más cercano a P.

21. Obtenga la distancia mínima desde el origen a la recta $3x + y = 6$, y encuentre el punto P de la recta más cercano al origen. Después demuestre que el origen está en la recta perpendicular a la recta dada que pasa por P.

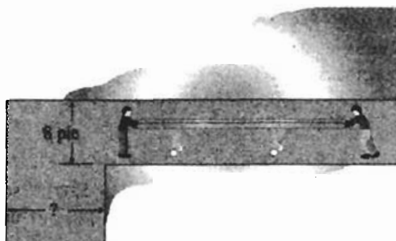
22. Determine la distancia mínima desde el punto $A(2, \frac{1}{2})$ a un punto de la parábola $y = x^2$ y encuentre el punto B de la parábola más cercano a A. Después demuestre que A está en la recta normal de la parábola en B.

23. Una ventana tipo *Norman* consiste de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de una ventana Norman es de 32 pie, determine cuánto debe medir el radio del semicírculo y la altura del rectángulo de modo que la ventana admita la mayor cantidad de luz.

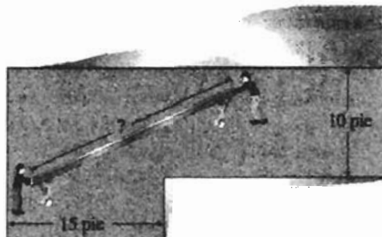


24. Resuelva el ejercicio 23 considerando ahora que en la ventana el semicírculo transmite sólo la mitad de luz que el rectángulo por pie cuadrado de área.

25. Una viga de acero de 27 pie de longitud se transporta por un pasillo de 8 pie de ancho hasta un corredor perpendicular al pasillo. ¿Cual debe ser el ancho del corredor para que la viga pueda doblar la esquina? No considere la anchura horizontal de la viga.



26. Si dos pasillos perpendiculares entre sí miden 10 pie y 15 pie, respectivamente, ¿cuál es la longitud de la viga de acero más larga que pueda transportarse horizontalmente de modo que pueda doblar la esquina? No considere la anchura horizontal de la viga.

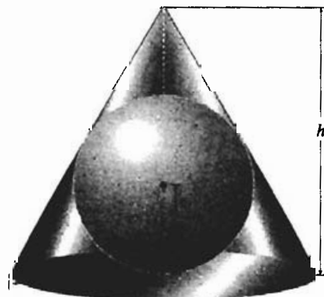


27. Un embudo de volumen específico tiene la forma de un cono circular recto. Determine la razón de la altura al radio de la base de modo que se emplee la mínima cantidad de material en su construcción.

28. Un cono circular recto se inscribe en una esfera de radio dado. Calcule la razón de la altura al radio de la base del cono de volumen máximo que pueda inscribirse en la esfera.



29. Un cono circular recto se circunscribe a una esfera de radio dado. Obtenga la razón de la altura al radio de la base del cono de volumen mínimo que pueda circunscribirse a la esfera.

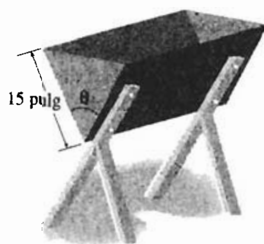


30. Demuestre por el método de esta sección que la distancia mínima desde el punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta l que tiene la ecuación $Ax + By + C = 0$ es

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Sugerencia: si s es el número de unidades desde P_1 a un punto $P(x, y)$ de l, entonces s será un mínimo absoluto cuando s^2 sea un mínimo absoluto.

31. La sección transversal de un bebedero tiene la forma de un triángulo isósceles invertido. Si las longitudes de los lados iguales son 15 pulg, determine el tamaño del ángulo formado por estos lados que proporcione al bebedero su máxima capacidad.



3.10 APROXIMACIONES MEDIANTE EL MÉTODO DE NEWTON, DE LA RECTA TANGENTE Y DE DIFERENCIALES

Antes del advenimiento de las calculadoras y de las computadoras, las raíces de una ecuación de la forma $f(x) = 0$ o, equivalentemente, los ceros de la función f, fueron aproximados por medio de técnicas numéricas que implican la derivada. Aunque tales aproximaciones son ahora fácilmente realizadas por la graficadora mediante los procedimientos *solve* o *zoom-in*, se dedicará esta sección a la discusión de tres técnicas numéricas. La primera de estas técnicas, conocida como el *método de Newton* e ideada por Sir Isaac Newton en el siglo XVII, es característico en los procesos numéricos empleados por las calculadoras.

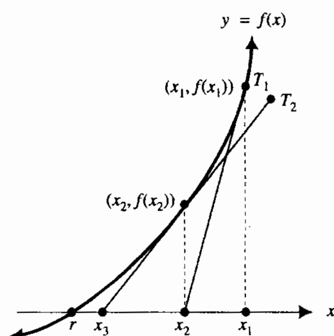


FIGURA 1

Se inicia el estudio del método de Newton considerando una interpretación geométrica de los conceptos involucrados. Refiérase a la figura 1, la cual muestra la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. El número r es una intercepción x de la gráfica. Para obtener una aproximación de r, primero se elige un número x_1, elección que debe ser razonablemente cercana a r. Después se considera la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_1, f(x_1))$. La recta tangente, denotada por T_1, se presenta en la figura 1, y la intercepción x de T_1 es x_2. El número x_2 sirve ahora como una segunda aproximación de r. Luego, se repite el proceso con la recta tangente T_2 en el punto $(x_2, f(x_2))$. La intercepción x de T_2 es x_3. Este proceso se continúa hasta obtener el grado de aproximación requerido. En esta gráfica, parece que los números x_1, x_2, x_3, etcétera, están cada vez más cercanos al número r. Esta situación ocurre para muchas funciones.

A fin de obtener las aproximaciones sucesivas x_2, x_3, ... de la primera aproximación x_1 se utilizan las ecuaciones de las rectas tangentes. La recta tangente T_1 en el punto $(x_1, f(x_1))$ tiene una pendiente de $f'(x_1)$. Por lo que una ecuación de T_1 es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

La intercepción x de T_1 es x_2, y se determina x_2 considerando $x = x_2$ y $y = 0$ en la ecuación anterior. Así,

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad \text{si } f'(x_1) \neq 0$$

Con este valor de x_2, una ecuación de T_2 es

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$$

Después se considera en esta ecuación $x = x_3$ y $y = 0$, de donde se obtiene

$$0 - f(x_2) = f'(x_2)(x_3 - x_2)$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \qquad \text{si } f'(x_2) \neq 0$$

Si se continúa de esta manera se obtiene la fórmula general para la aproximación x_{n+1} en términos de la aproximación anterior x_n:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{si } f'(x_n) \neq 0 \tag{1}$$

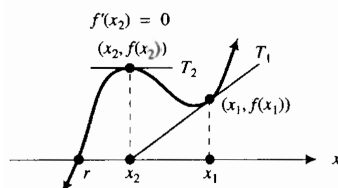


FIGURA 2

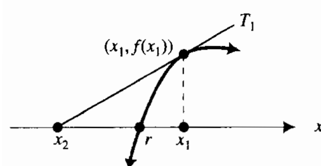


FIGURA 3

Por supuesto, la fórmula (1) se puede adaptar fácilmente para utilizarse en una computadora o en una calculadora programable.

A partir de la fórmula (1) se puede obtener la $(n + 1)$-ésima aproximación a partir de la n-ésima aproximación, considerando $f'(x_n) \neq 0$. Cuando $f'(x_n) = 0$, la recta tangente es horizontal, y en tal caso, a menos que la recta tangente sea el eje x mismo, no se tendrá intercepción x. La figura 2 muestra este hecho cuando $f'(x_2) = 0$. De modo que el método de Newton no es aplicable si $f'(x_n) = 0$ para alguna x_n. También debe tener en mente que el valor de x_{n+1} obtenido a partir de (1) no necesariamente es una mejor aproximación de r que x_n. Si, por ejemplo, x_1 no está razonablemente cerca de r, entonces $|f'(x_1)|$ puede ser pequeño de modo que la recta tangente T_1 es aproximadamente horizontal. Entonces x_2, la intercepción x de T_1, puede estar más alejada de r que x_1. Vea la figura 3 en la que esta situación ocurre.

En el ejemplo ilustrativo siguiente se muestra cómo el método de Newton se aplica a una ecuación para la cual se conoce la respuesta.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Utilice el método de Newton para obtener la raíz positiva de la ecuación $x^2 = 9$ comenzando con una primera aproximación de 4. Se escribe la ecuación como $x^2 - 9 = 0$ y se consideran

$$f(x) = x^2 - 9 \qquad \text{y} \qquad f'(x) = 2x$$

De (1) se obtiene

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 9}{2x_n} \tag{2}$$

Ahora se aplica (2) con valores de n y valores correspondientes de x_n para obtener x_{n+1} en una calculadora. Se inicia con $x_1 = 4$.

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 9}{2x_1} \qquad\qquad x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - 9}{2x_2}$$

$$= 4 - \frac{16 - 9}{8} \qquad\qquad = 3.125 - \frac{(3.125)^2 - 9}{2(3.125)}$$

$$= 3.125 \qquad\qquad = 3.0025$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^2 - 9}{2x_3} \qquad\qquad x_5 = x_4 - \frac{x_4^2 - 9}{2x_4}$$

$$= 3.0025 - \frac{(3.0025)^2 - 9}{2(3.0025)} \qquad\qquad = 3.0000 - \frac{(3.0000)^2 - 9}{2(3.0000)}$$

$$= 3.0000 \qquad\qquad = 3.0000$$

Ciertamente, todas las aproximaciones sucesivas serán 3.0000. De modo que la raíz positiva de la ecuación $x^2 - 9 = 0$ es 3.0000 con cuatro cifras decimales. ◀

Observe que cuando x_n es una solución de $f(x) = 0, f(x_n) = 0$. Así, de (1),

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - 0 \\ &= x_n \end{aligned}$$

En consecuencia, todas las aproximaciones sucesivas serán iguales a x_n. Note que esta situación se presenta en el ejemplo ilustrativo 1, donde todas las aproximaciones despues de x_4, incluyéndola, tienen el mismo valor considerando cuatro cifras decimales.

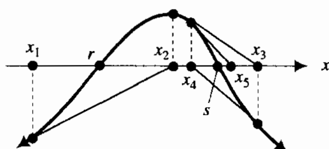


FIGURA 4

También observe en (1) que $x_{n+1} = x_n$ implica que $f(x_n) = 0$. Por tanto, se puede concluir que cuando dos aproximaciones sucesivas son iguales, se tiene una aproximación para un cero de f.

Sin embargo, es posible que para ciertas funciones, si la elección inicial de x_1 no está cerca del cero deseado, se pueden obtener aproximaciones para un cero diferente. Vea la figura 4, que muestra la gráfica de una función para la cual esta situación puede ocurrir. Observe que la elección de x_1 indicada próxima al cero deseado r proporciona aproximaciones sucesivas x_2, x_3, x_4, . . . próximas a otro cero s. De este modo, cuando se aplica el método de Newton debe hacer un bosquejo de la gráfica de la función a fin de obtener la aproximación inicial. Consulte la gráfica conforme proceda para asegurarse de que se está aproximando al cero deseado.

En resumen, cuando utilice el método de Newton para resolver una ecuación de la forma $f(x) = 0$, efectúe lo siguiente:

1. Haga una *buena suposición* para la primera aproximación x_1. Una gráfica de f le ayudará a obtener una elección razonable.
2. Obtenga una segunda aproximación x_2 con el valor de x_1 en la fórmula (1). Después utilice x_2 en (1) para conseguir una tercera aproximación x_3, y así sucesivamente, hasta que $x_{n+1} = x_n$ para el grado requerido de aproximación.

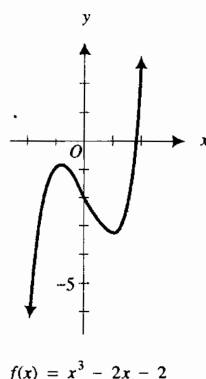
▶ ***EJEMPLO 1*** Utilice el método de Newton para determinar la raíz real de la ecuación

$$x^3 - 2x - 2 = 0$$

con cuatro cifras decimales.

Solución Sea $f(x) = x^3 - 2x - 2$; de modo que $f'(x) = 3x^2 - 2$. Entonces de (1) se tiene

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 2}{3x_n^2 - 2} \tag{3}$$



$f(x) = x^3 - 2x - 2$

FIGURA 5

La gráfica de f se muestra en la figura 5. Como la gráfica de f intersecta al eje x en un único punto, existe una raíz real de la ecuación dada. Debido a que $f(1) = -3$ y $f(2) = 2$, esta raíz se encuentra entre 1 y 2. Una elección adecuada para la primera aproximación es $x_1 = 1.5$. La tabla 1 presenta los resultados obtenidos en una calculadora para las aproximaciones sucesivas calculadas a partir de (3) con esta x_1. Se desea la raíz con una aproximación de cuatro cifras decimales; por lo que se emplean cinco cifras decimales en los cálculos. Como x_5 y x_6 son iguales (con cinco cifras decimales), se redondea el número a cuatro cifras decimales para obtener 1.7693 como la raíz requerida.

Tabla 1

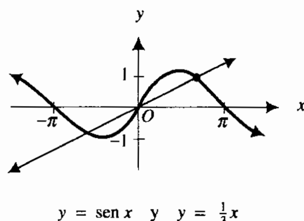
n	x_n	$\frac{x_n^3 - 2x_n - 2}{3x_n^2 - 2}$	x_{n+1}
1	1.50000	−0.34211	1.84211
2	1.84211	0.06928	1.77283
3	1.77283	0.00353	1.76930
4	1.76930	0.00001	1.76929
5	1.76929	0.00000	1.76929

◀

▶ ***EJEMPLO 2*** Utilice el método de Newton para determinar con tres cifras decimales la coordenada x del punto de intersección en el primer cuadrante de la recta $y = \frac{1}{3}x$ y la curva $y = \operatorname{sen} x$.

Solución La figura 6 muestra la recta y la curva se desea determinar el valor positivo de x para el cual

$$\operatorname{sen} x = \tfrac{1}{3}x$$
$$3 \operatorname{sen} x - x = 0$$



$y = \operatorname{sen} x$ y $y = \frac{1}{3}x$

FIGURA 6

Sean

$$f(x) = 3 \operatorname{sen} x - x \quad \text{y} \quad f'(x) = 3 \cos x - 1$$

De la fórmula (1),

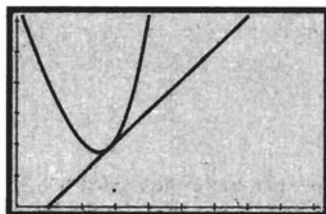
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3 \operatorname{sen} x_n - x_n}{3 \cos x_n - 1} \tag{4}$$

De la figura 6, parece que una elección razonable de x_1 es 2. Se utiliza una calculadora para obtener las aproximaciones sucesivas a partir de la fórmula (4); estas se muestran en la tabla 2. Los resultados se expresan con cuatro cifras decimales. Observe que, con cuatro cifras decimales, x_4 y x_5 son iguales a 2.2789. Por lo que para tres cifras decimales el valor positivo de x, para el cual $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}x$, es 2.279. ◀

Tabla 2

n	x_n	$\frac{3 \operatorname{sen} x_n - x_n}{3 \cos x_n - 1}$	x_{n+1}
1	2.0000	−0.3237	2.3237
2	2.3237	0.0441	2.2796
3	2.2796	0.0007	2.2789
4	2.2789	0.0000	2.2789



[0, 9.4] por [0, 6.2]

$f(x) = x^2 - 5x + 8$

FIGURA 7

Los teoremas que establecen las condiciones para las cuales es aplicable el método de Newton, así como los teoremas relacionados a su aproximación, pueden encontrarse en textos de análisis numérico.

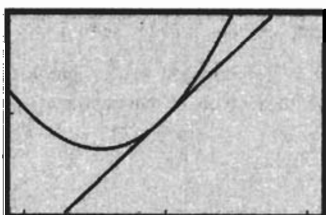
Una de las maneras simples en que los valores de función pueden aproximarse se denomina *aproximación lineal*, la cual utiliza la recta tangente a la gráfica de una función diferenciable. Se inicia la discusión sobre aproximación lineal con un ejemplo ilustrativo que muestra la idea básica.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

La figura 7 muestra la gráfica de

$$f(x) = x^2 - 5x + 8$$

y la recta tangente en el punto (3, 2) trazadas en el rectángulo de inspección de [0, 9.4] por [0, 6.2]. Si se aplica el procedimiento *zoom in* de la graficadora en el punto (3, 2) y se traza la recta tangente, se obtiene la figura 8 la cual presenta el rectángulo de inspección de [1.825, 4.175] por [1.225, 2.775]. Si se aplica otra vez *zoom in* y se traza la recta tangente, se obtiene la figura 9 la cual muestra el rectángulo de inspección de [2.706, 3.294] por [1.806, 2.194]. Observe cómo la recta tangente se aproxima a la gráfica de la función cerca del punto de tangencia. De este modo, si x está en un pequeño intervalo abierto que contenga a 3, la coordenada y correspondiente de la gráfica de la función puede ser aproximada por la coordenada y de la recta tangente. ◀



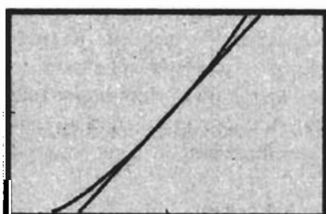
[1.825, 4.175] por [1.225, 2.775]

$f(x) = x^2 - 5x + 8$

FIGURA 8

Se utiliza el concepto del ejemplo ilustrativo anterior para una función general f diferenciable en un número x_0. Una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



[2.706, 3.294] por [1.806, 2.194]

$f(x) = x^2 - 5x + 8$

FIGURA 9

Refiérase a la figura 10 donde P es el punto $(x_0, f(x_0))$, Q es el punto $(x, f(x))$ y R es el punto $(x, f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$. Observe que para un número x suficientemente cercano a x_0, el punto Q de la gráfica de f está cerca del punto R de la recta tangente. En consecuencia, si x está cerca de x_0, $f(x)$ puede ser aproximado por $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$; esto es,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Esta aproximación se denomina **aproximación mediante la recta tangente**, o concisamente **aproximación lineal**, de $f(x)$ en x_0.

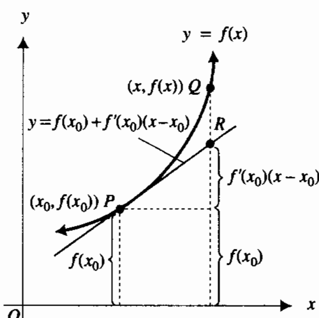


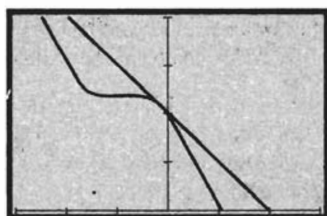
FIGURA 10

▶ EJEMPLO 3

Sea

$$f(x) = \cos^2 x - x + 1 \qquad \textbf{(5)}$$

(a) Obtenga la aproximación lineal de $f(x)$ en 0. **(b)** Apoye la res-puesta del inciso (a) gráficamente. **(c)** Compare el valor de $f(x)$ calculado mediante la aproximación lineal del inciso (a) con el valor de la función obtenido a partir de (5) cuando x es igual a -0.2, -0.1, -0.01, 0, 0.01, 0.1 y 0.2.



[−3, 3] por [0, 4]

$f(x) = \cos^2 x - x + 1$

FIGURA 11

Solución

(**a**) Se calcula $f'(x)$:

$$f'(x) = -2 \operatorname{sen} x \cos x - 1$$

La aproximación lineal de $f(x)$ en 0 es

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x - 0)$$

Como $f(0) = 2$ y $f'(0) = -1$, se tiene

$$f(x) \approx 2 - x \tag{6}$$

(**b**) La figura 11 muestra la gráfica de f y la recta tangente en (0, 2) trazadas en el rectángulo de inspección de [−3, 3] por [0, 4], la cual apoya la respuesta del inciso (a).

(**c**) La tabla 3 compara los valores de $f(x)$ calculados con (6) y aquellos calculados con (5). Observe que cuanto más cerca se encuentra x de cero, la aproximación resulta más exacta.

Tabla 3

x	−0.2	−0.1	−0.01	0	0.01	0.1	0.2
$f(x) \approx 2 - x$	2.2	2.1	2.01	2	1.99	1.9	1.8
$f(x) = \cos^2 x - x + 1$	2.16	2.09	2.0099	2	1.9899	1.89	1.76

◀

Ahora se tratará el concepto de *diferencial*, el cual también permite aproximar cambios en valores de función de puntos cercanos a puntos donde la función es diferenciable. Verá que una aproximación mediante diferenciales está relacionada a una aproximación lineal. Aunque la aplicación de diferenciales a la aproximación de valores de función no es muy importante en está época de adelantos tecnologicos, éstas son importantes como un artificio notacional conveniente para el cálculo de *antiderivadas*, como verá en el capítulo siguiente.

Suponga que la función f está definida por la ecuación

$$y = f(x)$$

En puntos donde f es diferenciable

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{7}$$

donde

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

De (7) se deduce que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |\Delta x| < \delta \quad \text{entonces} \quad \left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } 0 < |\Delta x| < \delta \quad \text{entonces} \quad \frac{|\Delta y - f'(x)\,\Delta x|}{|\Delta x|} < \epsilon$$

Esto significa que $|\Delta y - f'(x)\,\Delta x|$ es pequeño comparado con $|\Delta x|$. Es decir, para $|\Delta x|$ suficientemente pequeño, $f'(x)\,\Delta x$ es una buena aproximación del valor de Δy, y se escribe

$$\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x \tag{8}$$

si $|\Delta x|$ es suficientemente pequeño.

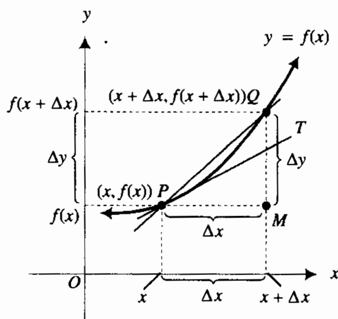


FIGURA 12

Para una interpretación gráfica del enunciado (8), refiérase a la figura 12. En esta figura, una ecuación de la curva es $y = f(x)$. La recta PT es tangente a la curva en $P(x, f(x))$, Q es el punto $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ y la distancia dirigida $\overline{MQ}$ es $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. En la figura, Δx y Δy son positivos; sin embargo, ellos pueden ser negativos. Para un valor pequeño de Δx, la pendiente de la recta secante PQ y la pendiente de la recta tangente en P son aproximadamente iguales; esto es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$$

$$\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$$

lo cual es el enunciado (8).

El miembro derecho del enunciado (8) se define como la *diferencial de y*.

3.10.1 Definición de diferencial de la variable dependiente

Si la función f está definida por la ecuación $y = f(x)$, entonces la **diferencial de y**, denotada por dy, está dada por

$$dy = f'(x)\,\Delta x \tag{9}$$

donde x está en el dominio de f' y Δx es un incremento arbitrario de x.

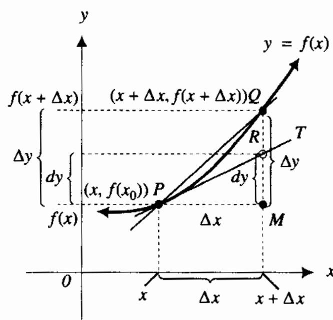


FIGURA 13

Ahora consulte la figura 13, la cual es la misma que la figura 12 excepto que se muestra el segmento de recta vertical $\overline{MR}$, donde la distancia dirigida MR es igual a dy. Observe que dy representa la variación de y a lo largo de la recta tangente a la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ en el punto $P(x, f(x))$, cuando x varía en Δx.

Este concepto de diferencial incluye un tipo especial de funciones de dos variables y en el capítulo 12 se presenta un estudio detallado de tales funciones. El símbolo df puede emplearse para representar esta función. La variable x puede ser cualquier número del dominio de f', y Δx puede ser cualquier número. Afirmar que df es una función de las dos variables independientes x y Δx, significa que a cada par ordenado $(x, \Delta x)$ del dominio de df le corresponde uno y sólo un número del contradominio de df, y este número puede representarse por $df(x, \Delta x)$ de modo que

$$df(x, \Delta x) = f'(x)\,\Delta x$$

Al comparar esta ecuación con (9) se aprecia que cuando $y = f(x)$, dy y $df(x, \Delta x)$ son dos notaciones diferentes para $f'(x)\,\Delta x$. El símbolo dy se utilizará en las discusiones posteriores.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Si $y = 3x^2 - x$, entonces $f(x) = 3x^2 - x$, de modo que $f'(x) = 6x - 1$. De la definición 3.10.1, se tiene

$$dy = (6x - 1)\,\Delta x$$

En particular, si $x = 2$, entonces $dy = 11\,\Delta x$. ◀

Cuando $y = f(x)$, la definición 3.10.1 proporciona dy, la diferencial de la variable dependiente. Ahora se desea definir la *diferencial de la variable independiente*, o dx. Para llegar a una definición adecuada y consistente con la definición de dy, se considera la función identidad definida por $f(x) = x$. Para esta función, $f'(x) = 1$ y $y = x$; así, de (9), $dy = 1 \cdot \Delta x$; es decir,

$$\text{si} \quad y = x \quad \text{entonces} \quad dy = \Delta x \tag{10}$$

Para la función identidad se desea que dx sea igual a dy; es decir, debido al enunciado (10) se quiere que dx sea igual a Δx. Este razonamiento conduce a la siguiente definición.

3.10.2 Definición de diferencial de la variable independiente

Si la función f está definida por la ecuación $y = f(x)$, entonces la **diferencial de x**, denotada por dx, está dada por

$$dx = \Delta x$$

donde x es un número del dominio de f' y Δx es un incremento arbitrario de x.

De las definiciones 3.10.1 y 3.10.2,

$$dy = f'(x)\,dx \tag{11}$$

Al dividir ambos miembros de esta ecuación entre dx, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad \text{si } dx \neq 0$$

Esta ecuación expresa la derivada como un cociente de dos diferenciales. Recuerde que cuando se introdujo la notación $\frac{dy}{dx}$ en la sección 2.1, se remarcó que dy y dx no se les había dado un significado independiente en ese momento.

EJEMPLO 4 Dada $y = 4x^2 - 3x + 1$, encuentre Δy, dy y $\Delta y - dy$ para **(a)** cualesquiera x y Δx; **(b)** $x = 2$, $\Delta x = 0.1$; **(c)** $x = 2$, $\Delta x = 0.01$; **(d)** $x = 2$, $\Delta x = 0.001$.

Solución

(a) Como $y = 4x^2 - 3x + 1$, sea
$$f(x) = 4x^2 - 3x + 1$$

Entonces

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x)\\ &= 4(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1 - (4x^2 - 3x + 1)\\ &= 4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 - 4x^2 + 3x - 1\\ &= (8x - 3)\,\Delta x + 4(\Delta x)^2\end{aligned}$$

De (11),

$$\begin{aligned}dy &= f'(x)\,dx\\ &= (8x - 3)\,dx\\ &= (8x - 3)\,\Delta x\end{aligned}$$

Así,

$$\Delta y - dy = 4(\Delta x)^2$$

Los resultados para los incisos (b), (c) y (d) se dan en la tabla 4.

Tabla 4

	x	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
(b)	2	0.1	1.34	1.3	0.04
(c)	2	0.01	0.1304	0.13	0.0004
(d)	2	0.001	0.013004	0.013	0.000004

◀

Observe de la tabla 4 que cuanto más cerca se encuentre Δx de cero, la diferencia entre Δy y dy será menor. Además, note que para cada valor de Δx, el valor correspondiente de $\Delta y - dy$ es menor que el de Δx. De modo más general, dy es una aproximación de Δy cuando Δx es pequeño, y la aproximación es más exacta que el valor de Δx.

Para un valor fijo de x, por decir x_0,

$$dy = f'(x_0)\,dx$$

esto es, dy es una función lineal de dx; en consecuencia, dy es usualmente más fácil de calcular que Δy, como se vio en el ejemplo 4. Puesto que

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$$

entonces

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y$$

Así

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy$$

En la figura 14 se ilustra este resultado, donde la ecuación de la curva es $y = f(x)$. La recta PT es tangente a la curva en el punto $P(x_0, f(x_0))$; Δx y dx son iguales y están representados por la distancia dirigida $\overline{PM}$, donde M es

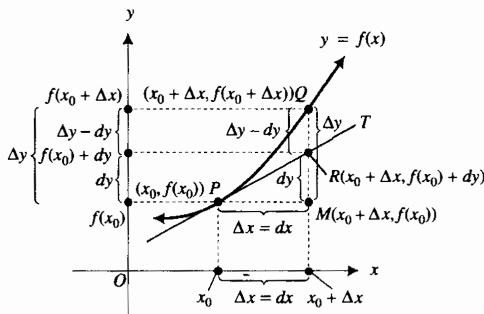


FIGURA 14

el punto $(x_0 + \Delta x, f(x_0))$. Sean Q el punto $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ y Δy la distancia dirigida $\overline{MQ}$. La pendiente de PT es $f'(x) = dy/dx$. También, la pendiente de PT es $\overline{MR}/\overline{PM}$, y como $\overline{PM} = dx$, se tiene que $dy = \overline{MR}$ y $\overline{RQ} = \Delta y - dy$. Observe que cuanto más pequeño es el valor de dx (es decir, cuanto más cerca esté el punto Q del punto P), menor será el valor de $y - dy$ (es decir, menor será la longitud del segmento de recta RQ).

Una ecuación de la recta PT es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

y la ordenada de R es $f(x_0) + dy$. Observe que cuando $f(x_0 + \Delta x)$ se aproxima mediante $f(x_0) + dy$, se está aproximando la ordenada del punto Q de la curva mediante la ordenada del punto R de la recta tangente. De modo que, utlizar diferenciales para estimar valores de función es esencialmente el mismo proceso que la aproximación lineal; sólo la notación es diferente.

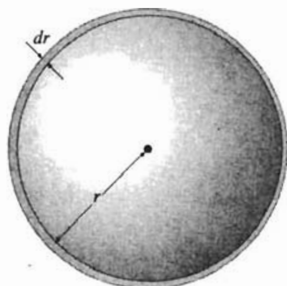


FIGURA 15

EJEMPLO 5 Utilice diferenciales para aproximar el volumen de un cascarón esférico cuyo radio interno mide 4 pulg y cuyo espesor es de $\frac{1}{16}$ pulg.

Solución Se considera el volumen de un cascarón esférico como un incremento del volumen de una esfera. Consulte la figura 15. Sean r pulgadas el radio de la esfera, V pulgadas cúbicas el volumen de la esfera y ΔV pulgadas cúbicas el volumen del cascarón esférico. Entonces

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{y} \quad dV = 4\pi r^2\, dr$$

Si se sustituye r por 4 y dr por $\frac{1}{16}$ en la última ecuación, se tiene

$$\begin{aligned} dV &= 4\pi(4)^2 \tfrac{1}{16} \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

Por tanto, $\Delta V \approx 4\pi$.

Conclusión: El volumen aproximado del cascarón esférico es de 4π pulg^3 ◀

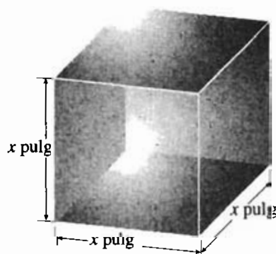


FIGURA 16

EJEMPLO 6 Un contenedor cerrado de forma cúbica y cuyo volumen es de 1000 pulg^3, se construye utilizando seis cuadrados iguales de material que cuesta 20 centavos por pulgada cuadrada. Aproximadamente, ¿cuánto debe medir el lado de cada cuadrado de modo que el costo total del material tenga una variación dentro de un margen de \$3.00?

Solución La figura 16 muestra el cubo donde x pulgadas es la longitud de los lados de los cuadrados y, en consecuencia, la longitud de las aristas del cubo. Sean C dólares el costo total del material. Como el área total de los seis cuadrados es $6x^2$ pulgadas cuadradas, y el costo del material es de \$0.20 por pulgada cuadrada, entonces

$$\begin{aligned} C &= 0.20(6x^2) \\ C &= 1.2x^2 \qquad (12) \end{aligned}$$

Para que el volumen de un cubo sea de 1000 pulg^3, $x^3 = 1000$, debe tenerse que $x = 10$. Cuando $x = 10$, se obtiene de (12), $C = 120$. Así, el costo del

material será exactamente $120 si las longitudes de los lados de los cuadrados miden 10 pulg. Como el costo del material es correcto cuando esté dentro de un margen de $3.00, se desea determinar $|\Delta x|$ tal que $|\Delta C| \leq 3$. Se utilizará la diferencial dC para aproximar ΔC. De (12), se tiene

$$dC = 2.4x\,dx$$
$$\Delta C \approx 2.4x\,\Delta x$$

Con $x = 10$,

$$|\Delta C| \approx 24|\Delta x|$$

Como se desea que $|\Delta C| \leq 3$, se determinará cuándo $24|\Delta x| \leq 3$:

$$24|\Delta x| \leq 3$$
$$|\Delta x| \leq \tfrac{3}{24}$$
$$|\Delta x| \leq 0.125$$

Conclusión: Las medidas de los lados de los cuadrados deben estar dentro de un margen de 0.125 pulg a fin de que el costo total del material esté dentro de un margen de $3.00. ◀

En la sección 2.4 se demostraron los teoremas para calcular derivadas de funciones algebraicas. Ahora se enunciarán estos teoremas con la notación de Liebniz, y junto con la derivada se presentará la fórmula para la diferencial. En estas fórmulas, u y v son funciones de x, y se sobreentiende que las fórmulas se cumplen considerando que $\dfrac{du}{dx}$ y $\dfrac{dv}{dx}$ existen. Cuando aparezca c, considérela como constante.

I $\dfrac{d(c)}{dx} = 0$	I′ $d(c) = 0$
II $\dfrac{d(x^n)}{dx} = xn^{n-1}$	II′ $d(x^n) = xn^{n-1}\,dx$
III $\dfrac{d(cu)}{dx} = c\dfrac{du}{dx}$	III′ $d(cu) = c\,du$
IV $\dfrac{d(u+v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$	IV′ $d(u+v) = du + dv$
V $\dfrac{d(uv)}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$	V′ $d(uv) = u\,dv + v\,du$
VI $\dfrac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \dfrac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$	VI′ $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$
VII $\dfrac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$	VII′ $d(u^n) = nu^{n-1}\,du$

La operación de diferenciación se extiende de modo que incluya los procesos para calcular la diferencial así como la derivada. Si $y = f(x)$, dy puede obtenerse al aplicar las fórmulas I′-VII′ o calculando $f'(x)$ y multiplicándola por dx.

EJERCICIOS 3.10

En los ejercicios 1 a 4, utilice el método de Newton para determinar la raíz real de la ecuación con cuatro cifras decimales.

1. $x^3 - 4x^2 - 2 = 0$ **2.** $6x^3 + 9x + 1 = 0$

3. $x^5 - x + 1 = 0$ **4.** $x^5 + x - 1 = 0$

En los ejercicios 5 a 10, emplee el método de Newton para calcular, con aproximación de milésimos, el valor aproximado de la raíz indicada.

5. $x^3 - 4x - 8 = 0$; la raíz positiva

6. $x^3 - 2x + 7 = 0$; la raíz negativa

7. $x^4 - 10x + 5 = 0$; la menor raíz positiva

8. $x^4 - 10x + 5 = 0$; la mayor raíz positiva

9. $2x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 4 = 0$; la raíz negativa

10. $x^4 + x^3 - 3x^2 - x - 4 = 0$; la raíz positiva

En los ejercicios 11 a 14, use el método de Newton para obtener el valor del radical con cinco cifras decimales

11. $\sqrt{3}$ resolviendo la ecuación $x^2 - 3 = 0$

12. $\sqrt{10}$ resolviendo la ecuación $x^2 - 10 = 0$

13. $\sqrt[3]{6}$ resolviendo la ecuación $x^3 - 6 = 0$

14. $\sqrt[3]{7}$ resolviendo la ecuación $x^3 - 7 = 0$

En los ejercicios 15 a 18, aplique el método de Newton para determinar con cuatro cifras decimales la coordenada x del punto de intersección del primer cuadrante de las gráficas de las dos ecuaciones.

15. $y = x$; $y = \cos x$ **16.** $y = \frac{1}{2}x$; $y = \operatorname{sen} x$

17. $y = x^2$; $y = \operatorname{sen} x$ **18.** $y = x^2$; $y = \cos x$

En los ejercicios 19 a 24, haga lo siguiente para la función f: (a) obtenga la aproximación lineal de f(x) en x = 1; (b) apoye la respuesta del inciso (a) gráficamente; (c) compare los valores de f(x) calculados a partir de la aproximación lineal en el inciso (a) con los valores de función obtenidos a partir de las ecuaciones dadas cuando x es igual a 0.9, 0.99, 1, 1.01 *y* 1.1.

19. $f(x) = x^2$ **20.** $f(x) = x^3$

21. $f(x) = 2\sqrt{x}$ **22.** $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$

23. $f(x) = \cos x$ **24.** $f(x) = \operatorname{sen} x$

En los ejercicios 25 a 28, (a) determine dy y Δy para los valores de x y Δx. (b) Dibuje la gráfica y los segmentos de recta indicados cuyas longitudes son dy y Δy.

25. $y = x^2$; $x = 2$ y $\Delta x = 0.5$

26. $y = x^3$; $x = 2$ y $\Delta x = 0.5$

27. $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 8$ y $\Delta x = 1$

28. $y = \sqrt{x}$; $x = 4$ y $\Delta x = 1$

En los ejercicios 29 a 34, calcule (a) Δy; (b) dy; (c) Δy − dy.

29. $y = x^2 - 3x$; $x = 2$; $\Delta x = 0.03$

30. $y = x^2 - 3x$; $x = -1$; $\Delta x = 0.02$

31. $y = \dfrac{1}{x}$; $x = -2$; $\Delta x = -0.1$

32. $y = \dfrac{1}{x}$; $x = 3$; $\Delta x = -0.2$

33. $y = x^3 + 1$; $x = 1$; $\Delta x = -0.5$

34. $y = x^3 + 1$; $x = -1$; $\Delta x = 0.1$

En los ejercicios 35 a 42, calcule dy.

35. $y = (3x^2 - 2x + 1)^3$ **36.** $y = \dfrac{3x}{x^2 + 2}$

37. $y = x^2\sqrt{2x + 3}$ **38.** $y = \sqrt{4 - x^2}$

39. $y = \dfrac{2 + \cos x}{2 - \operatorname{sen} x}$

40. $y = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - x \cos \dfrac{1}{x}$

41. $y = \tan^2 x \sec^2 x$ **42.** $y = \cot 2x \csc 2x$

43. La medida de la arista de un cubo mide 15 cm con un error posible de 0.01 cm. Emplee diferenciales para determinar el error aproximado al calcular a partir de esta medida: **(a)** el volumen; **(b)** el área de una de las caras.

44. Una caja metálica en forma de cubo tiene un volumen interior de 1000 cm^3. Las seis caras serán de metal de $\frac{1}{2}$ cm de espesor. Si el costo del metal que se empleará es de \$0.20 por centímetro cúbico, utilice diferenciales para determinar el costo aproximado del metal utilizado en la construcción de la caja.

45. Un tanque cilíndrico abierto tendrá un revestimiento de 2 cm de espesor. Si el radio interior es de 6 m y la altura es de 10 m, obtenga mediante diferenciales la cantidad aproximada de material de revestimiento que se empleará.

46. El tallo de un hongo es de forma cilíndrica, y un tallo de 2 cm de altura y r centímetros de radio tiene un volumen de V centímetros cúbicos, donde $V = 2\pi r^2$. Use diferenciales para calcular el incremento aproximado del volumen del tallo cuando el radio aumenta de 0.4 cm a 0.5 cm.

47. Una quemadura de forma circular en la piel de una persona es tal que si r centímetros es la longitud del radio y A centímetros cuadrados es el área de la quemadura, entonces $A = \pi r^2$. Utilice diferenciales para determinar la disminución aproximada del área de la quemadura cuando el radio disminuye de 1 cm a 0.8 cm.

48. Cierta bacteria de forma esférica es tal que si r micras es la longitud del radio y V micras cúbicas es su volumen, entonces $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Emplee diferenciales para determinar el incremento aproximado del volumen de la bacteria cuando el radio aumenta de 2.2 μm a 2.3 μm.

49. Un tumor en el cuerpo de una persona tiene forma esférica de modo que si r centímetros es la medida del radio y V centímetros cúbicos es el volumen del tumor, entonces $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Utilice diferenciales para determinar el incremento aproximado del volumen del tumor cuando el radio aumenta de 1.5 cm a 1.6 cm.

50. Si t segundos es el tiempo para una oscilación completa de un péndulo simple de l pies de longitud, entonces $4\pi^2 l = gt^2$, donde $g = 32.2$. Un reloj que tiene un

péndulo de 1 pie se adelanta 5 minutos cada día. Determine la cantidad aproximada que debe alargarse el péndulo para corregir la inexactitud.

51. La medida de la resistencia eléctrica de un alambre es proporcional a la medida de su longitud e inversamente proporcional al cuadrado de la medida de su diámetro. Suponga que la resistencia de un alambre de longitud dada se calcula a partir de la medición del diámetro con un error posible del 2%. Determine el error porcentual posible del valor calculado de la resistencia.

52. Un contratista acuerda pintar los dos lados de 1000 señales circulares, cada una de 3 m de radio. Al recibir las señales, se descubrió que éstas son 1 cm más grandes. Use diferenciales para determinar el incremento porcentual aproximado de pintura que se necesitará.

53. Si el error posible en la medición del volumen de un gas es de 0.1 pie^3 y el error permitido en la presión es de $0.001C$ lb/pie^2, determine el tamaño del recipiente más pequeño para el cual se cumple la ley de Boyle (ejercicio 23 de la sección 2.10).

54. Para la ley adiabática de la expansión del aire (ejercicio 24 de la sección 2.10), demuestre que

$$\frac{dP}{P} = -1.4\frac{dV}{V}$$

55. Demuestre que si la ley de Boyle se cumple, entonces

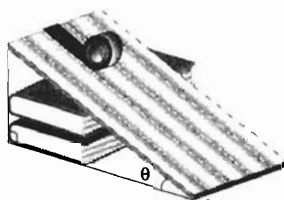
$$\frac{dP}{P} = -\frac{dV}{V}$$

56. Un rollo de cinta flexible de L pies de longitud, fijada en la parte superior de una tabla inclinada que forma un ángulo θ con la horizontal, se deja rodar por la tabla. Vea la figura adjunta. Si T segundos es el tiempo para que la cinta se desenrolle completamente, entonces

$$T = \sqrt{\frac{3L}{32}\csc\theta}$$

Demuestre que

$$\frac{dT}{T} = -\frac{d\theta}{2\tan\theta}$$



57. Las ecuaciones de la forma $\tan x + ax = 0$ surgen en problemas de conducción de calor. Las raíces positivas de la ecuación en orden creciente son α_1, α_2, α_3, ... Si $a = 1$, determine α_1 y α_2 con cuatro cifras decimales.

58. Siga las instrucciones del ejercicio 57 considerando $a = -2$.

En los ejercicios 59 y 60, obtenga una aproximación para π con cinco cifras decimales utilizando el método de Newton para resolver la ecuación.

59. $\tan x = 0$ **60.** $\cos x + 1 = 0$

61. Explique cómo se utiliza el concepto de diferencial para aproximar valores de función.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 3

▶ SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 3

1. Explique la diferencia entre *extremo relativo* y *extremo absoluto* de una función.

2. Invente un ejemplo de una función f que tenga un extremo relativo en el punto $P(c, f(c))$ y para la cual se cumplen las condiciones siguientes:
(**a**) La recta tangente a la gráfica de f en P es horizontal;
(**b**) La recta tangente a la gráfica de f en P es vertical;
(**c**) La gráfica de f no tiene recta tangente en P.

3. Enuncie el *teorema del valor extremo.*

4. Describa cómo determinaría los extremos absolutos de una función que satisface las condiciones del teorema del valor extremo.

5. Invente un ejemplo de una función que satisfaga las condiciones del teorema del valor extremo y que tenga la propiedad indicada:
(**a**) la función no tiene números críticos;
(**b**) sólo un extremo absoluto ocurre en un número crítico;
(**c**) los dos extremos absolutos ocurren en números críticos;
(**d**) la función tiene exactamente dos números críticos pero ningún extremo absoluto ocurre en los números críticos.

6. Invente un ejemplo de una función que satisfaga las condiciones del teorema del valor extremo y para la cual el valor mínimo absoluto ocurra en un número crítico c donde $f'(c)$ no exista y
(**a**) la gráfica de f no tenga recta tangente en el punto $(c, f(c))$;
(**b**) la gráfica de f tenga una recta tangente vertical en el punto $(c, f(c))$.

7. ¿Qué directrices deben seguirse cuando se definen las variables empleadas para obtener una función como *modelo matemático* de un problema verbal?

8. ¿Por qué debe establecerse el dominio de la función que utiliza como modelo matemático para resolver un problema verbal?

9. A fin de aplicar el teorema del valor extremo para resolver un problema verbal que implica un extremo absoluto, ¿qué condiciones debe satisfacer la función que se utiliza como modelo matemático?

10. Bosqueje el procedimiento que utilizaría para resolver un problema verbal que implica un extremo absoluto en un intervalo cerrado.

11. Enuncie y proporcione la interpretación geométrica del *teorema de Rolle*.

12. Enuncie y proporcione la interpretación geométrica del *teorema del valor medio*.

13. Explique por qué el teorema de Rolle es un caso especial del teorema del valor medio.

14. Tanto en el teorema de Rolle como en el teorema del valor medio se requiere que la función f sea continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, pero diferenciable sólo en el intervalo abierto (a, b). Explique por qué los teoremas son válidos cuando $f'(a)$, $f'(b)$ o ambos no existen.

15. ¿Por qué es más importante la existencia del número c, garantizado por la conclusión del teorema del valor medio, que el valor real del número c? En su respuesta enuncie situaciones en las que sólo la existencia de c importa y no su valor.

16. Invente un ejemplo de una función que satisfaga las hipótesis del teorema del valor medio pero para la cual no se pueda determinar el valor exacto del número c garantizado por la conclusión.

17. Defina: la función f es *creciente* en un intervalo. ¿Cómo se determinaría analíticamente que f es creciente en el intervalo cerrado $[a, b]$?

18. Defina: la función f es *decreciente* en un intervalo. ¿Cómo se determinaría analíticamente que f es decreciente en el intervalo cerrado $[a, b]$?

19. Enuncie el *criterio de la primera derivada* para extremos relativos.

20. ¿Cómo determinaría analíticamente los extremos relativos de una función?

21. Invente un ejemplo de una función diferenciable que tenga exactamente dos extremos relativos. Dibuje la gráfica de la función.

22. Invente un ejemplo de una función diferenciable y no lineal que no tenga extremos relativos. Dibuje la gráfica de la función.

23. Invente un ejemplo de una función continua que sea diferenciable en todo punto excepto en el origen, que tenga un valor mínimo relativo en el origen, y cuya gráfica no tenga recta tangente en el origen. Dibuje la gráfica de la función.

24. Invente un ejemplo de una función continua que sea diferenciable en todo punto excepto en el origen, que tenga un valor mínimo relativo en el origen, y cuya gráfica tenga una recta tangente en el origen. Dibuje la gráfica de la función.

25. Invente un ejemplo de una función continua f que sea diferenciable en todo punto excepto en el origen, y tal que f no tenga un extremo relativo en el origen. Dibuje la gráfica de la función.

26. Defina: la gráfica de la función f es *cóncava hacia arriba* en el punto $(c, f(c))$. ¿Cómo determinaría analíticamente que la gráfica de una función es cóncava hacia arriba en un punto particular?

27. Defina: la gráfica de la función f es *cóncava hacia abajo* en el punto $(c, f(c))$. ¿Cómo determinaría analíticamente que la gráfica de una función es cóncava hacia abajo en un punto particular?

28. Defina: el punto $(c, f(c))$ es un *punto de inflexión* de la gráfica de la función f. ¿Cómo determinaría analíticamente los puntos de inflexión de la gráfica de una función?

29. Dibuje la gráfica de una función f para la cual la gráfica tenga un punto de inflexión en $(c, f(c))$ donde $f''((c) = 0$, $f'(c) = 1, f''(x) > 0$ si $x < c$, y $f''(x) < 0$ si $x > c$.

30. Dibuje la gráfica de una función f para la cual la gráfica tenga un punto de inflexión en $(c, f(c))$ donde $f''(c) = 0$, $f'(c) = 0, f''(x) < 0$ si $x < c$, y $f''(x) > 0$ si $x > c$.

31. Dibuje la gráfica de una función f para la cual la gráfica tenga un punto de inflexión en $(c, f(c))$ donde $f'(c)$ no exista, $f''(x) > 0$ si $x < c$, y $f''(x) < 0$ si $x > c$.

32. Enuncie el *criterio de la segunda derivada* para extremos relativos.

33. ¿Cuándo es más fácil aplicar el criterio de la segunda derivada? ¿Cuándo es más fácil aplicar el criterio de la primera derivada? ¿Pueden aplicarse siempre estos criterios? Explique su respuesta.

34. Invente un ejemplo y dibuje la gráfica de una función f para la cual $f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$ son iguales a 0, donde
(a) f tiene un valor mínimo relativo en 0;
(b) f tiene un valor máximo relativo en 0;
(c) f no tiene extremo relativo en 0.

35. Defina precisamente, utilizando la notación ϵ–N, cada uno de los siguientes límites: **(a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$; **(b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$. Enuncie en palabras lo que cada una de estas definiciones significa sin emplear la notación ϵ–N ni las palabras *límite, se aproxima a, infinito, crece sin límite* o *decrece sin límite*.

36. ¿Cómo se evalúa el límite de una función racional cuando x crece o decrece sin límite?

37. Invente un ejemplo de una función f que ilustre cada uno de los siguientes límites: **(a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$; **(b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5$; **(c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$; **(d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; **(e)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; **(f)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$;

38. Defina: *asíntota horizontal* de la gráfica de una función.

39. ¿Cómo pueden determinarse las asíntotas horizontales de la gráfica de una función?

40. Invente un ejemplo de una función cuya gráfica tenga la recta $x = 5$ como una asíntota vertical y la recta $y = -4$ como una asíntota horizontal.

41. Si la recta $x = c$ es una asíntota vertical de la gráfica de la derivada de la función f, ¿cuáles son las posibilidades del comportamiento de la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$? ¿Qué información adicional, obtenida a partir de la gráfica de la derivada de f, garantizará un comportamiento específico de la gráfica de f en $(c, f(c))$?

42. Si la gráfica de la derivada de una función f revela que f tiene un extremo relativo en c, ¿cuáles son las posibilidades del comportamiento de la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$? ¿Qué información adicional, obtenida a partir de la gráfica de la derivada de f, garantizará un comportamiento específico de la gráfica de f en $(c, f(c))$?

43. ¿Qué es una *asíntota oblicua* de la gráfica de una función?

44. ¿Cuándo la gráfica de una función racional tiene una asíntota oblicua y cómo se determina la ecuación de la asíntota?

45. Elabore un resumen de los pasos que deben seguirse para dibujar la gráfica de la función f definida por la ecuación $y = f(x)$.

46. Enuncie un teorema diferente del teorema del extremo absoluto que garantice que un extremo relativo de una función en un intervalo es un extremo absoluto de la función en el intervalo. Cuando resuelve un problema que involucra extremos absolutos, ¿en qué condiciones emplearía el teorema enunciado en lugar del teorema del extremo absoluto?

47. **(a)** Invente un ejemplo de una función para la cual pueda aplicarse el teorema enunciado en el ejercicio anterior para determinar un extremo absoluto, de modo que no pueda aplicársele el teorema del valor extremo. **(b)** Invente un ejemplo de una función para la cual se puede aplicar el teorema del ejercicio anterior o el teorema del valor extremo para determinar un extremo absoluto en un intervalo.

48. ¿Cómo se aplicaría el *método de Newton* para determinar los ceros de una función? En su respuesta enuncie la fórmula para determinar x_{n+1} a partir de x_n.

49. ¿Cómo se estiman los valores de función mediante la aproximación lineal? ¿Qué condición (o condiciones) debe satisfacer la función f en el número x_0 para estimar $f(x_0)$ mediante aproximación lineal?

50. Si $y = f(x)$, defina las diferenciales dy y dx.

51. ¿Cómo están relacionados la diferencial dx y el incremento Δx? ¿Cómo están relacionados la diferencial dy y el incremento Δy?

52. ¿Por qué la derivada de una función puede expresarse como el cociente de dos diferenciales?

53. ¿Para qué función son iguales las diferenciales de las variables independiente y dependiente? Muestre esta igualdad geométricamente en una figura que contenga la gráfica de la función.

▶ EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 3

En los ejercicios 1 a 10, (a) dibuje la gráfica de la función en el intervalo indicado. (b) Encuentre los extremos absolutos de la función en el intervalo, si existe alguno, y determine los valores de x para los cuales ocurren los extremos absolutos.

1. $f(x) = \sqrt{5 + x}$; $[-5, +\infty)$

2. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; $(-2, 2)$

3. $f(x) = |9 - x^2|$; $[-2, 4]$

4. $f(x) = |9 - x^2|$; $[-1, 5]$

5. $f(x) = \dfrac{3}{x - 2}$; $[0, 4]$

6. $f(x) = \dfrac{8}{3 - x}$; $[1, 3]$

7. $f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x$; $[-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi]$

8. $f(x) = 4 \cos^2 2x$; $[0, \frac{3}{4}\pi]$

9. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } -2 \le x < 1 \\ x^2 + 4 & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$; $[-2, 2]$

10. $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si } -3 \le x < 3 \\ 5x - 15 & \text{si } 3 \le x \le 5 \end{cases}$; $[-3, 5]$

En los ejercicios 11 a 14, (i) estime en la graficadora los extremos absolutos de la función en el intervalo indicado. (ii) Confirme las respuestas analíticamente.

11. **(a)** $f(x) = x^4 - 12x^2 + 36$; $[-2, 3]$
(b) $f(x) = x^4 - 12x^2 + 36$; $[-4, 2]$

12. **(a)** $f(x) = x^5 - 9x^2 + 5$; $[-1, 2]$
(b) $f(x) = x^5 - 9x^2 + 5$; $[-2, 1]$

13. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$; $[-1, 1]$

14. $f(x) = 2 \cos x + x$; $[-1, 3]$

En los ejercicios 15 y 16, verifique que las tres condiciones de la hipótesis del teorema de Rolle son satisfechas por la función en el intervalo indicado. Después encuentre un valor adecuado para c que satisfaga la conclusión del teorema de Rolle. Apoye gráficamente la elección de c trazando en el mismo rectángulo de inspección las gráficas de f y de la recta tangente horizontal en (c, f(c)).

15. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$; $[-2, 1]$

16. $f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x$; $[0, \frac{1}{3}\pi]$

En los ejercicios 17 a 20, verifique que la hipótesis del teorema del valor medio es satisfecha por la función en el intervalo indicado [a, b]. Después encuentre un valor adecuado para c que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio. Apoye la elección de c trazando en el mismo rectángulo de inspección la gráfica de f en el intervalo cerrado [a, b], la recta tangente en (c, f(c)), y la recta secante que pasa por los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)) y mostrando que las rectas tangente y secante son paralelas.

17. $f(x) = \sqrt{3 - x}$; $[-6, -1]$

18. $f(x) = x^3$; $[-2, 2]$

19. $f(x) = 4 \cos x$; $[\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi]$

20. $f(x) = 3 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$; $[0, \pi]$

21. **(a)** Si f es una función polinomial y $f(a)$, $f(b)$, $f'(a)$ y $f'(b)$ son cero, utilice el teorema de Rolle para demostrar que existen al menos dos números en el intervalo abierto (a, b) que son raíces de la ecuación $f''(x) = 0$.

(b) Demuestre que la función definida por

$$f(x) = (x^2 - 4)^2$$

satisface el inciso (a) si el intervalo (a, b) es $(-2, 2)$.

22. Si f es la función definida por $f(x) = |2x - 4| - 6$, entonces $f(-1) = 0$ y $f(5) = 0$. Sin embargo, $f'(x)$ nunca es cero. Muestre por qué el teorema de Rolle no se aplica.

Para las funciones de los ejercicios 23 y 24, no existe ningún número c en el intervalo abierto (a, b) que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio. En cada ejercicio, determine qué condición de la hipótesis del teorema del valor medio no se cumple. Dibuje la gráfica de f y la recta que pasa por los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)).

23. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ 6 - 3x & \text{si } 1 \le x \end{cases}$; $a = 0, b = 3$

24. $f(x) = 2(x - 2)^{2/3}$; $a = -6, b = 3$

En los ejercicios 25 a 32, (a) trace la gráfica; determine a partir de la gráfica (b) los extremos relativos de f, (c) los valores de x en los que ocurren los extremos relativos, (d) los intervalos en los que f es creciente, y (e) los intervalos en los que f es decreciente. Confirme analíticamente la información obtenida gráficamente.

25. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

26. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 5$

27. $f(x) = (x - 3)^{5/3} + 1$

28. $f(x) = (x + 2)^{4/3} - 3$

29. $f(x) = x - \tan x$; $x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

30. $f(x) = \operatorname{sen} 2x - \cos 2x$; $x \in [-\frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi]$

31. $f(x) = (x + 1)^{2/3}(x - 3)^2$

32. $f(x) = x\sqrt{25 - x^2}$

En los ejercicios 33 a 36, haga lo siguiente: (a) determine los extremos relativos de f; (b) obtenga los valores de x en los que ocurren los extremos relativos; (c) los intervalos en los que f es creciente, (d) los intervalos en los que f es decreciente; (e) halle los puntos de inflexión de la gráfica de f; (f) determine en dónde la gráfica de f es cóncava hacia arriba; (g) determine en dónde la gráfica de f es cóncava hacia abajo. Dibuje la gráfica de la función a partir de las respuestas de los incisos (a)–(g).

33. $f(x) = (x - 4)^2(x + 2)^3$

34. $f(x) = (x - 1)^3(x - 3)$

35. $f(x) = \begin{cases} (1 - x)^3 & \text{si } x \le 1 \\ (x - 1)^3 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & \text{si } x < 2 \\ 6 - x^2 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$

En los ejercicios 37 a 44, estime en la graficadora los puntos de inflexión de la gráfica de la función dada y en dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y en dónde lo es hacia abajo. Confirme las estimaciones analíticamente.

37. La función del ejercicio 25

38. La función del ejercicio 26

39. La función del ejercicio 27

40. La función del ejercicio 28

41. La función del ejercicio 29

42. La función del ejercicio 30

43. La función del ejercicio 31

44. La función del ejercicio 32

En los ejercicios 45 y 46, dibuje una porción de la gráfica de una función f que pase por el punto donde x = c y que satisfaga las condiciones dadas. Suponga que f es continua en algún intervalo abierto que contiene a c.

45. **(a)** $f'(x) > 0$ si $x < c$; $f'(x) < 0$ si $x > c$; $f''(x) < 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$;

(b) $f'(x) < 0$ si $x < c$; $f'(x) > 0$ si $x > c$; $f''(x) < 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$;

(c) $f'(x) > 0$ si $x < c$; $f'(x) < 0$ si $x > c$; $f''(x) < 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x > c$;

(d) $f'(c) = 0, f''(c) = 0$; $f'(x) < 0$; si $x < c$; $f'(x) < 0$ si $x > c$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$

46. **(a)** $f'(c) = -2$; $f''(c) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x > c$

(b) $f'(c)$ no existe; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x > c$;

(c) $f'(x) < 0$ si $x < c$; $f'(x) > 0$ si $x > c$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$;

(d) $\lim_{x \to c^-} f'(x) = 1$; $\lim_{x \to c^+} f'(x) = +\infty$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$

En los ejercicios 47 y 48, dibuje una porción de la gráfica de una función f que pase por los puntos (a, f(a)), (b, f(b)), (c, f(c)) y (d, f(d)) y que satisfaga las condiciones dadas. También dibuje un segmento de la recta tangente en cada uno de estos puntos, en caso de que exista la recta tangente. Suponga que a < b < c < d y que f es continua en algún intervalo abierto que contiene a a y d.

47. **(a)** $f'(a) = 0$; $f'(b) = -1$; $f'(c)$ no existe; $f'(d) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < b$; $f''(x) > 0$ si $b < x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$

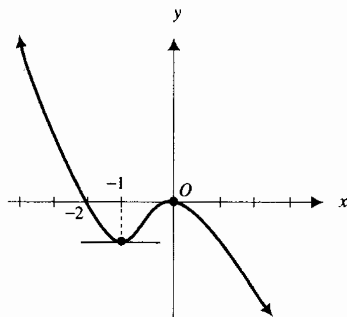
(b) $f'(a) > 0$; $f''(a) = 0$; $f'(b) = 1$; $f''(b) = 0$; $f'(c) = 0$; $f'(d)$ no existe; $f''(x) < 0$ si $x < a$; $f''(x) > 0$ si $a < x < b$; $f''(x) < 0$ si $b < x < d$; $f''(x) > 0$ si $x > d$

48. **(a)** $f'(a) = 0$; $f'(b) = -1$; $f''(b) = 0$; $f'(c) = 0$; $f''(c) = 0$; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < b$; $f''(x) > 0$ si $b < x < c$; $f''(x) < 0$ si $c < x < d$; $f''(x) > 0$ si $x > d$

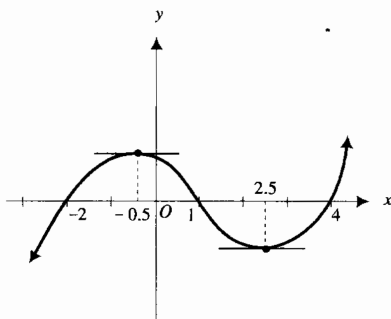
(b) $f'(a)$ no existe; $f'(b) = 0$; $f'(c) = 2$; $f''(c) = 0$; $f'(d) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < a$; $f''(x) > 0$ si $a < x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$

En los ejercicios 49 a 52, la figura adjunta muestra la gráfica de la derivada de una función f cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales y la cual es continua en todo número. A partir de la gráfica determine la siguiente información e incorpórela en una tabla semejante a las tablas de la sección 3.6: (i) los intervalos en los que f es creciente, (ii) los intervalos en los que f es decreciente; (iii) los extremos relativos de f; (iv) donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba; (v) donde la gráfica de f es cóncava hacia abajo; (vi) los puntos de inflexión de la gráfica de f. Dibuje la gráfica de una función f que tenga las propiedades de la tabla si los únicos ceros de f son los indicados.

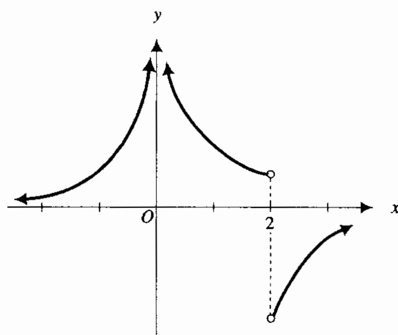
49. Los ceros de f son -4 y 0.



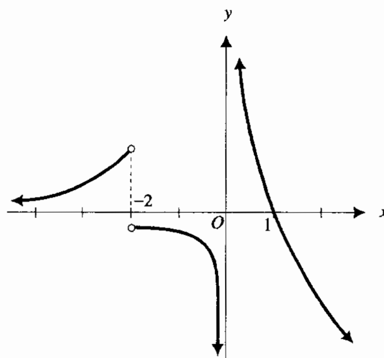
50. Los ceros de f son 3 y 5.



51. Los ceros de f son 0 y 3.

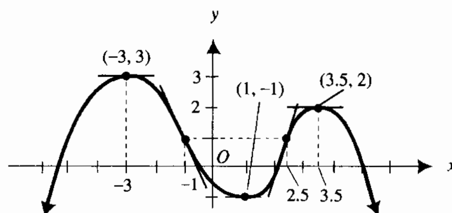


52. El cero de f es -1.

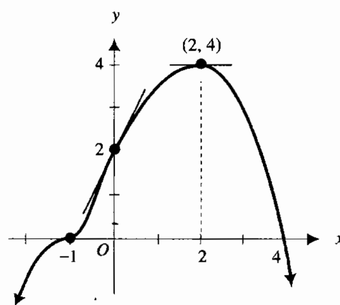


En los ejercicios 53 a 56, en la figura adjunta se muestra la gráfica de la función f y segmentos de tangentes horizontales y de inflexión. Determine la siguiente información a partir de la figura e incorpórela en una tabla similar a las tablas de la sección 3.6: (i) los intervalos en los que f es creciente, (ii) los intervalos en los que f es decreciente; (iii) los extremos relativos de f; (iv) donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba; (v) donde la gráfica de f es cóncava hacia abajo; (vi) los puntos de inflexión de la gráfica de f. A partir de la tabla, dibuje gráficas posibles de f' y f''.

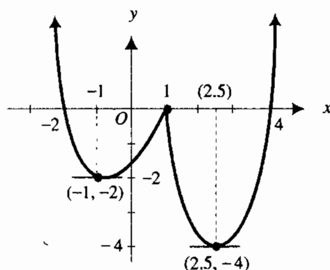
53.



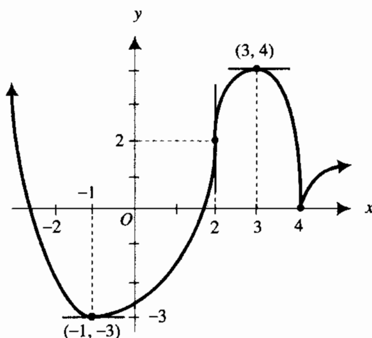
54.



55.



56.



En los ejercicios 57 a 60, determine el límite y apoye la respuesta gráficamente.

57. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 4}$

58. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{4x - 3}{5x^2 - x + 1}$

59. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 5}{2x - 4}$

60. $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{8x^3 + 7x - 2}{7x^3 + 3x^2 + 5x} \right)^2$

En los ejercicios 61 y 62, realice lo siguiente: (a) trace la gráfica de la función f y haga un proposición acerca del comportamiento aparente de $f(x)$ conforme x crece sin límite. (b) Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

61. $f(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$

62. $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 4}$

En los ejercicios 63 a 66, determine las asíntotas de la gráfica de la función. Apoye los resultados trazando la gráfica y las asíntotas en el mismo rectángulo de inspección.

63. $f(x) = \dfrac{5x^2}{x^2 - 4}$ **64.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

65. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 3}$ **66.** $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x}$

En los ejercicios 67 a 70, (a) trace la gráfica de f, NDER($f(x)$, x) y NDER2($f(x)$, x) en rectángulos de inspección separados y estime lo siguiente: (i) los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente; (ii) los extremos relativos de f; (iii) donde la gráfica es cóncava hacia arriba y donde lo es hacia abajo; (iv) los puntos de inflexión de la gráfica de f. (b) Confirme las estimaciones del inciso (a) analíticamente e incorpore la información en una tabla semejante a la tabla 4 de la sección 3.8. A partir de la información de esta tabla dibuje la gráfica de f y compárela con la gráfica de f trazada en el inciso (a).

67. $f(x) = 2x^4 + 5x^3 - 21x^2 - 45x + 27$

68. $f(x) = 3x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 2x$

69. $f(x) = 6\sqrt[3]{x} - x$ **70.** $f(x) = 2x^{1/3} + x^{4/3}$

71. Determine el valor máximo absoluto alcanzado por la función f si $f(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx$, donde A, B y k son constantes positivas.

72. Si $f(x) = ax^3 + bx^2$, determine a y b de modo que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en el punto (2, 16). Apoye la respuesta gráficamente.

73. Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, determine a, b y c de modo que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en el punto (1, −1) y que la pendiente de la tangente de inflexión en ese punto sea −3. Apoye la respuesta gráficamente.

74. Si $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$, demuestre que la gráfica de f tiene puntos de inflexión que son colineales. Apoye las respuestas trazando la gráfica de f y la recta que contiene a los puntos de inflexión.

75. Si $f(x) = x|x|$, trace la gráfica de f y demuestre analíticamente que el origen es un punto de inflexión.

76. Sea $f(x) = x^n$, donde n es un número entero positivo.
(**a**) Demuestre que la gráfica de f tiene un punto de inflexión en el origen si y sólo si n es impar y $n > 1$.
(**b**) Demuestre que si n es par, f tiene un valor mínimo relativo en 0.

En los ejercicios 77 y 78, confirme analíticamente la estimación obtenida en la graficadora en el inciso (d) del ejercicio indicado de los ejercicios de repaso del capítulo 1.

77. (**a**) Ejercicio 103; (**b**) Ejercicio 105

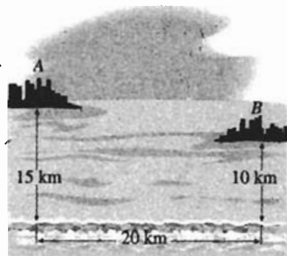
78. (**a**) Ejercicio 104; (**b**) Ejercicio 106

79. ¿Cuántos artículos debe producir cada semana el fabricante del ejercicio 57 de los ejercicios de repaso del capítulo 2, para maximizar las utilidades?

80. Determine las dimensiones de una caja abierta, que tenga base cuadrada y un volumen de k pulgadas cúbicas, que pueda construirse con la mínima cantidad de material.

81. Dos ciudades A y B obtendrán su abastecimiento de agua de la misma estación de bombeo, la cual se ubicará en la orilla de un río recto a 15 km de la ciudad A y a 10 km de la ciudad B. Los puntos del río más cercanos a A y B están separados 20 km, y A y B se encuentran en el mismo lado del río.

(a) Utilice la graficadora para estimar dónde debe ubicarse la estación de bombeo de modo que se emplee la menor cantidad de tubería.
(b) Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.



82. Un fabricante ofrece entregar a un comerciante 300 sillas a \$360 cada una, y reducir el precio por silla en \$1 del pedido total por cada silla adicional que exceda a 300. Determine la cantidad total de dólares implicados en la transacción más grande posible entre el fabricante y el comercianrte. Apoye la respuesta gráficamente.

83. En condiciones de monopolio (vea el ejercicio 19 de la sección 3.9) la demanda diaria de cierto artículo es de x unidades cuando el precio por unidad es p dólares y $x^2 + p = 320$. Si $20x$ dólares es el costo total por producir x unidades, determine la máxima utilidad total diaria. Apoye la respuesta gráficamente.

84. Para construir un envase cerrado en forma de cilindro circular recto que tenga un volumen de 27 pulg^3, la tapa y la base se cortarán de trozos cuadrados de hojalata.
(a) Utilice la graficadora para estimar el radio del envase si se emplea la cantidad mínima de hojalata en su construcción. Incluya la hojalata que se desecha al obtener la tapa y la base.
(b) Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente y después determine la altura que debe tener el envase.

85. Si la demanda de un artículo particular es de $100x$ unidades cuando el precio por unidad es de p dólares, entonces $x^2 + p^2 = 36$. Determine la utilidad total máxima.

86. En un pueblo, cuya población es de 11 000 habitantes, la tasa de crecimiento de una epidemia es conjuntamente proporcional al número de personas infectadas y al número de persona no infectadas. Determine el número de personas infectadas cuando la epidemia está creciendo a una tasa máxima.

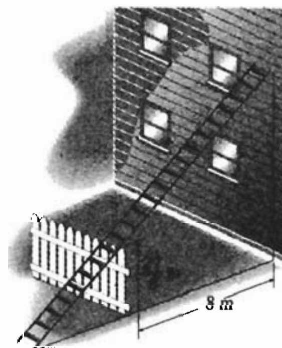
87. Debido a varias restricciones, el tamaño de una comunidad particular está limitado a 3 000 habitantes, y la tasa de crecimiento de la población es conjuntamente proporcional a su tamaño y a la diferencia entre 3 000 y su tamaño. Determine la cantidad de personas para la cual la tasa de crecimiento de la población es un máximo.

88. Determine la distancia más corta desde el punto $P(0, 4)$ a un punto de la curva $x^2 - y^2 = 16$, y encuentre el punto de la curva que está más cerca a P.

89. Una compañía que opera en condiciones de competencia perfecta (vea las instrucciones de los ejercicios 17 y 18 de la sección 3.9) construye y vende radios portátiles. La compañía puede vender todos los radios que produce a un precio de \$75 cada uno. Si se construyen x radios cada día y $C(x)$ dólares es el costo diario de producción, entonces $C(x) = x^2 + 25x + 100$. ¿Cuántos radios deben producirse cada día para que la compañía obtenga la máxima ganancia diaria total?

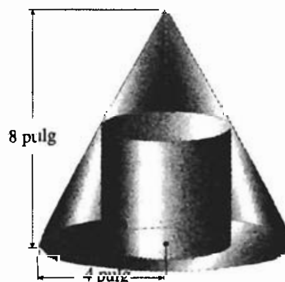
90. Dos partículas inician su movimiento al mismo tiempo. Una de ellas se desplaza a lo largo de una recta horizontal y su ecuación de movimiento es $x = t^2 - 2t$, donde x centímetros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. La otra se mueve a lo largo de una recta vertical que intersecta a la recta horizontal en el origen, y su ecuación de movimiento es $y = t^2 - 2$, donde y centímetros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Determine cuándo la distancia dirigida entre las dos partículas es mínima, y sus velocidades en ese instante.

91. Una escalera descansa sobre una cerca de $\frac{27}{8}$ m de altura y se apoya contra una pared a 8 m detrás de la cerca. Determine la longitud de la escalera más corta que pueda emplearse y que cumpla estas condiciones.



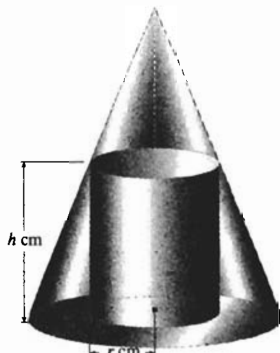
92. Resuelva el ejercicio 91 considerando ahora que la cerca mide h m de altura y que la pared está a w m detrás de la cerca.

93. Determine el volumen del cilindro circular recto más grande que pueda inscribirse en un cono circular recto que tiene un radio de 4 pulg y una altura de 8 pulg.



94. Una tienda de campaña tiene la forma de un cono. Determine la razón del radio a la altura de una tienda de campaña de volumen dado que requiera el mínimo de material para su construcción.

95. Determine las dimensiones del cono circular recto de volumen mínimo que pueda circunscribirse a un cilindro de r centímetros de radio y h centímetros de altura.



96. Uno de los ángulos agudos de un triángulo mide $\frac{1}{6}\pi$ rad, y el lado opuesto a este ángulo tiene una longitud de 10 pulg. Demuestre que de todos los triángulos que satisfacen estas condiciones, aquel que tiene el área máxima es isósceles. *Sugerencia:* exprese la medida del área del triángulo en términos de funciones trigonométricas de uno de los otros ángulos agudos.

97. En un almacén, los artículos que pesan 1000 lb se transportan al nivel del piso asegurando una cuerda gruesa bajo una plataforma móvil baja y jalándola con un vehículo motorizado. Si la cuerda se dirige en un ángulo de θ radianes con respecto al plano del piso, entonces la intensidad de la fuerza de F lb a lo largo de la cuerda está dada por

$$F = \frac{1000k}{k \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde k es el coeficiente constante de fricción y $0 < k < 1$. Si $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$, demuestre que F es mínima cuando $\tan \theta = k$.

98. (**a**) Demuestre que de todos los rectángulos que tienen un área de 81 pulg^2, el cuadrado cuyo lado mide 9 pulg tiene el perímetro mínimo. Apoye la respuesta gráficamente.

(**b**) Demuestre que de todos los rectángulos que tienen un perímetro de 36 pulg, el cuadrado cuyo lado mide 9 pulg tiene el área máxima. Apoye la respuesta gráficamente.

99. Un trozo de alambre de 20 cm de longitud se corta en dos partes, y cada parte se dobla en forma de cuadrado. ¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que el área total de los dos cuadrados sea la mínima posible?

100. Un trozo de alambre de 80 cm de longitud se dobla en forma de rectángulo. Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área posible.

101. Para cierto artículo, donde x unidades se demandan semanalmente cuando el precio de cada unidad es p dólares,

$$10^6 px = 10^9 - 2 \cdot 10^6 x + 18 \cdot 10^3 x^2 - 6x^3$$

El número de dólares del costo promedio por producir cada unidad está dado por

$$Q(x) = \frac{1}{50}x - 24 + 11 \cdot 10^3 x^{-1}$$

y $x \geq 100$. Determine el número de unidades que deben producirse cada semana y el precio de cada unidad para que la utilidad semanal sea maximizada.

102. Utilice el método de Newton para determinar con tres cifras decimales la raíz positiva de la ecuación

$$4x^4 - 3x^3 + 2x - 5 = 0$$

103. Emplee el método de Newton para determinar con tres cifras decimales la raíz negativa de la ecuación

$$3x^4 - 4x^3 + 36x^2 + 2x - 8 = 0$$

104. Calcule con cuatro cifras decimales, mediante el método de Newton, la coordenada x del punto de intersección de la curva $y = \operatorname{sen} x$ y la recta $y = 2x - 3$.

105. Obtenga con cuatro cifras decimales, aplicando el método de Newton, el valor de x en el intervalo $(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ para el cual $\tan x = x$.

En los ejercicios 106 y 107, para la función f dada, haga lo siguiente: (a) determine la aproximación lineal de $f(x)$ en $x = 8$; (b) Apoye la respuesta del inciso (a) gráficamente; (c) compare los valores de $f(x)$ calculados a partir de la aproximación lineal con los valores de función obtenidos a partir de la ecuación dada cuando x es igual a 7.9, 7.99, 8, 8.01 *y* 8.1.

106. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

107. $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{16}\pi x$

108. Si $y = 2x^2 - 3$, (**a**) calcule dy y Δy para $x = 2$ y $\Delta x = 0.5$. (**b**) Dibuje la gráfica e indique los segmentos de recta cuyas longitudes son dy y Δy.

109. Si $y = 80x - 16x^2$, determine la diferencia $\Delta y - dy$ si (**a**) $x = 2$ y $\Delta x = 0.1$; (**b**) $x = 4$ y $\Delta x = -0.2$.

110. Si $x^3 + y^3 - 3xy^2 + 1 = 0$, determine dy en el punto $(1, 1)$ si $dx = 0.1$.

111. Utilice diferenciales para aproximar el volumen del material necesario para elaborar una pelota de caucho si el radio del núcleo hueco debe ser de 2 pulg y el espesor del caucho es de $\frac{1}{8}$ pulg.

112. Si t segundos es el tiempo para una oscilación completa de un péndulo de x pies de longitud, entonces $4\pi^2 x = gt^2$, donde $g = 32.2$. Utilice diferenciales para estimar el efecto sobre el tiempo si se comete un error de 0.01 al medir la longitud del péndulo.

113. La medida del radio de un cono circular recto es $\frac{4}{3}$ de su altura, Utilice diferenciales para estimar aproximadamente cuánto debe medir la altura si el error del volumen calculado no debe exceder el 3%.

114. Suponga que f y g son dos funciones que satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio en $[a, b]$. Además, suponga que $f'(x) = g'(x)$ para toda x en el intervalo abierto (a, b). Demuestre que

$$f(x) - g(x) = f(a) - g(a)$$

para toda x de $[a, b]$. *Sugerencia:* sea $h(x) = f(x) - g(x)$ y aplique el teorema 3.3.3 a la función h.

115. Sean f y g dos funciones diferenciables en cada número del intervalo cerrado $[a, b]$. Suponga además que $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$. Demuestre que existe un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f'(c) = g'(c)$. *Sugerencia:* sea $h(x) = f(x) - g(x)$ y aplique el teorema de Rolle a la función h.

116. Si f es una función polinomial, utilice el teorema de Rolle para demostrar que entre cualesquiera dos raíces consecutivas de la ecuación $f'(x) = 0$, existe, a lo sumo, una raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

117. Dibuje la gráfica de una función en el intervalo I en cada uno de los casos siguientes: **(a)** I es el intervalo abierto $(0, 2)$ y f es continua en I. En 1, f tiene un valor máximo relativo pero $f'(1)$ no existe. **(b)** I es el intervalo cerrado $[0, 2]$. La función f tiene un valor mínimo relativo en 1, pero el valor mínimo absoluto de f ocurre en 0. **(c)** I es el intervalo abierto $(0, 2)$, y f' tiene un valor mínimo relativo en 1.

118. Si $f(x) = (x^2 + a^2)^p$, donde p es un número racional y $p \neq 0$, demuestre que la gráfica de f tiene dos puntos de inflexión si $p < \frac{1}{2}$, y no tiene puntos de inflexión si $p \geq \frac{1}{2}$.

119. **(a)** Si $f(x) = 3|x| + 4|x - 1|$, demuestre que f tiene un valor mínimo absoluto de 3.
(b) Si $g(x) = 4|x| + 3|x - 1|$, demuestre que g tiene un valor mínimo absoluto de 3.
(c) Si $a > 0$, $b > 0$ y $h(x) = a|x| + b|x - 1|$, demuestre que h tiene un valor mínimo absoluto que es el menor de los números a y b.

120. Si $f(x) = |x|^a \cdot |x - 1|^b$, donde a y b son números racionales positivos, demuestre que f tiene un valor máximo relativo de $a^a b^b/(a + b)^{a+b}$

121. Si p y q son números racionales tales que $p + q = 1$, demuestre que la recta $y = x + (ap + bq)$ es una asíntota oblicua de la gráfica de $f(x) = (x + a)^p(x + b)^q$.

Capítulo

4

Integral definida e integración

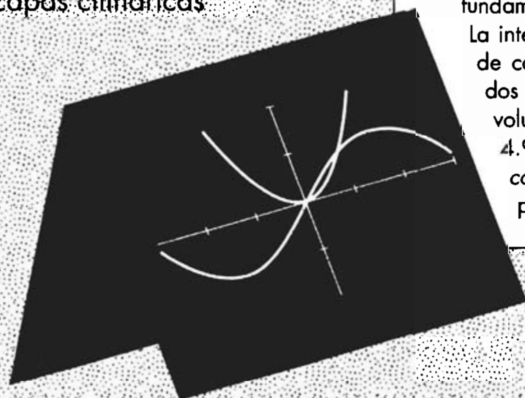
VISIÓN PRELIMINAR

Hasta este momento se ha estudiado la rama del Cálculo llamada *Cálculo Diferencial*, en la que se estudia la *derivada*. En este capítulo se iniciará el estudio de la otra rama del Cálculo denominada *Cálculo Integral* la cual trata acerca de la *integral definida*. En la sección 4.7 aprenderá que estas dos ramas del Cálculo están relacionadas mediante los *teoremas fundamentales del Cálculo*, descubrimiento culminante en el siglo XVII realizado por Newton y Leibniz, quienes trabajaron en forma independiente.

Un procedimiento de cálculo necesario para aplicar los teoremas fundamentales es la *antiderivación* o *antidiferenciación* la cual se estudia en las secciones 4.1 y 4.2, y posteriormente se utiliza en la sección 4.3 para resolver *ecuaciones diferenciales separables*, aplicadas al movimiento rectilíneo.

De igual forma en que la derivada está relacionada geométricamente a la recta tangente de una gráfica, la *integral definida* tiene una interpretación geométrica como el *área de una región plana*, misma que se define en la sección 4.4 como un nuevo tipo de límite. Más adelante, en la sección 4.5 se presenta la integral definida en términos de este límite. Las propiedades de la integral definida se presentan en las secciones 4.5 y 4.6, las cuales se utilizan en la sección 4.7 para demostrar los teoremas fundamentales del Cálculo.

La integral definida se aplica en la sección 4.8 a fin de calcular el área de una región plana, y en las dos secciones finales se aplica para determinar el volumen de varios tipos de sólidos. En la sección 4.9 se utilizan los métodos de *rebanado*, de *discos* y de *arandelas*, y en la sección 4.10 se emplea el método de *capas cilíndricas.*



4.1 ANTIDERIVACIÓN

En cierta forma ya se ha familiarizado con las *operaciones inversas*. La adición y la sustracción son operaciones inversas, así como la multiplicación y la división, además de la potenciación y la extracción de raíces. En esta sección se estudiará la operación inversa de la diferenciación denominada *antiderivación* o *antidiferenciación*, la cual implica el cálculo de una *antiderivada*.

4.1.1 Definición de antiderivada

Una función F se denomina **antiderivada** de la función f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo valor de x en I.

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Si F es la función definida por

$$F(x) = 4x^3 + x^2 + 5$$

entonces $F'(x) = 12x^2 + 2x$. De modo que si f es la función definida por

$$f(x) = 12x^2 + 2x$$

entonces f es la derivada de F, y F es la antiderivada de f. Si G es la función definida por

$$G(x) = 4x^3 + x^2 - 17$$

entonces G también es una antiderivada de f porque $G'(x) = 12x^2 + 2x$. En realidad, cualquier función determinada por

$$4x^3 + x^2 + C$$

donde C es una constante, es una antiderivada de f. ◀

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Si C es una constante arbitraria, entonces cualquier función definida por

$$\operatorname{sen} x + C$$

tiene la función $\cos x$ como derivada. Por tanto, cualquier función de este tipo es una antiderivada de $\cos x$. ◀

Para generalizar la discusión de los ejemplos ilustrativos anteriores, considere la función F como una antiderivada de la función f en un intervalo I, de modo que

$$F'(x) = f(x)$$

Entonces si G es una función definida por

$$G(x) = F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria,

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

y G es también una antiderivada de f en el intervalo I.

Ahora se procederá a demostrar que si F es cualquier antiderivada particular de f en el intervalo I, entonces cada antiderivada de f en I está dada por $F(x) + C$, donde C es una constante arbitraria. Primero, se necesita un teorema preliminar cuya demostración se basa en el teorema 3.3.3, el cual afirma que si la derivada de una función en un intervalo es 0, entonces la función es constante en el intervalo. Recuerde, en la sección 3.3 se demostró este teorema para ilustrar el poder del teorema del valor medio.

4.1.2 Teorema

Si f y g son dos funciones definidas en el intervalo I, tales que

$$f'(x) = g'(x) \quad \text{para toda } x \text{ en } I$$

entonces existe una constante K tal que

$$f(x) = g(x) + K \quad \text{para toda } x \text{ en } I$$

Demostración Sea h la función definida en I mediante

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

de modo que para toda x en I,

$$h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

Pero, por hipótesis, $f'(x) = g'(x)$ para toda x en I. Por tanto,

$$h'(x) = 0 \quad \text{para toda } x \text{ en } I$$

Al aplicar el teorema 3.3.3 a la función h, se infiere que existe una constante K tal que

$$h(x) = K \quad \text{para toda } x \text{ en } I$$

Si se sustituye $h(x)$ por $f(x) - g(x)$ se obtiene

$$f(x) = g(x) + K \quad \text{para toda } x \text{ en } I$$

lo que demuestra el teorema. ■

El teorema siguiente se deduce inmediatamente del teorema anterior.

4.1.3 Teorema

Si F es una antiderivada particular de f en un intervalo I, entonces cada antiderivada de f en I está dada por

$$F(x) + C \tag{1}$$

donde C es una constante arbitraria, y todas las antiderivadas de f en I pueden obtenerse a partir de (1) asignando valores particulares a C.

Demostración Sea G cualquier antiderivada de f en I. Entonces

$$G'(x) = f(x) \quad \text{para toda } x \text{ en } I \tag{2}$$

Como F es una antiderivada particular de f en I,

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{para toda } x \text{ en } I \tag{3}$$

De (2) y (3)

$$G'(x) = F'(x) \qquad \text{para toda } x \text{ en } I$$

Por tanto, por el teorema 4.1.2, existe una constante K tal que

$$G(x) = F(x) + K \qquad \text{para toda } x \text{ en } I$$

Como G representa cualquier antiderivada de f en I, toda antiderivada de f puede obtenerse a partir de $F(x) + C$, donde C es una constante arbitraria. Por tanto, se ha demostrado el teorema. ■

La **antiderivación** o **antidiferenciación** es el proceso mediante el cual se determina el conjunto de todas las antiderivadas de una función dada. El símbolo $\int$ denota la operación de antiderivación, y se escribe

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{4}$$

donde

$$F'(x) = f(x)$$

y

$$d(F(x)) = f(x)\,dx \tag{5}$$

La expresión $F(x) + C$ en (4) recibe el nombre de **antiderivada general** de f.

Leibniz introdujo la convención de escribir la diferencial de una función antes del símbolo de antiderivación. La ventaja de utilizar la diferencial en esta forma será evidente en la sección 4.2 cuando se calculen antiderivadas mediante un *cambio de variable*. De (4) y (5), se puede escribir

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

Esta ecuación establece que cuando se antideriva la diferencial de una función, se obtiene esa función más una constante arbitraria. De este modo, puede considerarse que el símbolo para antiderivación representa la operación inversa a la operación denotada por d para calcular una diferencial.

Si $\{F(x) + C\}$ es el conjunto de todas las funciones cuyas diferenciales son $f(x)\,dx$, también es el conjunto de todas las funciones cuya derivada es $f(x)$. Por tanto, la antiderivación se considera como la *operación para determinar el conjunto de todas las funciones que tienen una derivada dada.*

Como la antiderivación es la operación inversa de la derivación, los teoremas de antiderivación se obtienen de los teoremas de diferenciación. Así, los teoremas siguientes pueden demostrarse a partir de los teoremas correspondientes de diferenciación.

4.1.4 Teorema

$$\int dx = x + C$$

4.1.5 Teorema

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

donde a es una constante.

El teorema 4.1.5 establece que la antiderivada general del producto de una constante por una función es la constante por la antiderivada general de la función.

4.1.6 Teorema

Si f y g están definidas en el mismo intervalo, entonces

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

El teorema 4.1.6 afirma que la antiderivada general de la suma de dos funciones es igual a la suma de las antiderivadas generales de las funciones, considerando que ambas funciones están definidas en el mismo intervalo. Al extender el teorema 4.1.6 para un número finito de funciones y combinándolo con el teorema 4.1.5, se obtiene el teorema siguiente.

4.1.7 Teorema

Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ están definidas en el mismo intervalo, entonces

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)]\,dx$$
$$= c_1\int f_1(x)\,dx + c_2\int f_2(x)\,dx + \ldots + c_n\int f_n(x)\,dx$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes.

4.1.8 Teorema

Si n es un número racional, entonces

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Demostración

$$D_x\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1}$$
$$= x^n$$

■

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Del teorema 4.1.8 para valores particulares de n se tiene:

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx \qquad \int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{1/3}\,dx$$

$$= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C \qquad\qquad = \frac{x^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1} + C$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + C \qquad\qquad = \frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C$$

$$= -\frac{1}{x} + C \qquad\qquad = \tfrac{3}{4}x^{4/3} + C$$ ◀

El ejemplo ilustrativo siguiente muestra cómo se utilizan los teoremas 4.1.4 a 4.1.8 para obtener la antiderivada de una función.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

$$\int (3x + 5)\,dx = \int 3x\,dx + \int 5\,dx \qquad \text{(por el teorema 4.1.6)}$$

$$= 3\int x\,dx + 5\int dx \qquad \text{(por el teorema 4.1.5)}$$

$$= 3\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) + 5(x + C_2) \qquad \text{(por los teoremas 4.1.8 y 4.1.4)}$$

$$= \tfrac{3}{2}x^2 + 5x + (3C_1 + 5C_2)$$

Como $3C_1 + 5C_2$ es una constante arbitraria, puede denotarse por C; de modo que el resultado puede escribirse como

$$\tfrac{3}{2}x^2 + 5x + C$$

La respuesta puede verificarse al calcular la derivada:

$$D_x(\tfrac{3}{2}x^2 + 5x\ C) = 3x + 5$$ ◀

▶ EJEMPLO 1 Evalúe

$$\int (5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 7)\,dx$$

Solución

$$\int (5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 7)\,dx$$

$$= 5\int x^4\,dx - 8\int x^3\,dx + 9\int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 7\int dx$$

$$= 5\cdot\frac{x^5}{2} - 8\cdot\frac{x^4}{4} + 9\cdot\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 7x + C$$

$$= x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 7x + C$$ ◀

▶ EJEMPLO 2 Calcule

$$\int \sqrt{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)dx$$

Solución

$$\int \sqrt{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \int x^{1/2}(x + x^{-1})\, dx$$

$$= \int (x^{3/2} + x^{-1/2})\, dx$$

$$= \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \tfrac{2}{5}x^{5/2} + 2x^{1/2} + C$$

◀

▶ **EJEMPLO 3** Determine

$$\int \frac{5t^2 + 7}{t^{4/3}}\, dt$$

Solución

$$\int \frac{5t^2 + 7}{t^{4/3}}\, dt = 5\int \frac{t^2}{t^{4/3}}\, dt + 7\int \frac{1}{t^{4/3}}\, dt$$

$$= 5\int t^{2/3}\, dt + 7\int t^{-4/3}\, dt$$

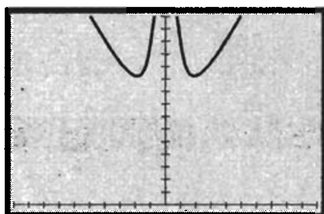
$$= 5\left(\frac{t^{5/3}}{\frac{5}{3}}\right) + 7\left(\frac{t^{-1/3}}{-\frac{1}{3}}\right) + C$$

$$= 5(\tfrac{3}{5}t^{5/3}) + 7(-3t^{-1/3}) + C$$

$$= 3t^{5/3} - \frac{21}{t^{1/3}} + C$$

◀

Como se hizo en el ejemplo ilustrativo 4, la antiderivación puede verificarse al calcular la derivada de la respuesta. Para apoyar gráficamente una antiderivada se asigna un valor específico a la constante arbitraria C y después se traza la derivada numérica de la antiderivada. Posteriormente, en el mismo rectángulo de inspección, se traza la gráfica de la función original. La respuesta es apoyada si las dos gráficas resultan idénticas.



[−10, 10] por [0, 15]

$f(t) = \dfrac{5t^2 + 7}{t^{4/3}}$

$\text{NDER}\left(3t^{5/3} - \dfrac{21}{t^{1/3}}, t\right)$

FIGURA 1

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** En el ejemplo 3, sean

$$f(t) = \frac{5t^2 + 7}{t^{4/3}} \quad \text{y} \quad F(t) = 3t^{5/3} - \frac{21}{t^{1/3}}$$

Observe que F es la antiderivada de f para $C = 0$. Las gráficas de f y NDER($F(t)$, t) están trazadas en el rectángulo de inspección de [−10, 10] por [0, 15] en la figura 1. El hecho de que las gráficas sean idénticas apoya la respuesta del ejemplo 3. ◀

Los teoremas para la antiderivada general de las funciones seno y coseno se deducen inmediatamente de los teoremas correspondientes de diferenciación.

4.1.9 Teorema

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$$

Demostración

$$\begin{aligned} D_x(-\cos x) &= -(-\operatorname{sen} x) \\ &= \operatorname{sen} x \end{aligned}$$ ■

4.1.10 Teorema

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$$

Demostración

$$D_x(\operatorname{sen} x) = \cos x$$ ■

Los teoremas siguientes son consecuencias de los teoremas de diferenciación para las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante. Otra vez, las demostraciones son inmediatas al calcular la derivada del miembro derecho de cada ecuación.

4.1.11 Teorema

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$$

4.1.12 Teorema

$$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$$

4.1.13 Teorema

$$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$$

4.1.14 Teorema

$$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$$

▶ ***EJEMPLO 4*** Evalúe

$$\int (3 \sec x \tan x - 5 \csc^2 x)\, dx$$

Solución Al aplicar los teoremas 4.1.13 y 4.1.12, se obtiene

$$\int (3 \sec x \tan x - 5 \csc^2 x)\, dx = 3 \int \sec x \tan x\, dx - 5 \int \csc^2 x\, dx$$
$$= 3 \sec x - 5(-\cot x) + C$$
$$= 3 \sec x + 5 \cot x + C$$

Las funciones trigonométricas se emplean con frecuencia cuando se calculan antiderivadas que involucran funciones trigonométricas. Las ocho identidades fundamentales siguientes son de crucial importancia:

$\operatorname{sen} x \csc x = 1$	$\cos x \sec x = 1$	$\tan x \cot x = 1$
$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	$\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$	
$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$	$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$	$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

EJEMPLO 5 Calcule

$$\int \frac{2 \cot x - 3 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}\, dx$$

Solución

$$\int \frac{2 \cot x - 3 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}\, dx$$
$$= 2 \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cot x\, dx - 3 \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}\, dx$$
$$= 2 \int \csc x \cot x\, dx - 3 \int \operatorname{sen} x\, dx$$
$$= 2(-\csc x) - 3(-\cos x) + C \qquad \text{(de los teoremas 4.1.14 y 4.1.19)}$$
$$= -2 \csc x + 3 \cos x + C$$

EJEMPLO 6 Determine

$$\int (\tan^2 x + \cot^2 x + 4)\, dx$$

Solución

$$\int (\tan^2 x + \cot^2 x + 4)\, dx$$
$$= \int [(\sec^2 x - 1) + (\csc^2 x - 1) + 4]\, dx$$
$$= \int \sec^2 x\, dx + \int \csc^2 x\, dx + 2 \int dx$$
$$= \tan x - \cot x + 2x + C \qquad \text{(de los teoremas 4.1.11 y 4.1.12)}$$

En el capítulo 3 se indicó cómo obtener propiedades de la gráfica de una función a partir de la gráfica de su derivada. De manera semejante, a partir de

la gráfica de una función f, se pueden obtener propiedades de la gráfica de una antiderivada de f como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7 A partir de la gráfica de la función f mostrada en la figura 2, dibuje una gráfica posible de F, una antiderivada de f, si F es continua en cualquier número, $F(0) = 4$ y $F(3) = 1$.

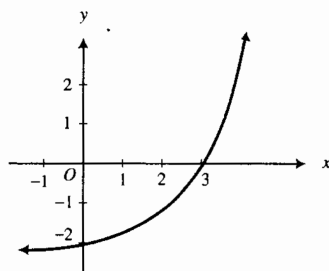


FIGURA 2

Solución Puesto que F es una antiderivada de f, f es la derivada de F. De la figura 2 se observa que $f(3) = 0$, de modo que $F'(3) = 0$. Como $f(x) < 0$ cuando $x < 3$, entonces $F'(x) < 0$ cuando $x < 3$. De forma semejante, $F'(x) > 0$ cuando $x > 3$. Otro hecho que se observa en la figura 2 es que $f(0) = -2$, esto es, $F'(0) = -2$. Esta información se incorpora en la tabla 1 y a partir de las conclusiones de la tabla se dibuja una gráfica posible de F, la cual se muestra en la figura 3.

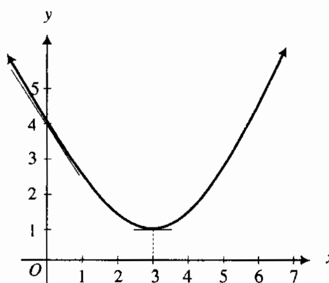


FIGURA 3

Tabla 1

	$F(x)$	$F'(x)$	*Conclusión*
$x < 0$		$-$	F es decreciente
$x = 0$	4	-2	La pendiente de la recta tangente es -2
$0 < x < 3$		$-$	F es decreciente
$x = 3$	1	0	F tiene un valor mínimo relativo
$3 < x$		$+$	F es creciente

◀

En aplicaciones de antiderivación, frecuentemente se necesita determinar una antiderivada particular que satisfaga ciertas condiciones denominadas **condiciones iniciales** o **de frontera,** dependiendo de si ocurren en uno o en más de un punto. Por ejemplo, si una ecuación que contiene dy/dx está dada, así como la condición de que $y = y_1$ cuando $x = x_1$, entonces, después de que se determina el conjunto de todas las antiderivadas, si se sustituyen x y y por x_1 y y_1, respectivamente, se determina un valor particular de la constante arbitraria C. Con este valor de C, se obtiene una antiderivada particular.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 6** Suponga que se desea obtener una antiderivada particular que satisfaga la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

y la condición inicial de que $y = 6$ cuando $x = 2$. A partir de la ecuación dada, se tiene

$$dy = 2x\,dx$$

$$\int dy = \int 2x\,dx$$

$$y = x^2 + C \quad \textbf{(6)}$$

En (6) se sustituye 2 por x y 6 por y y se obtiene

$$6 = 4 + C$$
$$C = 2$$

Cuando este valor de C se sustituye en (6), se obtiene

$$y = x^2 + 2$$

lo cual proporciona la antiderivada particular deseada. ◀

▶ **EJEMPLO 8** En cualquier punto (x, y) de una curva particular la recta tangente tiene una pendiente igual a $4x - 5$. Si la curva contiene al punto (3, 7), obtenga su ecuación.

Solución Como la pendiente de la recta tangente a una curva en cualquier punto (x, y) es el valor de la derivada en ese punto, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 5$$
$$dy = (4x - 5)\,dx$$
$$\int dy = \int (4x - 5)\,dx$$
$$y = 4\left(\frac{x^2}{2}\right) - 5x + C$$
$$y = 2x^2 - 5x + C \qquad (7)$$

La ecuación (7) representa una *familia* de curvas. Como se desea determinar la curva particular de esta familia que contiene el punto (3, 7), se sustituye 3 por x y 7 por y en (7) y se obtiene

$$7 = 2(9) - 5(3) + C$$
$$C = 4$$

Al reemplazar C por 4 en (7) se obtiene la ecuación requerida, la cual es

$$y = 2x^2 - 5x + 4$$ ◀

En la sección 2.6 se introdujeron las funciones costo marginal e ingreso marginal, empleadas en economía. Ellas son las primeras derivadas C' y R' de la función de costo total C y de la función de ingreso total R, respectivamente. Por lo que C y R pueden obtenerse de C' y R' mediante antiderivación. Cuando se determina la función C a partir de C', la constante arbitraria puede determinarse si se conocen el *costo general* (es decir, el costo cuando no se produce ninguna unidad) o el costo de producción de un número específico de unidades de la mercancía. Como por lo general la función de ingreso total es cero cuando el número de unidades producidas es cero, puede utilizarse este hecho para determinar la constante arbitraria cuando se obtiene la función R a partir de R'.

▶ **EJEMPLO 9** La función de costo marginal C' está determinada por una compañía como

$$C'(x) = 4x^{-1/2} + 1$$

donde $C(x)$ dólares es el costo total de producción de x unidades cuando se producen no más de 25 unidades. Si el costo de producción de 4 unidades es de \$50, determine **(a)** la función de costo total y **(b)** el costo de producción de 10 unidades.

Solución

(a) Como $C'(x) = 4x^{-1/2} + 1$, entonces

$$C(x) = \int (4x^{-1/2} + 1)\,dx$$

$$= 4 \cdot \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + x + k$$

$$= 8x^{1/2} + x + k$$

Debido a que el costo de producción de 4 unidades es \$50, entonces $C(4) = 50$. Así,

$$50 = 8(4)^{1/2} + 4 + k$$
$$k = 30$$

Por tanto,

$$C(x) = 8x^{1/2} + x + 30 \qquad \textbf{(8)}$$

El dominio de C es $[0, 25]$; recuerde que aunque x representa el número de unidades de cierta mercancía, se supone que x es un número real para tener los requerimientos de continuidad para las funciones C y C'.

(b) El costo de producción de 10 unidades es $C(10)$ dólares, y de (8) se tiene

$$C(10) = 8(10)^{1/2} + 10 + 30$$
$$= 65.30$$

Conclusión: El costo de producción de 10 unidades es de \$65.30. ◀

EJERCICIOS 4.1

En los ejercicios 1 a 30, realice la antiderivación. En los ejercicios 1 a 8 y 25 a 28, verifique el resultado calculando la derivada de la respuesta. En los ejercicios 9 a 12 y 29 y 30 apoye la respuesta gráficamente. En los demás ejercicios, verifique o justifique su respuesta.

1. $\int 3x^4\,dx$ **2.** $\int 2x^7\,dx$ **3.** $\int \frac{1}{x^3}\,dx$

4. $\int \frac{3}{t^5}\,dt$ **5.** $\int 5u^{3/2}\,du$ **6.** $\int 10\sqrt[3]{x^2}\,dx$

7. $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ **8.** $\int \frac{3}{\sqrt{y}}\,dy$ **9.** $\int 6t^2\sqrt[3]{t}\,dt$

10. $\int (3u^5 - 2u^3)\,du$ **11.** $\int y^3(2y^2 - 3)\,dy$

12. $\int x^4(5 - x^2)\,dx$

13. $\int (8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 5)\,dx$

14. $\int (2 + 3x^2 - 8x^3)\,dx$ **15.** $\int \sqrt{x}\,(x + 1)\,dx$

16. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ **17.** $\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5\right)dx$

18. $\int \left(3 - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2}\right)dx$ **19.** $\int \frac{x^2 + 4x - 4}{\sqrt{x}}\,dx$

20. $\int \frac{y^4 + 2y^2 - 1}{\sqrt{y}}\,dy$ **21.** $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

22. $\int \frac{27t^3 - 1}{\sqrt[3]{t}}\,dt$ **23.** $\int (3\operatorname{sen} t - 2\cos t)\,dt$

24. $\int (5\cos x - 4\operatorname{sen} x)\,dx$

25. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$ **26.** $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

27. $\int (4\csc x\cot x + 2\sec^2 x)\,dx$

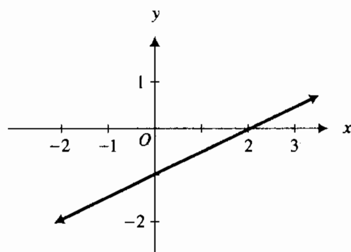
28. $\int (3\csc^2 t - 5\sec t\tan t)\,dt$

29. $\int (2 \cot^2 \theta - 3 \tan^2 \theta)\, d\theta$

30. $\int \dfrac{3 \tan \theta - 4 \cos^2 \theta}{\cos \theta}\, d\theta$

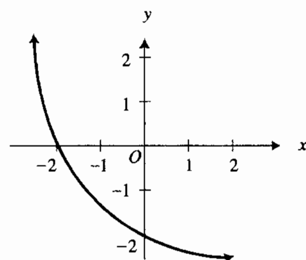
En los ejercicios 31 a 36, la gráfica de una función f se muestra en la figura adjunta. Una antiderivada de f es F, la cual es continua en todo número y tiene los valores dados. Dibuje una gráfica posible de F.

31. **(a)** $F(0) = 3$;



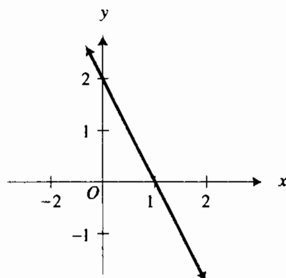
(a)

(b) $F(-2) = 0$ y $F(0) = -1$



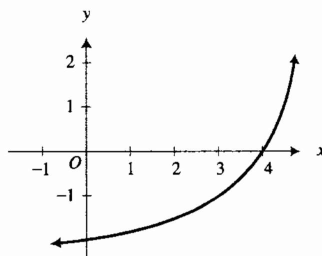
(b)

32. **(a)** $F(0) = 1$;



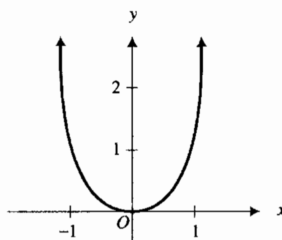
(a)

(b) $F(0) = 2$ y $F(4) = 0$



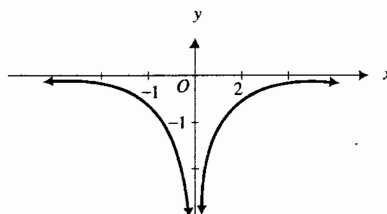
(b)

33. **(a)** $F(0) = 0$;



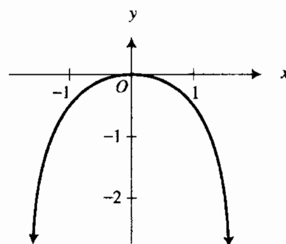
(a)

(b) $F(0) = 0$



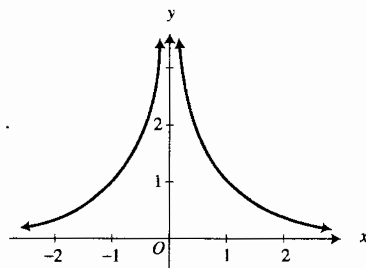
(b)

34. **(a)** $F(0) = 0$;



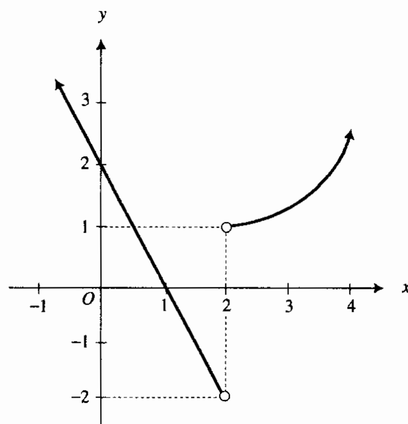
(a)

(b) $F(0) = 0$

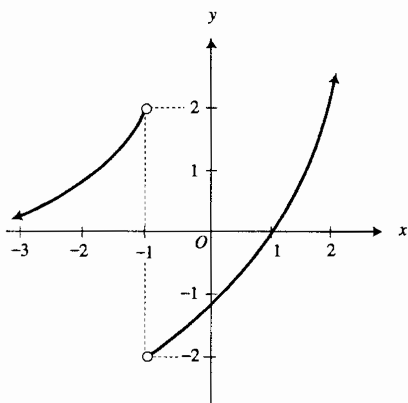


(b)

35. $F(-1) = 0, F(0) = 2, F(1) = 3$ y $F(2) = 0$



36. $F(-4) = 0, F(-1) = 4, F(0) = 2$ y $F(1) = 1$



37. El punto (3, 2) está en una curva, y en cualquier punto (x, y) de la curva la recta tangente tiene una pendiente igual a $2x - 3$. Determine una ecuación de la curva.

38. La pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y) de una curva es $3\sqrt{x}$. Si el punto (9, 4) está en la curva, obtenga una ecuación de la misma.

39. Los puntos (−1, 3) y (0, 2) están en una curva, y en cualquier punto (x, y) de la curva $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2 - 4x$. Determine una ecuación de la curva. *Sugerencia:* considere $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dy'}{dx}$, y obtenga una ecuación que contenga a y', x y una constante arbitraria C_1. A partir de esta ecuación determine otra ecuación que involucre a y, x, C_1 y C_2. Calcule C_1 y C_2 a partir de las condiciones.

40. Una ecuación de la recta tangente a una curva en el punto (1, 3) es $y = x + 2$. Si en cualquier punto (x, y) de la curva, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x$, obtenga una ecuación de la curva. Considere la sugerencia para el ejercicio 39.

41. En cualquier punto (x, y) de una curva, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 - x^2$, y una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (1, 1) es $y = 2 - x$. Determine una ecuación de la curva. Considere la sugerencia para el ejercicio 39.

42. En cualquier punto (x, y) de una curva $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 2$, y (1, 3) es un punto de inflexión en el que la pendiente de la recta de inflexión es −2. Obtenga una ecuación de la curva.

43. Una función de costo marginal está definida por

$$C'(x) = 3x^2 + 8x + 4$$

y el costo general es de \$6. Determine la función de costo total correspondiente.

44. Una compañía ha determinado que la función de costo marginal para la producción de cierta mercancía está dada por $C'(x) = 125 + 10x + \frac{1}{9}x^2$, donde $C(x)$ dólares es el costo total de producción de x unidades de mercancía. Si los gastos generales son de \$250, ¿cuál es el costo de producción de 15 unidades?

45. La función de costo marginal está definida por $C'(x) = 6x$, donde $C(x)$ es el número de cientos de dólares del costo total de producción de x unidades de cierta mercancía. Si el costo de 200 unidades es de \$2 000, determine (a) la función de costo total y (b) el costo general.

46. La función de ingreso marginal para cierta mercancía es $R'(x) = 12 - 3x$. Si x unidades son demandadas cuando el precio por unidad es de p dólares, obtenga (a) la función de ingreso total y (b) una ecuación que contenga a p y x (la ecuación de demanda).

47. Para un artículo particular, la función de ingreso marginal está dada por $R'(x) = 15 - 4x$. Si x unidades son demandadas cuando el precio por unidad es de p dólares,

determine (**a**) la función de ingreso total y (**b**) una ecuación que contenga a p y x (la ecuación de demanda).

48. La eficiencia de un trabajador está expresada como un porcentaje. Por ejemplo, si la eficiencia de un obrero en un momento particular está dada como 70%, entonces el trabajador se desempeña a un 70% de su potencial máximo. Suponga que $E\%$ es la eficiencia de un trabajador a las t horas después de iniciar su trabajo, y que la tasa a la que E cambia es $(35 - 8t)\%$ por hora. Si la eficiencia del trabajador es de 81% después de trabajar 3 horas, determine su eficiencia después de haber trabajado (**a**) 4 h y (**b**) 8 h.

49. El volumen de agua de un tanque es V centímetros cúbicos cuando la profundidad del agua es de h metros. Si la tasa de variación de V con respecto a h es $\pi(4h^2 + 12h + 9)$, determine el volumen de agua en el tanque cuando la profundidad es de 3 m.

50. Un coleccionista de arte compró por \$1 000 un cuadro de un artista cuya obra aumenta de valor con frecuencia respecto al tiempo y de acuerdo a la fórmula $\dfrac{dV}{dt} = 5t^{3/2} + 10t + 50$, donde V dólares es el valor previsto de un cuadro t años después de su compra. Si esta fórmula fuese válida para los siguientes 6 años, ¿cuál sería el valor previsto del cuadro 4 años después?

51. Sea $f(x) = |x|$ y F definida por

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$

Demuestre que f es una antiderivada de f en $(-\infty, +\infty)$.

52. Sea

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$

Demuestre que U no tiene antiderivadas en $(-\infty, +\infty)$. *Sugerencia:* suponga que U tiene una antiderivada F en $(-\infty, +\infty)$, y obtenga una contradicción al demostrar que del teorema del valor medio se deduce que existe un número k tal que $F(x) = x + k$ si $x > 0$, y $F(x) = k$ si $x < 0$.

53. Sea $f(x) = 1$ para toda x en $(-1, 1)$, y sea

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Entonces $f'(x) = 0$ para toda x en $(-1, 1)$ y $g'(x) = 0$ siempre que g' exista en $(-1, 1)$. Sin embargo, $f(x) \neq g(x) + K$ para x en $(-1, 1)$. Explique por qué el teorema 4.1.2 no se aplica.

54. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

y $F(x) = |x|$. Demuestre que $F'(x) = f(x)$ si $x \neq 0$. ¿Es F una antiderivada de f en $(-\infty, +\infty)$? Explique su respuesta.

4.2 ALGUNAS TÉCNICAS DE ANTIDERIVACIÓN

Muchas antiderivadas no pueden determinarse aplicando únicamente los teoremas de la sección 4.1. Por tanto, se deben aprender otras técnicas de antiderivación. En esta sección, se estudiarán técnicas que requieren la *regla de la cadena para antiderivación* y aquellas que implican un *cambio de variable*.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** A fin de diferenciar $\frac{1}{10}(1 + x^2)^{10}$ se aplica la regla de la cadena para la diferenciación y se obtiene

$$D_x[\tfrac{1}{10}(1 + x^2)^{10}] = (1 + x^2)^9(2x)$$

Ahora suponga que se quiere antiderivar $(1 + x^2)^9(2x)$; esto es, se desea calcular

$$\int (1 + x^2)^9(2x\,dx) \tag{1}$$

Con objeto de tener un procedimiento que pueda emplearse en tal situación, considere

$$g(x) = 1 + x^2 \qquad \text{y} \qquad g'(x)\,dx = 2x\,dx \tag{2}$$

Entonces (1) puede escribirse como

$$\int [g(x)]^9[g'(x)\,dx] \tag{3}$$

Del teorema 4.1.8, se tiene

$$\int u^9\,du = \tfrac{1}{10}u^{10} + C \tag{4}$$

Observe que (3) es de la misma forma que el miembro izquierdo de (4). De modo que

$$\int [g(x)]^9[g'(x)\,dx] = \tfrac{1}{10}[g(x)^{10} + C$$

y con $g(x)$ y $g'(x)\,dx$ dados en (2) se tiene

$$\int (1 + x^2)^9(2x\,dx) = \tfrac{1}{10}(1 + x^2)^{10} + C$$ ◀

La justificación del procedimiento utilizado para obtener el resultado del ejemplo ilustrativo 1 es proporcionada por el teorema siguiente, el cual es análogo a la regla de la cadena para diferenciación y se denomina *regla de la cadena para antiderivación*.

4.2.1 Teorema Regla de la cadena para antiderivación

Sea g una función diferenciable y sea el contradominio de g algún intervalo I. Suponga que f es una función definida en I y que F es una antiderivada de f en I. Entonces

$$\int f(g(x))[g'(x)\,dx] = F(g(x)) + C$$

Demostración Por hipótesis,

$$F'(g(x)) = f(g(x)) \tag{5}$$

Por la regla de la cadena para diferenciación,

$$D_x[F(g(x))] = F'(g(x))[g'(x)]$$

Si se sustituye de (5) en esta ecuación se obtiene

$$D_x[F(g(x))] = f(g(x))[g'(x)]$$

de la cual se deduce que

$$\int f(g(x))[g'(x)\,dx] = F(g(x)) + C$$

que es lo que se deseaba demostrar. ■

Como un caso particular del teorema 4.2.1, del teorema 4.1.8 se tiene la generalización de la fórmula de la potencia para antiderivadas, la cual se establece a continuación.

4.2.2 Teorema

Si g es una función diferenciable y n es un número racional, entonces

$$\int [g(x)]^n [g'(x)\,dx] = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

EJEMPLO 1 Evalúe

$$\int \sqrt{3x+4}\,dx$$

Solución A fin de aplicar el teorema 4.2.2, primero se escribe

$$\int \sqrt{3x+4}\,dx = \int (3x+4)^{1/2}\,dx$$

y observe que si

$$g(x) = 3x + 4 \qquad \text{entonces} \qquad g'(x)\,dx = 3\,dx \qquad \textbf{(6)}$$

Por tanto, se necesita un factor 3 junto a dx para obtener $g'(x)\,dx$. En consecuencia, se escribe

$$\int (3x+4)^{1/2}\,dx = \int (3x+4)^{1/2}\tfrac{1}{3}(3\,dx)$$
$$= \frac{1}{3}\int (3x+4)^{1/2}(3\,dx)$$

Así, por el teorema 4.2.2 con $g(x)$ y $g'(x)\,dx$ dadas en (6), se tiene

$$\frac{1}{3}\int (3x+4)^{1/2}(3\,dx) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+4)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \tfrac{2}{9}(3x+4)^{3/2} + C$$

◀

EJEMPLO 2 Calcule

$$\int x^2(5+2x^3)^8\,dx$$

y verifique la respuesta mediante diferenciación.

Solución Observe que si

$$g(x) = 5 + 2x^3 \qquad \text{entonces} \qquad g'(x)\,dx = 6x^2\,dx \qquad \textbf{(7)}$$

Como

$$\int x^2(5+2x^3)^8\,dx = \int (5+2x^3)^8(x^2\,dx)$$

se necesita un factor 6 junto a x^2dx para obtener $g'(x)\,dx$. Por tanto, se escribe

$$\int x^2(5 + 2x^3)^8\,dx = \frac{1}{6}\int (5 + 2x^3)^8(6x^2\,dx)$$

Si se aplica el teorema 4.2.2 con $g(x)$ y $g'(x)\,dx$ dadas en (7), se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\int (5 + 2x^3)^8(6x^2\,dx) &= \frac{1}{6}\cdot\frac{(5 + 2x^3)^9}{9} + C \\ &= \tfrac{1}{54}(5 + 2x^3)^9 + C\end{aligned}$$

Al verificar mediante diferenciación se obtiene

$$\begin{aligned}D_x[\tfrac{1}{54}(5 + 2x^3)^9] &= \tfrac{1}{54}\cdot 9(5 + 2x^3)^8(6x^2) \\ &= x^2(5 + 2x^3)^8\end{aligned}$$ ◀

Si en la fórmula del teorema 4.2.1, f es la función coseno, entonces F es la función seno y se tiene

$$\int \cos(g(x))[g'(x)\,dx] = \text{sen}(g(x)) + C \qquad \textbf{(8)}$$

Esta fórmula se aplica en el ejemplo siguiente.

▶ ***EJEMPLO 3*** Obtenga

$$\int x\cos x^2\,dx$$

y apoye la respuesta gráficamente.

Solución Si

$$g(x) = x^2 \qquad \text{entonces} \qquad g'(x)\,dx = 2x\,dx \qquad \textbf{(9)}$$

Como

$$\int x\cos x^2\,dx = \int (\cos x^2)(x\,dx)$$

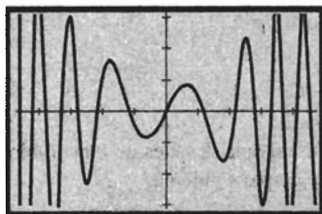
se necesita un factor 2 junto a $x\,dx$ para obtener $g'(x)\,dx$. De modo que se escribe

$$\int x\cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos x^2)\,(2x\,dx)$$

Al aplicar (8) con $g(x)$ y $g'(x)\,dx$ dadas en (9), se obtiene

$$\frac{1}{2}\int (\cos x^2)\,(2x\,dx) = \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,x^2 + C$$

Para apoyar la respuesta se traza la gráfica de la función definida por $x\cos x^2$ y la gráfica de NDER($\frac{1}{2}$ sen x^2, x) en el mismo rectángulo de inspección de [−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1], como se muestra en la figura 1, la cual indica que las dos gráficas son idénticas. ◀



[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

$f(x) = x\cos x^2$

NDER($\frac{1}{2}$sen x^2, x)

FIGURA 1

Los detalles de las soluciones de los ejemplos anteriores pueden acortarse si no se establecen específicamente $g(x)$ y $g'(x)\,dx$. De esta manera, la solución del ejemplo 1 toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{3x+4}\,dx &= \frac{1}{3}\int (3x+4)^{1/2}(3\,dx)\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+4)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C\\ &= \tfrac{2}{9}(3x+4)^{3/2} + C\end{aligned}$$

La solución del ejemplo 2 puede escribirse como

$$\begin{aligned}\int x^2(5+2x^3)^8\,dx &= \frac{1}{6}\int (5+2x^3)^8(6x^2\,dx)\\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{(5+2x^3)^9}{9} + C\\ &= \tfrac{1}{54}(5+2x^3)^9 + C\end{aligned}$$

y la solución del ejemplo 3 puede acortarse como sigue:

$$\begin{aligned}\int x\cos x^2\,dx &= \frac{1}{2}\int (\cos x^2)(2x\,dx)\\ &= \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 + C\end{aligned}$$

▶ **EJEMPLO 4** Evalúe

$$\int \frac{4x^2}{(1-8x^3)^4}\,dx$$

Solución Como $d(1-8x^3) = -24x^2\,dx$, se escribe

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2}{(1-8x^3)^4}\,dx &= 4\int (1-8x^3)^{-4}(x^2\,dx)\\ &= 4\left(-\frac{1}{24}\right)\int (1-8x^3)^{-4}(-24x^2\,dx)\\ &= -\frac{1}{6}\cdot\frac{(1-8x^3)^{-3}}{-3} + C\\ &= \frac{1}{18(1-8x^3)^3} + C\end{aligned}$$ ◀

En ocasiones es posible calcular una antiderivada después de un cambio de variable adecuado, como se muestra en el ejemplo siguiente.

▶ **EJEMPLO 5** Calcule

$$\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$$

Solución Sean

$$u = 1 + x \qquad du = dx \qquad x = u - 1$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1+x}\,dx &= \int (u-1)^2 u^{1/2}\,du\\ &= \int (u^2 - 2u + 1)u^{1/2}\,du\\ &= \int u^{5/2}\,du - 2\int u^{3/2}\,du + \int u^{1/2}\,du\\ &= \frac{u^{7/2}}{\frac{7}{2}} - 2\cdot\frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C\\ &= \tfrac{2}{7}(1+x)^{7/2} - \tfrac{4}{5}(1+x)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C\end{aligned}$$ ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Un método alternativo para la solución del ejemplo 5 consiste en considerar

$$v = \sqrt{1+x} \qquad v^2 = 1 + x$$
$$x = v^2 - 1 \qquad dx = 2v\,dv$$

Entonces el cálculo toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1+x}\,dx &= \int (v^2-1)^2\cdot v\cdot(2v\,dv)\\ &= 2\int v^6\,dv - 4\int v^4\,dv + 2\int v^2\,dv\\ &= \tfrac{2}{7}v^7 - \tfrac{4}{5}v^5 + \tfrac{2}{3}v^3 + C\\ &= \tfrac{2}{7}(1+x)^{7/2} - \tfrac{4}{5}(1+x)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C\end{aligned}$$

Al verificar mediante diferenciación se tiene

$$\begin{aligned}&D_x[\tfrac{2}{7}(1+x)^{7/2} - \tfrac{4}{5}(1+x)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2}]\\ &\quad = (1+x)^{5/2} - 2(1+x)^{3/2} + (1+x)^{1/2}\\ &\quad = (1+x)^{1/2}[(1+x)^2 - 2(1+x) + 1]\\ &\quad = (1+x)^{1/2}[1 + 2x + x^2 - 2 - 2x + 1]\\ &\quad = x^2\sqrt{1+x}\end{aligned}$$ ◀

▶ ***EJEMPLO 6*** Evalúe

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Solución Sean

$$u = \sqrt{x} \qquad \text{y} \qquad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx &= 2\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right)\\ &= 2\int \operatorname{sen} u\,du\\ &= -2\cos u + C\\ &= -2\cos\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

◀

▶ ***EJEMPLO 7*** Calcule

$$\int \operatorname{sen} x\,\sqrt{1-\cos x}\,dx$$

Solución Sean

$$u = 1 - \cos x \qquad du = \operatorname{sen} x\,dx$$

Así,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} x\,\sqrt{1-\cos x}\,dx &= \int u^{1/2}\,du\\ &= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C\\ &= \tfrac{2}{3}(1-\cos x)^{3/2} + C\end{aligned}$$

◀

▶ ***EJEMPLO 8*** Evalúe $\int \tan x \sec^2 x\,dx$ mediante dos métodos: **(a)** sea $u = \tan x$; **(b)** sea $v = \sec x$. **(c)** Explique la diferencia aparente de las respuestas de los incisos (a) y (b).

Solución

(a) Si $u = \tan x$, entonces $du = \sec^2 x\,dx$. De modo que

$$\begin{aligned}\int \tan x \sec^2 x\,dx &= \int u\,du\\ &= \frac{u^2}{2} + C\\ &= \tfrac{1}{2}\tan^2 x + C\end{aligned}$$

(b) Si $v = \sec x$, entonces $dv = \sec x \tan x\,dx$. Por lo que

$$\begin{aligned}\int \tan x \sec^2 x\,dx &= \int \sec x(\sec x \tan x\,dx)\\ &= \int v\,dv\\ &= \frac{v^2}{2} + C\\ &= \tfrac{1}{2}\sec^2 x + C\end{aligned}$$

(c) Como $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$, las funciones definidas por $\frac{1}{2}\tan^2 x$ y $\frac{1}{2}\sec^2 x$ difieren por una constante; de modo que cada una es una antiderivada de $\tan x \sec^2 x$. Además se puede escribir

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\sec^2 x + C &= \tfrac{1}{2}(\tan^2 x + 1) + C \\ &= \tfrac{1}{2}\tan^2 x + \tfrac{1}{2} + C \\ &= \tfrac{1}{2}\tan^2 x + K \qquad \text{donde } K = \tfrac{1}{2} + C\end{aligned}$$

◀

▶ ***EJEMPLO 9*** Una herida está sanando de manera que t días a partir del lunes el área de la herida ha disminuido a una tasa de $-3(t + 2)^{-2}$ centímetros cuadrados por día. Si el martes el área de la herida fue de 2 cm^2, **(a)** ¿cuál era el área de la herida el lunes? y **(b)** ¿cuál será el área prevista de la herida el viernes si continúa sanando a esa misma tasa?

Solución Sea A centímetros cuadrados el área de la herida t días a partir del lunes. Entonces

$$\frac{dA}{dt} = -3(t + 2)^{-2}$$

$$A = -3\int (t + 2)^{-2}\,dt$$

Debido a que $d(t + 2) = dt$, se obtiene

$$A = -3 \cdot \frac{(t + 2)^{-1}}{-1} + C$$

$$A = \frac{3}{t + 2} + C \qquad \textbf{(10)}$$

Como el martes el área de la herida fue de 2 cm^2, se tiene que $A = 2$ cuando $t = 1$. Al sustituir estos valores en (10) se obtiene

$$\begin{aligned}2 &= 1 + C \\ C &= 1\end{aligned}$$

Por tanto, de (10) se tiene

$$A = \frac{3}{t + 2} + 1 \qquad \textbf{(11)}$$

(a) Para el lunes, $t = 0$. Sea A_0 el valor de A cuando $t = 0$. De (11),

$$\begin{aligned}A_0 &= \tfrac{3}{2} + 1 \\ &= \tfrac{5}{2}\end{aligned}$$

Conclusión: El lunes, el área de la herida es de 2.5 cm^2.

(b) Para el viernes, $t = 4$. Sea A_4 el valor de A cuando $t = 4$. De (11),

$$\begin{aligned}A_4 &= \tfrac{3}{6} + 1 \\ &= \tfrac{3}{2}\end{aligned}$$

Conclusión: Para el viernes, el área prevista de la herida será de 1.5 cm^2. ◀

EJERCICIOS 4.2

En los ejercicios 1 a 44, efectúe la antiderivación. Verifique el resultado, mediante diferenciación o apoye gráficamente la respuesta.

1. $\int \sqrt{1-4y}\, dy$
2. $\int \sqrt[3]{3x-4}\, dx$
3. $\int x\sqrt[3]{x^2-9}\, dx$
4. $\int x(2x^2+1)^6\, dx$
5. $\int x^2(x^3-1)^{10}\, dx$
6. $\int 3x\sqrt{4-x^2}\, dx$
7. $\int \dfrac{y^3}{(1-2y^4)^5}\, dy$
8. $\int \dfrac{s}{\sqrt{3s^2+1}}\, ds$
9. $\int (x^2-4x+4)^{4/3}\, dx$
10. $\int x^4\sqrt{3x^5-5}\, dx$
11. $\int x\sqrt{x+2}\, dx$
12. $\int \dfrac{t}{\sqrt{t+3}}\, dt$
13. $\int \dfrac{2r}{(1-r)^7}\, dr$
14. $\int x^3(2-x^2)^{12}\, dx$
15. $\int \sqrt{3-2x}\, x^2\, dx$
16. $\int (x^3+3)^{1/4}x^5\, dx$
17. $\int \cos 4\theta\, d\theta$
18. $\int \operatorname{sen} \frac{1}{3}x\, dx$
19. $\int 6x^2 \operatorname{sen} x^3\, dx$
20. $\int \frac{1}{2}t\cos 4t^2\, dt$
21. $\int \sec^2 5x\, dx$
22. $\int \csc^2 2\theta\, d\theta$
23. $\int y\csc 3y^2 \cot 3y^2\, dy$
24. $\int r^2\sec^2 r^3\, dr$
25. $\int \cos x(2+\operatorname{sen} x)^5\, dx$
26. $\int \dfrac{4\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}\, dx$
27. $\int \sqrt{1+\dfrac{1}{3x}}\, \dfrac{dx}{x^2}$
28. $\int \sqrt{\dfrac{1}{t}-1}\, \dfrac{dt}{t^2}$
29. $\int 2\operatorname{sen} x\sqrt[3]{1+\cos x}\, dx$
30. $\int \operatorname{sen} 2x\sqrt{2-\cos 2x}\, dx$
31. $\int \cos^2 t\operatorname{sen} t\, dt$
32. $\int \operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\, d\theta$
33. $\int (\tan 2x+\cot 2x)^2\, dx$
34. $\int \dfrac{\sec^2 3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt$
35. $\int \dfrac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}\, dx$
36. $\int x(x^2+1)\sqrt{4-2x^2-x^4}\, dx$
37. $\int \dfrac{y+3}{(3-y)^{2/3}}\, dy$
38. $\int \sqrt{3+s}\,(s+1)^2\, ds$
39. $\int \dfrac{(r^{1/3}+2)^4}{\sqrt[3]{r^2}}\, dr$
40. $\int \left(t+\dfrac{1}{t}\right)^{3/2}\left(\dfrac{t^2-1}{t^2}\right) dt$
41. $\int \dfrac{x^3}{(x^2+4)^{3/2}}\, dx$
42. $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{1-2x^2}}\, dx$
43. $\int \operatorname{sen} x\operatorname{sen}(\cos x)\, dx$
44. $\int \sec x\tan x\cos(\sec x)\, dx$
45. La función de costo marginal para un artículo particular está dada por $C'(x) = 3(5x+4)^{-1/2}$. Si el costo general es de \$10, determine la función de costo total.
46. Para cierta mercancía la función de costo marginal está dada por $C'(x) = 3\sqrt{2x+4}$. Si el costo general es de cero, determine la función de cosoto total.
47. Si x unidades son demandadas cuando el precio por unidad es de p dólares, obtenga una ecuación que contenga a p y x (la ecuación de demanda) de una mercancía para la cual la función de ingreso marginal está dada por
$$R'(x) = 4 + 10(x+5)^{-2}$$
48. La función de ingreso marginal para un artículo particular está definida por $R'(x) = ab(x+b)^{-2} - c$. Determine **(a)** la función de ingreso total; y **(b)** una ecuación que contenga a p y x (la ecuación de demanda) donde x unidades son demandadas cuando el precio por unidad es p dólares.
49. Si q coulombs es la carga eléctrica recibida por un condensador de corriente eléctrica de i amperes a los t segundos, entonces $i = \dfrac{dq}{dt}$. Si $i = 5\operatorname{sen} 60t$ y $q = 0$ cuando $t = \frac{1}{2}\pi$, determine la mayor carga positiva del condensador.
50. Realice el ejercicio 49 considerando ahora que $i = 4\cos 120t$ y $q = 0$ cuando $t = 0$.
51. El costo de cierta pieza de maquinaria es de \$700, y su valor disminuye con el tiempo de acuerdo con la fórmula $\dfrac{dV}{dt} = -500(t+1)^{-2}$, donde V dólares es su valor t años después de su compra. ¿Cuál será su valor 3 años después de su compra?
52. El volumen de agua de un tanque es V metros cúbicos cuando la profundidad del agua es de h metros. Si la tasa

de variación de V con respecto a h está dada por $\frac{dV}{dh} = \pi(2h + 3)^2$, calcule el volumen del agua del tanque cuando su profundidad es de 3 m.

53. Para los primeros 10 días de diciembre una célula vegetal creció de forma que t días después del 1 de diciembre el volumen de la célula estuvo creciendo a una tasa de $(12 - t)^{-2}$ micras cúbicas por día. Si el 3 de diciembre el volumen de la célula fue de $3\,\mu m^3$, ¿cuál fue el volumen el 8 de diciembre?

54. El volumen de un globo crece de acuerdo a la fórmula $\frac{dV}{dt} = \sqrt{t+1} + \frac{2}{3}t$, donde V centímetros cúbicos es el volumen del globo a los t segundos. Si $V = 33$ cuando $t = 3$, determine **(a)** una fórmula de V en términos de t; **(b)** el volumen del globo a los 8 s.

55. Evalúe $\int (2x + 1)^3\,dx$ mediante dos métodos: **(a)** desarrolle $(2x + 1)^3$ utilizando el teorema del binomio; **(b)** considere $u = 2x + 1$. **(c)** Explique la diferencia aparente de las respuestas obtenidas en los incisos (a) y (b).

56. Calcule $\int x(x^2 + 2)^2\,dx$ mediante dos métodos: **(a)** desarrolle $(x^2 + 2)^2$ y multiplique el resultado por x; **(b)** considere $u = x^2 + 2$. **(c)** Explique la diferencia aparente de las respuestas obtenidas en los incisos (a) y (b).

57. Evalúe $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$ mediante dos métodos: **(a)** desarrolle $(\sqrt{x} - 1)^2$ y multiplique el resultado por $x^{-1/2}$; **(b)** considere $u = \sqrt{x} - 1$. **(c)** Explique la diferencia aparente de las respuestas obtenidas en los incisos (a) y (b).

58. Calcule $\int \sqrt{x - 1}\, x^2\,dx$ mediante dos métodos: **(a)** considere $u = x - 1$; **(b)** considere $v = \sqrt{x - 1}$.

59. Evalúe $\int 2 \operatorname{sen} x \cos x\,dx$ mediante tres métodos: **(a)** considere $u = \operatorname{sen} x$; **(b)** considere $v = \cos x$; **(c)** utilice la identidad $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$. **(d)** Explique la diferencia aparente de las respuestas obtenidas en los incisos (a), (b) y (c).

60. Calcule $\int \csc^2 x \cot x\,dx$ mediante dos métodos: **(a)** considere $u = \cot x$; **(b)** considere $v = \csc x$. **(c)** Explique la diferencia aparente de las respuestas obtenidas en los incisos (a) y (b).

4.3 ECUACIONES DIFERENCIALES Y MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Una ecuación que contiene una función y sus derivadas, o sólo sus derivadas, se denomina **ecuación diferencial**. Las ecuaciones diferenciales se aplican en muchos campos diversos. En esta sección se aplicarán dichas ecuaciones al movimiento rectilíneo en física. Posteriormente se aplicarán al crecimiento y decrecimiento, (o decaimiento) exponencial y al crecimiento logístico en química, biología, psicología, sociología, administración y economía.

En la sección 4.1 se presentaron ecuaciones diferenciales simples; por ejemplo, en el ejemplo ilustrativo 6 de esa sección se tuvo la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{1}$$

Algunas otras ecuaciones diferenciales simples son

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{3y^3} \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x + 3 \tag{3}$$

El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación. Las ecuaciones (1) y (2) son de primer orden y (3) es de segundo orden.

Una función f definida por $y = f(x)$ es una **solución** de una ecuación diferencial si y y sus derivadas satisfacen la ecuación. Una de las ecuaciones diferenciales más fáciles de resolver es la ecuación de primer grado de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

para la cual (1) es un ejemplo particular. Al escribir esta ecuación con diferenciales se tiene

$$dy = f(x)\,dx \qquad \textbf{(4)}$$

Otro tipo de ecuaciones diferenciales de primer orden es aquél de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

La ecuación (2) es un ejemplo particular de una ecuación de este tipo. Si esta ecuación se escribe con diferenciales, se obtiene

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx \qquad \textbf{(5)}$$

Tanto en (4) como en (5), el miembro izquierdo contiene únicamente a la variable y, mientras que en el derecho tiene sólo a la variable x. Así, las variables están separadas, por lo que se dice que estas ecuaciones son **ecuaciones diferenciales separables.**

Considere la ecuación (4), la cual es

$$dy = f(x)\,dx$$

Para resolver esta ecuación se deben encontrar todas las funciones G para las cuales $y = G(x)$ tales que satisfacen la ecuación. De este modo, si F es una antiderivada de f, todas las funciones G están definidas por $G(x) = F(x) + C$, donde C es una constante arbitraria. Esto es, si

$$\begin{aligned} d(G(x)) &= d(F(x) + C) \\ &= f(x)\,dx \end{aligned}$$

entonces la **solución completa** (o **solución general**) de (4) está dada por

$$y = F(x) + C$$

Esta última ecuación representa una familia de funciones que dependen de una constante arbitraria C, por lo que se denomina **familia de funciones de un parámetro.** Las gráficas de estas funciones forman una familia de curvas de un parámetro en un plano, y sólo una curva de esta familia pasa por cualquier punto particular (x_1, y_1).

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Suponga que se desea encontrar la solución completa de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad \textbf{(6)}$$

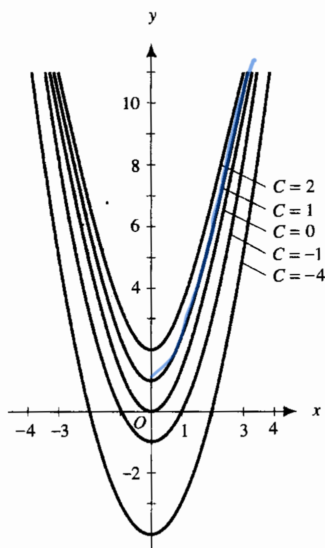
Al separar las variables y escribir la ecuación con diferenciales se obtiene

$$dy = 2x\,dx$$

Si se antiderivan los dos miembros de la ecuación se tiene

$$\int dy = \int 2x\,dx$$

$$y + C_1 = x^2 + C_2$$



$y = x^2 + C$

FIGURA 1

Como $C_2 - C_1$ es una constante arbitraria si C_2 y C_1 son arbitrarias, entonces se puede reemplazar $C_2 - C_1$ por C, obteniéndose

$$y = x^2 + C \tag{7}$$

la cual es la solución completa de la ecuación diferencial (6).

La ecuación (7) representa una familia de funciones de un parámetro. La figura 1 muestra las gráficas de las funciones que corresponden a $C = -4$, $C = -1$, $C = 0$, $C = 1$ y $C = 2$. ◀

Ahora considere la ecuación (5), la cual es

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

Si se antiderivan los dos miembros de esta ecuación, se tiene

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

Si H es una antiderivada de h, y G es una antiderivada de g, la solución completa de (5) está dada por

$$H(y) = G(x) + C$$

▶ ***EJEMPLO 1*** Obtenga la solución completa de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{3y^3}$$

Solución Si la ecuación dada se escribe con diferenciales, se tiene

$$3y^3dy = 2x^2\,dx$$

quedando las variables separadas. Al antiderivar los dos miembros de la ecuación se obtiene

$$\int 3y^3\,dy = \int 2x^2\,dx$$

$$\frac{3y^4}{4} = \frac{2x^3}{3} + \frac{C}{12}$$

$$9y^4 = 8x^3 + C$$

la cual es la solución completa.

Para obtener este resultado, primero se escribió la constante arbitraria como $C/12$, de modo que al multiplicar ambos miembros de la ecuación por 12 la constante arbitraria quede como C. ◀

En el ejemplo ilustrativo siguiente se muestra cómo obtener una solución particular de una ecuación diferencial de primer orden cuando se da una condición inicial.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** A fin de encontrar una solución particular de la ecuación diferencial (6) para la cual $y = 6$ cuando

$x = 2$, se sustituyen estos valores en (7) y se resuelve para C, obteniéndose $6 = 4 + C$, o $C = 2$. Al sustituir este valor de C en (7) se tiene

$$y = x^2 + 2$$

la cual es la solución particular deseada. ◀

La ecuación (3) es un ejemplo de un tipo de ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

Para resolver esta ecuación se necesitan dos antiderivaciones sucesivas, y la solución completa tendrá dos constantes arbitrarias. Por tanto, la solución completa representa una **familia de funciones de dos parámetros,** y las gráficas de estas funciones forman una familia de curvas de dos parámetros en un plano. El ejemplo siguiente muestra el método para obtener la solución completa de una ecuación diferencial de este tipo.

▶ ***EJEMPLO 2*** Determine la solución completa de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x + 3$$

Solución Como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

y considerando $y' = \dfrac{dy}{dx}$, se puede expresar la ecuación dada como

$$\frac{dy'}{dx} = 4x + 3$$

De este modo se tiene, con diferenciales,

$$dy' = (4x + 3)\,dx$$

Al antiderivar, se obtiene

$$\int dy' = \int (4x + 3)\,dx$$

$$y' = 2x^2 + 3x + C_1$$

Debido a que $y' = \dfrac{dy}{dx}$, y al sustituir en la ecuación anterior se tiene

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + 3x + C_1$$

$$dy = (2x^2 + 3x + C_1)\,dx$$

$$\int dy = \int (2x^2 + 3x + C_1)\,dx$$

$$y = \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

la cual es la solución completa. ◀

EJEMPLO 3 Obtenga la solución particular de la ecuación diferencial del ejemplo 2 para la cual $y = 2$ y $y' = -3$ cuando $x = 1$.

Solución Como $y' = 2x^2 + 3x + C_1$, se sustituye -3 por y' y 1 por x, obteniéndose $-3 = 2 + 3 + C_1$, o $C_1 = -8$. Al sustituir este valor de C_1 en la solución completa se tiene

$$y = \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 8x + C_2$$

Puesto que $y = 2$ cuando $x = 1$, y al sustituir estos valores en la ecuación anterior se tiene $2 = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 8 + C_2$, de donde se obtiene $C_2 = \frac{47}{6}$. Entonces la solución particular deseada es

$$y = \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 8x + \tfrac{47}{6}$$ ◀

En la sección 2.5 se dijo que cuando una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a una ecuación de movimiento, $s = f(t)$, la velocidad instantánea y la aceleración pueden determinarse de las ecuaciones

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{y} \quad a = \frac{dv}{dt}$$

Por tanto, si se tiene v o a como función de t, así como algunas condiciones de frontera, se puede determinar la ecuación de movimiento resolviendo la ecuación diferencial. El procedimiento se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 4 Una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ecuación

$$v = 10 \cos 2\pi t$$

donde v centímetros por segundo es la velocidad a los t segundos. Si el sentido positivo es hacia la derecha del origen y la partícula está a 5 cm a la derecha del origen al inicio del movimiento, determine su posición cuando t es igual a **(a)** 0.3, **(b)** 1.4, **(c)** 2.9 y **(d)** 3.6. Simule el movimiento en la graficadora y apoye las respuestas.

Solución Sea s centímetros la distancia dirigida de la partícula a partir del origen a los t segundos. Como $v = ds/dt$,

$$\frac{ds}{dt} = 10 \cos 2\pi t$$

$$ds = 10 \cos 2\pi t\, dt$$

$$\int ds = 10 \int \cos 2\pi t\, dt$$

$$s = \frac{10}{2\pi} \int \cos 2\pi t(2\pi\, dt)$$

$$s = \frac{5}{\pi} \operatorname{sen} 2\pi t + C$$

Puesto que $s = 5$ cuando $t = 0$,

$$5 = \frac{5}{\pi} \operatorname{sen} 0 + C$$

$$C = 5$$

Por tanto, la ecuación de movimiento es

$$s = \frac{5}{\pi} \operatorname{sen} 2\pi t + 5$$

(a) Cuando $t = 0.3$,

$$s = \frac{5}{\pi} \operatorname{sen} 0.6\pi + 5$$
$$\approx 6.51$$

(b) Cuando $t = 1.4$,

$$s = \frac{5}{\pi} \operatorname{sen} 2.8\pi + 5$$
$$\approx 5.94$$

(c) Cuando $t = 2.9$,

$$s = \frac{5}{\pi} \operatorname{sen} 5.8\pi + 5$$
$$\approx 4.06$$

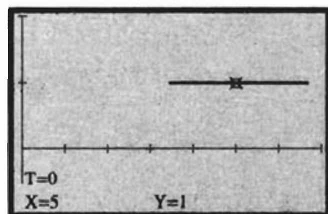
(d) Cuando $t = 3.6$,

$$s = \frac{5}{\pi} \operatorname{sen} 7.2\pi + 5$$
$$\approx 4.06$$

Ahora se simulará el movimiento en la graficadora sobre la recta $y = 1$. Con la graficadora en modo paramétrico, sean

$$(x)t = \frac{5}{\pi} \operatorname{sen} 2\pi t + 5 \quad \text{y} \quad y(t) = 1$$

Considere los siguientes parámetros para el rectángulo de inspección: $t_{\text{mín}} = 0$, $t_{\text{máx}} = 4$, $t_{\text{step}} = 0.01$, $x_{\text{mín}} = 0$, $x_{\text{máx}} = 7$, $x_{\text{scl}} = 1$, $y_{\text{mín}} = -1$, $y_{\text{máx}} = 2$, y $y_{\text{scl}} = 1$. Se presiona la tecla [TRACE] y después la tecla *flecha a la izquierda*, manteniéndose oprimida hasta que el cursor esté en $t = 0$. La figura 2 muestra la pantalla de la graficadora con la información siguiente: $t = 0$, $x = 5$, y $y = 1$. Presione la tecla *flecha a la derecha* y manténgala oprimida. Observe el cursor, el cual representa la partícula que se mueve a lo largo de la recta $y = 1$. En la parte inferior de la pantalla de la graficadora se observa lo siguiente: cuando $t = 0.3$, $x = 6.51$; cuando $t = 1.4$, $x = 5.94$; cuando $t = 2.9$, $x = 4.06$; cuando $t = 3.6$, $x = 4.06$. Estos valores apoyan las respuestas.



[0, 7] por [−1, 2]

$x(t) = \frac{5}{\pi} \operatorname{sen} 2\pi t + 5$ y $y(t) = 1$

FIGURA 2

Conclusión: A los 0.3 s la partícula está a 6.51 cm del origen; a los 1.4 s la partícula está a 5.94 cm del origen; a los 2.9 s la partícula está a 4.06 cm del origen; y a los 3.6 s la partícula está otra vez a 4.06 cm del origen. ◀

Si un objeto se mueve libremente sobre una recta vertical y es atraído hacia la Tierra por la fuerza de gravedad, la *aceleración debida a la gravedad* varía con la distancia del objeto desde el centro de la Tierra. Sin embargo, para pequeñas variaciones de distancia la aceleración debida a la gravedad es casi constante. Si el objeto está cerca del nivel del mar, un valor aproximado de la aceleración debida a la gravedad es 32 pie/s^2 o 9.8 m/s^2.

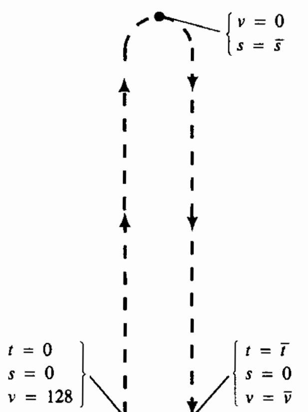


FIGURA 3

▶ ***EJEMPLO 5*** Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 128 pie/s. Considere que la única fuerza que actúa sobre la piedra es la aceleración debida a la gravedad. Determine **(a)** qué tan alto llegará la piedra, y **(b)** qué tiempo le tomará a la piedra llegar hasta el suelo. **(c)** Simule el movimiento en la graficadora y apoye las respuestas de los incisos (a) y (b). **(d)** Detemine la rapidez de la piedra al llegar al suelo.

Solución El movimiento de la piedra se efectúa sobre una recta vertical. La figura 3 muestra el comportamiento del movimiento, donde las flechas

indican la dirección del movimiento de la piedra sobre una recta vertical y el sentido positivo se considera hacia arriba.

Sean t segundos el tiempo que transcurre desde que la piedra fue lanzada, s pies la distancia de la piedra desde el suelo a los t segundos, v pies por segundo la velocidad de la piedra a los t segundos y $|v|$ la rapidez de la piedra a los t segundos.

Tabla 1

t	s	v
0	0	128
	$\bar{s}$	0
$\bar{t}$	0	$\bar{v}$

Cuando la piedra llega al suelo, $s = 0$. Sean $\bar{t}$ y $\bar{v}$ los valores particulares de t y v cuando $\bar{s} = 0$ y $t \neq 0$. La piedra estará en su punto más alto cuando la velocidad sea cero. Sea $\bar{s}$ el valor particular de s cuando $v = 0$. La tabla 1 presenta las condiciones de frontera.

La aceleración debida a la gravedad es en el sentido hacia abajo y tiene un valor constante aproximado de -32 pie/s^2. Como la aceleración está dada por $\dfrac{dv}{dt}$, se tiene

$$\frac{dv}{dt} = -32$$
$$dv = -32\,dt$$
$$\int dv = -32\int dt$$
$$v = -32t + C_1$$

Como $v = 128$ cuanto $t = 0$, se sustituyen estos valores en la ecuación anterior y se obtiene $C_1 = 128$. Por tanto,

$$v = -32t + 128 \tag{8}$$

Debido a que $v = \dfrac{ds}{dt}$,

$$\frac{ds}{dt} = -32t + 128$$
$$ds = (-32t + 128)\,dt$$
$$\int ds = \int (-32t + 128)\,dt$$
$$s = -16t^2 + 128t + C_2$$

Como $s = 0$ cuando $t = 0$, entonces $C_2 = 0$, y al sustituir 0 por C_2 en la ecuación anterior se obtiene

$$s = -16t^2 + 128t \tag{9}$$

(a) Para averiguar qué tan alto llegará la piedra, se necesita determinar $\bar{s}$. Primero se determina el valor de t para el cual $v = 0$. De (8), $t = 4$ cuando $v = 0$. En (9) se sustituye 4 por t y $\bar{s}$ por s, obteniéndose

$$\bar{s} = -16(16) + 128(4)$$
$$= 256$$

Conclusión: La piedra llegará a 256 pie.

(b) Para saber qué tiempo le tomará a la piedra llegar al suelo se necesita determinar $\bar{t}$. Si se sustituye $\bar{t}$ por t y 0 por s en (9), se obtiene

$$0 = -16\bar{t}(\bar{t} - 8)$$

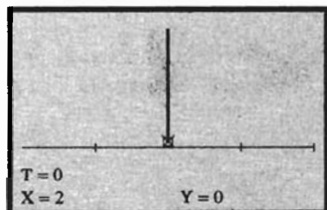
de donde $\bar{t} = 0$ y $\bar{t} = 8$. Sin embargo, el valor 0 ocurre cuando la piedra es lanzada.

Conclusión: Le tomará 8 s a la piedra llegar al suelo.

(c) Con objeto de simular el movimiento de la piedra en la graficadora se considera que la piedra se mueve a lo largo de la recta vertical $x = 2$. Con la graficadora en modo paramétrico, sean

$$x(t) = 2 \quad \text{y} \quad y(t) = -16t^2 + 128t$$

Considere los siguientes parámetros para el rectángulo de inspección: $t_{\text{mín}} = 0$, $t_{\text{máx}} = 8$, $t_{\text{step}} = 0.1$, $x_{\text{mín}} = 0$, $x_{\text{máx}} = 4$, $x_{\text{scl}} = 1$, $y_{\text{mín}} = -100$, $y_{\text{máx}} = 300$, y $y_{\text{scl}} = 0$. Se presiona la tecla TRACE y después la tecla *flecha a la izquierda*, manteniéndose oprimida hasta que el cursor esté en $t = 0$. La figura 4 muestra la pantalla de la graficadora como debe aparecer hasta este momento. Presione la tecla *flecha a la derecha* y observe que la piedra, representada por el cursor, se mueve hacia arriba y hacia abajo a lo largo de la recta $x = 2$. Note que el máximo valor que alcanza y es 256, el cual ocurre cuando $t = 4$, lo que apoya la respuesta del inciso (a). También observe que la piedra regresa al suelo (cuando $y = 0$) a los 8 s, lo que apoya la respuesta del inciso (b).



[0, 4] por [−100, 300]

$x(t) = 2$ y $y(t) = -16t^2 + 128t$

FIGURA 4

(d) Para obtener $\bar{v}$ se utiliza (8) y se sustituye 8 por t y $\bar{v}$ por v, obteniéndose

$$\begin{aligned}\bar{v} &= -32(8) + 128 \\ &= -128\end{aligned}$$

Por tanto, $|\bar{v}| = 128$

Conclusión: La piedra llega al suelo con una rapidez de 128 pie/s. ◀

EJERCICIOS 4.3

En los ejercicios 1 a 14, determine la solución completa de la ecuación diferencial.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 4x - 5$
2. $\dfrac{dy}{dx} = 6 - 3x^2$
3. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x - 7$
4. $\dfrac{ds}{dt} = 5\sqrt{s}$
5. $\dfrac{dy}{dx} = 3xy^2$
6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{y} - y}$
7. $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{3v\sqrt{1 + u^2}}{u}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2\sqrt{x^3 - 3}}{y^2}$
9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sec^2 x}{\tan^2 y}$
10. $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{\cos 2v}{\operatorname{sen} 3u}$
11. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 5x^2 + 1$
12. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{2x - 3}$
13. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \operatorname{sen} 3t + \cos 3t$
14. $\dfrac{d^2u}{dv^2} = \tan v \sec^2 v$

En los ejercicios 15 a 20, obtenga la solución particular de la ecuación diferencial determinada por las condiciones iniciales.

15. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - 2x - 4$; $y = -6$ cuando $x = 3$
16. $\dfrac{dy}{dx} = (x + 1)(x + 2)$; $y = -\frac{3}{2}$ cuando $x = -3$
17. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 2y}$; $y = \frac{1}{3}\pi$ cuando $x = \frac{1}{2}\pi$
18. $\dfrac{ds}{dt} = \cos \frac{1}{2}t$; $s = 3$ cuando $t = \frac{1}{3}\pi$
19. $\dfrac{d^2u}{dv^2} = 4(1 + 3v)^2$; $u = -1$ y $\dfrac{du}{dv} = -2$ cuando $v = -1$
20. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{3}{x^4}$; $y = \dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{dy}{dx} = -1$ cuando $x = 1$

En los ejercicios 21 a 32, una partícula se mueve a lo largo de una recta; a los t segundos, s pies es la distancia dirigida de la partícula desde el origen, v pies por segundo es la velocidad de la partícula y a pies por segundo por segundo es la aceleración de la partícula. Sugerencia para los ejercicios 29 a 32:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

21. $v = \sqrt{2t + 4}$; $s = 0$ cuando $t = 0$. Exprese s en términos de t.

22. $v = 4 - t$; $s = 0$ cuando $t = 2$. Exprese s en términos de t.

23. $a = 5 - 2t$; $v = 2$ y $s = 0$ cuando $t = 0$. Exprese v y s en términos de t.

24. $a = 17$; $v = 0$ y $s = 0$ cuando $t = 0$. Exprese v y s en términos de t.

25. $a = t^2 + 2t$; $s = 1$ cuando $t = 0$ y $s = -3$ cuando $t = 2$. Exprese v y s en términos de t.

26. $a = 3t - t^2$; $v = \frac{7}{6}$ y $s = 1$ cuando $t = 1$. Exprese v y s en términos de t.

27. $a = -4\sqrt{2}\cos(2t - \frac{1}{4}\pi)$; $v = 2$ y $s = 1$ cuando $t = 0$. Exprese v y s en términos de t.

28. $a = 18 \operatorname{sen} 3t$; $v = -6$ y $s = 4$ cuando $t = 0$. Exprese v y s en términos de t.

29. $a = 800$; $v = 20$ cuando $s = 1$. Obtenga una ecuación que contenga a v y s.

30. $a = 500$; $v = 10$ cuando $s = 5$. Determine una ecuación que contenga a v y s.

31. $a = 5s + 2$; $v = 4$ cuando $s = 2$. Obtenga una ecuación que contenga a v y s.

32. $a = 2s + 1$; $v = 2$ cuando $s = 1$. Determine una ecuación que contenga a v y s.

En los ejercicios 33 a 52, no olvide definir las variables como números y asegúrese de escribir una conclusión. En los ejercicios 35 a 43, tenga en cuenta que la única fuerza que actúa es atribuida a la aceleración debida a la gravedad, considerada como 32 pie/s² o 9.8 m/s² hacia abajo.

33. Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo que si v centímetros por segundo es la velocidad de la partícula a los t segundos, entonces $v = 9 \operatorname{sen} 3\pi t$, donde el sentido positivo es hacia la derecha del origen. Si la partícula se encuentra en el origen al iniciar el movimiento, determine su posición cuando t es igual a **(a)** 0.6, **(b)** 2.5, **(c)** 4.8, y **(d)** 7.2. Simule el movimiento en la graficadora y apoye las respuestas.

34. Realice el ejercicio 33 considerando ahora que $v = 2\cos\frac{1}{2}\pi t$.

35. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 20 pie/s. **(a)** ¿Cuánto tiempo ascenderá la pelota? **(b)** ¿Qué tan alto llegará la pelota? y **(c)** ¿Cuánto tardará la pelota en llegar al suelo? **(d)** Simule el movimiento en la graficadora y apoye las respuestas de los incisos (a)-(c). **(e)** ¿Con qué rapidez golpeará la pelota el suelo?

36. Realice el ejercicio 35 considerando ahora que la velocidad inicial es de 5 m/s.

37. Se deja caer una piedra desde lo alto del monumento a Washington, de 555 pie de altura. **(a)** ¿Cuánto tiempo le tomará a la piedra alcanzar el suelo? **(b)** ¿Con qué rapidez golpeará la piedra el suelo?

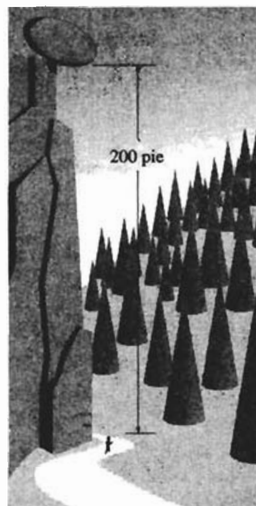
38. Se lanza una pelota hacia abajo desde una ventana situada a 80 pie sobre el suelo con una velocidad inicial de −64 pie/s. **(a)** ¿Cuánto tardará la pelota en llegar al suelo? y **(b)** ¿Con qué rapidez golpeará la pelota el suelo?

39. Una mujer que se encuentra en un globo dejó caer sus binoculares cuando el globo se encontraba a 150 pie sobre el suelo y se elevaba a una tasa de 10 pie/s. **(a)** ¿Cuánto tiempo tardarán los binoculares en llegar al suelo? y **(b)** ¿con qué rapidez se impactarán los binoculares el suelo?



40. Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio de 60 pie de altura con una velocidad inicial de 40 pie/s. **(a)** ¿Cuánto tiempo tardará la piedra en alcanzar su máxima altura? **(b)** ¿Cuál es su máxima altura? **(c)** ¿Cuánto tiempo tardará la piedra en pasar por la azotea del edificio en su regreso? **(d)** ¿Cuál es la velocidad en ese instante? **(e)** ¿Cuánto tardará la piedra en llegar al suelo? **(f)** ¿Con qué rapidez golpeará la piedra el suelo?

41. Suponga que camina en el bosque y ve hacia arriba cómo una roca se desprende de un lado de un risco. Si su cabeza está a 200 pie debajo de la base de la roca en ese instante, **(a)** ¿cuánto tiempo tiene para alejarse de la trayectoria de la roca? **(b)** Si no se aleja de la trayectoria a tiempo, ¿con qué rapidez le golpeará la roca?

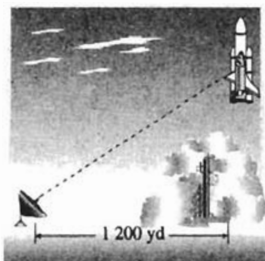


42. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 40 pie/s desde un punto a 20 pie del suelo. **(a)** Si v pies por segundo es la velocidad de la pelota cuando está a s pies desde su punto de lanzamiento, exprese v en términos de s. **(b)** ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando está a 36 pie del suelo y se eleva?

43. Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 150 m/s desde un punto 2 m arriba del suelo. **(a)** Si s metros es la altura del proyectil desde el suelo a los t segundos, después de ser disparado, exprese s en términos de t, bajo la suposición de que la única fuerza que actúa sobre el proyectil es la atribuida a la aceleración debida a la gravedad. **(b)** ¿Qué tan alto, desde el suelo, estará el proyectil 4 s después de ser disparado? **(c)** ¿Cuánto tiempo tardará el proyectil en alcanzar una altura de 500 m desde el suelo?

44. Si un cohete se eleva desde el suelo con una aceleración constante de 22 m/s^2, determine **(a)** la velocidad del cohete 30 s después de que se lanzó y **(b)** ¿qué altura, desde el suelo, alcanzará el cohete en ese tiempo?

45. Un transbordador espacial se eleva verticalmente con una aceleración constante de 10 yd/s^2. Si un radar a 1 200 yd de la plataforma de lanzamiento lo sigue, ¿qué tan rápido gira el radar 8 s después del lanzamiento?



46. Si una pelota se rueda a nivel del suelo con una velocidad inicial de 20 pie/s, y si la rapidez de la pelota disminuye a la tasa de 6 pie/s^2 debido a la fricción, ¿qué distancia recorrerá la pelota?

47. Si el conductor de un automóvil desea aumentar la rapidez de 40 a 100 km/h mientras recorre una distancia de 200 m, ¿qué aceleración constante debe mantener?

48. ¿Qué aceleración negativa y constante debe aplicar un conductor para disminuir la rapidez de 120 a 60 km/h cuando se recorre una distancia de 100 m?

49. Si se aplican los frenos de un automóvil que viaja a 100 km/h y los frenos pueden darle al automóvil una aceleración negativa y constante de 8 m/s^2, **(a)** ¿cuánto tardará el automóvil en detenerse y **(b)** ¿qué distancia recorrerá el automóvil antes de detenerse?

50. Una pelota empezó a subir desde la base de un plano inclinado con una velocidad inicial de 6 pie/s. Si hubo una aceleración contraria al ascenso de 4 pie/s^2, ¿qué distancia recorrió la pelota en el plano antes de comenzar a rodar hacia abajo?

51. Si los frenos de un automóvil pueden darle una aceleración negativa y constante de 8 m/s^2, ¿cuál es la máxima rapidez a la que puede viajar si es necesario detener el automóvil en un intervalo de 25 m después de que se apliquen los frenos?

52. Un bloque de hielo se desliza por un conducto con una aceleración constante de 3 m/s^2. El conducto mide 36 m de longitud y se requieren 4 s para que el bloque llegue hasta la parte más baja. **(a)** ¿Cuál es la velocidad inicial del bloque de hielo? **(b)** ¿Cuál es la rapidez del bloque de hielo cuando ha recorrido 12 m? **(c)** ¿Cuánto tiempo tardará el bloque de hielo en recorrer 12 m?

53. La ecuación $x^2 = 4ay$ representa una familia de parábolas de un parámetro. Determine otra familia de curvas de un parámetro tal que en cualquier punto (x, y) exista una curva de cada familia que pase por él y las rectas tangentes a las dos curvas en ese punto sean perpendiculares. *Sugerencia:* primero muestre que la pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y), que no esté en el eje y, de la parábola de la familia dada que pasa por ese punto es $2y/x$.

54. Resuelva el ejercicio 53 si la familia de curvas de un parámetro tiene la ecuación $x^3 + y^3 = a^3$.

55. Si una partícula se mueve sobre una recta y se sabe que la aceleración es una función del tiempo, ¿qué condiciones iniciales deben conocerse también para obtener una ecuación que exprese la distancia de la partícula desde el origen como una función del tiempo? Explique cómo determinaría esta ecuación.

4.4 ÁREA

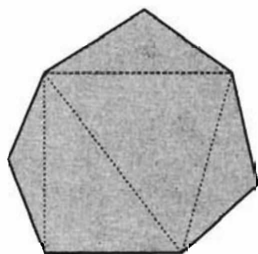


FIGURA 1

Probablemente tiene una idea intuitiva de que el *área* de una figura geométrica es la medida que, en alguna forma, proporciona el tamaño de la región encerrada por la figura. Por ejemplo, se sabe que el área de un rectángulo es el producto de su largo y su ancho, y el área de un triángulo es la mitad del producto de las longitudes de su base y de su altura. El área de un polígono puede definirse como la suma de las áreas de los triángulos en que puede ser descompuesto, y puede demostrarse que el área así obtenida es independiente de cómo se descompuso el polígono en triángulos. Observe la figura 1.

En esta sección, se define el área de una región en un plano si la región está limitada por una curva. Si desea saber por qué se tratarán tales áreas, la

respuesta es que se establecerán los fundamentos necesarios para motivar geométricamente la definición de *integral definida* en la sección siguiente. Recuerde, se motivó geométricamente la definición de la derivada de una función como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función. Justo como con la derivada, después de haber establecido la integral definida verá que puede aplicarse la definición en una gran variedad de campos

En el estudio del área se tratarán sumas de muchos términos,* de modo que se introduce una notación, llamada *notación sigma*, para facilitar la escritura de estas sumas. Esta notación requiere el uso del símbolo Σ, la letra sigma mayúscula del alfabeto griego. En el ejemplo ilustrativo siguiente se dan algunos ejemplos de la notación sigma.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$\sum_{i=-2}^{2} (3i + 2) = [3(-2) + 2] + [3(-1) + 2] + [3 \cdot 0 + 2] + [3 \cdot 1 + 2] + [3 \cdot 2 + 2]$$

$$= (-4) + (-1) + 2 + 5 + 8$$

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

$$\sum_{k=3}^{8} \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$ ◀

4.4.1 Definición de la notación sigma

$$\sum_{i=m}^{n} F(i) = F(m) + F(m+1) + F(m+2) + \ldots + F(n-1) + F(n)$$

donde m y n son números enteros, y $m \leq n$.

El miembro derecho de la ecuación de la definición consiste de la suma de $(n - m + 1)$ términos, el primero de los cuales se obtiene al sustituir i por m en $F(i)$, el segundo se obtiene al reemplazar i por $m + 1$ en $F(i)$, y así sucesivamente, hasta que el último término se obtiene sustituyendo i por n en $F(i)$.

El número m se denomina **límite inferior** de la suma, y n se denomina **límite superior** de la suma. El símbolo i recibe el nombre de **índice de la suma.** Éste es un símbolo "ficticio" porque cualquier otra letra puede emplearse para este propósito. Por ejemplo,

$$\sum_{k=3}^{5} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2$$

es equivalente a

$$\sum_{i=3}^{5} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2$$

* **N. del T.** En estadística y otras disciplinas a estas sumas suele llamárseles *sumatorias*.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 De la definición 4.4.1,

$$\sum_{i=3}^{6} \frac{i^2}{i+1} = \frac{3^2}{3+1} + \frac{4^2}{4+1} + \frac{5^2}{5+1} + \frac{6^2}{6+1}$$ ◀

En ocasiones los términos de una suma contienen subíndices, como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

$$\sum_{k=4}^{9} kb_k = 4b_4 + 5b_5 + 6b_6 + 7b_7 + 8b_8 + 9b_9$$

$$\sum_{i=1}^{4} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + f(x_4)\,\Delta x$$ ◀

Los teoremas siguientes tratan sobre el uso de la notación sigma, son útiles para ciertos cálculos y se demuestran fácilmente.

4.4.2 Teorema

$\sum_{i=1}^{n} c = cn$, donde c es cualquier constante.

Demostración

$$\sum_{i=1}^{n} c = c + c + \ldots + c \qquad (n \text{ términos})$$

$$= cn$$ ■

4.4.3 Teorema

$\sum_{i=1}^{n} c \cdot F(i) = c \sum_{i=1}^{n} F(i)$, donde c es una constante.

Demostración

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} c \cdot F(i) &= c \cdot F(1) + c \cdot F(2) + c \cdot F(3) + \ldots + c \cdot F(n) \\ &= c[F(1) + F(2) + F(3) + \ldots + F(n)] \\ &= c\sum_{i=1}^{n} F(i)\end{aligned}$$ ■

4.4.4 Teorema

$$\sum_{i=1}^{n} [F(i) + G(i)] = \sum_{i=1}^{n} F(i) + \sum_{i=1}^{n} G(i)$$

La demostración del teorema 4.4.4 se deja como ejercicio (refiérase al ejercicio 43). El teorema 4.4.4 puede extenderse a la suma de cualquier número de funciones.

4.4.5 Teorema

$$\sum_{i=a}^{b} F(i) = \sum_{i=a+c}^{b+c} F(i-c) \qquad (1)$$

y

$$\sum_{i=a}^{b} F(i) = \sum_{i=a-c}^{b-c} F(i+c) \qquad (2)$$

La demostración del teorema 4.4.5 se deja como ejercicio (vea el ejercicio 44). El ejemplo ilustrativo siguiente muestra la aplicación de este teorema.

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** De la ecuación (1) del teorema 4.4.5,

$$\sum_{i=3}^{10} F(i) = \sum_{i=5}^{12} F(i-2) \quad \text{y} \quad \sum_{i=6}^{11} i^2 = \sum_{i=7}^{12} (i-1)^2$$

De la ecuación (2) del teorema 4.4.5

$$\sum_{i=3}^{10} F(i) = \sum_{i=1}^{8} F(i+2) \quad \text{y} \quad \sum_{i=6}^{11} i^2 = \sum_{i=1}^{6} (i+5)^2$$ ◀

4.4.6 Teorema

$$\sum_{i=1}^{n} [F(i) - F(i-1)] = F(n) - F(0)$$

Demostración

$$\sum_{i=1}^{n} [F(i) - F(i-1)] = \sum_{i=1}^{n} F(i) - \sum_{i=1}^{n} F(i-1)$$

En el miembro derecho de esta ecuación se escribe la primera suma en otra forma, y se aplica la ecuación (2) del teorema 4.4.5, con $c = 1$, a la segunda suma. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} [F(i) - F(i-1)] &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} F(i) + F(n) \right) - \sum_{i=1-1}^{n-1} F[(i+1)-1] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} F(i) + F(n) - \sum_{i=0}^{n-1} F(i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} F(i) + F(n) - \left(F(0) + \sum_{i=1}^{n-1} F(i) \right) \\
&= F(n) - F(0)
\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 1 Evalúe

$$\sum_{i=1}^{n}(4^i - 4^{i-1})$$

Solución Del teorema 4.4.6, donde $F(i) = 4^i$, se deduce que

$$\sum_{i=1}^{n}(4^i - 4^{i-1}) = 4^n - 4^0$$
$$= 4^n - 1$$

El teorema siguiente proporciona cuatro fórmulas para el cálculo con la notación sigma. Estas fórmulas pueden demostrarse mediante inducción matemática. También pueden demostrarse sin inducción matemática; vea los ejercicios 45–48.

4.4.7 Teorema

Si n es un número entero positivo, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(Fórmula 1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{(Fórmula 2)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \text{(Fórmula 3)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \qquad \text{(Fórmula 4)}$$

EJEMPLO 2 Calcule

$$\sum_{i=1}^{n} i(3i - 2)$$

Solución

$$\sum_{i=1}^{n} i(3i-2) = \sum_{i=1}^{n}(3i^2 - 2i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(3i^2) + \sum_{i=1}^{n}(-2i) \qquad \text{(por el teorema 4.4.4)}$$

$$= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i \qquad \text{(por el teorema 4.4.3)}$$

$$= 3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(por las fórmulas 1 y 2)}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n - 2n^2 - 2n}{2}$$

$$= \frac{2n^3 + n^2 - n}{2}$$

Antes de estudiar el área de una región plana, se indicará por qué se utiliza la terminología "*medida* del área". La palabra *medida* se refiere a un número (no se incluyen las unidades). Por ejemplo, si el área de un triángulo es 20 cm^2, se dice que la medida del área del triángulo, en centímetros cuadrados, es 20. Cuando la palabra *medición* se aplica, se incluyen las unidades. De este modo, la medición del área del triángulo es 20 cm^2.

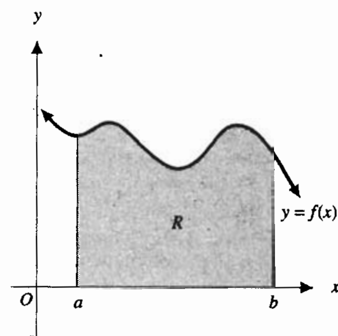


FIGURA 2

Ahora considere una región R del plano como muestra la figura 2. La región R está limitada por el eje x, las rectas $x = a$ y $x = b$, y la curva cuya ecuación es $y = f(x)$, donde f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Por simplicidad, se toma $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Se desea asignar un número A a la medida del área de R, y utilizar un proceso de límite semejante al empleado en la definición del área de un círculo: El área de un círculo está definida como el límite de las áreas de los polígonos regulares inscritos cuando el número de lados aumenta sin límite. Intuitivamente, se ve que cualquiera que haya sido el número elegido para representar A, ese número debe ser por lo menos tan grande como el área de cualquier región poligonal contenida en R, y no debe ser mayor que la medida del área de cualquier región poligonal que contenga a R.

Primero se define una región poligonal contenida en R. Se divide el intervalo cerrado $[a, b]$ en n subintervalos. Para simplificar se consideran estos subintervalos de igual longitud, por ejemplo, Δx. Por tanto, $\Delta x = (b - a)/n$. Los extremos de estos subintervalos se denotan por $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, donde $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $\ldots$, $x_i = a + i\Delta x$, $\ldots$, $x_{n-1} = a + (n - 1)\,\Delta x$, $x_n = b$. El i-ésimo subintervalo se denotará por $[x_{i-1}, x_i]$. Como f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, es continua en cada subintervalo. Por el teorema del valor extremo, existe un número en cada subintervalo para el cual f tiene un valor mínimo absoluto. En el i-ésimo subintervalo sea c_i este número, de modo que $f(c_i)$ es el valor mínimo absoluto de f en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Considere los n rectángulos (o elementos de área), cada uno de ancho Δx unidades y altura de $f(c_i)$ unidades (refiérase a la figura 3). Sea S_n unidades cuadradas la suma de las áreas de estos n rectángulos; entonces

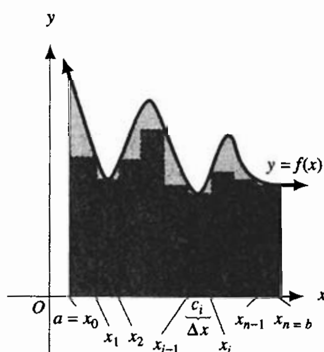


FIGURA 3

$$S_n = f(c_1)\,\Delta x + f(c_2)\,\Delta x + \ldots + f(c_i)\,\Delta x + \ldots + f(c_n)\,\Delta x$$

o, con la notación sigma,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \tag{3}$$

El miembro derecho de (3) proporciona la suma de las medidas de las áreas de los n rectángulos inscritos. De este modo, independientemente de cómo se defina A, debe ser tal que

$$A \geq S_n$$

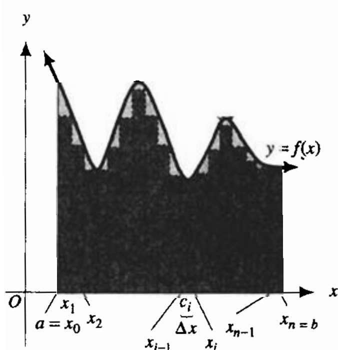


FIGURA 4

En la figura 3 la región sombreada tiene un área de S_n unidades cuadradas. A continuación se incrementará n. Específicamente, multiplique n por 2; entonces el número de rectángulos es el doble, y el ancho de cada rectángulo se redujo a la mitad. Esto se ilustra en la figura 4, la cual muestra el doble de los rectángulos de la figura 3. Al comparar las dos figuras, se observa que la región sombreada de la figura 4 parece que se aproxima más a la región R que la región de la figura 3. Así, la suma de las áreas de los rectángulos de la figura 4 está más próxima al número que se desea para representar la medida del área de la región R.

Conforme n se incrementa, los valores de S_n determinados a partir de la ecuación (3) aumentan, y los valores sucesivos de S_n difieren uno del otro en cantidades arbitrariamente pequeñas. Esto se demuestra en Cálculo avanzado mediante un teorema que establece que si f es continua en $[a, b]$, entonces conforme n crece sin límite, el valor de S_n dado por (3) se aproxima al límite. Este límite es el que se toma como definición de la medida del área de la región R.

4.4.8 Definición del área de una región plana

Suponga que la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, con $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, y que R es la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. Divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = (b - a)/n$, y denote el i-ésimo subintervalo por $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces si $f(c_i)$ es el valor de función mínimo absoluto en el i-ésimo subintervalo, la medida del **área de la región R** está dada por

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \tag{4}$$

Esta ecuación significa que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que si n es un número entero positivo y

$$\text{si } n > N \text{ entonces } \quad \left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x - A \right| < \epsilon$$

En la discusión anterior pudieron haberse considerado rectángulos circunscritos en lugar de rectángulos inscritos. En este caso, se toman como medidas de las alturas de los rectángulos los valores máximos absolutos de f en cada subintervalo. La existencia de un valor máximo absoluto de f en cada subintervalo está garantizada por el teorema del valor extremo. Las sumas correspondientes de las medidas de las áreas de los rectángulos circunscritos son por lo menos tan grandes como la medida del área de la región R, y puede demostrarse que el límite de estas sumas conforme n crece sin límite es exactamente el mismo que el límite de la suma de las áreas de los rectángulos inscritos. Esto también se demuestra en Cálculo avanzado. De esta manera, se puede definir la medida del área de la región R por

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\,\Delta x \tag{5}$$

donde $f(d_i)$ es el valor máximo absoluto de f en $[x_{i-1}, x_i]$.

La medida de la altura del rectángulo del i-esimo subintervalo en realidad puede tomarse como el valor de la función de cualquier número del subintervalo, y el límite de la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos será el mismo sin importar que números se hayan elegido. En la sección 4.5 se extenderá la definición de la medida del área de una región como el límite de dicha suma.

▶ EJEMPLO 3 Determine el área de la región limitada por la curva $y = x^2$, el eje x y la recta $x = 3$ considerando rectángulos inscritos.

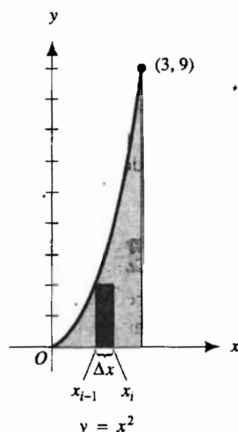


FIGURA 5

Solución La figura 5 muestra la región y el i-ésimo rectángulo inscrito. Aplique la definición 4.4.8 y divida el intervalo cerrado [0, 3] en n subintervalos cada uno de longitud Δx: $x_0 = 0$, $x_1 = \Delta x$, $x_2 = 2\Delta x, \ldots, x_i = i\Delta x, \ldots, x_{n-1} = (n-1)\Delta x, x_n = 3$. Así,

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} \qquad \text{y} \qquad f(x) = x^2$$
$$= \frac{3}{n}$$

Como f es creciente en [0, 3], el valor mínimo absoluto de f en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ es $f(x_{i-1})$. Por tanto, de (4)

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x \tag{6}$$

Debido a que $x_{i-1} = (i-1)\,\Delta x$ y $f(x) = x^2$, entonces

$$f(x_{i-1}) = [(i-1)\,\Delta x]^2$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2(\Delta x)^3$$

Pero $\Delta x = 3/n$; de modo que

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2\,\frac{27}{n^3}$$
$$= \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2$$
$$= \frac{27}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

y al aplicar las fórmulas 2 y 1 y el teorema 4.4.2 se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x = \frac{27}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n\right]$$
$$= \frac{27}{n^3}\cdot\frac{2n^3 + 3n^2 + n - 6n^2 - 6n + 6n}{6}$$
$$= \frac{9}{2}\cdot\frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2}$$

Entonces, de (6),

$$A = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{9}{2}\cdot\frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2}\right]$$
$$= \frac{9}{2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$
$$= \tfrac{9}{2}(2 - 0 + 0)$$
$$= 9$$

<u>**Conclusión:**</u> El área de la región es 9 unidades cuadradas. ◀

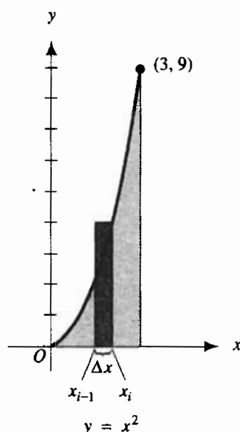


FIGURA 6

EJEMPLO 4

Calcule el área de la región del ejemplo 3 considerando rectángulos circunscritos.

Solución La figura 6 muestra la región y el i-ésimo rectángulo circunscrito. Con rectángulos circunscritos, la medida de la altura del i-ésimo rectángulo es el valor máximo absoluto de f en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, el cual es $f(x_i)$. De (5) se tiene

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \qquad (7)$$

Como $x_i = i\,\Delta x$, entonces $f(x_i) = (i\,\Delta x)^2$, y así

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x &= \sum_{i=1}^{n} i^2\,(\Delta x)^3 \\ &= \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{27}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\ &= \frac{9}{2}\cdot\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\end{aligned}$$

Por tanto, de (7),

$$\begin{aligned}A &= \lim_{n \to +\infty} \frac{9}{2}\cdot\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\ &= 9 \quad \text{(como en el ejemplo 3)}\end{aligned}$$

◀

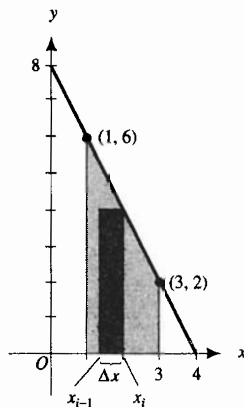


FIGURA 7

EJEMPLO 5

Aplique la definición 4.4.8 para calcular el área de la región trapezoidal limitada por las rectas $x = 1$ y $x = 3$, el eje x y la recta $2x + y = 8$. Verifique la respuesta mediante la fórmula de geometría plana para el área de un trapecio.

Solución En la figura 7 se presentan la región y el i-ésimo rectángulo inscrito. Se divide el intervalo cerrado $[1, 3]$ en n subintervalos, cada uno de longitud Δx: $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \Delta x$, . . . , $x_i = 1 + i\Delta x$, . . . , $x_{n-1} = 1 + (n-1)\,\Delta x$, $x_n = 3$.

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{3-1}{n} \\ &= \frac{2}{n}\end{aligned}$$

Al resolver la ecuación de la recta para y se obtiene $y = -2x + 8$. Por tanto, $f(x) = -2x + 8$, y como f es decreciente en $[1, 3]$, el valor mínimo absoluto de f en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ es $f(x_i)$. Debido a que $x_i = 1 + i\Delta x$ y $f(x) = -2x + 8$, entonces $f(x_i) = -2(1 + i\Delta x) + 8$, es decir, $f(x_i) = 6 - 2i\,\Delta x$. De (4),

$$\begin{aligned}A &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \\ &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} (6 - 2i\,\Delta x)\,\Delta x\end{aligned}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} [6\,\Delta x - 2i(\Delta x)^2]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[6\left(\frac{2}{n}\right) - 2i\left(\frac{2}{n}\right)^2\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{12}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{8}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\right]$$

Del teorema 4.4.2 y de la fórmula 1 se tiene

$$A = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{12}{n} \cdot n - \frac{8}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(8 - \frac{4}{n}\right)$$

$$= 8$$

Conclusión: El área de la región es 8 unidades cuadradas.

La fórmula de geometría plana para determinar el área de un trapecio es

$$A = \tfrac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

donde h, b_1 y b_2 son, respectivamente, el número de unidades de la longitud de la altura y de las dos bases, las cuales, para el trapecio de la figura 7 son paralelas al eje y. De esta fórmula se tiene que $A = \frac{1}{2}(2)(6 + 2)$; esto es, $A = 8$, lo cual es acorde con el resultado obtenido anteriormente. ◀

EJERCICIOS 4.4

En los ejercicios 1 a 12, calcule la suma.

1. $\sum_{i=1}^{6} (3i - 2)$

2. $\sum_{i=1}^{20} (5i + 4)$

3. $\sum_{i=1}^{7} (i^2 + 1)$

4. $\sum_{i=1}^{7} (i + 1)^2$

5. $\sum_{i=1}^{10} (i - 1)^3$

6. $\sum_{i=1}^{10} (i^3 - 1)$

7. $\sum_{i=2}^{5} \frac{i}{i - 1}$

8. $\sum_{j=3}^{6} \frac{2}{j(j - 2)}$

9. $\sum_{i=-2}^{3} 2^i$

10. $\sum_{i=0}^{3} \frac{1}{1 + i^2}$

11. $\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

12. $\sum_{k=-2}^{3} \frac{k}{k + 3}$

En los ejercicios 13 a 20, evalúe la suma utilizando los teoremas 4.4.2 a 4.4.7.

13. $\sum_{i=1}^{25} 2i(i - 1)$

14. $\sum_{i=1}^{20} 3i(i^2 + 2)$

15. $\sum_{k=1}^{n} (2^k - 2^{k-1})$

16. $\sum_{i=1}^{n} (10^{i+1} - 10^i)$

17. $\sum_{k=1}^{100} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1}\right]$

18. $\sum_{i=1}^{n} 2i(1 + i^2)$

19. $\sum_{i=1}^{n} 4i^2(i - 2)$

20. $\sum_{k=1}^{n} [(3^{-k} - 3^k)^2 - (3^{k-1} - 3^{-k+1})^2]$

En los ejercicios 21 a 30, emplee el método de esta sección para determinar el área de la región; utilice rectángulos inscritos o circunscritos, según se indique. Para cada ejercicio dibuje una figura que muestre la región y el i-ésimo rectángulo.

21. La región limitada por $y = x^2$, el eje x y la recta $x = 2$; rectángulos inscritos.

22. La región del ejercicio 21; rectángulos circunscritos.

23. La región sobre el eje x y a la derecha de la recta $x = 1$ limitada por el eje x, la recta $x = 1$ y la curva $y = 4 - x^2$; rectángulos inscritos.

24. La región del ejercicio 23; rectángulos circunscritos.

25. La región sobre el eje x y a la izquierda de la recta $x = 1$ limitada por la curva y las rectas del ejercicio 23; rectángulos circunscritos.

26. La región del ejercicio 25; rectángulos inscritos.

27. La región limitada por $y = x^3$, el eje x y las rectas $x = -1$ y $x = 2$; rectángulos inscritos.

28. La región del ejercicio 27; rectángulos circunscritos.

29. La región limitada por $y = x^3 + x$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = 1$; rectángulos circunscritos.

30. La región del ejercicio 29; rectángulos inscritos.

31. Utilice el método de esta sección para calcular el área de un trapecio isósceles cuyas bases tienen medidas b_1 y b_2 y cuya altura tiene medida h.

32. La gráfica de $y = 4 - |x|$ y el eje x desde $x = -4$ a $x = 4$ forman un triángulo. Emplee el método de esta sección para calcular el área de este triángulo.

En los ejercicios 33 a 36, determine el área de la región tomando como medida de la altura del i-ésimo rectángulo $f(m_i)$, donde m_i es el punto medio del i-ésimo subintervalo. Sugerencia: $m_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$.

33. La región del ejemplo 3.

34. La región del ejercicio 22.

35. La región del ejercicio 23.

36. La región del ejercicio 26.

En los ejercicios 37 a 42, se proporcionan una función f y los números n, a y b. Aproxime, con cuatro cifras decimales, el área de la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, realizando lo siguiente: divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de longitud Δx unidades y utilice una calculadora para obtener la suma de las áreas de los rectángulos inscritos o circunscritos (según se indique) que tienen cada uno un ancho de Δx unidades.

37. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$, $b = 3$, $n = 10$, inscritos.

38. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $a = 1$, $b = 2$, $n = 12$, circunscritos.

39. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \frac{1}{6}\pi$, $b = \frac{5}{6}\pi$, $n = 8$, circunscritos.

40. $f(x) = \cos x$, $a = 0$, $b = \frac{1}{2}\pi$, $n = 6$, inscritos.

41. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \frac{1}{6}\pi$, $b = \frac{5}{6}\pi$, $n = 8$, inscritos.

42. $f(x) = \cos x$, $a = 0$, $b = \frac{1}{2}\pi$, $n = 6$, circunscritos.

43. Demuestre el teorema 4.4.4.

44. Demuestre el teorema 4.4.5.

45. Demuestre la fórmula 1 del teorema 4.4.7 sin utilizar inducción matemática: *Sugerencia:* escriba dos ecuaciones: (i) iguale la suma, en notación sigma, a $1 + 2 + \ldots + (n - 1) + n$; (ii) iguale la suma, en notación sigma, a la suma de (i) en orden invertido. Después sume las ecuaciones, de (i) y (ii), término a término y divida los dos miembros de la ecuación resultante entre 2.

46. Demuestre la fórmula 2 del teorema 4.4.7 sin utilizar inducción matemática. *Sugerencia:*

$$\sum_{i=1}^{n} [i^3 - (i - 1)^3] = \sum_{i=1}^{n} (3i^2 - 3i + 1)$$

Aplique el teorema 4.4.6 en el miembro izquierdo de esta ecuación; y en el miembro derecho aplique los teoremas 4.4.2, 4.4.3, 4.4.4 y la fórmula 1 del teorema 4.4.7.

47. Demuestre la fórmula 3 del teorema 4.4.7. *Sugerencia:* $i^4 - (i - 1)^4 = 4i^3 - 6i^2 + 4i - 1$, y use un método semejante al utilizado en el ejercicio 46.

48. Demuestre la fórmula 4 del teorema 4.4.7. (Considere la sugerencia para los ejercicios 46 y 47).

49. Explique la definición 4.4.8 en palabras sin emplear las palabras *límite* o *se aproxima a* o los símbolos N o ϵ.

4.5 INTEGRAL DEFINIDA

En la sección 4.4, para llegar a la definición de la medida del área de una región plana como

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \tag{1}$$

se dividió el intervalo cerrado $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de longitud Δx, y se tomó c_i como el punto del i-ésimo subintervalo para el cual f tiene un valor mínimo absoluto. También se restringieron los valores de función $f(x)$ a valores no negativos en $[a, b]$ y se pidió que f fuese continua en $[a, b]$. El límite en (1) es un caso especial de un "nuevo tipo" de proceso de límite que conduce a la definición de la *integral definida*. Ahora se discutirá este "nuevo tipo" de límite.

Sea f una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Divida este intervalo en n subintervalos eligiendo *cualesquiera* $n - 1$ puntos intermedios

entre a y b. Sean $x_0 = a$ y $x_n = b$, y sean $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ los puntos intermedios de modo que

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$$

Los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ no son necesariamente equidistantes. Sea $\Delta_1 x$ la longitud del primer subintervalo de modo que $\Delta_1 x = x_1 - x_0$; sea $\Delta_2 x$ la longitud del segundo subintervalo de modo que $\Delta_2 x = x_2 - x_1$; y así sucesivamente de modo que la longitud del i-ésimo subintervalo es $\Delta_i x$, y

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$$

Al conjunto de estos subintervalos del intervalo $[a, b]$ se le denomina **partición** del intervalo $[a, b]$. Sea Δ dicha partición. La figura 1 ilustra una de estas particiones Δ de $[a, b]$.

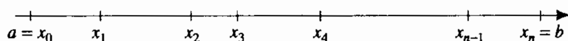


FIGURA 1

La partición Δ contiene n subintervalos. Uno de estos subintervalos es el más largo; sin embargo, puede haber más de uno. La longitud del subintervalo más largo de la partición Δ se llama **norma de la partición** y se denota por $\|\Delta\|$.

Elija un punto en cada subintervalo de la partición Δ: sea w_1 el punto elegido en $[x_0, x_1]$ de modo que $x_0 \leq w_1 \leq x_1$. Sea w_2 el punto elegido en $[x_1, x_2]$ de modo que $x_1 \leq w_2 \leq x_2$ y así sucesivamente, de modo que w_i es el punto elegido en $[x_{i-1}, x_i]$ y $x_{i-1} \leq w_i \leq x_i$. Considere

$$f(w_1)\,\Delta_1 x + f(w_2)\,\Delta_2 x + \ldots + f(w_i)\,\Delta_i x + \ldots + f(w_n)\,\Delta_n x$$

o bien

$$\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x \qquad \textbf{(2)}$$

Esta última suma recibe el nombre de **suma de Riemann,** en honor al matemático alemán **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826-1866).

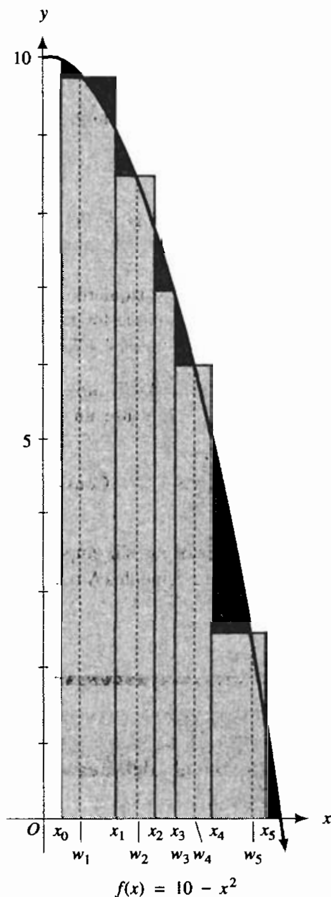


FIGURA 2

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Suponga que $f(x) = 10 - x^2$, con $0.25 \leq x \leq 3$. Se calculará la suma de Riemann para la función f en $[0.25, 3]$ para la siguiente partición Δ: $x_0 = 0.25$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 1.75$, $x_4 = 2.25$, $x_5 = 3$, y $w_1 = 0.5$, $w_2 = 1.25$, $w_3 = 1.75$, $w_4 = 2$, $w_5 = 2.75$.

La figura 2 muestra la gráfica de f en $[0.25, 3]$ y los cinco rectángulos, cuyas áreas son los términos de la suma de Riemann siguiente:

$$\sum_{i=1}^{5} f(w_i)\,\Delta_i x = f(w_1)\,\Delta_1 x + f(w_2)\,\Delta_2 x + f(w_3)\,\Delta_3 x + f(w_4)\,\Delta_4 x + f(w_5)\,\Delta_5 x$$

$$= f(0.5)(1 - 0.25) + f(1.25)(1.5 - 1) + f(1.75)(1.75 - 1.5) + f(2)(2.25 - 1.75) + f(2.75)(3 - 2.25)$$

$$= (9.75)(0.75) + (8.4375)(0.5) + (6.9375)(0.25) + (6)(0.5) + (2.4375)(0.75)$$

$$= 18.09375$$

La norma de la partición Δ es la longitud del subintervalo más largo; en consecuencia, $\|\Delta\| = 0.75$. ◀

En la definición anterior de (2) como una suma de Riemann, los valores de función no se restringieron a valores no negativos. Por tanto, algunos de los $f(w_i)$ podrían ser negativos. En tal caso la interpretación geométrica de la suma de Riemann sería la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos que están sobre el eje x y los negativos de las medidas de las áreas de los rectángulos que se encuentran debajo del eje x. Esta situación se ilustra en la figura 3. Aquí,

$$\sum_{i=1}^{10} f(w_i)\,\Delta_i x = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 - A_5 + A_6 + A_7 - A_8 - A_9 - A_{10}$$

porque $f(w_3), f(w_4), f(w_5), f(w_8), f(w_9)$ y $f(w_{10})$ son números negativos.

Ahora suponga que para la función f en (2) existe un número L tal que $\left|\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x - L\right|$ puede hacerse tan pequeño como se desee para todas las particiones Δ cuyas normas sean suficientemente pequeñas, y para cualquier w_i en el intervalo cerrado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. En tal caso se dice que f es *integrable* en $[a, b]$.

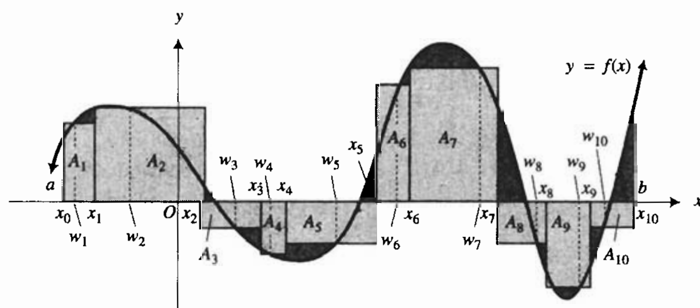


FIGURA 3

4.5.1 Definición de función integrable en un intervalo cerrado

Sea f una función cuyo dominio contiene al intervalo cerrado $[a, b]$. Se dice que f es **integrable** en $[a, b]$ si existe un número L que satisface la condición de que, para cualquier $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que para toda partición Δ para la cual $\|\Delta\| < \delta$, y para cualquier w_i del intervalo cerrado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x - L\right| < \epsilon \qquad \textbf{(3)}$$

Esta situación se representa como

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x = L \qquad \textbf{(4)}$$

Esta definición establece que, para una función f definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, se puede aproximar los valores de las sumas de Riemann a L tanto como se desee tomando las normas $\|\Delta\|$ de todas las particiones Δ de $[a, b]$ suficientemente pequeñas para todas las posibles elecciones de los números w_i para los cuales $x_{i-1} \leq w_i \leq x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Observe que el proceso de límite dado por (4) es diferente del que se estudió en el capítulo 1. De la definición 4.5.1, el número L en (4) existe si para cada $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para toda partición Δ para la cual $\|\Delta\| < \delta$, y para cualquier w_i del intervalo cerrado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces la desigualdad (3) se cumple.

En la definición 1.5.1 se tuvo

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{5}$$

si para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

En el proceso de límite (4), para una $\delta > 0$ particular existe un número infinito de particiones Δ que tienen norma $\|\Delta\| < \delta$. Esto es análogo al hecho de que en el proceso de límite (5), para una $\delta > 0$ dada existe un número infinito de valores de x para los cuales $0 < |x - a| < \delta$. Sin embargo, en el proceso de límite (4) para cada partición Δ existe un número infinito de elecciones de w_i. Es en este aspecto en el que difieren los dos procesos de límite.

El teorema 1.5.16, demostrado en la sección suplementaria 1.5, establece que si el número L en el proceso de límite (5) existe, entonces es único. De manera semejante se puede demostrar que si existe un número L que satisfaga la definición 4.5.1, entonces es único. Ahora puede definirse la *integral definida*.

4.5.2 Definición de integral definida

Si f es una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la **integral definida** de f de a a b, denotada por $\int_a^b f(x)\,dx$, está dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x \tag{6}$$

si el límite existe.

Observe que la oración "la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$" equivale a la oración "la integral definida de f de a a b existe".

En la notación de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ es el **integrando**, a es el **límite inferior**, y b es el **límite superior**. El símbolo $\int$ es el **signo de integración**. El signo de integración se parece a la letra mayúscula S, el cual es apropiado porque la integral definida es el límite de una suma. Es el mismo símbolo que se ha utilizado para indicar la operación antiderivación. La razón para emplear el mismo símbolo se debe a que un teorema (4.7.2), llamado *segundo teorema fundamental del Cálculo*, permite evaluar una integral definida mediante una antiderivada (también denominada **integral indefinida**).

El teorema siguiente proporciona condiciones que garantizan el hecho de que una función es integrable en un intervalo cerrado dado.

4.5.3 Teorema

Si una función es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$.

La demostración de este teorema está más allá del alcance de este libro y puede encontrarse en textos de Cálculo avanzado. La condición de que f es continua en $[a, b]$, es suficiente para garantizar que f es integrable en $[a, b]$, mas no es una condición necesaria para la existencia de la integral definida. Esto es, una función puede ser integrable en un intervalo cerrado aunque no sea continua en ese intervalo. Cuando estudie *integrales impropias* en el capítulo 7, encontrará algunas funciones de este tipo. En el comienzo de esta sección se dijo que el límite empleado en la definición 4.4.8 para definir la medida del área de una región es un caso especial del límite utilizado en la definición 4.5.2 para definir la integral definida. En el estudio de área, en intervalo $[a, b]$ se dividió en n subintervalos de igual longitud. Tal partición del intervalo $[a, b]$ se llama **partición regular**. Si Δx es la longitud de cada subintervalo de una partición regular, entonces cada $\Delta_i x = \Delta x$, y la norma de la partición es Δx. Al sustituir esto en (6) se obtiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta x \tag{7}$$

Además,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad n = \frac{b-a}{\Delta x}$$

Así,

$$\lim_{n \to +\infty} \Delta x = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} n = +\infty$$

La razón de que $\lim_{\Delta x \to 0} n = +\infty$ es que $b > a$ y Δx se aproxima a cero a través de valores positivos (porque $\Delta x > 0$). A partir de estos límites se concluye que

$$\Delta x \to 0 \quad \text{es equivalente a} \quad n \to +\infty$$

De modo que de este enunciado y de (7), se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta x \tag{8}$$

Si se compara el límite de la definición 4.4.8 con el límite del miembro derecho de (8), se tiene el primer caso

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \tag{9}$$

donde $f(c_i)$ es el valor de función mínimo absoluto en $[x_{i-1}, x_i]$. En el segundo caso se tiene

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta x \tag{10}$$

donde w_i es cualquier número del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Si la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe, es el límite de todas las sumas de Riemann de f en $[a, b]$ incluyendo las de (9) y (10). Debido a esto, se redefine el área de una región de manera más general.

4.5.4 Definición del área de una región plana

Sea f una función continua en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Sea R la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. Entonces la medida A del **área de la región** R está dada por

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

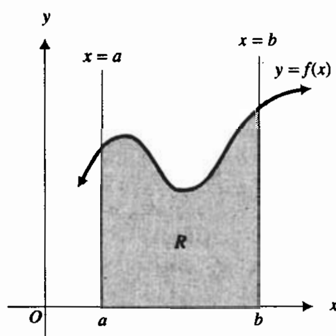


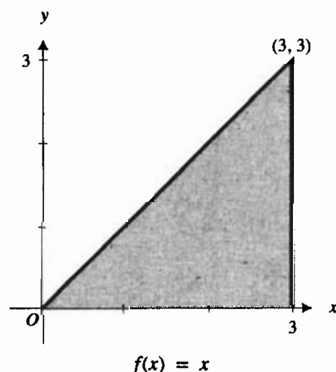
FIGURA 4

De esta definición, si f es continua en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ puede interpretarse geométricamente como la medida del área de la región R mostrada en la figura 4.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** En el ejemplo 3 de la sección 4.4, se mostró que el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = x^2$, el eje x y la recta $x = 3$ es 9 unidades cuadradas. Como $f(x) \geq 0$ para toda x en $[0, 3]$, se concluye que

$$\int_0^3 x^2\,dx = 9$$

◀



$f(x) = x$

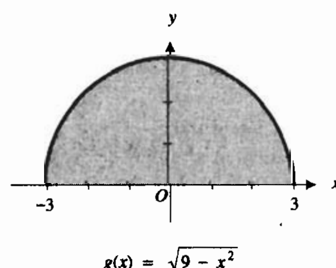
FIGURA 5

▶ ***EJEMPLO 1*** Calcule el valor de cada una de las siguientes integrales definidas interpretándolas como la medida del área de una región plana: **(a)** $\int_0^3 x\,dx$; **(b)** $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx$; **(c)** $\int_{-2}^2 (2 - |x|)\,dx$.

Solución

(a) Con $f(x) = x$, la figura 5 muestra la región triangular limitada superiormente por la gráfica de f, inferiormente por el eje x, y por la derecha por la recta $x = 3$. De la fórmula para el área de un triángulo, el número de unidades cuadradas del área es $\frac{1}{2}(3)(3) = \frac{9}{2}$. Por tanto,

$$\int_0^3 x\,dx = \frac{9}{2}$$



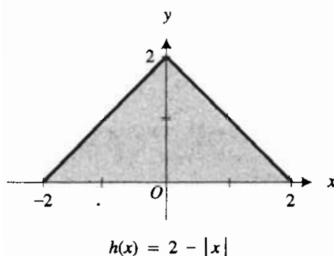
$g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

FIGURA 6

(b) El integrando de la integral definida dada es $\sqrt{9 - x^2}$, el cual se denota por $g(x)$. La gráfica de g es una semicircunferencia con centro en el origen y radio 3. La figura 6 muestra la región limitada por arriba por esta semicircunferencia y por debajo por el eje x, en el intervalo $[-3, 3]$. El área de esta región es la mitad del área de la región encerrada por la circunferencia completa. Como el área de la región circular está dada por πr^2, se tiene

$$\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi(3)^2$$

$$= \tfrac{9}{2}\pi$$



$h(x) = 2 - |x|$

FIGURA 7

(c) Con $h(x) = 2 - |x|$, se dibuja la gráfica de h en el intervalo $[-2, 2]$ y se obtiene la figura 7. Observe que la región limitada por la gráfica de h y el eje x es un triángulo de base 4 y altura 2. Como el número de unidades cuadradas del área de esta región triangular es $\frac{1}{2}(4)(2) = 4$, se tiene

$$\int_{-2}^{2} (2 - |x|)\, dx = 4$$ ◀

De igual forma en que la mayoría de las graficadoras pueden aproximar valores de derivadas numéricas, también pueden aproximar valores de integrales definidas. Para obtener estas aproximaciones se aplican varias técnicas numéricas. Aprenderá algunas de estas técnicas en la sección 7.6. Se representará una aproximación de la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$, obtenida en la graficadora, mediante la notación

$$\text{NINT}(f(x), a, b)$$

Debido a las diferentes técnicas utilizadas para aproximar integrales definidas, los valores de NINT($f(x)$, a, b) pueden variar dependiendo de la graficadora y de la tolerancia especificada. Pero generalmente, las respuestas dadas por la mayoría de las graficadoras serán acordes al menos con cinco dígitos significativos. Se usará una tolerancia de 10^{-5} y se expresarán las respuestas con seis dígitos significativos a menos que otra cosa se indique. Se empleará el signo igual, "=", en dichos cálculos para expresar *aproximadamente igual con seis dígitos significativos*. Consulte el manual del usuario sobre cómo obtener NINT($f(x)$, a, b) en su graficadora particular.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Para obtener una aproximación de la integral definida del ejemplo ilustrativo 2, se calcula en la graficadora

$$\text{NINT}(x^2, 0, 3) = 9.00000$$

lo cual es acorde con la respuesta del ejemplo ilustrativo 2. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** En el ejemplo 1(b) se obtuvo el valor exacto $\frac{9}{2}\pi$ de la integral definida $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx$. En la graficadora se obtiene

$$\text{NINT}(\sqrt{9 - x^2}, -3, 3) = 14.1372$$

Debido a que $\frac{9}{2}\pi \approx 14.1372$, esta respuesta es acorde con la respuesta del ejemplo 1(b). ◀

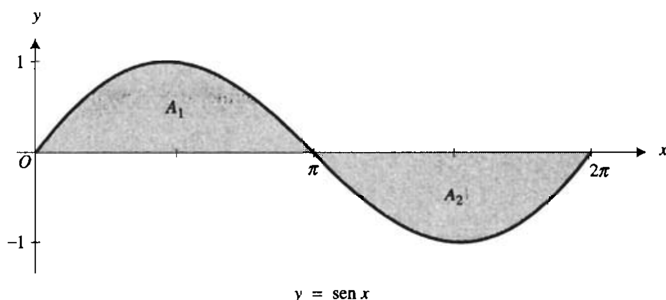
▶ ***EJEMPLO 2*** Obtenga una aproximación de $\int_0^{2\pi} \text{sen}\, x\, dx$ calculando NINT(sen x, 0, 2π). Interprete la respuesta en términos de área.

Solución En la graficadora, NINT(sen x, 0, 2π) = 0. Así

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}\, x\, dx = 0$$

La gráfica de la función seno de 0 a 2π se muestra en la figura 8. Sean A_1 unidades cuadradas y A_2 unidades cuadradas las áreas de las regiones limitadas por la curva senoidal y el eje x en los intervalos $[0, \pi]$ y $[\pi, 2\pi]$, respectivamente. Entonces, como A_1 y A_2 son iguales, se tiene

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = A_1 - A_2$$
$$= 0$$



$y = \operatorname{sen} x$

FIGURA 8 ◀

En la definición 4.5.2, como se ha dado el intervalo $[a, b]$, se supone que $a < b$. Para determinar la integral definida de una función f de a a b, cuando $a > b$, o cuando $a = b$, se tienen las definiciones siguientes.

4.5.5 Definición de $\int_a^b f(x)\, dx$ si $a > b$

Si $a > b$ y $\int_b^a f(x)\, dx$ existe, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** Del ejemplo ilustrativo 2, $\int_0^3 x^2\, dx = 9$. Por tanto,

$$\int_3^0 x^2\, dx = -\int_0^3 x^2\, dx$$
$$= -9$$ ◀

4.5.6 Definición de $\int_a^a f(x)\, dx$

Si $f(a)$ existe, entonces

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 6**

$$\int_1^1 x^2\, dx = 0$$ ◀

El proceso para calcular el valor exacto de una integral definida a partir de la definición determinando el límite de una suma, como se hizo en la sección 4.4 para obtener áreas de regiones planas, es demasiado tedioso y casi imposible. Sin embargo, los dos teoremas fundamentales del Cálculo, presentados en la sección 4.7, proporcionan un método más conveniente para este cálculo. Para demostrar estos dos teoremas importantes se necesitan algunas propiedades de la integral definida, las cuales se estudian en el resto de esta sección y en la sección 4.6.

Primero se presentarán los dos teoremas siguientes acerca de las sumas de Riemann.

4.5.7 Teorema

Si Δ es una partición del intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = b - a$$

Demostración

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \Delta_i x - (b - a) &= (b - a) - (b - a) \\ &= 0\end{aligned}$$

En consecuencia, para cualquier $\epsilon > 0$, cualquier elección de $\delta > 0$ garantiza que

$$\text{si} \quad \|\Delta\| < \delta \quad \text{entonces} \quad \left| \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x - (b - a) \right| < \epsilon$$

Así, por la definición 4.5.1,

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = b - a$$ ■

4.5.8 Teorema

Si f está definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, y si

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x$$

existe, donde Δ es cualquier partición de $[a, b]$, entonces si k es cualquier constante,

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k f(w_i)\,\Delta_i x = k \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta x$$

La demostración de este teorema se deja como ejercicio (vea el ejercicio 54).

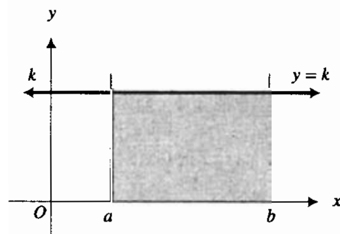


FIGURA 9



EJEMPLO ILUSTRATIVO 7 Refiérase a la figura 9. Si $k > 0$, la integral definida $\int_a^b k\,dx$ proporciona la medida del área del rec-

tángulo cuyas dimensiones son k unidades y $(b - a)$ unidades. Este hecho es una interpretación geométrica del teorema siguiente cuando $k > 0$ y $b > a$.

4.5.9 Teorema

Si k es cualquier constante, entonces

$$\int_a^b k\,dx = k(b - a)$$

Demostración De la definición 4.5.2, si $b > a$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x$$

Si $f(x) = k$ para todo x en $[a, b]$, de la ecuación anterior se tiene

$$\int_a^b k\,dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k\,\Delta_i x$$

$$= k \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x \qquad \text{(por el teorema 4.5.8)}$$

$$= k(b - a) \qquad \text{(por el teorema 4.5.7)}$$

El teorema también es válido si $a \geq b$. Se le pedirá que demuestre esto en el ejercicio 55. ■

EJEMPLO 3 Evalúe

$$\int_{-3}^{5} 4\,dx$$

Solución Al aplicar el teorema 4.5.9, se tiene

$$\int_{-3}^{5} 4\,dx = 4[5 - (-3)]$$
$$= 4(8)$$
$$= 32$$

4.5.10 Teorema

Si la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$, y si k es cualquier constante, entonces

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

Demostración Como f es integrable en $[a, b]$, $\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x$ existe; de modo que por el teorema 4.5.8,

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(w_i)\,\Delta_i x = k \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x$$

Por tanto,

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$ ■

4.5.11 Teorema

Si las funciones f y g son integrables en $[a, b]$, entonces $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

La demostración de este teorema se presenta en el suplemento de esta sección. Observe la semejanza del teorema 4.5.11 y el teorema de límites 4 (1.5.5), el límite de la suma de dos funciones. La demostración de los teoremas son similares.

El signo más en el enunciado del teorema 4.5.11 puede reemplazarse por un signo menos aplicando el teorema 4.5.10 con $k = -1$.

El teorema 4.5.11 puede extenderse a n funciones. Esto es, si las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son integrables en $[a, b]$, entonces $(f_1 \pm f_2 \pm \ldots \pm f_n)$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]\,dx$$
$$= \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)\,dx$$

▶ ***EJEMPLO 4*** Utilice los resultados del ejemplo ilustrativo 2, ejemplo 1(a), y propiedades de la integral definida para calcular el valor exacto de

$$\int_0^3 (4x^2 - 2x + 5)\,dx$$

Solución En el ejemplo ilustrativo 2 y en el ejemplo 1(a) se mostró que

$$\int_0^3 x^2\,dx = 9 \quad \text{y} \quad \int_0^3 x\,dx = \frac{9}{2}$$

De las propiedades de la integral definida, se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^3 (4x^2 - 2x + 5)\,dx &= \int_0^3 4x^2\,dx - \int_0^3 2x\,dx + \int_0^3 5\,dx \\ &= 4\int_0^3 x^2\,dx - 2\int_0^3 x\,dx + 5\int_0^3 dx \\ &= 4(9) - 2(\tfrac{9}{2}) + 5(3 - 0) \\ &= 42\end{aligned}$$ ◀

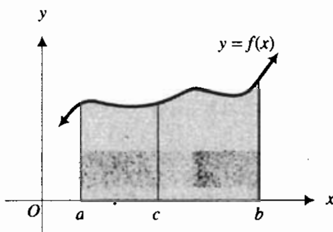


FIGURA 10



EJEMPLO ILUSTRATIVO 8 En la figura 10 se presenta una interpretación geométrica del teorema 4.5.12, el cual se presenta a continuación, donde $f(x) \geq 0$. Para toda x en $[a, b]$, la medida del área de la región limitada por la curva $y = f(x)$ y el eje x de a a b, es igual a la suma de las medidas de las áreas de las regiones de a a c y de c a b. ◀

4.5.12 Teorema

Si la función f es integrable en los intervalos cerrados $[a, b]$, $[a, c]$ y $[c, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

donde $a < c < b$.

Para la demostración de este teorema, refiérase al suplemento de esta sección. En la hipótesis del teorema $a < c < b$. Sin embargo, la conclusión del teorema es verdadera para cualquier orden de los números a, b y c. Este hecho se establece en el teorema siguiente, en cuya demostración se utiliza el teorema 4.5.12.

4.5.13 Teorema

Si f es integrable en un intervalo cerrado que contiene los tres números a, b y c, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \textbf{(11)}$$

sin importar el orden de a, b y c.

Demostración Si a, b y c son diferentes, entonces existen seis órdenes posibles de estos tres números: $a < b < c$, $a < c < b$, $b < a < c$, $b < c < a$, $c < a < b$ y $c < b < a$. El segundo orden, $a < c < b$, corresponde al teorema 4.5.12. Se aplica este teorema a fin de demostrar que la ecuación (11) se cumple para los otros órdenes.

Suponga que $a < b < c$; entonces por el teorema 4.5.12

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \qquad \textbf{(12)}$$

De la definición 4.5.5,

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx$$

Al sustituir de esta ecuación en (12) se obtiene

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

De donde

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

lo cual es el resultado deseado.

Las demostraciones para los otros cuatro casos son semejantes y se dejan como ejercicios. Refiérase a los ejercicios 43 a 46.

Otra posibilidad consiste en que dos números sean iguales; por ejemplo, $a = c < b$. Entonces

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx$$

$$= 0 \qquad \text{(por la definición 4.5.6)}$$

También, como $a = c$,

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Por tanto,

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = 0 + \int_a^b f(x)\,dx$$

el cual es el resultado deseado. ■

EJERCICIOS 4.5

En los ejercicios 1 a 6, calcule la suma de Riemann para la función en el intervalo utilizando la partición Δ y los valores dados de w_i. Dibuje la gráfica de la función en el intervalo dado y muestre los rectángulos cuyas medidas de áreas sean los términos en la suma de Riemann. Consulte el ejemplo ilustrativo 1 y la figura 2.

1. $f(x) = x^2$; $0 \le x \le 3$; Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.25$, $x_3 = 2.25$, $x_4 = 3$; $w_1 = 0.25$, $w_2 = 1$, $w_3 = 1.5$, $w_4 = 2.5$
2. $f(x) = x^2$; $0 \le x \le 3$; Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.75$, $x_2 = 1.25$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2.75$; $x_5 = 3$, $w_1 = 0.5$, $w_2 = 1$, $w_3 = 1.75$, $w_4 = 2.25$, $w_5 = 2.75$
3. $f(x) = 1/x$; $1 \le x \le 3$; Δ: $x_0 = 1$, $x_1 = 1.67$, $x_2 = 2.25$, $x_3 = 2.67$, $x_4 = 3$; $w_1 = 1.25$, $w_2 = 2$, $w_3 = 2.5$, $w_4 = 2.75$
4. $f(x) = 1/(x + 2)$; $-1 \le x \le 3$; Δ: $x_0 = -1$, $x_1 = -0.25$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0.5$, $x_4 = 1.25$; $x_5 = 2$, $x_6 = 2.25$, $x_7 = 2.75$, $x_8 = 3$; $w_1 = -0.75$, $w_2 = 0$, $w_3 = 0.25$, $w_4 = 1$, $w_5 = 1.5$, $w_6 = 2$, $w_7 = 2.5$, $w_8 = 3$
5. $f(x) = \text{sen } x$; $0 \le x \le \pi$; Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}\pi$, $x_2 = \frac{1}{2}\pi$, $x_3 = \frac{2}{3}\pi$, $x_4 = \frac{3}{4}\pi$; $x_5 = \pi$, $w_1 = \frac{1}{6}\pi$, $w_2 = \frac{1}{3}\pi$, $w_3 = \frac{1}{2}\pi$, $w_4 = \frac{3}{4}\pi$, $w_5 = \frac{5}{6}\pi$
6. $f(x) = 3\cos\frac{1}{2}x$; $-\pi \le x \le \pi$; Δ: $x_0 = -\pi$, $x_1 = -\frac{1}{2}\pi$, $x_2 = -\frac{1}{3}\pi$, $x_3 = \frac{1}{3}\pi$, $x_4 = \frac{7}{12}\pi$, $x_5 = \pi$; $w_1 = -\frac{2}{3}\pi$, $w_2 = -\frac{1}{3}\pi$, $w_3 = 0$, $w_4 = \frac{1}{2}\pi$, $w_5 = \frac{2}{3}\pi$

En los ejercicios 7 a 10, aproxime el valor de la integral definida en dos formas: (a) utilice una calculadora para obtener con cuatro cifras decimales las sumas de Riemann correspondientes a una partición regular de n subintervalos y w_i como el extremo izquierdo o derecho (según se indique) de cada subintervalo; (b) emplee NINT *en la graficadora. Compare los resultados.*

7. $\int_2^5 \frac{1}{x^2}\,dx$; $n = 9$, w_i es el extremo derecho
8. $\int_3^4 \frac{1}{x}\,dx$; $n = 10$, w_i es el extremo izquierdo
9. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x\,dx$, $n = 8$, w_i es el extremo izquierdo
10. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \csc x\,dx$, $n = 6$, w_i es el extremo derecho

En los ejercicios 11 a 28, (a) determine el valor exacto de la integral definida interpretándola como la medida del área de una región plana. (b) Apoye la respuesta del inciso (a) utilizando NINT en la graficadora.

11. $\int_1^3 (x - 1)\,dx$
12. $\int_{-2}^3 (x + 2)\,dx$

13. $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$ **14.** $\int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2}\, dx$

15. $\int_{-2}^4 x\, dx$ **16.** $\int_0^4 (3 - x)\, dx$

17. $\int_{-1}^2 (5 - 2x)\, dx$ **18.** $\int_{-1}^2 (2x + 5)\, dx$

19. $\int_{-2}^4 |x|\, dx$ **20.** $\int_{-3}^3 |1 - x|\, dx$

21. $\int_0^5 (|x + 3| - 5)\, dx$ **22.** $\int_{-1}^7 (|x - 2| - 3)\, dx$

23. $\int_0^8 (6 - |x - 2|)\, dx$ **24.** $\int_{-5}^0 (3 + |x + 4|)\, dx$

25. $\int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\, dx$ **26.** $\int_{-1}^5 \sqrt{5 + 4x - x^2}\, dx$

27. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx$ **28.** $\int_{\pi/2}^{5\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx$

En los ejercicios 29 y 30, aplique el teorema 4.5.9 para determinar el valor exacto de la integral definida.

29. **(a)** $\int_2^5 4\, dx$ **(b)** $\int_{-3}^4 7\, dx$ **(c)** $\int_{-5}^{-10} dx$

30. **(a)** $\int_5^{-1} 6\, dx$ **(b)** $\int_{-2}^2 \sqrt{5}\, dx$ **(c)** $\int_3^3 dx$

En los ejercicios 31 a 42, (a) aproxime el valor de la integral definida mediante NINT *en la graficadora. (b) Confirme la respuesta del inciso (a) calculando el valor exacto de la integral definida. Utilice los siguientes resultados:*

$$\int_{-1}^2 x^2\, dx = 3 \qquad \int_{-1}^2 x\, dx = \tfrac{3}{2} \qquad \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = 2$$

$$\int_0^{\pi} \cos x\, dx = 0 \qquad \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}\pi$$

31. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 4x + 5)\, dx$ **32.** $\int_{-1}^2 (8 - x^2)\, dx$

33. $\int_{-1}^2 (2 - 5x + \tfrac{1}{2}x^2)\, dx$ **34.** $\int_{-1}^2 (3x^2 - 4x - 1)\, dx$

35. $\int_2^{-1} (2x + 1)^2\, dx$ **36.** $\int_{-1}^2 (5x^2 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{2})\, dx$

37. $\int_{-1}^2 (x - 1)(2x + 3)\, dx$ **38.** $\int_2^{-1} 3x(x - 4)\, dx$

39. $\int_0^{\pi} (2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x + 1)\, dx$

40. $\int_0^{\pi} 3 \cos^2 x\, dx$ **41.** $\int_0^{\pi} (\cos x + 4)^2\, dx$

42. $\int_{\pi}^0 (\operatorname{sen} x - 2)^2\, dx$

En los ejercicios 43 a 48, use el teorema 4.5.12 para demostrar que el teorema 4.5.13 es válido para los distintos órdenes de a, b y c.

43. $b < a < c$ **44.** $c < a < b$

45. $b < c < a$ **46.** $c < b < a$

47. $a = b < c$ **48.** $a < c = b$

49. Exprese como una integral definida: $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{8i^2}{n^3}$.

Sugerencia: considere la función f para la cual $f(x) = x^2$.

50. Exprese como una integral definida: $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n + i}$.

Sugerencia: considere la función f para la cual

$f(x) = \frac{1}{x}$ en $[1, 2]$.

51. Exprese como una integral definida: $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i + n)^2}$.

Sugerencia: considere la función f para la cual

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $[1, 2]$.

52. Demuestre que si f es continua en $[-1, 2]$, entonces

$$\int_{-1}^2 f(x)\, dx + \int_2^0 f(x)\, dx + \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^{-1} f(x)\, dx = 0$$

53. Demuestre que si f es continua en $[-3, 4]$, entonces

$$\int_3^{-1} f(x)\, dx + \int_4^3 f(x)\, dx + \int_{-3}^4 f(x)\, dx + \int_{-1}^{-3} f(x)\, dx = 0$$

54. Demuestre el teorema 4.5.8.

55. Demuestre el teorema 4.5.9 si $a \geq b$.

56. Suponga que f es integrable en el intervalo cerrado $[-r, r]$, demuestre que:
(a) si f es una función par, entonces $\int_{-r}^{r} f(x)\, dx = 2\int_0^r f(x)\, dx$;
(b) si f es una función impar, entonces $\int_{-r}^{r} f(x)\, dx = 0$.

57. Suponga que la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. ¿En qué condiciones el valor de la integral definida de f en $[a, b]$, es igual al área de una región plana que incluya la gráfica de f en $[a, b]$ como un límite? Explique cuándo el valor de la integral definida no es igual a la medida del área de dicha región plana.

4.6 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

En esta sección se continúa el estudio de propiedades de la integral definida. El teorema clave de la sección es el *teorema del valor medio para integrales*, el cual juega un papel importante en la demostración del *primer teorema fundamental del Cálculo* en la siguiente sección.

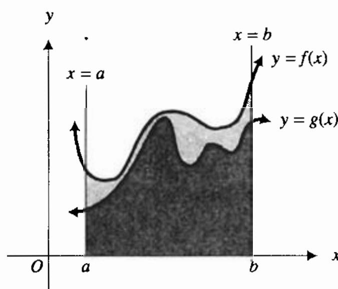


FIGURA 1

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 En la figura 1, $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. La integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ proporciona la medida del área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, mientras que $\int_a^b g(x)\, dx$ da la medida del área de la región limitada por la gráfica de g y las mismas rectas. En la figura se observa que la primera área es mayor que la segunda. Este hecho ofrece una interpretación geométrica del teorema siguiente cuando $f(x)$ y $g(x)$ son no negativas en $[a, b]$. ◀

4.6.1 Teorema

Si las funciones f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a, b]$, y si $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$$

Demostración Como f y g son integrables en $[a, b]$, entonces, por el teorema 4.5.11, con el signo menos en lugar del signo más,

$$\int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Sea h la función definida por

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Entonces $h(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$ ya que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, b]$.

Se desea demostrar que $\int_a^b h(x)\, dx \geq 0$. Como

$$\int_a^b h(x)\, dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(w_i)\, \Delta_i x$$

suponga que

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(w_i)\, \Delta_i x = L < 0 \tag{1}$$

Entonces, por la definición 4.5.1, para $\epsilon = -L$, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad \|\Delta\| < \delta \quad \text{entonces} \quad \left| \sum_{i=1}^{n} h(w_i)\, \Delta_i x - L \right| < -L \tag{2}$$

Pero como

$$\sum_{i=1}^{n} h(w_i)\, \Delta_i x - L \leq \left| \sum_{i=1}^{n} h(w_i)\, \Delta_i x - L \right|$$

de (2) se tiene

$$\text{si } \|\Delta\| < \delta \quad \text{entonces} \quad \sum_{i=1}^{n} h(w_i)\,\Delta_i x - L < -L$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } \|\Delta\| < \delta \quad \text{entonces} \quad \sum_{i=1}^{n} h(w_i)\,\Delta_i x < 0$$

Pero este enunciado es imposible, porque cada $h(w_i)$ es no negativo y cada $\Delta_i x > 0$; de modo que se tiene una contradicción a la suposición (1). Por tanto (1) es falsa, y

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} h(w_i)\,\Delta_i x \geq 0$$

$$\int_a^b h(x)\,dx \geq 0$$

Como $h(x) = f(x) - g(x)$, se tiene

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \geq 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

■

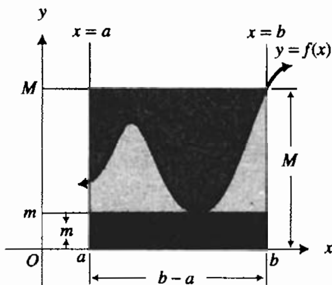


FIGURA 2

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 En la figura 2, $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, y m y M son, respectivamente, los valores mínimo absoluto y máximo absoluto de f en $[a, b]$. La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ proporciona la medida del área de la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. Esta área es mayor que la del rectángulo cuyas dimensiones son m y $b - a$, y es menor que el área del rectángulo cuyas dimensiones son M y $b - a$. De esta manera, se tiene una interpretación geométrica del siguiente teorema si $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. ◀

4.6.2 Teorema

Suponga que la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si m y M son, respectivamente, los valores de función mínimo absoluto y máximo absoluto de f en $[a, b]$ de modo que

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \text{para toda } a \leq x \leq b$$

entonces

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a)$$

Demostración Como f es continua en $[a, b]$, el teorema del valor extremo garantiza la existencia de m y M.

Por el teorema 4.5.9,

$$\int_a^b m\,dx = m(b - a) \tag{3}$$

y

$$\int_a^b M\,dx = M(b - a) \tag{4}$$

Debido a que f es continua en $[a, b]$, del teorema 4.5.3 se deduce que f es integrable en $[a, b]$. Entonces, como $f(x) \geq m$ para toda x en $[a, b]$, se tiene, por el teorema 4.6.1,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b m\,dx$$

de donde, al sustituir de (3), se obtiene

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq m(b - a) \tag{5}$$

De manera semejante, como $M \geq f(x)$ para toda x en $[a, b]$, del teorema 4.6.1 se deduce que

$$\int_a^b M\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$$

de donde, al sustituir de (4), se tiene

$$M(b - a) \geq \int_a^b f(x)\,dx$$

Si se combina esta desigualdad con (5) se obtiene

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a)$$

■

EJEMPLO 1 Aplique el teorema 4.6.2 para determinar un intervalo cerrado que contenga el valor de $\int_{0.5}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\,dx$. Utilice los resultados del ejemplo 1 de la sección 3.4.

Solución Sea

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Entonces del ejemplo 1 de la sección 3.4, f tiene un valor mínimo relativo de 1 en $x = 3$ y un valor máximo relativo de 5 en $x = 1$. Al calcular los valores de la función en los extremos del intervalo $[0.5, 4]$, se obtiene $f(0.5) = 4.125$ y $f(4) = 5$. Por tanto, el valor mínimo absoluto de f en $[0.5, 4]$ es 1, y el valor máximo absoluto es 5. Con $m = 1$ y $M = 5$ en el teorema 4.6.2, se tiene

$$1(4 - 0.5) \leq \int_{0.5}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\,dx \leq 5(4 - 0.5)$$

$$3.5 \leq \int_{0.5}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\,dx \leq 17.5$$

En consecuencia, el intervalo cerrado [3.5, 17.5] contiene el valor de la integral definida. ◀

En el ejemplo ilustrativo 4 de la sección 4.7, se mostró que el valor exacto de la integral definida del ejemplo anterior es $\frac{679}{64} \approx 10.61$.

▶ **EJEMPLO 2** Aplique el teorema 4.6.2 para determinar un intervalo cerrado que contenga el valor de $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx$. Apoye la respuesta utilizando NINT en la graficadora.

Solución Si $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$, entonces

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

Para x en $[\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]$, $f'(x) = 0$ cuando $x = \frac{1}{2}\pi$. Como $f'(x) > 0$ cuando $\frac{1}{4}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$, y $f'(x) < 0$ cuando $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{4}\pi$, se concluye que f tiene un valor mínimo relativo en $\frac{1}{2}\pi$; y $f(\frac{1}{2}\pi) = 1$. Además, $f(\frac{1}{4}\pi) = \sqrt[4]{2}/\sqrt{2} \approx 0.841$, y $f(\frac{3}{4}\pi) \approx 0.841$. Así, en $[\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]$ el valor mínimo absoluto de f es 0.841 y el valor máximo absoluto es 1. De esta manera, con $m = 0.841$ y $M = 1$ en el teorema 4.6.2

$$0.841\left[\tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{1}{4}\pi\right] \le \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx \le 1\left[\tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{1}{4}\pi\right]$$

$$0.420\pi \le \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx \le 0.5\pi$$

$$1.32 \le \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx \;\; 1.57$$

Por tanto, el valor de la integral definida está en el intervalo cerrado [1.32, 1.57].

En la graficadora se tiene

NINT($\sqrt{\operatorname{sen} x}$, $\pi/4$, $3\pi/4$) = 1.48861

lo cual apoya la respuesta. ◀

Ahora está preparado para estudiar el teorema del valor medio para integrales. Se inicia con un ejemplo ilustrativo que ofrece una interpretación geométrica del teorema.

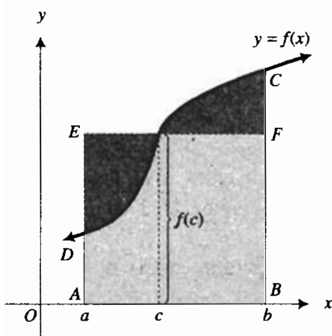


FIGURA 3

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Considere $f(x) \ge 0$ para todos los valores de x en $[a, b]$. Entonces $\int_a^b f(x)\, dx$ proporciona el área de la región limitada por la curva cuya ecuación es $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. Consulte la figura 3. El teorema del valor medio para integrales afirma que existe un número c en $[a, b]$ tal que el área del rectángulo $AEFB$ de altura $f(c)$ unidades y ancho $(b - a)$ unidades es igual al área de la región $ADCB$. ◀

4.6.3 Teorema del valor medio para integrales

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un número c en $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)$$

Demostración Como f es continua en $[a, b]$, por el teorema del valor extremo, f tiene un valor máximo relativo y un valor mínimo relativo en $[a, b]$.

Sea m el valor mínimo relativo que ocurre en $x = x_m$. Así,

$$f(x_m) = m \qquad a \leq x_m \leq b \tag{6}$$

Sea M el valor máximo relativo que ocurre en $x = x_M$. Entonces

$$f(x_M) = M \qquad a \leq x_M \leq b \tag{7}$$

Por tanto,

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{para todo } x \text{ en } [a, b]$$

Por el teorema 4.6.2

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a)$$

Al dividir entre $b - a$ y observando que $b - a$ es positivo, puesto que $b > a$, se obtiene

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a} \leq M$$

Pero de (6) y (7), $m = f(x_m)$ y $M = f(x_M)$; por lo que se tiene

$$f(x_m) \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a} \leq f(x_M)$$

De esta última desigualdad y del teorema del valor intermedio existe un número c en un intervalo cerrado que contiene a x_m y x_M tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a) \qquad a \leq c \leq b$$ ■

El valor de c en el teorema del valor medio para integrales no es necesariamente único. El teorema no proporciona un método para obtener c, pero afirma que un valor de c existe, y este hecho se utiliza para demostrar otros teoremas. En algunos casos particulares se puede determinar el valor de c garantizado por el teorema, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Si $f(x) = x^2$, determine el valor de c con aproximación de centésimos tal que

$$\int_1^3 f(x)\,dx = f(c)(3 - 1)$$

Aproxime el valor de la integral definida empleando NINT en la graficadora.

Solución Se calcula

$$\text{NINT}(x^2, 1, 3) = 8.667$$

Por tanto, se desea obtener c tal que

$$f(c)(2) = 8.667$$

esto es,

$$\begin{aligned} c^2 &= 4.333 \\ c &= \pm 2.08 \end{aligned}$$

Se rechaza -2.08 porque no está en el intervalo $[1, 3]$, y se tiene

$$\int_1^3 f(x)\,dx = f(2.08)(3 - 1)$$

El valor $f(c)$ dado por el teorema del valor medio para integrales se denomina **valor promedio** (o **valor medio**) de f en el intervalo $[a, b]$. Es una generalización de la media aritmética de un conjunto finito de números. Es decir, si $\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$ es un conjunto de n números, entonces la media aritmética de estos números está dada por

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$

Para generalizar esta definición, considere una partición regular del intervalo cerrado $[a, b]$, el cual se divide en n subintervalos de longitud igual a $\Delta x = (b - a)/n$. Sea w_i cualquier número del i-ésimo subintervalo. Considere la suma:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(w_i)}{n} \tag{8}$$

Este cociente corresponde a la media aritmética de n números. Como $\Delta x = (b - a)/n$ se tiene

$$n = \frac{b - a}{\Delta x} \tag{9}$$

Si se sustituye de (9) en (8) se obtiene

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(w_i)}{\dfrac{b - a}{\Delta x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x}{b - a}$$

Al tomar el límite cuando $n \to +\infty$ (o $\Delta x \to 0$) se tiene, si el límite existe,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x}{b-a} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Este resultado conduce a la siguiente definición.

4.6.4 Definición del valor promedio de una función

Si la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el **valor promedio** de f en $[a, b]$ es

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

EJEMPLO 4 Si $f(x) = x^2$, determine el valor promedio de f en el intervalo $[1, 3]$ e interprete geométricamente el resultado.

Solución En el ejemplo 3, se obtuvo NINT(x^2, 1, 3) = 8.667. Utilizando este número como el valor de la integral definida, se tiene

$$\int_1^3 x^2\,dx = 8.667$$

De modo que si V.P. es el valor promedio de f en $[1, 3]$, entonces

$$\text{V.P.} = \frac{8.667}{3-1} = 4.33$$

En el ejemplo 3, se obtuvo para esta función

$$f(2.08) = 4.33$$

Por tanto, el valor promedio de f ocurre en $x = 2.08$. La figura 4 muestra la gráfica de f en $[1, 3]$ y el segmento de recta desde el punto $E(2.08, 0)$ en el eje x, hasta el punto $F(2.08, 4.33)$ de la gráfica de f. El área del rectángulo $AGHB$, que tiene altura 4.33 y ancho 2, es igual al área de la región $ACDB$. En consecuencia, el área de la región sombreada CGF es igual al área de la región sombreada FDH. ◀

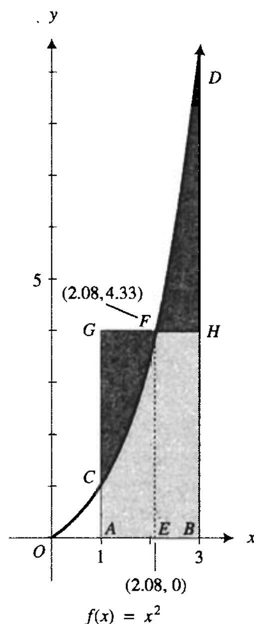


FIGURA 4

Una aplicación del valor promedio de una función se presenta en física e ingeniería en relación al concepto de *centro de masa*, discutido en el capítulo 6.

EJERCICIOS 4.6

En los ejercicios 1 a 4, aplique el teorema 4.6.1 para determinar cuál de los símbolos ≥ o ≤ se debe insertar en el espacio en blanco para tener una desigualdad correcta. Apoye su respuesta utilizando NINT *en la graficadora.*

1. $\int_{-1}^{3} (2x^2 - 4)\, dx$ ——— $\int_{-1}^{3} (x^2 - 6)\, dx$

2. $\int_{4}^{5} \sqrt{6 - x}\, dx$ ——— $\int_{4}^{5} \sqrt{x - 2}\, dx$

3. $\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \operatorname{sen}^2 x\, dx$ ——— $\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \cos^2 x\, dx$

4. $\int_{0}^{\pi/4} \cos x\, dx$ ——— $\int_{0}^{\pi/4} \operatorname{sen} x\, dx$

En los ejercicios 5 a 20, aplique el teorema 4.6.2 para determinar un intervalo cerrado que contenga el valor de la integral definida. Apoye la respuesta empleando NINT *en la graficadora.*

5. $\int_{0}^{0.5} x^2\, dx$ **6.** $\int_{-0.5}^{1} x^3\, dx$

7. $\int_{-1}^{1} \sqrt{2 + x}\, dx$ **8.** $\int_{-2}^{1} (x + 1)^{2/3}\, dx$

9. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{sen} x\, dx$ **10.** $\int_{-\pi/3}^{2\pi/3} \cos x\, dx$

11. $\int_{1.5}^{3} |x - 2|\, dx$ **12.** $\int_{-1}^{2} \sqrt{x^2 + 5}\, dx$

13. $\int_{-0.5}^{1.5} (\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2)\, dx$ **14.** $\int_{0}^{1.5} (x - 3x^{1/3})\, dx$

15. $\int_{1}^{2} x\sqrt{5 - x^2}\, dx$ **16.** $\int_{1.5}^{2.5} x\sqrt{3 - x}\, dx$

17. $\int_{-1}^{1} \frac{x}{x + 2}\, dx$ **18.** $\int_{0}^{1} \frac{x + 5}{x - 3}\, dx$

19. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} (4\cos^3 x - 9\cos x)\, dx$

20. $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \operatorname{sen}^3 x\, dx$

En los ejercicios 21 a 32, calcule con aproximación de centésimos el valor de c que satisfaga el teorema del valor medio para integrales. Para el valor de la integral definida, utilice NINT *en la graficadora.*

21. $\int_{0}^{2} x^2\, dx$ **22.** $\int_{2}^{4} x^2\, dx$

23. $\int_{1}^{2} x^3\, dx$ **24.** $\int_{0}^{5} (x^3 - 1)\, dx$

25. $\int_{1}^{4} (x^2 + 4x + 5)\, dx$ **26.** $\int_{0}^{4} (x^2 + x - 6)\, dx$

27. $\int_{-2}^{2} (x^3 + 1)\, dx$ **28.** $\int_{-2}^{1} x^4\, dx$

29. $\int_{2}^{4} \frac{1}{x^2 - 3}\, dx$ **30.** $\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2 + 5}\, dx$

31. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \tan x\, dx$ **32.** $\int_{2\pi/3}^{5\pi/6} \cot x\, dx$

En los ejercicios 33 a 40, aplique el teorema del valor medio para integrales para probar la desigualdad.

33. $\int_{0}^{2} \frac{1}{x^2 + 4}\, dx \le \frac{1}{2}$ **34.** $\int_{-3}^{3} \frac{1}{x^2 + 6}\, dx \le 1$

35. $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos x^2\, dx \le \frac{\pi}{3}$ **36.** $\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} \sqrt{x}\, dx \le \pi$

37. $0 \le \int_{2}^{5} \frac{1}{x^3 + 1}\, dx \le \frac{1}{3}$

38. $\sqrt{2} \le \int_{5}^{9} \frac{1}{\sqrt{x - 1}}\, dx \le 2$

39. $0 \le \int_{0}^{2} \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi x\, dx \le 2$

40. $0 \le \int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi x\, dx \le 1$

41. Dado que $\int_{-1}^{2} x\, dx = \frac{3}{2}$, calcule el valor promedio de la función identidad en el intervalo $[-1, 2]$. También determine el valor de x en el que se obtiene el valor promedio. Describa la interpretación geométrica de los resultados.

42. Obtenga el valor promedio de la función f definida por $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-1, 2]$ dado que $\int_{-1}^{2} x^2\, dx = 3$. También determine el valor de x en el cual ocurre el valor promedio. Describa la interpretación geométrica de los resultados.

43. Dado que sen $\int_{0}^{\pi} x\, dx = 2$, calcule el valor promedio de la función seno en el intervalo $[0, \pi]$. También determine el menor valor de x en el que se obtiene el valor promedio. Describa la interpretación geométrica de los resultados.

44. Obtenga el valor promedio de la función f definida por $f(x) = \sec^2 x$ en el intervalo $[0, \frac{1}{4}\pi]$ dado que $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2 x\, dx = 1$. También determine el valor de x en el que ocurre el valor promedio. Describa la interpretación geométrica de los resultados.

45. Suponga que se deja caer una pelota y después de t segundos su velocidad es v pies por segundo. Sin considerar la resistencia del aire, exprese v en términos de t como $v = f(t)$, y calcule el valor promedio de f en $[0, 2]$. *Sugerencia:* calcule el valor de la integral definida interpretándolo como el valor del área de una región limitada por un triángulo.

46. Determine el valor promedio de la función f definida por $f(x) = \sqrt{49 - x^2}$ en el intervalo $[0, 7]$. Dibuje una figura. *Sugerencia:* calcule el valor de la integral definida interpretándolo como el valor del área de una región limitada por un cuarto de circunferencia y los ejes coordenados.

47. Determine el valor promedio de la función f definida por $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ en el intervalo $[-4, 4]$. Dibuje una figura. *Sugerencia*: calcule el valor de la integral definida interpretándolo como el valor del área de una región limitada por una semicircunferencia.

48. Suponga que f es integrable en $[-4, 7]$. Si el valor promedio de f en el intervalo $[-4, 7]$ es 4.25, calcule $\int_{-4}^{7} f(x)\, dx$.

49. Demuestre que $\int_0^1 x\, dx \geq \int_0^1 x^2\, dx$ y que $\int_2^1 x\, dx \leq \int_1^2 x^2\, dx$. No evalúe las integrales definidas.

50. Si f es continua en $[a, b]$, demuestre que

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Sugerencia: $-|f(x) \leq f(x) \leq |f(x)|$.

51. Si f es continua en $[a, b]$ y $\int_a^b f(x)\, dx = 0$, demuestre que existe al menos un número c en $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

52. El teorema siguiente es una generalización del teorema del valor medio para integrales: Si f y g son dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si $g(x) > 0$ para toda x del intervalo abierto (a, b), entonces existe un número c en $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx$$

Demuestre este teorema mediante un método semejante al empleado en la demostración del teorema 4.6.3: obtenga la desigualdad $m \leq f(x) \leq M$ y después concluya que $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$; aplique el teorema 4.6.1 y proceda como en la demostración del teorema 4.6.3.

53. Demuestre que cuando $g(x) = 1$, el teorema del ejercicio 52 se convierte en el teorema del valor medio para integrales.

En los ejercicios 54 a 58, utilice el teorema del ejercicio 52 para comprobar la desigualdad.

54. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x\, dx}{x^3 + 2} < \int_0^4 x\, dx$

55. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 4}} < \int_{-1}^1 x^2\, dx$

56. $\displaystyle\int_0^\pi x \operatorname{sen} x\, dx \leq \int_0^\pi x\, dx$

57. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{sen}^2 \pi x \cos \pi x\, dx \leq \int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi x\, dx$

58. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \cos x}{x^2 + 1}\, dx \leq \int_0^1 x\, dx$

4.7 TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO

Ahora que posee los elementos necesarios, en esta sección se establecerán y demostrarán los dos teoremas fundamentales del Cálculo, los cuales son la conexión entre el *Cálculo Diferencial* y el *Cálculo Integral*.

Históricamente, los conceptos básicos de la integral definida fueron utilizados por los antiguos griegos, principalmente **Arquímedes** (287-212 a.C.), hace más de 2 000 años. Eso ocurrió muchos años antes de que fuese descubierto el Cálculo Diferencial en el siglo XVII cuando Newton y Leibniz, casi al mismo tiempo pero trabajando en forma independiente, mostraron cómo determinar el área de una región limitada por una curva o un conjunto de curvas aplicando la antiderivación para evaluar una integral definida. Este procedimiento condujo a los destacados teoremas fundamentales del Cálculo. Se inicia el estudio de estos teoremas considerando integrales definidas que tienen una variable como límite superior.

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces el valor de la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ depende sólo de f y de los números a y b, y no del símbolo x, utilizado aquí como la variable independiente. Se pudo

haber empleado cualquier otro símbolo en lugar de x; por ejemplo, del resultado del ejemplo ilustrativo 2 de la sección 4.5

$$\int_0^3 t^2\,dt = 9 \qquad \int_0^3 u^2\,du = 9 \qquad \int_0^3 r^2\,dr = 9$$

Ahora considere que el símbolo x representa un número del intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces, como f es continua en $[a, b]$, es continua en $[a, x]$. En consecuencia, por el teorema 4.5.3, $\int_a^x f(t)\,dt$ existe. Además, esta integral definida es un número único cuyo valor depende de x. Por tanto, $\int_a^x f(t)\,dt$ define una función F que tiene como dominio al intervalo $[a, b]$ y cuyo valor de función en cualquier número x de $[a, b]$ está dado por

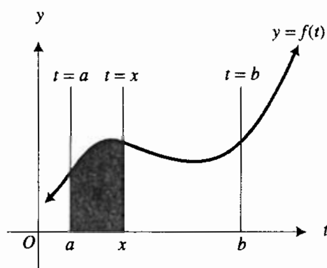


FIGURA 1

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \textbf{(1)}$$

Como observación acerca de la notación, si los límites de una integral definida son variables, entonces se utilizan símbolos diferentes para dichos límites y la variable independiente del integrando. En consecuencia, en (1), como x es el límite superior, se emplea la letra t como la variable independiente del integrando.

Si, en (1), $f(t) \geq 0$ para todos los valores de t en $[a, b]$, entonces el valor de función $F(x)$ puede interpretarse geométricamente como la medida del área de la región R limitada por la curva cuya ecuación es $y = f(t)$, el eje t y las rectas $t = a$ y $t = x$. Consulte la figura 1. Observe que $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt$, lo cual, por la definición 4.5.6, es igual a 0. En el ejemplo ilustrativo siguiente se muestra como avance la importancia del *primer teorema fundamental del Cálculo* al aplicar esta interpretación geométrica en un caso particular.

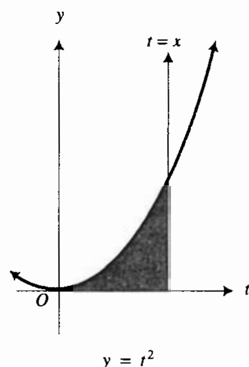


FIGURA 2

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Sea

$$F(x) = \int_0^x t^2\,dt$$

La figura 2 muestra la región cuyos límites son: por arriba, la gráfica de $y = t^2$; por abajo, el eje t; y por los lados, el eje y y la recta $t = x$. Como la medida del área de esta región es $F(x)$, puede determinarse $F(x)$ calculando el área como el límite de una suma de Riemann.

Se toma una partición regular del intervalo $[0, x]$ y se elige w_i como el extremo derecho del i-ésimo subintervalo. Por tanto, se están empleando rectángulos circunscritos como se muestra en la figura 3.

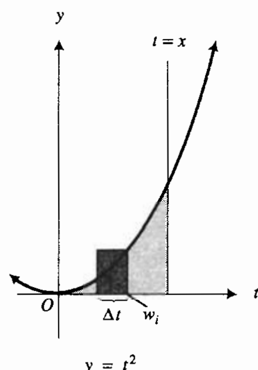


FIGURA 3

$$F(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta t$$

Como $f(t) = t^2$ y $w_i = i\,\Delta t$,

$$F(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} [i^2 (\Delta t)^2]\,\Delta t$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} i^2\,(\Delta t)^3$$

Ahora se sustituye Δt por x/n:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} i^2 \left(\frac{x}{n}\right)^3 \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{x^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= x^3 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= x^3 \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} \\
&= x^3 \lim_{n\to+\infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6} \\
&= \frac{x^3}{3}
\end{aligned}
$$

Como $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, $F'(x) = x^2$, esto es,

$$\frac{d}{dx}\int_0^x t^2\,dt = x^2$$

Se ha mostrado entonces que, en este caso particular, cuando $f(t) = t^2$ y $a = 0$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x)$$

la cual es la ecuación crucial del enunciado del primer teorema fundamental del Cálculo. ◀

Ahora se establecerá y demostrará el primer teorema fundamental del Cálculo, que proporciona la derivada de una función considerada como una integral definida que tiene un límite superior variable.

4.7.1 Primer teorema fundamental del Cálculo

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea x cualquier número de $[a, b]$. Si F es la función definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

entonces

$$F'(x) = f(x) \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \tag{3}$$

(Si $x = a$, la derivada en (2) puede ser una derivada por la derecha, y si $x = b$, puede ser una derivada por la izquierda.)

Demostración Considere dos números x_1 y $x_1 + \Delta x$ en $[a, b]$. Entonces

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t)\,dt$$

No se requiere el uso del subíndice, basta trab con x.

y

$$F(x_1 + \Delta x) = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t)\,dt$$

de modo que

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_1} f(t)\,dt \tag{4}$$

Por el teorema 4.5.13, y el teor 4.5.5; directamente pasa a

$$\int_a^{x_1} f(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t)\,dt = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t)\,dt$$

entonces

$$\int_a^{x_1 + \Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_1} f(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t)\,dt$$

Al sustituir de esta ecuación en (4) se tiene

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t)\,dt \tag{5}$$

Por el teorema del valor medio para integrales, existe algún número c en el intervalo cerrado limitado por x_1 y $x_1 + \Delta x$ tal que

$$\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t)\,dt = f(c)\,\Delta x$$

De esta ecuación y (5) se obtiene

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = f(c)\,\Delta x$$

$$\frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = f(c)$$

Al tomar el límite cuando Δx se aproxima a 0 se tiene

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \tag{6}$$

El miembro izquierdo de (6) es $F'(x_1)$. Para determinar $\lim_{\Delta x \to 0} f(c)$, recuerde que c está en el intervalo cerrado limitado por x_1 y $x_1 + \Delta x$, y como

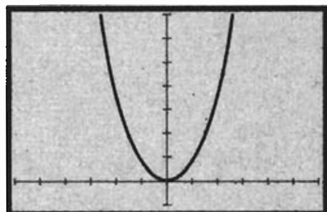
$$\lim_{\Delta x \to 0} x_1 = x_1 \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} (x_1 + \Delta x) = x_1$$

se deduce del teorema de estricción (1.10.1) que $\lim_{\Delta x \to 0} c = x_1$. Así, se tiene $\lim_{\Delta x \to 0} f(c) = \lim_{c \to x_1} f(c)$. Debido a que f es continua en x_1, $\lim_{c \to x_1} f(c) = f(x_1)$; por lo que $\lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x_1)$, y de (6) se obtiene

$$F'(x_1) = f(x_1) \tag{7}$$

Si la función f no está definida para valores de x menores que a pero es continua por la derecha en a, entonces en el argumento anterior, si $x_1 = a$ en (6), Δx debe aproximarse a 0 por la derecha. Por tanto, el miembro izquierdo de (7) será $F'_+(x_1)$. De manera semejante, si f no está definida para valores de x mayores que b pero es continua por la izquierda en b, entonces si $x_1 = b$ en (6), Δx debe aproximarse a 0 por la izquierda. En consecuencia, se tiene $F'_-(x_1)$ en el miembro izquierdo de (7).

Como x_1 es cualquier número de $[a, b]$, la ecuación (7) establece lo que se deseaba. ■



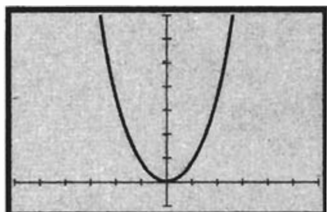
$[-6, 6]$ por $[-1, 7]$

$f(x) = x^2$

FIGURA 4

Recuerde que el primer teorema fundamental del Cálculo afirma que la integral definida $\int_a^x f(t)\,dt$ con límite superior x es una antiderivada de f si f es continua. Este hecho se muestra gráficamente en el ejemplo ilustrativo siguiente para la función del ejemplo ilustrativo 1.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** La figura 4 muestra la gráfica de f del ejemplo ilustrativo 1, definida por $f(x) = x^2$, trazada en el rectángulo de inspección de $[-6, 6]$ por $[-1, 7]$. La figura 5 presenta la gráfica de NDER(NINT(t^2, 0, x), x) trazada en el mismo rectángulo de inspección. Estas gráficas parecen idénticas, lo cual apoya el hecho de que $\int_0^x t^2\,dt$ es una antiderivada de f. ◀



$[-6, 6]$ por $[-1, 7]$

NDER (NINT(t^2, 0, x), x)

FIGURA 5

▶ ***EJEMPLO 1*** Calcule las derivadas siguientes:

(a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^3+1}\,dt$ **(b)** $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_3^{x^2} \sqrt{\cos t}\,dt$

Solución

(a) De (3) con $f(t) = \dfrac{1}{t^3+1}$, se tiene

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t^3+1}\,dt = \frac{1}{x^3+1}$$

(b) Con $u = x^2$ en la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{d}{dx}\int_3^{x^2} \sqrt{\cos t}\,dt = \frac{d}{du}\int_3^{u} \sqrt{\cos t}\,dt \cdot \frac{du}{dx}$$

De (3) con $f(t) = \sqrt{\cos t}$ y como $\dfrac{du}{dx} = 2x$, se tiene

$$\frac{d}{dx}\int_3^{x^2} \sqrt{\cos t}\,dt = \sqrt{\cos u}\,(2x)$$

$$= 2x\sqrt{\cos x^2}$$ ◀

Ahora se aplicará el primer teorema fundamental del Cálculo para demostrar el *segundo teorema fundamental del Cálculo.*

4.7.2 Segundo teorema fundamental del Cálculo

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea g una función tal que

$$g'(x) = f(x) \qquad (8)$$

para toda x en $[a, b]$. Entonces

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a)$$

(Si $x = a$, la derivada en (8) puede ser una derivada por la derecha, y si $x = b$, la derivada en (8) puede ser una derivada por la izquierda.)

Demostración Si f es continua en todos los números de $[a, b]$, se sabe, por el primer teorema fundamental del Cálculo, que la integral definida $\int_a^x f(t)\,dt$, con límite superior variable x, define una función F cuya derivada en $[a, b]$ es f. Como por hipótesis $g'(x) = f(x)$, se deduce, por el teorema 4.1.2, que

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt + k$$

donde k es alguna constante. Al considerar $x = b$ y $x = a$, sucesivamente, en esta ecuación se obtiene

$$g(b) = \int_a^b f(t)\,dt + k \tag{9}$$

y

$$g(a) = \int_a^a f(t)\,dt + k \tag{10}$$

De (9) y (10),

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt$$

Pero por la definición 4.5.6, $\int_a^a f(t)\,dt = 0$; por lo que

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\,dt$$

que es lo que se deseaba demostrar.

Si f no está definida para valores de x mayores que b pero es continua por la izquierda en b, entonces la derivada en (8) es una derivada por la izquierda, y se tiene $g'_-(b) = F'_-(b)$, de donde se deduce (9). En forma similar, si f no está definida para valores de x menores que a pero es continua por la derecha en a, entonces la derivada en (8) es una derivada por la derecha, y se tiene $g'_+(a) = F'_+(a)$, de donde se concluye (10). ■

Ahora se puede obtener el valor exacto de una integral definida aplicando el segundo teorema fundamental del Cálculo. En el cálculo se denota

$$[g(b) - g(a)] \quad \text{por} \quad g(x)\Big]_a^b$$

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Evalúe

$$\int_1^2 x^4\,dx$$

Como una antiderivada de x^4 es $x^5/5$, por el segundo teorema fundamental del Cálculo se tiene

$$\int_1^2 x^4\,dx = \left.\frac{x^5}{5}\right]_1^2$$
$$= \tfrac{32}{5} - \tfrac{1}{5}$$
$$= \tfrac{31}{5}$$ ◀

Debido a la relación entre integrales definidas y derivadas, se utiliza el símbolo integral $\int$ en la notación $\int f(x)\,dx$ para una antiderivada. Haga caso omiso de la terminología de antiderivadas y de antiderivación y comience a llamar a $\int f(x)\,dx$ **integral indefinida.** El proceso de evaluación de una integral indefinida o una integral definida se denomina **integración.**

La diferencia entre una integral indefinida y una integral definida debe enfatizarse. La integral indefinida $\int f(x)\,dx$ representa a todas las funciones cuya derivada es $f(x)$. Sin embargo, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un número cuyo valor depende de la función f y de los números a y b, y está definido como el límite de una suma de Riemann. La definición de la integral definida no hace referencia a la diferenciación.

La integral indefinida implica una constante arbitraria; por ejemplo

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Esta constante arbitraria C recibe el nombre de **constante de integración.** En la aplicación del segundo teorema fundamental para evaluar una integral definida, no fue necesario incluir la constante arbitraria C en la expresión para $g(x)$ porque el teorema permite elegir *cualquier* antiderivada, incluyendo aquella en la que $C = 0$.

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** De la propiedad aditiva de las integrales definidas, establecida en el teorema 4.5.11 y el segundo teorema fundamental, se tiene

$$\int_{1/2}^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\,dx$$
$$= \int_{1/2}^4 x^3\,dx - 6\int_{1/2}^4 x^2\,dx + 9\int_{1/2}^4 x\,dx + \int_{1/2}^4 dx$$
$$= \left.\frac{x^4}{4} - 6\cdot\frac{x^3}{3} + 9\cdot\frac{x^2}{2} + x\right]_{1/2}^4$$
$$= (64 - 128 + 72 + 4) - (\tfrac{1}{64} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{9}{8} + \tfrac{1}{2})$$
$$= \tfrac{679}{64}$$

En el ejemplo 1 de la sección 4.6, se mostró que el valor de esta integral definida está en el intervalo [3.5, 17.5], lo que está de acuerdo con el resultado obtenido en el ejemplo ya que $\frac{679}{64} \approx 10.61$. ◀

Los ejemplos siguientes muestran la aplicación del segundo teorema fundamental. Por supuesto, las respuestas pueden apoyarse empleando NINT en la graficadora.

▶ EJEMPLO 2 Evalúe

$$\int_{-1}^{1} (x^{4/3} + 4x^{1/3})\,dx$$

Solución

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (x^{4/3} + 4x^{1/3})\,dx &= \tfrac{3}{7}x^{7/3} + 4 \cdot \tfrac{3}{4}x^{4/3}\Big]_{-1}^{1} \\ &= \tfrac{3}{7} + 3 - (-\tfrac{3}{7} + 3) \\ &= \tfrac{6}{7}\end{aligned}$$ ◀

▶ EJEMPLO 3 Evalúe

$$\int_{0}^{2} 2x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx$$

Solución

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2} 2x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx &= \frac{2}{3}\int_{0}^{2} \sqrt{x^3 + 1}\,(3x^2\,dx) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{(x^3 + 1)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_{0}^{2} \\ &= \tfrac{4}{9}(8 + 1)^{3/2} - \tfrac{4}{9}(0 + 1)^{3/2} \\ &= \tfrac{4}{9}(27 - 1) \\ &= \tfrac{104}{9}\end{aligned}$$ ◀

▶ EJEMPLO 4 Evalúe

$$\int_{0}^{3} x\sqrt{1 + x}\,dx$$

Solución Para evaluar la integral indefinida $\int x\sqrt{1 + x}\,dx$ se considera

$$u = \sqrt{1 + x} \qquad u^2 = 1 + x \qquad x = u^2 - 1 \qquad dx = 2u\,du$$

Al sustituir se tiene

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x}\,dx &= \int (u^2-1)u(2u\,du)\\ &= 2\int (u^4-u^2)\,du\\ &= \tfrac{2}{3}u^5 - \tfrac{2}{3}u^3 + C\\ &= \tfrac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C\end{aligned}$$

Por tanto, la integral definida es

$$\begin{aligned}\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx &= \tfrac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big]_0^3\\ &= \tfrac{2}{5}(4)^{5/2} - \tfrac{2}{3}(4)^{3/2} - \tfrac{2}{5}(1)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(1)^{3/2}\\ &= \tfrac{64}{5} - \tfrac{16}{3} - \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{3}\\ &= \tfrac{116}{5}\end{aligned}$$

◀

Otro método para evaluar la integral definida del ejemplo 4 consiste en considerar la fórmula que se deduce del segundo teorema fundamental y de la regla de la cadena para la antiderivación (4.2.1). De estos teoremas, si F es una antiderivada de f,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big]_a^b$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a))$$

Así

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \qquad \textbf{(11)}$$

Con el objeto de aplicar (11), cambie las variables de la integral dada considerando $u = g(x)$. Entonces $du = g'(x)\,dx$. Después, cambie los límites a y b, relativos a x, por los límites relativos a u, los cuales son $g(a)$ y $g(b)$.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** Para evaluar la integral del ejemplo 4, sea $u = \sqrt{1+x}$, $x = u^2 - 1$ y $dx = 2u\,du$. Además, cuando $x = 0$, $u = 1$, y cuando $x = 3$, $u = 2$. De modo que, de (11) se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx &= 2\int_1^2 (u^4-u^2)\,du\\ &= \tfrac{2}{5}u^5 - \tfrac{2}{3}u^3\Big]_1^2\\ &= \tfrac{64}{5} - \tfrac{16}{3} - \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{3}\\ &= \tfrac{116}{15}\end{aligned}$$

◀

EJEMPLO 5 Evalúe

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx$$

Solución Sean

$$u = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad du = \cos x \, dx$$

Cuando $x = 0$, $u = 0$; cuando $x = \frac{1}{2}\pi$, $u = 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx &= \int_0^1 u^3 \, du \\ &= \frac{u^4}{4}\bigg]_0^1 \\ &= \tfrac{1}{4}\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Evalúe

$$\int_{-3}^{4} |x + 2| \, dx$$

Solución

$$|x + 2| = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x \leq -2 \\ x + 2 & \text{si } -2 \leq x \end{cases}$$

Del teorema 4.5.13,

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{4} |x + 2| \, dx &= \int_{-3}^{-2} (-x - 2) \, dx + \int_{-2}^{4} (x + 2) \, dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{4} \\ &= [(-2 + 4) - (-\tfrac{9}{2} + 6)] + [(8 + 8) - (2 - 4)] \\ &= \tfrac{1}{2} + 18 \\ &= \tfrac{37}{2}\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 En un circuito eléctrico, E volts es la fuerza electromotriz a los t segundos y

$$E = 2 \operatorname{sen} \tfrac{2}{3}\pi t$$

Determine la fuerza electromotriz promedio de 0 s a 4 s.

Solución Se calcula el valor promedio de E en $[0, 4]$. Si V.P. es este valor promedio, de la definición 4.6.4 se tiene

$$\begin{aligned}\text{V.P.} &= \frac{1}{4 - 0}\int_0^4 2 \operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi t \, dt \\ &= \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{2\pi}\int_0^4 2 \operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi t \left(\frac{2}{3}\pi \, dt\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4\pi}\left[-\cos\frac{2}{3}\pi t\right]_0^4$$

$$= \frac{3}{4\pi}\left(-\cos\frac{8}{3}\pi + \cos 0\right)$$

$$= \frac{3}{4\pi}\left(\frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= 0.358$$

Conclusión: La fuerza electromotriz promedio de 0 s a 4 s es 0.358 volts.

EJERCICIOS 4.7

En los ejercicios 1 a 34, evalúe la integral definida. En los ejercicios 1 a 6 y 29 a 34, apoye la respuesta empleando NINT *en la graficadora.*

1. $\int_0^3 (3x^2 - 4x + 1)\,dx$

2. $\int_0^4 (x^3 - x^2 + 1)\,dx$

3. $\int_3^6 (x^2 - 2x)\,dx$

4. $\int_{-1}^3 (3x^2 + 5x - 1)\,dx$

5. $\int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x^2}\,dx$

6. $\int_{-3}^5 (y^3 - 4y)\,dy$

7. $\int_0^1 \frac{z}{(z^2 + 1)^3}\,dz$

8. $\int_1^4 \sqrt{x}\,(2 + x)\,dx$

9. $\int_1^{10} \sqrt{5x - 1}\,dx$

10. $\int_0^{\sqrt{5}} t\sqrt{t^2 + 1}\,dt$

11. $\int_{-2}^0 3w\sqrt{4 - w^2}\,dw$

12. $\int_{-1}^3 \frac{1}{(y + 2)^3}\,dy$

13. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x\,dx$

14. $\int_0^{\pi} \cos\frac{1}{2}x\,dx$

15. $\int_1^2 t^2\sqrt{t^3 + 1}\,dt$

16. $\int_1^3 \frac{x}{(3x^2 - 1)^3}\,dx$

17. $\int_0^1 \frac{y^2 + 2y}{\sqrt[3]{y^3 + 3y^2 + 4}}\,dy$

18. $\int_2^4 \frac{w^4 - w}{w^3}\,dw$

19. $\int_0^{15} \frac{w}{(1 + w)^{3/4}}\,dw$

20. $\int_4^5 x^2\sqrt{x - 4}\,dx$

21. $\int_{-2}^5 |x - 3|\,dx$

22. $\int_{-4}^4 |x - 2|\,dx$

23. $\int_{-1}^1 \sqrt{|x| - x}\,dx$

24. $\int_{-3}^3 \sqrt{3 + |x|}\,dx$

25. $\int_0^3 (x + 2)\sqrt{x + 1}\,dx$

26. $\int_{-2}^1 (x + 1)\sqrt{x + 3}\,dx$

27. $\int_0^1 \frac{x^3 + 1}{x + 1}\,dx$

28. $\int_1^4 \frac{x^5 - x}{3x^3}\,dx$

Sugerencia: divida el numerador entre el denominador.

29. $\int_1^{64} \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt[3]{t}\right)dt$

30. $\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1 + x\sqrt{x}}\,dx$

31. $\int_0^1 \operatorname{sen} \pi x \cos \pi x\,dx$

32. $\int_0^{\pi/6} (\operatorname{sen} 2x + \cos 3x)\,dx$

33. $\int_{\pi/8}^{\pi/4} 3\csc^2 2x\,dx$

34. $\int_0^{1/2} \sec^2 \frac{1}{2}\pi t \tan \frac{1}{2}\pi t\,dt$

En los ejercicios 35 a 44, obtenga la derivada.

35. $\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{4 + t^6}\,dt$

36. $\frac{d}{dx}\int_x^3 \sqrt{1 + t^4}\,dt$

37. $\frac{d}{dx}\int_x^3 \sqrt{\operatorname{sen} t}\,dt$

38. $\frac{d}{dx}\int_2^x \frac{1}{t^4 + 4}\,dt$

39. $\frac{d}{dx}\int_{-x}^x \frac{1}{3 + t^2}\,dt$

40. $\frac{d}{dx}\int_{-x}^x \cos(t^2 + 1)\,dt$

41. $\frac{d}{dx}\int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2 + 1}\,dt$

42. $\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}\,dt$

43. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_2^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ **44.** $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_3^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1-t^2}\,dt$

En los ejercicios 45 a 48, calcule el valor promedio de la función f en el intervalo [a, b]. En los ejercicios 45 y 46, determine el valor de x en el que el valor promedio ocurre y describa la interpretación geométrica de los resultados.

45. $f(x) = 9 - x^2$; $[a, b] = [0, 3]$

46. $f(x) = 8x - x^2$; $[a, b] = [0, 4]$

47. $f(x) = 3x\sqrt{x^2 - 16}$; $[a, b] = [4, 5]$

48. $f(x) = x^2\sqrt{x - 3}$; $[a, b] = [7, 12]$

49. Para el circuito eléctrico del ejemplo 7, determine la raíz cuadrada del valor promedio de E^2 de $t = 0$ a $t = 4$. *Sugerencia:* utilice la identidad $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

50. Si $f(x) = \sec^2 x$, determine el valor promedio de f en el intervalo $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$.

51. Se deja caer una pelota, y después de t segundos su velocidad es v pies por segundo. Sin considerar la resistencia del aire, demuestre que la velocidad promedio durante los primeros $\frac{1}{2}T$ segundos es un tercio de la velocidad promedio durante los siguientes $\frac{1}{2}T$ segundos.

52. Se lanza una piedra hacia abajo con una velocidad inicial de v_0 pies por segundo. No considere la resistencia del aire. (**a**) Demuestre que si v pies por segundo es la velocidad de la piedra después de que cae s pies, entonces $v = \sqrt{v_0{}^2 + 2gs}$. (**b**) Determine la velocidad promedio durante los primeros 100 pie de caída si la velocidad inicial es de 60 pie/s. (Tome $g = 32$ pie/s^2 y el sentido positivo hacia abajo.)

53. Si una inversión produce interés a una tasa de $100r(t)\%$ *compuesto continuamente* durante un periodo de T años, entonces la tasa de interés promedio $100R(T)\%$ durante T años está definida por

$$R(T) = \frac{1}{T}\int_0^T r(t)\,dt$$

Demuestre que

$$R'(T) = \frac{r(T) - R(T)}{T}$$

Nota: El interés *compuesto continuamente* será definido precisamente en la sección 5.6.

54. Sea

$$I = \int_0^k \frac{f(x)}{f(x) + f(k - x)}\,dx \qquad \textbf{(12)}$$

donde f es continua en $[0, k]$ y $f(x) + f(k - x) \neq 0$ si x está en $[0, k]$. (**a**) Demuestre que $I = \frac{1}{2}k$. *Sugerencia:* cambie la variable en (12) considerando $u = k - x$ y muestre que

$$I = \int_0^k \frac{f(k - u)}{f(u) + f(k - u)}\,du \qquad \textbf{(13)}$$

Cambie la variable en (13) a x y muestre qu $2I = k$. (**b**) Utilice el resultado del inciso (a) para demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx = \frac{1}{4}\pi$$

55. Sea

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1 + t^2}\,dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1 + t^2}\,dt$$

donde $x \neq 0$. Demuestre que F es constante en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$. *Sugerencia:* muestre que $F'(x) = 0$ para toda $x \neq 0$.

56. Encuentre una función f tal que para cualquier número real x

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{\cos x}{1 + x^2} - 1$$

Sugerencia: tome la derivada en los miembros de la ecuación.

57. Si m y n son números enteros positivos, demuestre que

$$\int_0^1 x^n(1 - x)^m\,dx = \int_0^1 x^m(1 - x)^n\,dx$$

Esta integral surge en aplicaciones de Probabilidad, Análisis combinatorio y Teoría cinética de la materia.

58. Sea f una función cuya derivada f' es continua en $[a, b]$. Calcule el valor promedio de la pendiente de la recta tangente de la gráfica de f en $[a, b]$, y dé una interpretación geométrica del resultado.

59. Determine $\displaystyle\int_4^{16}\left[D_x \int_5^x (2\sqrt{t} - 1)\,dt\right]dx$.

60. (**a**) Sea $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Trace las gráficas de f y NDER(NINT($f(t)$, 0, x), x) en el mismo rectángulo de inspección y muestre que las gráficas son las mismas. (**b**) Repita el inciso (a) considerando ahora $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$. (**c**) ¿Qué teorema o teoremas apoyan los incisos (a) y (b)? Explique su respuesta.

61. Explique por qué cada función continua debe tener una antiderivada. ¿Qué garantiza este hecho?

4.8 ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA

En la sección 4.4 se definió el área de una región plana como el límite de una suma de Riemann, y en la sección 4.5 se dijo que dicho límite es una integral. Ahora que ha aprendido algunas técnicas para calcular integrales definidas, se considerarán más problemas que implican áreas de regiones planas.

En los ejemplos que se presentan a continuación, se empieza expresando el área requerida como el límite de una suma de Riemann, a fin de reafirmar el procedimiento utilizado en la expresión de dichas sumas para aplicaciones posteriores en las secciones 4.9 y 4.10 y el capítulo 6.

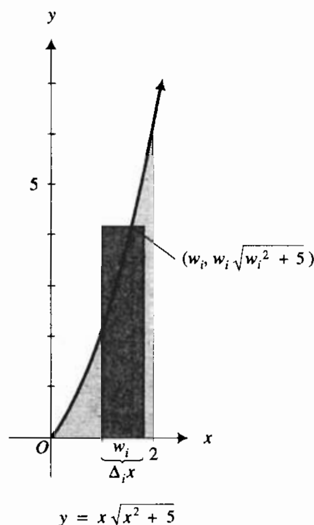


FIGURA 1

EJEMPLO 1 Calcule el área de la región del primer cuadrante limitada por la curva

$$y = x\sqrt{x^2+5}$$

el eje x y la recta $x = 2$.

Solución La figura 1 muestra la región junto con uno de los elementos rectangulares de área.

Considere una partición del intervalo [0, 2]. El ancho del i-ésimo rectángulo es $\Delta_i x$ unidades, y la altura es $w_i\sqrt{w_i^2+5}$ unidades, donde w_i es cualquier número del i-ésimo subintervalo. Por tanto, el área del elemento rectangular es $w_i\sqrt{w_i^2+5}\,\Delta_i x$. La suma de las medidas de las áreas de los n rectángulos como éste es

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\sqrt{w_i^2+5}\,\Delta_i x$$

la cual es una suma de Riemann. El límite de esta suma cuando $\|\Delta\|$ se aproxima a 0 proporciona la medida del área deseada. El límite de la suma Riemann es una integral definida que se evalúa mediante el segundo teorema fundamental del Cálculo. Sean A unidades cuadradas el área de la región, entonces

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} w_i\sqrt{w_i^2+5}\,\Delta_i x \\
&= \int_0^2 x\sqrt{x^2+5}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{x^2+5}\,(2x\,dx) \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}(x^2+5)^{3/2}\Big]_0^2 \\
&= \tfrac{1}{3}[(9)^{3/2} - (5)^{3/2}] \\
&= \tfrac{1}{3}(27 - 5\sqrt{5}) \\
&\approx 5.27
\end{aligned}$$

<u>**Conclusión:**</u> El área de la región es $\frac{1}{3}(27 - 5\sqrt{5})$ unidades cuadradas, o aproximadamente 5.27 unidades cuadradas. ◀

Hasta este momento se ha considerado el área de una región para la cual los valores de función en $[a, b]$ son no negativos. Suponga ahora que $f(x) < 0$ para toda x en $[a, b]$. Entonces cada $f(w_i)$ es un número negativo; por lo que se define el número de unidades cuadradas del área de la región limitada por $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, como

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [-f(w_i)] \, \Delta_i x$$

lo cual es igual a

$$-\int_a^b f(x)\, dx$$

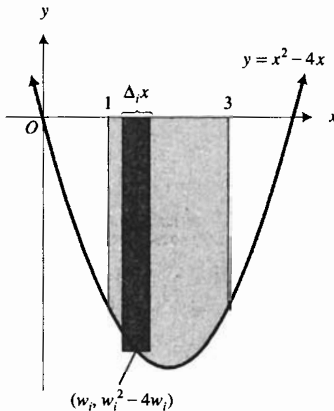


FIGURA 2

EJEMPLO 2 Calcule el área de la región limitada por la curva

$$y = x^2 - 4x$$

el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución En la figura 2 se presenta la región y un elemento rectangular de área.

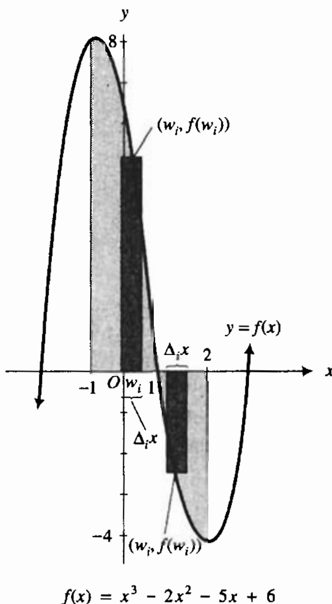
Se toma una partición del intervalo $[1, 3]$; el ancho del i-ésimo rectángulo es $\Delta_i x$. Como $x^2 - 4x < 0$ en $[1, 3]$, la altura del i-ésimo rectángulo es $-(w_i^2 - 4w_i) = 4w_i - w_i^2$. En consecuencia, la suma de las medidas de las áreas de los n rectángulos está dada por

$$\sum_{i=1}^{n} (4w_i - w_i^2) \, \Delta_i x$$

La medida del área deseada es proporcionada por el límite de esta suma cuando $\|\Delta\|$ se aproxima a 0; de modo que si A unidades cuadradas es el área de la región, entonces

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (4w_i - w_i^2) \, \Delta_i x \\ &= \int_1^3 (4x - x^2)\, dx \\ &= 2x^2 - \tfrac{1}{3} x^3 \Big]_1^3 \\ &= \tfrac{22}{3} \end{aligned}$$

Conclusión: El área de la región es $\frac{22}{3}$ unidades cuadradas. ◀



$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

FIGURA 3

EJEMPLO 3 Determine el área de la región limitada por la curva

$$y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

el eje x y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

Solución La región se muestra en la figura 3. Sea

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Como $f(x) \geq 0$ cuando x está en el intervalo cerrado $[-1, 1]$ y $f(x) \leq 0$ cuando x está en el intervalo cerrado $[1, 2]$, se separa la región en dos partes. Sea A_1 el número de unidades cuadradas del área de la región cuando x está en $[-1, 1]$, y sea A_2 el número de unidades cuadradas del área de la región cuando x está en $[1, 2]$. Entonces

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x \\ &= \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\,dx \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A_2 &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [-f(w_i)]\,\Delta_i x \\ &= \int_{1}^{2} -(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\,dx \end{aligned}$$

Si A unidades cuadradas es el área de la región completa, entonces

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\,dx - \int_{1}^{2} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\,dx \\ &= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 6x\right]_{-1}^{1} - \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 6x\right]_{1}^{2} \\ &= \left[(\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{2} + 6) - (\tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{2} - 6)\right] \\ &\qquad - [(4 - \tfrac{16}{3} - 10 + 12) - (\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{2} + 6)] \\ &= \tfrac{32}{3} - (-\tfrac{29}{12}) \\ &= \tfrac{157}{12} \end{aligned}$$

Conclusión: El área de la región es $\frac{157}{12}$ unidades cuadradas. ◀

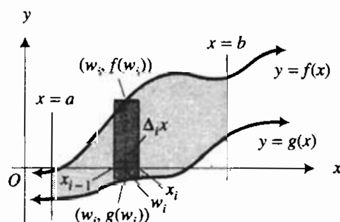


FIGURA 4

Ahora considere dos funciones f y g continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ tales que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, b]$. Se desea calcular el área de la región limitada por las dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las dos rectas $x = a$ y $x = b$. Esta situación se ilustra en la figura 4.

Tome una partición del intervalo $[a, b]$, de modo que el i-ésimo rectángulo tenga un ancho de $\Delta_i x$. En cada subintervalo elija un número w_i. Considere el rectángulo que tiene altura $[f(w_i) - g(w_i)]$ unidades y ancho $\Delta_i x$ unidades. En la figura 4 se muestra este rectángulo. Se tienen n rectángulos como éste, uno asociado con cada subintervalo. La suma de las medidas de las áreas de estos n rectángulos está determinada por la suma de Riemann siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} [f(w_i) - g(w_i)]\,\Delta_i x$$

Esta suma de Riemann es una aproximación a lo que intuitivamente se piensa como el número que representa la "medida del área" de la región.

Entre más pequeño sea el valor de $\|\Delta\|$, mejor será esta aproximación. Si A unidades cuadradas es el área de la región, se define

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(w_i) - g(w_i)]\, \Delta_i x \qquad \textbf{(1)}$$

Como f y g son continuas en $[a, b]$, también lo es $f - g$; por tanto, el límite en (1) existe y es igual a la integral definida

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

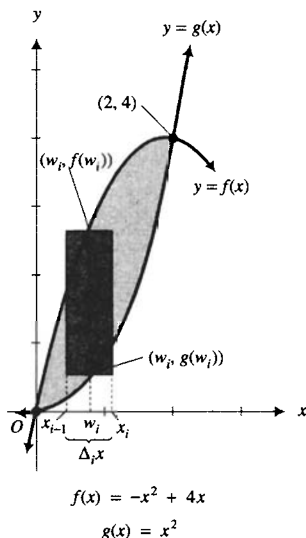


FIGURA 5

EJEMPLO 4 Calcule el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = -x^2 + 4x$.

Solución Para determinar los puntos de intersección de las dos curvas se resuelven las ecuaciones simultáneamente y se obtienen los puntos (0, 0) y (2, 4). La figura 5 muestra la región.

Sean

$$f(x) = -x^2 + 4x \quad \text{y} \quad g(x) = x^2$$

Observe que en el intervalo [0, 2] la curva $y = f(x)$ está por arriba de la curva $y = g(x)$. Se dibuja un elemento rectangular vertical de área, cuya altura es de $[f(w_i) - g(w_i)]$ unidades y cuyo ancho es de $\Delta_i x$ unidades. La medida del área de este rectángulo está dada por $[f(w_i) - g(w_i)]\,\Delta_i x$. La suma de las medidas de las áreas de n rectángulos como éste está determinada por la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [f(w_i) - g(w_i)]\, \Delta_i x$$

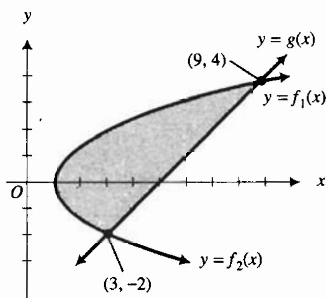
Si A unidades cuadradas es el área de la región, entonces

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(w_i) - g(w_i)]\, \Delta_i x$$

y el límite de la suma de Riemann es una integral definida. En consecuencia

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 [f(x) - g(x)]\, dx \\ &= \int_0^2 [(-x^2 + 4x) - x^2]\, dx \\ &= \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\, dx \\ &= -\tfrac{2}{3}x^3 + 2x^2 \Big]_0^2 \\ &= -\tfrac{16}{3} + 8 - 0 \\ &= \tfrac{8}{3} \end{aligned}$$

Conclusión: El área de la región es $\frac{8}{3}$ unidades cuadradas. ◀



$f_1(x) = \sqrt{2x-2}$

$f_2(x) = -\sqrt{2x-2}$

$g(x) = x - 5$

FIGURA 6

EJEMPLO 5 Calcule el área de la región limitada por la parábola $y^2 = 2x - 2$ y la recta $y = x - 5$.

Solución Las dos curvas se intersectan en los puntos (3, −2) y (9, 4). La región se muestra en la figura 6.

La ecuación $y^2 = 2x - 2$ es equivalente a las dos ecuaciones

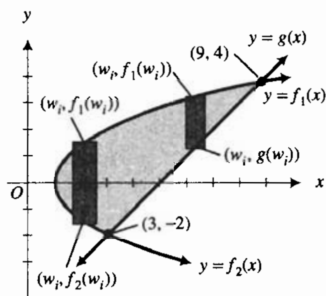
$$y = \sqrt{2x-2} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{2x-2}$$

de modo que la primera ecuación proporciona la parte superior de la parábola mientras que la segunda ecuación da la parte inferior. Si

$$f_1(x) = \sqrt{2x-2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = -\sqrt{2x-2}$$

la ecuación de la parte superior de la parábola es $y = f_1(x)$, y la ecuación de la parte inferior es $y = f_2(x)$. Si se considera que $g(x) = x - 5$, entonces la ecuación de la recta es $y = g(x)$.

En la figura 7 se aprecian dos elementos rectangulares verticales de área. Cada rectángulo tiene su base superior sobre la curva $y = f_1(x)$. Como la base inferior del primer rectángulo está sobre la curva $y = f_2(x)$, su altura es $[f_1(w_i) - f_2(w_i)]$ unidades. Debido a que la base inferior del segundo rectángulo está sobre la curva $y = g(x)$, su altura es $[f_1(w_i) - g(w_i)]$ unidades. Si se desea resolver este problema utilizando elementos rectangulares verticales de área, se debe dividir la región en dos regiones separadas, por ejemplo, R_1 y R_2, donde R_1 es la región limitada por las curvas $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ y la recta $x = 3$, y R_2 es la región limitada por las curvas $y = f_1(x)$ y $y = g(x)$ y la recta $x = 3$ (consulte la figura 8).



$f_1(x) = \sqrt{2x-2}$

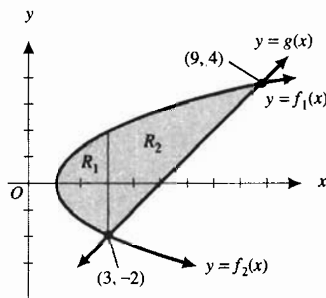
$f_2(x) = -\sqrt{2x-2}$

$g(x) = x - 5$

FIGURA 7

Si A_1 unidades cuadradas es el área de la región R_1, entonces

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f_1(w_i) - f_2(w_i)]\,\Delta_i x \\ &= \int_1^3 [f_1(x) - f_2(x)]\,dx \\ &= \int_1^3 [\sqrt{2x-2} + \sqrt{2x-2}]\,dx \\ &= 2\int_1^3 \sqrt{2x-2}\,dx \\ &= \tfrac{2}{3}(2x-2)^{3/2}\Big]_1^3 \\ &= \tfrac{16}{3} \end{aligned}$$



$f_1(x) = \sqrt{2x-2}$

$f_2(x) = -\sqrt{2x-2}$

$g(x) = x - 5$

FIGURA 8

Si A_2 unidades cuadradas es el área de la región R_2,

$$\begin{aligned} A_2 &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f_1(w_i) - g(w_i)]\,\Delta_i x \\ &= \int_3^9 [f_1(x) - g(x)]\,dx \\ &= \int_3^9 [\sqrt{2x-2} - (x-5)]\,dx \end{aligned}$$

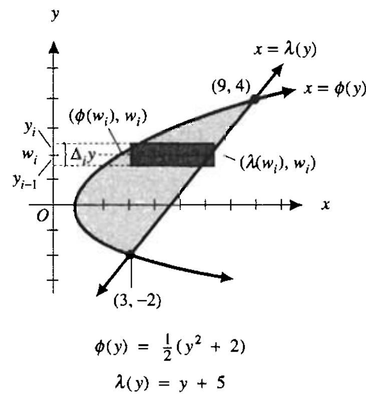
$$= \tfrac{1}{3}(2x - 2)^{3/2} - \tfrac{1}{2}x^2 + 5x\Big]_3^9$$

$$= [\tfrac{64}{3} - \tfrac{81}{2} + 45] - [\tfrac{8}{3} - \tfrac{9}{2} + 15]$$

$$= \tfrac{38}{3}$$

Entonces $A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{38}{3}$.

<u>**Conclusión:**</u> El área de la región completa es de 18 unidades cuadradas. ◀



$\phi(y) = \frac{1}{2}(y^2 + 2)$

$\lambda(y) = y + 5$

FIGURA 9

▶ *EJEMPLO 6*

Calcule el área de la región del ejemplo 5 considerando elementos rectangulares horizontales de área.

Solución La figura 9 muestra la región con un elemento rectangular horizontal de área.

Si las ecuaciones de la parábola y de la recta se resuelven para x se obtiene

$$x = \tfrac{1}{2}(y^2 + 2) \qquad x = y + 5$$

Si se considera $\phi(y) = \frac{1}{2}(y^2 + 2)$ y $\lambda(y) = y + 5$, la ecuación de la parábola puede escribirse como $x = \phi(y)$ y la ecuación de la recta como $x = \lambda(y)$. Tenga en cuenta el intervalo cerrado $[-2, 4]$ sobre el eje y, y tome una partición de este intervalo. El i-ésimo subintervalo tendrá una longitud de $\Delta_i y$. En el i-ésimo subintervalo $[y_{i-1}, y_i]$ se elige un número w_i. Entonces la longitud del i-ésimo elemento rectangular es de $[\lambda(w_i) - \phi(w_i)]$ unidades y su ancho es de $\Delta_i y$ unidades. La medida del área de la región puede aproximarse mediante la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [\lambda(w_i) - \phi(w_i)]\, \Delta_i y$$

Si A unidades cuadradas es el área de la región, entonces

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\lambda(w_i) - \phi(w_i)]\, \Delta_i y$$

Como λ y ϕ son continuas en $[-2, 4]$, también lo es $\lambda - \phi$, y el límite de la suma de Riemann es una integral definida:

$$A = \int_{-2}^{4} [\lambda(y) - \phi(y)]\, dy$$

$$= \int_{-2}^{4} [(y + 5) - \tfrac{1}{2}(y^2 + 2)]\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} [-y^2 + 2y + 8)\, dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big[-\tfrac{1}{3}y^3 + y^2 + 8y\Big]_{-2}^{4}$$

$$= \tfrac{1}{2}[(-\tfrac{64}{3} + 16 + 32) - (\tfrac{8}{3} + 4 - 16)]$$

$$= 18$$

Esta respuesta es acorde con la solución del ejemplo 5. ◀

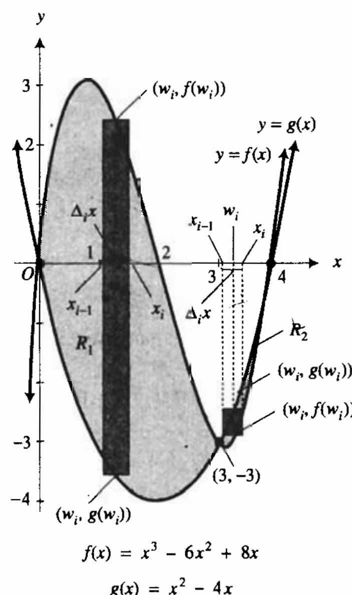


FIGURA 10

Al comparar las soluciones de los ejemplos 5 y 6 se observa que en el primer caso se tienen dos integrales definidas para evaluar, mientras que en el segundo caso se tiene sólo una. En general, si es posible, los elementos de área deben construirse de modo que se obtenga sólo una integral definida. El ejemplo siguiente presenta una situación donde son necesarias dos integrales definidas.

EJEMPLO 7 Calcule el área de la región limitada por las dos curvas $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y $y = x^2 - 4x$.

Solución Los puntos de intersección de las dos curvas son (0, 0), (3, −3) y (4, 0). En la figura 10 se muestra la región.

Sean

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 4x$$

En el intervalo [0, 3] la curva $y = f(x)$ está por arriba de la curva $y = g(x)$, y en el intervalo [3, 4] la curva $y = g(x)$ se encuentra por arriba de la curva $y = f(x)$. Así, la región debe dividirse en dos regiones separadas R_1 y R_2, donde R_1 es la región acotada por las dos curvas en el intervalo [0, 3], y R_2 es la región limitada por las dos curvas en el intervalo [3, 4]. Si A_1 es el área de R_1 y A_2 es el área de R_2, entonces

$$A_1 = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(w_i) - g(w_i)]\, \Delta_i x$$

$$A_2 = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [g(w_i) - f(w_i)]\, \Delta_i x$$

así

$$A_1 + A_2 = \int_0^3 [(x^3 - 6x^2 + 8x) - (x^2 - 4x)]\, dx + \int_3^4 [(x^2 - 4x) - (x^3 - 6x^2 + 8x)]\, dx$$

$$= \int_0^3 (x^3 - 7x^2 + 12x)\, dx + \int_3^4 (-x^3 + 7x^2 - 12x)\, dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{7}{3}x^3 + 6x^2\right]_0^3 + \left[-\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{7}{3}x^3 - 6x^2\right]_3^4$$

$$= \tfrac{45}{4} + \tfrac{7}{12}$$

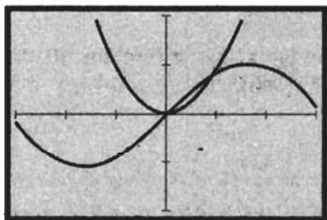
$$= \tfrac{71}{6}$$

<u>**Conclusión:**</u> El área requerida es $\frac{71}{6}$ unidades cuadradas. ◀

En los ejemplo 4 a 7, se calcularon las coordenadas de los puntos de intersección al resolver simultáneamente las ecuaciones de las curvas. En el ejemplo siguiente no pueden determinarse los puntos de intersección fácilmente.

EJEMPLO 8 Calcule el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = \operatorname{sen} x$.

Solución Refiérase a la figura 11, la cual muestra las dos gráficas trazadas en el rectángulo de inspección de [−3, 3] por [−2, 2] y que se intersectan en el origen y en otro punto del primer cuadrante. Se denota con $[a, b]$ el intervalo en el que se calculará el área, además se sabe que $a = 0$. No se puede determinar b algebraicamente, sin embargo, puede obtenerse un valor aproximado de b empleando los procesos de intersección (*intersect*) o rastreo (*trace*) y aumento (*zoom in*) de la graficadora. Con cuatro dígitos significativos se obtiene $b = 0.8767$. Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = x^2$ y A unidades cuadradas es el área requerida de la región en el intervalo $[0, 0.8767]$, entonces



[−3, 3] por [−2, 2]

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$g(x) = x^2$

FIGURA 11

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(w_i) - g(w_i)]\, \Delta_i x$$

$$= \int_0^{0.8767} (\operatorname{sen} x - x^2)\, dx$$

Esta integral se calcula mediante NINT en la graficadora obteniéndose con cuatro dígitos significativos

$$A = 0.1357$$

Conclusión: Con cuatro dígitos significativos, el área es 0.1357 unidades cuadradas. ◀

EJERCICIOS 4.8

En los ejercicios 1 a 38, calcule el área de la región acotada por las curvas. En cada ejercicio haga lo siguiente: (a) dibuje una figura que muestre la región y un elemento rectangular de área; (b) exprese el área de la región como una suma de Riemann; (c) calcule el límite del inciso (b) mediante el segundo teorema fundamental del Cálculo.

1. $y = 4 - x^2$; eje x
2. $y = x^2 - 2x + 3$; eje x; $x = -2$; $x = 1$
3. $y = 4x - x^2$; eje x; $x = 1$; $x = 3$
4. $y = 6 - x - x^2$; eje x
5. $y = \sqrt{x + 1}$; eje x; eje y; $x = 8$
6. $y = \dfrac{1}{x^2} - x$; eje x; $x = 2$; $x = 3$
7. $y = x^2 + x - 12$; eje x
8. $y = x^2 - 6x + 5$; eje x
9. $y = \operatorname{sen} x$; eje x; $x = \frac{1}{3}\pi$; $x = \frac{2}{3}\pi$
10. $y = \cos x$; eje x; eje y; $x = \frac{1}{6}\pi$
11. $y = \sec^2 x$; eje x; eje y; $x = \frac{1}{4}\pi$
12. $y = \csc^2 x$; eje x; $x = \frac{1}{4}\pi$; $x = \frac{1}{3}\pi$
13. $x^2 = -y$; $y = -4$
14. $y^2 = -x$; $x = -2$; $x = -4$
15. $x^2 + y + 4 = 0$; $y = -8$. Considere los elementos de área perpendiculares al eje y.
16. La misma región que en el ejercicio 15. Considere los elementos de área paralelos al eje y.
17. $x^2 - y + 1 = 0$; $x - y + 1 = 0$. Considere los elementos de área perpendiculares al eje x.
18. La misma región que en el ejercicio 17. Considere los elementos de área paralelos al eje x.
19. $x^3 = 2y^2$; $x = 0$; $y = -2$
20. $y^3 = 4x$; $x = 0$; $x = -2$
21. $y = 2 - x^2$; $y = -x$
22. $y = x^2$; $y = x^4$
23. $y^2 = x - 1$; $x = 3$
24. $y = x^2$; $x^2 = 18 - y$
25. $y = \sqrt{x}$; $y = x^3$
26. $x = 4 - y^2$; $x = 4 - 4y$
27. $y^3 = x^2$; $x - 3y + 4 = 0$
28. $xy^2 = y^2 - 1$; $x = 1$; $y = 1$; $y = 4$
29. $x = y^2 - 2$; $x = 6 - y^2$
30. $x = y^2 - y$; $x = y - y^2$
31. $y = 2x^3 - 3x^2 - 9x$; $y = x^3 - 2x^2 - 3x$
32. $3y = x^3 - 2x^2 - 15x$; $y = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$
33. $y = x^3 + 3x^2 + 2x$; $y = 2x^2 + 4x$
34. $y = |x - 1| + 3$; $y = 0$; $x = -2$; $x = 4$
35. $y = \cos x - \operatorname{sen} x$; $x = 0$; $y = 0$
36. $y = \operatorname{sen} x$; $y = -\operatorname{sen} x$; $x = -\frac{1}{2}\pi$; $x = \frac{1}{2}\pi$
37. $y = |x|$; $y = x^2 - 1$; $x = -1$; $x = 1$
38. $y = |x + 1| + |x|$; $y = 0$; $x = -2$; $x = 3$

En los ejercicios 39 a 46, aproxime con cuatro dígitos significativos el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas realizando lo siguiente: (a) trace las gráficas en un rectángulo de inspección conveniente y determine los puntos de intersección empleando los procesos de intersección (intersect) o rastreo (trace) y aumento (zoom in) de la graficadora; (b) exprese el área de la región como el límite de una suma de Riemann; (c) aproxime el límite del inciso (b) utilizando NINT *en la graficadora.*

39. $y = x^4 - 2, y = x^2$

40. $y = x^4;\ y = 4 - x^2$

41. $y = x^2 - 1;\ y = \text{sen}^2 x$

42. $y = x^2; y = \cos x$

43. $y = x^3; y = 4 - x^2$; el eje y

44. $y = x^3; y = 4 - x^2$; el eje x

45. $y = x^3; y = \tan^2 x - 3; 0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$

46. $y = 2 - x^4; y = \sec^2 x$

47. Determine mediante integración el área de la región acotada por el triángulo cuyos vértices son (5, 1), (1, 3) y (−1, −2).

48. Determine mediante integración el área de la región limitada por el triángulo cuyos vértices son (3, 4), (2, 0) y (0, 1).

En los ejercicios 49 a 57, determine el área exacta de la región descrita.

49. La región acotada por la recta $x = 4$, y la curva $x^3 - x^2 + 2xy - y^2 = 0$. *Sugerencia:* resuelva la ecuación cuadrática en y para y en términos de x y exprese y como dos funciones de x.

50. La región limitada por las tres curvas $y = x^2$, $x = y^3$ y $x + y = 2$.

51. La región acotada por las tres curvas $y = x^2$, $y = 8 - x^2$ y $4x - y + 12 = 0$.

52. La región limitada por el trapecio cuyos vértices son (−1, −1), (2, 2), (6, 2) y (7, −1).

53. La región acotada por la curva $y = \text{sen}\, x$, la recta $y = 1$ y el eje y, ubicada a la derecha del eje y.

54. La región limitada por las dos curvas $y = \text{sen}\, x$ y $y = \cos x$ entre dos puntos de intersección consecutivos.

55. La región acotada por la curva $y = \tan^2 x$, el eje x y la recta $x = \frac{1}{4}\pi$.

56. La región limitada por la parábola $x^2 = 4py$ y dentro del triángulo formado por el eje x y las rectas $y = x + 8p$ y $y = -x + 8p$, donde $p > 0$.

57. La región acotada por las dos parábolas $y^2 = 4px$ y $x^2 = 4py$.

58. Determine la tasa de variación de la medida del área del ejercicio 56 con respecto a p cuando $p = \frac{3}{8}$.

59. Calcule la tasa de variación de la medida del área del ejercicio 57 con respecto a p cuando $p = 3$.

60. Determine m de modo que la región por arriba de la recta $y = mx$ y debajo de la parábola $y = 2x - x^2$ tenga un área de 36 unidades cuadradas.

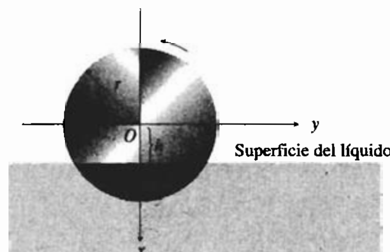
61. Determine m de modo que la región por arriba de la curva $y = mx^2$ $(m > 0)$, a la derecha del eje y, y debajo de la recta $y = m$ tenga un área de K unidades cuadradas, donde $K > 0$.

62. Si A unidades cuadradas es el área de la región limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = mx$ $(m > 0)$, determine la tasa de variación de A con respecto a m.

63. Para acelerar la evaporación de un líquido, se coloca un disco circular de radio r unidades en el líquido y después se gira lentamente, como se ilustra en la figura adjunta. La distancia del centro del disco a la superficie del líquido es h unidades. Los ejes coordenados se colocan de modo que el origen esté en el centro del disco, el eje y es paralelo a la superficie del líquido y el sentido positivo del eje x está hacia abajo. **(a)** Demuestre que si $A(h)$ unidades cuadradas es el área de la región mojada expuesta, entonces

$$A(h) = \pi r^2 - \pi h^2 - 2\int_h^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

y determine el dominio de A. **(b)** Demuestre que para maximizar el área de la región mojada expuesta, h debe ser igual a $r/\sqrt{1 + \pi^2}$. *Sugerencia:* para calcular $A'(h)$ aplique el primer teorema fundamental del Cálculo.



64. Cuando se calcula el área de una región plana por medio de integración, ¿en qué circunstancias es más conveniente utilizar **(a)** elementos rectangulares verticales de área y **(b)** elementos rectangulares horizontales de área?

4.9 VOLÚMENES DE SÓLIDOS MEDIANTE LOS MÉTODOS DE REBANADO, DE DISCOS Y DE ARANDELAS

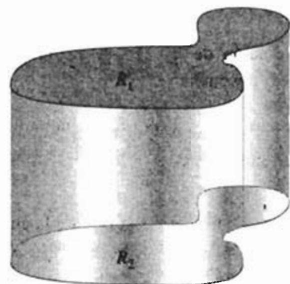


FIGURA 1

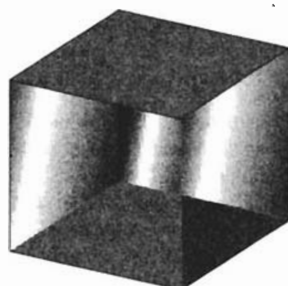

FIGURA 2


FIGURA 3

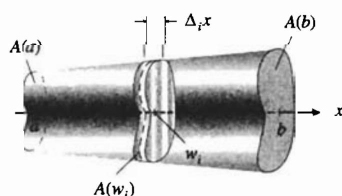


FIGURA 4

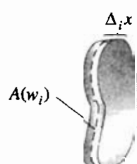


FIGURA 5

La definición del área de una región plana condujo a la definición de la integral definida. En este proceso se empleó la fórmula de la geometría plana para el área de un rectángulo. Ahora se utilizará un proceso semejante con el propósito de obtener volúmenes de algunos tipos particulares de sólidos. Uno de estos sólidos es el *cilindro recto*.

Se dice que un sólido es un **cilindro recto** si está limitado por dos regiones planas congruentes R_1 y R_2, que pertenecen a dos planos paralelos, y por una superficie lateral generada por un segmento rectilíneo, que tiene sus extremos en las fronteras o límites de R_1 y R_2, el cual se desplaza siempre en forma perpendicular a los planos de R_1 y R_2. La figura 1 muestra un cilindro recto. La **altura** del cilindro es la distancia perpendicular entre los planos de R_1 y R_2, y la **base** del cilindro es R_1 o R_2. Si la base del cilindro recto es una región limitada por un rectángulo, se tiene un **paralelepípedo rectangular**, el cual se muestra en la figura 2, y si la base es una región acotada por una circunferencia, se tiene un **cilindro circular recto,** como se ilustra en la figura 3.

Si el área de la base de un cilindro recto es A unidades cuadradas y su altura es h unidades y si V unidades cúbicas es su volumen, entonces

$$V = Ah$$

Se utilizará esta fórmula a fin de obtener un método que proporcione la medida del volumen de un sólido para el cual el área de cualquier *sección plana* (región plana formada por la intersección de un plano y el sólido) perpendicular a un eje es una función de la distancia perpendicular de la sección plana desde un punto fijo del eje. La figura 4 muestra uno de estos sólidos S que está entre los planos perpendiculares al eje x en a y b. Sea $A(x)$ unidades cuadradas el área de la sección plana de S perpendicular al eje x en x. Se requiere que A sea continua en $[a, b]$.

Sea Δ una partición del intervalo cerrado $[a, b]$ dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

Entonces existen n subintervalos de la forma $[x_{i-1}, x_i]$, donde $i = 1, 2, \ldots, n$, donde la longitud del i-ésimo subintervalo $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. Elija cualquier número w_i, con $x_{i-1} \leq w_i \leq x_i$, en cada subintervalo, y construya los cilindros rectos de alturas $\Delta_i x$ unidades y áreas de secciones planas de $A(w_i)$ unidades cuadradas. La figura 5 muestra el i-ésimo cilindro recto, el cual recibe el nombre de **elemento de volumen.** Si $\Delta_i V$ unidades cúbicas es el volumen del i-ésimo elemento, entonces

$$\Delta_i V = A(w_i)\,\Delta_i x$$

La suma de las medidas de los n elementos es

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} A(w_i)\,\Delta_i x \qquad \textbf{(1)}$$

la cual es una suma de Riemann. Esta suma es una aproximación de lo que intuitivamente pensamos como el número de unidades cúbicas del volumen del sólido. Cuanto más pequeña se tome la norma $\|\Delta\|$ de la partición, tanto más será mayor el valor de n, de modo que dicha aproximación estará más

cerca del número V que deseamos asignar a la medida del volumen. Por tanto, se define V como el límite de la suma de Riemann en (1) cuando $\|\Delta\|$ se aproxima a cero. Este límite existe porque A es continua en $[a, b]$. Entonces se tiene la siguiente definición.

4.9.1 Definición del volumen de un sólido

Sea S un sólido tal que S está entre dos planos perpendiculares al eje x en a y b. Si la medida del área de la sección plana S, perpendicular al eje x en x, está dada por $A(x)$, donde A es continua en $[a, b]$, entonces la medida del volumen de S está dado por

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(w_i)\, \Delta_i x$$
$$= \int_a^b A(x)\, dx$$

El término **rebanado** se utiliza cuando se aplica esta definición para calcular el volumen de un sólido. El proceso es semejante al rebanado de una hogaza de pan en muchas porciones muy delgadas de modo que todas las porciones juntas constituye la hogaza completa. En el ejemplo ilustrativo siguiente se muestra que la definición 4.9.1 es consistente con la fórmula de la geometría sólida para el volumen de un cilindro circular recto.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 La figura 6 presenta un cilindro circular recto, que tiene una altura de h unidades y un radio de la base de r unidades, con los ejes coordenados dispuestos de modo que el origen está en el centro de una base y su altura se mide a lo largo del lado positivo del eje x. Una sección plana a una distancia de x unidades del origen tiene un área de $A(x)$ unidades cuadradas, donde

$$A(x) = \pi r^2$$

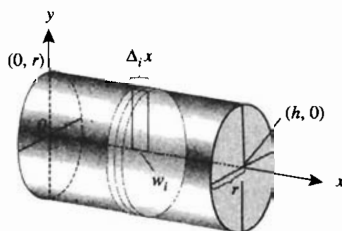


FIGURA 6

Un elemento de volumen, mostrado en la figura 6, es un cilindro recto con un área de la base de $A(w_i)$ unidades cuadradas y espesor de $\Delta_i x$ unidades. De este modo, si V unidades cúbicas es el volumen del cilindro circular recto, entonces

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(w_i)\, \Delta_i x$$
$$= \int_0^h A(x)\, dx$$
$$= \int_0^h \pi r^2\, dx$$
$$= x r^2 x \Big]_0^h$$
$$= \pi r^2 h$$

◀

En la definición 4.9.1 se puede sustituir x por y. En tal caso, S es un sólido que está entre planos perpendiculares al eje y en c y d, y la medida del área de la sección plana de S perpendicular al eje y en y está dada por $A(y)$,

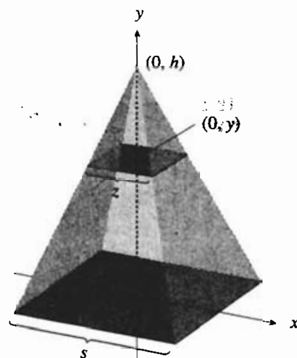


FIGURA 7

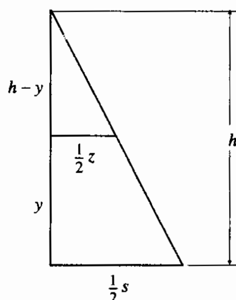


FIGURA 8

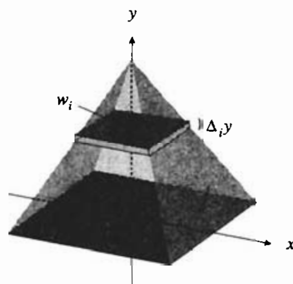


FIGURA 9

donde A es continua en $[c, d]$. Entonces la medida del volumen de S está dada por

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(w_i)\, \Delta_i y$$
$$= \int_c^d A(y)\, dy$$

▶ *EJEMPLO 1* Utilice el método de rebanado para calcular el volumen de una pirámide cuya altura es de h unidades y cuya base es un cuadrado de lado de s unidades.

Solución La figura 7 muestra la pirámide y los ejes coordenados dispuestos de modo que el centro de la base está en el origen y la altura se mide a lo largo del lado positivo del eje y. La sección plana de la pirámide perpendicular al eje y en $(0, y)$ es un cuadrado. Si la longitud del lado de este cuadrado mide z unidades, entonces por triángulos semejantes (consulte la figura 8)

$$\frac{\frac{1}{2}z}{h - y} = \frac{\frac{1}{2}s}{h}$$
$$z = \frac{s}{h}(h - y)$$

Por tanto, si $A(y)$ unidades cuadradas es el área de la sección plana, entonces

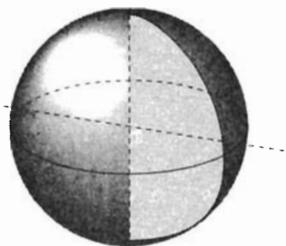
$$A(y) = \frac{s^2}{h^2}(h - y)^2$$

La figura 9 muestra un elemento de volumen el cual es un cilindro recto de área $A(w_i)$ unidades cuadradas y de un espesor de $\Delta_i y$ unidades. De manera que si V unidades cúbicas es el volumen de la pirámide, entonces

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(w_i)\, \Delta_i y$$
$$= \int_0^h A(y)\, dy$$
$$= \int_0^h \frac{s^2}{h^2}(h - y)^2\, dy$$
$$= \frac{s^2}{h^2}\left[-\frac{(h - y)^3}{3}\right]_0^h$$
$$= \frac{s^2}{h^2}\left[0 + \frac{h^3}{3}\right]$$
$$= \tfrac{1}{3}s^2 h$$

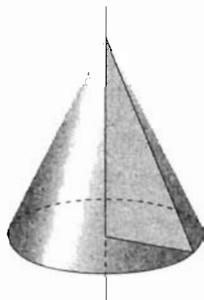
◀

Ahora se mostrará cómo aplicar la definición 4.9.1 a fin de calcular el volumen de un **sólido de revolución,** el cual es un sólido que se obtiene al girar una región de un plano alrededor de una recta del plano, llamada **eje de revolución,** el cual puede intersectar o no la región. Por ejemplo, si la región limitada por una semicircunferencia y su diámetro se gira alrededor


FIGURA 10

del diámetro, se genera una esfera (refiérase a la figura 10). Si la región limitada por un triángulo rectángulo se gira alrededor de uno de sus catetos, se obtiene un cono circular recto (consulte la figura 11).

Considere primero el caso en que el eje de revolución es un límite de la región que se girará. Sea f la función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y suponga que $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Sea R la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. La figura 12 muestra la región R y el i-ésimo rectángulo. Cuando el i-ésimo rectángulo se gira alrededor del eje x se obtiene un elemento de volumen el cual es un disco cuya base es un círculo de radio $f(w_1)$ unidades y cuya altura mide $\Delta_i x$ unidades, como se muestra en la figura 13. Si $\Delta_i V$ unidades cúbicas es el volumen de este disco, entonces


FIGURA 11

$$\Delta_i V = \pi[f(w_i)]^2 \Delta_i x$$

Como existen n rectángulos, se obtienen n discos de esta manera, y la suma de las medidas de los volúmenes de estos n discos es

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(w_i)]^2 \Delta_i x$$

Esta es una suma de Riemann de la forma (1) donde $A(w_i) = \pi[f(w_i)]^2$. Por tanto, si V unidades cúbicas es el volumen del sólido de revolución, se deduce de la definición 4.9.1 que V es el límite de esta suma de Riemann cuando $\|\Delta\|$ se aproxima a cero. Este límite existe porque f^2 es continua en $[a, b]$, ya que se supuso que f es continua en ese intervalo. Entonces se tiene el siguiente teorema.

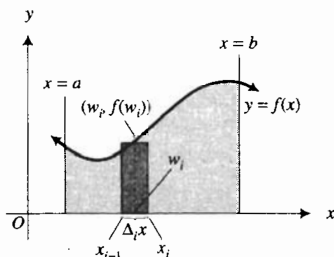


FIGURA 12

4.9.2 Teorema

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y suponga que $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Si S es el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje x la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, y si V unidades cúbicas es el volumen de S, entonces

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi[f(w_i)]^2 \Delta_i x$$
$$= \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

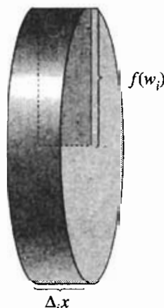


FIGURA 13

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Calcule el volumen del sólido de revolución generado cuando la región acotada por la curva $y = x^2$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 2$ se gira alrededor del eje x. Refiérase a la figura 14, la cual muestra la región y un elemento rectangular de área. La figura 15 presenta el sólido de revolución y un elemento de volumen. La medida del volumen del disco está dado por

$$\Delta_i V = \pi(w_i^2)^2 \Delta_i x$$
$$= \pi w_i^4 \Delta_i x$$

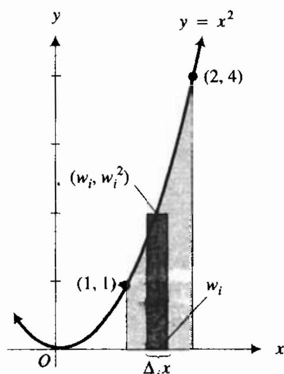


FIGURA 14

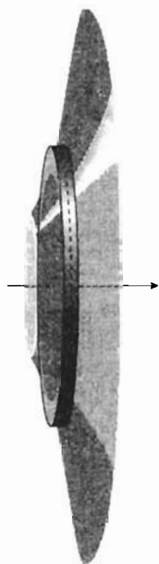


FIGURA 15

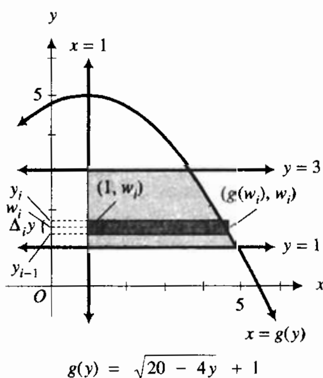


FIGURA 16

Entonces

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi w_1{}^4 \, \Delta_i x \\ &= \pi \int_1^2 x^4 \, dx \\ &= \pi \left(\tfrac{1}{5} x^5\right)\Big]_1^2 \\ &= \tfrac{31}{5}\pi \end{aligned}$$

Conclusión: El volumen del sólido de revolución es $\frac{31}{5}\pi$ unidades cúbicas.

A fin de apoyar la evaluación analítica de la integral definida se calcula en la graficadora

$$\text{NINT}(\pi x^4, 1, 2) = 19.47787445$$

el cual es el mismo valor, con diez dígitos significativos, que el valor exacto de la respuesta anterior. ◀

Cuando el eje de revolución y una frontera de la región girada son el eje y o cualquier recta paralela al eje x o al eje y, se aplica un teorema semejante al teorema 4.9.2.

▶ ***EJEMPLO 2*** Calcule el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor de la recta $x = 1$ la región limitada por la curva

$$(x - 1)^2 = 20 - 4y$$

y las rectas $x = 1$, $y = 1$, $y = 3$ y a la derecha de $x = 1$.

Solución La figura 16 muestra la región y un elemento rectangular de área. El sólido de revolución y un elemento de volumen se presentan en la figura 17.

Al resolver la ecuación de la curva para x se obtiene

$$x = \sqrt{20 - 4y} + 1$$

Sea $g(y) = \sqrt{20 - 4y} + 1$. Se toma una partición del intervalo $[1, 3]$ del eje y. Si $\Delta_i V$ unidades cúbicas es el volumen del i-ésimo disco, entonces

$$\begin{aligned} \Delta_i V &= \pi[g(w_i) - 1]^2 \, \Delta_i y \\ &= \pi[(\sqrt{20 - 4w_i} + 1) - 1]^2 \, \Delta_i y \\ &= \pi(20 - 4w_i) \, \Delta_i y \end{aligned}$$

Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido de revolución, entonces

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(20 - 4w_i) \, \Delta_i y \\ &= \pi \int_1^3 (20 - 4y) \, dy \\ &= \pi\left[20y - 2y^2\right]_1^3 \\ &= \pi[(60 - 18) - (20 - 2)] \\ &= 24\pi \end{aligned}$$

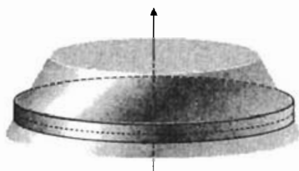


FIGURA 17

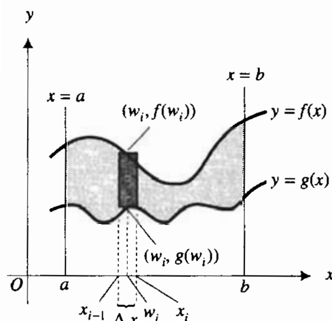
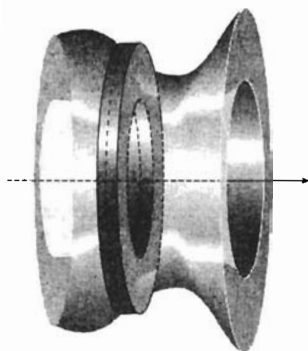


FIGURA 18



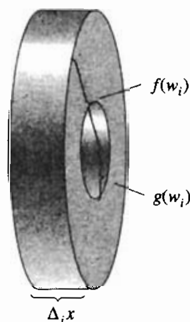


FIGURA 20

Conclusión: El volumen del sólido de revolución es 24π unidades cúbicas. ◀

Ahora suponga que el eje de revolución no es una frontera de la región que se girará. Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$ tales que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Sea R la región limitada por las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$. La región R y el i-ésimo rectángulo se muestran en la figura 18, y el sólido de revolución se presenta en la figura 19. Cuando el i-ésimo rectángulo se gira alrededor del eje x, se obtiene un anillo circular como el de la figura 20. La diferencia de las áreas de las dos regiones circulares es $(\pi[f(w_i)]^2 - \pi[g(w_i)]^2)$ unidades cuadradas y el espesor es de $\Delta_i x$ unidades. Si $\Delta_i V$ unidades cúbicas es el volumen de la arandela, entonces

$$\Delta_i V = \pi([f(w_i)]^2 - [g(w_i)]^2)\,\Delta_i x$$

La suma de las medidas de los volúmenes de las arandelas generadas al girar los elementos rectangulares de área alrededor del eje x es

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} \pi([f(w_i)]^2 - [g(w_i)]^2)\,\Delta_i x$$

Ésta es una suma de Riemann de la forma (1), donde $(A w_i) = \pi[f(w_i)]^2 - \pi[g(w_i)]^2$. De la definición 4.9.1, el número de unidades cúbicas del volumen del sólido de revolución es el límite de esta suma de Riemann cuando $\|\Delta\|$ se aproxima a cero. El límite existe puesto que $f^2 - g^2$ es continua en $[a, b]$ ya que f y g son continuas en ese intervalo. En consecuencia, se tiene el teorema siguiente.

4.9.3 Teorema

Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ tales que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x la región limitada por las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$, entonces

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([f(w_i)]^2 - [g(w_i)]^2)\,\Delta_i x$$
$$= \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\,dx$$

Como antes, cuando el eje de revolución es el eje y o cualquier recta paralela al eje x o al eje y, se aplica un teorema semejante al anterior.

▶ ***EJEMPLO 3*** Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región acotada por la parábola $y = x^2 + 1$ y la recta $y = x + 3$.

Solución Los puntos de intersección de las dos curvas son $(-1, 2)$ y $(2, 5)$. La figura 21 muestra la región y un elemento rectangular de área. El sólido de revolución y un elemento de volumen se presentan en la figura 22.

Si $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2 + 1$, entonces la medida del volumen de la arandela circular es

$$\Delta_i V = \pi([f(w_i)]^2 - [g(w_i)]^2)\,\Delta_i x$$

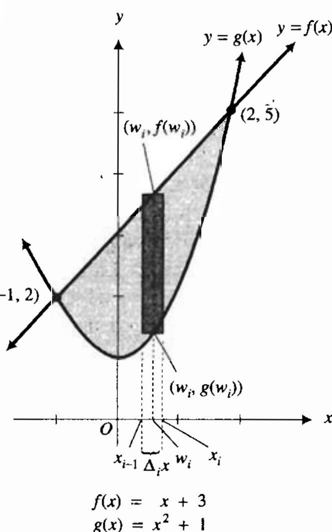


FIGURA 21

Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido, entonces

$$\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([f(w_i)]^2 - [g(w_i)]^2)\,\Delta_i x \\
&= \pi \int_{-1}^{2} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\,dx \\
&= \pi \int_{-1}^{2} [(x+3)^2 - (x^2+1)^2]\,dx \\
&= \pi \int_{-1}^{2} (-x^4 - x^2 + 6x + 8)\,dx \\
&= \pi \left[-\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x \right]_{-1}^{2} \\
&= \pi[(-\tfrac{32}{5} - \tfrac{8}{3} + 12 + 16) - (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3} + 3 - 8)] \\
&= \tfrac{117}{5}\pi
\end{aligned}$$

Conclusión: El volumen del sólido de revolución es $\frac{117}{5}\pi$ unidades cúbicas. ◀

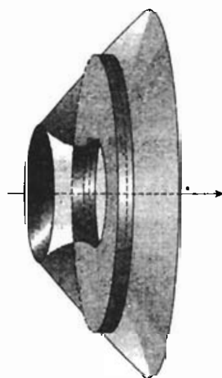


FIGURA 22

▶ ***EJEMPLO 4*** Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor de la recta $x = -4$ la región limitada por las dos parábolas $x = y - y^2$ y $x = y^2 - 3$.

Solución Las curvas se intersectan en los puntos $(-2, -1)$ y $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$. La región y un elemento rectangular de área se muestran en la figura 23. La figura 24 presenta el sólido de revolución así como un elemento de volumen, el cual es una arandela.

Sean $F(y) = y - y^2$ y $G(y) = y^2 - 3$. El número de unidades cúbicas del volumen de la arandela circular es

$$\Delta_i V = \pi([4 + F(w_i)]^2 - [4 + G(w_i)]^2)\,\Delta_i y$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([4 + F(w_i)]^2 - [4 + G(w_i)]^2)\,\Delta_i y \\
&= \pi \int_{-1}^{3/2} [(4 + y - y^2)^2 - (4 + y^2 - 3)^2]\,dy \\
&= \pi \int_{-1}^{3/2} (-2y^3 - 9y^2 + 8y + 15)\,dy \\
&= \pi \left[-\tfrac{1}{2}y^4 - 3y^3 + 4y^2 + 15y \right]_{-1}^{3/2} \\
&= \tfrac{875}{32}\pi
\end{aligned}$$

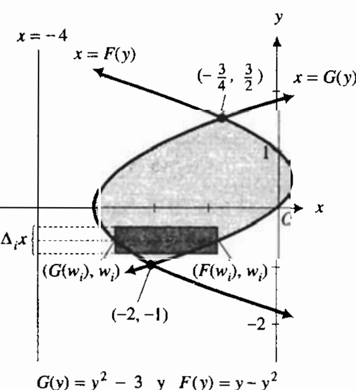


FIGURA 23

Conclusión: El volumen del sólido de revolución es $\frac{875}{32}\pi$ unidades cúbicas. ◀

Los ejemplos anteriores se han presentado a propósito, de modo que el cálculo pueda efectuarse fácilmente a mano. En el ejemplo siguiente, que no corresponde a este caso, se necesitará la graficadora.

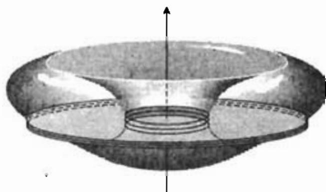
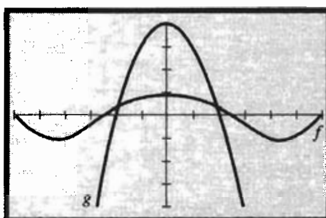


FIGURA 24



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

$f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{x^2 + 4}$

$g(x) = 4 - x^2$

FIGURA 25

EJEMPLO 5 Calcule con cuatro dígitos significativos el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x la región acotada por las gráficas de

$$f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{x^2 + 4} \quad \text{y} \quad g(x) = 4 - x^2$$

Solución Se trazan las gráficas de las dos ecuaciones en el rectángulo de inspección de $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$, como se muestra en la figura 25. Debido a la simetría con respecto al eje y, se obtendrá un medio del volumen requerido al girar alrededor del eje x la región limitada por las curvas en el primer cuadrante. Se necesita tomar una partición del intervalo $[0, b]$, donde b es la coordenada x del punto de intersección de las dos curvas en el primer cuadrante. Se obtiene b empleando el proceso de intersección (*intersect*) o rastreo (*trace*) y aumento (*zoom in*) de la graficadora, resultando, con cuatro dígitos significativos, $b = 1.905$.

Cada elemento de volumen es una arandela. Si V unidades cúbicas es el volumen requerido, entonces

$$\frac{V}{2} = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([g(w_i)]^2 - [f(w_i)]^2)\, \Delta_i x$$

$$= \pi \int_0^{1.905} \pi([g(x)]^2 - [f(x)]^2)\, dx$$

$$= \pi \int_0^{1.905} [(4 - x^2)^2 - \operatorname{sen}^2 \sqrt{x^2 + 4}\,]\, dx$$

Al evaluar la integral definida mediante NINT en la graficadora se obtiene

$$\pi \text{NINT}((4 - x^2)^2 - \operatorname{sen}^2 \sqrt{x^2 + 4}), 0, 1.905) = 50.129$$

Entonces

$$\frac{V}{2} = 50.129$$

$$V = 100.26$$

Conclusión: El volumen del sólido de revolución, con cuatro dígitos significativos, es 100.3 unidades cúbicas. ◀

Como se ha visto, la obtención de volúmenes mediante los métodos de discos y de arandelas son casos especiales del cálculo de volúmenes del método de rebanado. A continuación se dará otro ejemplo de determinación de un volumen por medio del método de rebanado.

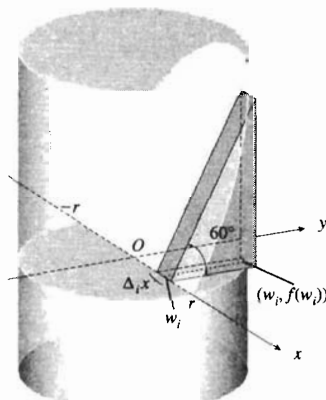


FIGURA 26

EJEMPLO 6 Se corta una cuña de un cilindro circular recto, cuyo radio es r centímetros, mediante dos planos, uno perpendicular al eje del cilindro y el otro intersecta al primero a lo largo de un diámetro de la sección plana circular formando un ángulo de 60°. Calcule el volumen de la cuña.

Solución La cuña se muestra en la figura 26. El plano xy se considera como el plano perpendicular al eje del cilindro y el origen está en el punto de perpendicularidad. Entonces, una ecuación de la sección plana circular es $x^2 + y^2 = r^2$. Toda sección plana de la cuña, perpendicular al eje x, es un triángulo rectángulo. Un elemento de volumen es un cilindro recto que

tiene una altura de $\Delta_i x$ centímetros, y el área de su base está dada por $\frac{1}{2}\sqrt{3}[f(w_i)]^2$ centímetros cuadrados, donde $f(x)$ se obtiene al resolver la ecuación de la circunferencia para y y considerando $y = f(x)$. Por tanto, se tiene $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Así, si V centímetros cúbicos es el volumen de la cuña, entonces

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}\sqrt{3}(r^2 - w_i^2)\,\Delta_i x \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\Big[r^2x - \tfrac{1}{3}x^3\Big]_{-r}^{r} \\ &= \tfrac{2}{3}\sqrt{3}r^3 \end{aligned}$$

Conclusión: El volumen de la cuña es $\frac{2}{3}\sqrt{3}r^3$ cm^3. ◀

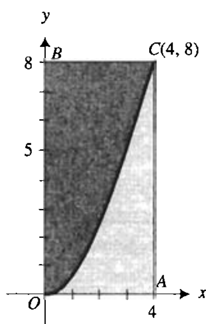
EJERCICIOS 4.9

En los ejercicios 1 y 2, deduzca la fórmula para el volumen del sólido mediante el método de rebanado.

1. Una esfera de radio r unidades.
2. Un cono circular recto de altura h unidades y radio de la base de a unidades.
3. Determine el volumen del sólido de revolución generado cuando la región limitada por la curva $y = x^3$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 2$, se gira alrededor del eje x.
4. Calcule el volumen del sólido de revolución generado cuando la región acotada por la curva $y = x^2 + 1$, el eje x y las rectas $x = 2$ y $x = 3$, se gira alrededor del eje x.

En los ejercicios 5 a 12, calcule el volumen del sólido de revolución generado cuando la región de la figura se gira alrededor de la recta indicada. Una ecuación de la curva de la figura es $y^2 = x^3$.

5. OAC alrededor del eje x.
6. OAC alrededor de la recta AC.
7. OAC alrededor de la recta BC.
8. OAC alrededor del eje y.
9. OBC alrededor del eje y.
10. OBC alrededor de la recta BC.
11. OBC alrededor de la recta AC.
12. OBC alrededor del eje x.



En los ejercicios 13 a 16, calcule el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor de la recta indicada la región acotada por la curva $y = \sqrt{x}$, el eje x y la recta $x = 4$.

13. La recta $x = 4$.
14. El eje x.
15. El eje y.
16. La recta $y = 2$.
17. Obtenga la fórmula del volumen de una esfera al girar alrededor del eje x la región limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ y el eje x.
18. Deduzca la fórmula para el volumen de un cono circular recto de altura de h unidades y cuyo radio de la base mide a unidades al girar la región limitada por un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.
19. Obtenga la fórmula para el volumen de un cono circular recto truncado que se obtiene al girar el segmento rectilíneo que va de $(0, b)$ a (h, a) alrededor del eje x.
20. Calcule mediante el método de rebanado el volumen de un tetraedro que tiene tres caras mutuamente perpendiculares y tres aristas mutuamente perpendiculares cuyas longitudes son de 3, 4 y 7 pulg, respectivamente.
21. La región acotada por la curva $y = \sec x$, el eje x, el eje y y la recta $x = \frac{1}{4}\pi$, se gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido generado.
22. Calcule el volumen del sólido de revolución generado cuando la región limitada por la curva $y = \csc x$, el eje x y las rectas $x = \frac{1}{6}\pi$ y $x = \frac{1}{3}\pi$, se gira alrededor del eje x.
23. Obtenga el volumen del sólido de revolución generado si la región acotada por un arco de la curva senoidal se gira alrededor del eje x. *Sugerencia:* emplee la identidad $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.
24. La región limitada por el eje y y las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ para $0 \le x \le \frac{1}{4}\pi$, se gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido generado. *Sugerencia:* utilice la identidad $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$.
25. Determine el volumen del sólido generado si la región del ejercicio 23 se gira alrededor de la recta $y = 1$.
26. Obtenga el volumen del sólido generado si la región del ejercicio 24 se gira alrededor de la recta $y = 1$.
27. La región acotada por la curva $y = \cot x$, la recta $x = \frac{1}{6}\pi$ y el eje x se gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido generado.
28. La región limitada por la curva $y = \tan x$, la recta $x = \frac{1}{3}\pi$ y el eje x se gira alrededor del eje x. Determine el volumen del sólido generado.

29. Obtenga el volumen del sólido generado al girar alrededor de la recta $x = -4$ la región limitada por esa misma recta y la parábola $x = 4 + 6y - 2y^2$.

30. Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región acotada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = x$.

31. Obtenga el volumen del sólido generado al girar la región del ejercicio 30 alrededor de la recta $x = 4$.

32. Determine el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y la región acotada por la recta que pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(3, 7)$ y las rectas $y = 3$, $y = 7$ y $x = 0$.

33. Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor de la recta $y = -3$ la región limitada por las dos parábolas $y = x^2$ y $y = 1 + x - x^2$.

34. Obtenga el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región acotada por el lazo (o bucle) de la curva cuya ecuación es $2y^2 = x(x^2 - 4)$.

35. Determine el volumen del sólido generado cuando la región limitada por el bucle (o lazo) de la curva que tiene la ecuación $x^2y^2 = (x^2 - 9)(1 - x^2)$, se gira alrededor del eje x.

36. Un tanque petrolero tiene la forma de una esfera con un diámetro de 60 pie. ¿Cuánto petróleo contiene el tanque si la profundidad del petróleo es de 25 pie?

37. La región acotada por la curva $y = \csc x$ y las rectas $y = 2$, $x = \frac{1}{6}\pi$ y $x = \frac{5}{6}\pi$, se gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido generado.

38. La región del primer cuadrante limitada por la curva $y = \sec x$, el eje y y la recta $y = 2$, se gira alrededor del eje x. Determine el volumen del sólido generado.

39. Al girar alrededor del eje x la región limitada por la curva $y = \sqrt{2x + 4}$, el eje x, el eje y y la recta $x = c$ $(c > 0)$, se generó un sólido de revolución. ¿Para qué valor de c el volumen del sólido será de 12π unidades cúbicas?

40. La región del primer cuadrante acotada por los ejes coordenados, la recta $y = 1$ y la curva $y = \cot x$, se gira alrededor del eje x. Obtenga el volumen del sólido generado.

En los ejercicios 41 a 50, utilice la graficadora para calcular el volumen del sólido generado al girar la región dada alrededor del eje indicado. Exprese la respuesta con cuatro dígitos significativos.

41. La región limitada por la gráfica de $y = \sqrt[4]{x^3 + 4}$, el eje x, el eje y y la recta $x = 2$, alrededor del eje x.

42. La región acotada por la gráfica de $y = \sqrt[3]{x^4 - 5}$, el eje x y las rectas $x = 2$ y $x = 3$, alrededor del eje x

43. La región limitada por la gráfica de $y = \sqrt[4]{x^3 + 4}$, el eje y y la recta $y = 3$, alrededor del eje y.

44. La región acotada por la gráfica de $y = \sqrt[3]{x^4 - 5}$, el eje x, el eje y y la recta $y = 4$, alrededor del eje y.

45. La región limitada por la gráfica de $y = \operatorname{sen} x^3$, el eje y y la recta $y = 1$, si $x \in [0, \sqrt[3]{\pi/2}]$, alrededor del eje x.

46. La región acotada por la gráfica de $y = \tan x^2$, el eje y y la recta $y = 1$, si $x \in [0, \sqrt{\pi}/2]$, alrededor de la recta $y = 1$.

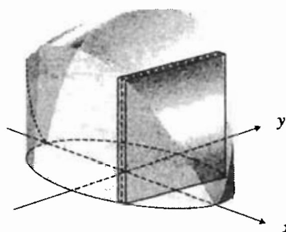
47. La región del ejercicio 45 alrededor de la recta $y = 2$.

48. La región del ejercicio 46 alrededor de la recta $y = -1$.

49. La región acotada por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x + 2$, $y = \tan x$, y el eje y, alrededor del eje x.

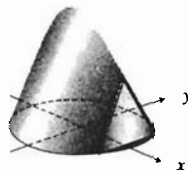
50. La región limitada por las gráficas de $y = x^2 - 1$ y $y = \cos(x^2 + 2)$, alrededor del eje x.

51. La base de un sólido es la región acotada por una elipse que tiene la ecuación $3x^2 + y^2 = 6$. Calcule el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares al eje x son cuadrados.



52. La base de un sólido es la región limitada por la hipérbola $25x^2 - 4y^2 = 100$ y la recta $x = 4$. Calcule el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares al eje x son cuadrados.

53. La base de un sólido es la región acotada por una circunferencia que tiene un radio de 7 cm. Calcule el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos equiláteros.



54. La base de un sólido es la región del ejercicio 52. Calcule el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros.

55. La base de un sólido es la región del ejercicio 53. Calcule el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos isósceles cuya altura es igual a la distancia de la sección plana al centro de la circunferencia. El lado que está sobre la base del sólido no es uno de los lados iguales del triángulo.

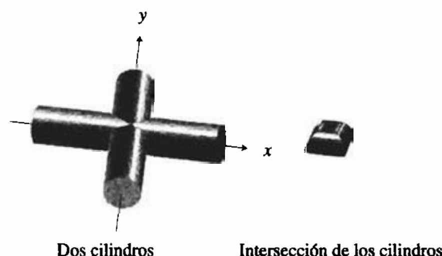
56. La base de un sólido es la región limitada por una circunferencia con un radio de r unidades, y todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos rectángulos isósceles que tienen la hipotenusa en el plano de la base. Calcule el volumen del sólido.

57. Resuelva el ejercicio 56 si los triángulos rectángulos isósceles tienen un cateto en el plano de la base.

58. La base de un sólido es la región limitada por una circunferencia con un radio de 4 pulg, y cada sección plana perpendicular a un diámetro fijo de la base es un triángulo isósceles que tiene una altura de 10 pulg y cuya base es una cuerda de la circunferencia.

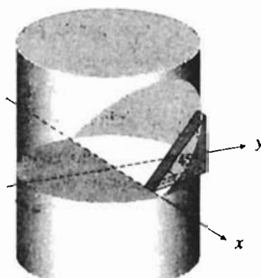
59. La base de un sólido es la región acotada por la curva $x = 2\sqrt{y}$ y las rectas $x + y = 0$ y $y = 9$. Calcule el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares al eje y son cuadrados que tiene una diagonal con un extremo en la recta $x + y = 0$ y el otro extremo en la curva $x = 2\sqrt{y}$.

60. Dos cilindros circulares rectos, cada uno de radio de r unidades, tienen ejes que son perpendiculares. Calcule el volumen de la porción común de los dos cilindros.



Dos cilindros Intersección de los cilindros

61. De un sólido que tiene forma de cilindro circular recto de r centímetros de radio, se corta una cuña mediante un plano que pasa por un diámetro de la base del cilindro y que forma un ángulo de 45° con el plano de la base. Calcule el volumen de la cuña.



62. De un sólido que tiene forma de cono circular recto cuyo radio de la base es de 5 pie y cuya altura mide 20 pie, se corta una cuña mediante dos semiplanos que pasan por el eje del cono. El ángulo formado por los dos semiplanos mide 30°. Calcule el volumen de la cuña.

63. Al girar la parábola $y^2 = 4px$ alrededor del eje x se obtiene un paraboloide de revolución. Calcule el volumen del sólido limitado por un paraboloide de revolución y un plano perpendicular a su eje si el plano está a 10 cm del vértice, y si la sección plana de intersección es un círculo que tiene un radio de 6 cm.

64. Explique la relación entre cálculo de volúmenes mediante el método de rebanado y cálculo de volúmenes por medio de los métodos de discos y de arandelas.

4.10 VOLÚMENES DE SÓLIDOS MEDIANTE EL MÉTODO DE CAPAS CILÍNDRICAS

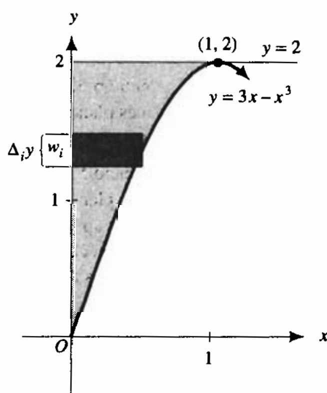


FIGURA 1

En la sección anterior se determinó el volumen de un sólido de revolución tomando los elementos rectangulares de área perpendiculares al eje de revolución, y los elementos de volumen obtenidos fueron discos o arandelas. Para algunos sólidos de revolución este método puede no ser factible. Por ejemplo, suponga que se desea calcular el volumen exacto del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje y la región limitada por la gráfica de $y = 3x - x^3$, el eje y y la recta $y = 2$. Esta región se muestra en la figura 1. Si un elemento de área es perpendicular al eje y como se presenta en la figura, el elemento de volumen es un disco, y determinar el volumen del sólido de revolución implica una integral de la forma $\int_0^2 A(y)\, dy$. Pero para obtener una fórmula de $A(y)$ se necesita resolver la ecuación cúbica $y = 3x - x^3$, para x en términos de y, lo cual es una tarea muy laboriosa. De modo que ahora se estudiará un procedimiento alternativo para calcular el volumen de un sólido de revolución, el cual es más fácil de aplicar en éste y algunos otros casos.

El método implica considerar los elementos rectangulares de área paralelos al eje de revolución. Después, cuando un elemento de área se gira alrededor del eje de revolución se obtiene una *capa cilíndrica*. Una **capa cilíndrica** es un sólido contenido entre dos cilindros que tienen el

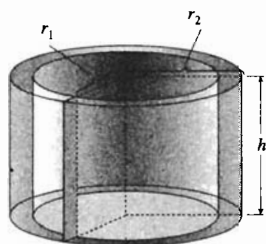


FIGURA 2

mismo centro y el mismo eje. En la figura 2 se muestra una capa cilíndrica de éstas.

Si la capa cilíndrica tiene un radio interior de r_1 unidades, un radio exterior de r_2 unidades y una altura de h unidades, entonces su volumen V unidades cúbicas está dado por

$$V = \pi r_2{}^2 h - \pi r_1{}^2 h \tag{1}$$

Sea R la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, donde f es continua en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$; además, suponga que $a \geq 0$. La región R se muestra en la figura 3. Si R se gira alrededor del eje y, se genera un sólido de revolución S. Dicho sólido se muestra en la figura 4. Para calcular el volumen de S cuando se toman los elementos rectangulares de área paralelos al eje y, se procede en la siguiente manera.

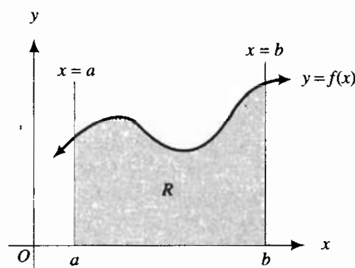


FIGURA 3

Sea Δ una partición del intervalo cerrado $[a, b]$ dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Sea m_i el punto medio del i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces se tiene que $m_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$. Considere el rectángulo cuya altura es $f(m_i)$ unidades y cuyo ancho es de $\Delta_i x$ unidades. Si este rectángulo se gira alrededor del eje y, se obtiene una capa cilíndrica. La figura 4 muestra la capa cilíndrica generada por el elemento rectangular de área.

Si $\Delta_i V$ proporciona la medida del volumen de esta capa cilíndrica, entonces se tiene de la fórmula (1), donde $r_1 = x_{i-1}$, $r_2 = x_i$ y $h = f(m_i)$, de modo que

$$\Delta_i V = \pi x_i{}^2 f(m_i) - \pi x_{i-1}{}^2 f(m_i)$$
$$\Delta_i V = \pi(x_i{}^2 - x_{i-1}{}^2) f(m_i)$$
$$\Delta_i V = \pi(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1}) f(m_i)$$

Como $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$, y puesto que $x_i + x_{i-1} = 2m_i$, entonces al sustituir en la ecuación anterior se tiene

$$\Delta_i V = 2\pi m_i f(m_i)\, \Delta_i x$$

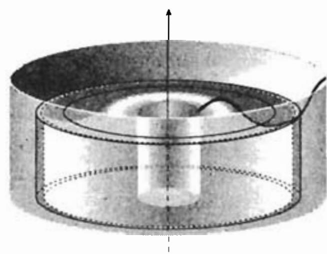


FIGURA 4

Si los n elementos rectangulares de área se giran alrededor del eje y, se obtienen n capas cilíndricas. La suma de las medidas de sus volúmenes es

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i f(m_i)\, \Delta_i x$$

la cual es una suma de Riemann. El límite de esta suma de Riemann cuando $\|\Delta\|$ se aproxima a cero existe porque f es continua en $[a, b]$, de modo que también lo es la función cuyos valores son $2\pi x f(x)$. El límite es la integral definida $\int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$, y proporciona el volumen del sólido de revolución. Este resultado se resume en el teorema siguiente.

4.10.1 Teorema

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, donde $a \geq 0$. Suponga que $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Si R es la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$,

si S es el sólido de revolución que se obtiene al girar R alrededor del eje y, y si V unidades cúbicas es el volumen de S, entonces

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i f(m_i)\, \Delta_i x$$

$$= 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

Aunque la validez de este teorema puede resultar obvia debido a las explicaciones anteriores, la demostración requiere probar que se obtiene el mismo volumen mediante el método de discos del teorema 4.9.2. En el número de febrero de 1984 de la revista *American Mathematical Monthly* (Vol. 91, No. 2), **Charles A. Cable** de Allegheny College proporciona una demostración utilizando integración por partes, tema de la sección 7.1.

La fórmula de la medida del volumen de una capa cilíndrica es fácil de recordar observando que $2\pi m_i$, $f(m_i)$ y $\Delta_i x$ son, respectivamente, las medidas de la circunferencia que tiene como radio el promedio de los radios interno y externo (o radio medio) de la capa, la altura de la capa, y el espesor de la capa. De este modo, el volumen de la capa es

2π(radio medio)(altura)(espesor)

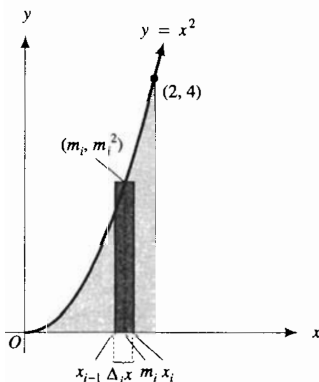


FIGURA 5

▶ ***EJEMPLO 1*** La región limitada por la curva $y = x^2$, el eje x y la recta $x = 2$ se gira alrededor del eje y. Calcule el volumen del sólido generado. Considere los elementos de área paralelos al eje de revolución.

Solución La figura 5 muestra la región y un elemento rectangular de área. La figura 6 muestra el sólido de revolución y la capa cilíndrica obtenida al girar el elemento rectangular de área alrededor del eje y.

El elemento de volumen es una capa cilíndrica cuyo volumen es

$$\Delta_i V = 2\pi m_i (m_i^2)\, \Delta_i x$$
$$= 2\pi m_i^3\, \Delta_i x$$

De este modo,

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i^3\, \Delta_i x$$

$$= 2\pi \int_0^2 x^3\, dx$$

$$= 2\pi\left(\tfrac{1}{4} x^4\right)\Big]_0^2$$
$$= 8\pi$$

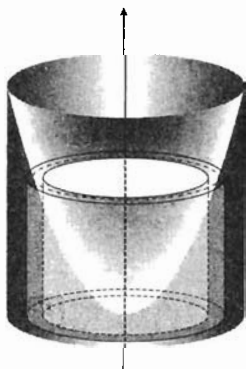


FIGURA 6

<u>**Conclusión:**</u> El volumen del sólido de revolución es de 8π unidades cúbicas. ◀

En el siguiente ejemplo se calcula el volumen del sólido de revolución discutido al principio de esta sección.

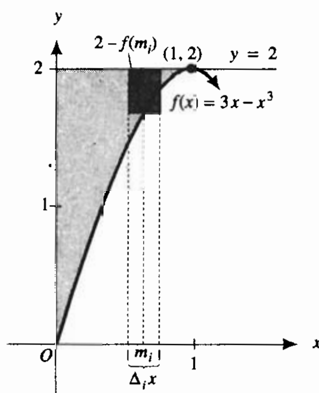
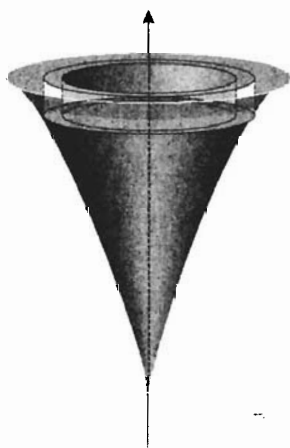


FIGURA 7

EJEMPLO 2 Determine el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje y la región limitada por la gráfica de $y = 3x - x^3$, el eje y y la recta $y = 2$.

Solución Sea $f(x) = 3x - x^3$. La figura 7 muestra la región y un elemento rectangular de área paralelo al eje y. El sólido de revolución y una capa cilíndrica, elemento de volumen, se presentan en la figura 8. El radio medio de la capa cilíndrica es m_i unidades, la altura es $[2 - f(m_i)]$ unidades y el espesor es $\Delta_i x$ unidades. Por tanto, si $\Delta_i V$ unidades cúbicas es el volumen de la capa cilíndrica, entonces

$$\Delta_i V = 2\pi m_i[2 - f(m_i)]\,\Delta_i x$$


FIGURA 8

De modo que si V unidades cúbicas es el volumen del sólido de revolución, entonces

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i[2 - f(m_i)]\,\Delta_i x \\ &= 2\pi \int_0^1 x[2 - f(x)]\,dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x(2 - 3x + x^3)\,dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (2x - 3x^2 + x^4)\,dx \\ &= 2\pi\left[x^2 - x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\ &= 2\pi(1 - 1 + \tfrac{1}{5}) \\ &= \tfrac{2}{5}\pi \end{aligned}$$

<u>Conclusión:</u> El volumen del sólido es $\frac{2}{5}\pi$ unidades cúbicas. ◀

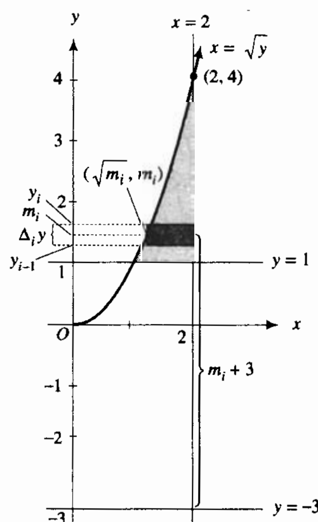


FIGURA 9

EJEMPLO 3 La región limitada por la curva $y = x^2$ y las rectas $y = 1$ y $x = 2$ se gira alrededor de la recta $y = -3$. Obtenga el volumen del sólido generado al considerar los elementos rectangulares de área paralelos al eje de revolución.

Solución La región y un elemento rectangular de área se muestran en la figura 9.

La ecuación de la curva es $y = x^2$. Al resolver esta ecuación para x se obtiene $x = \pm\sqrt{y}$. Como $x > 0$ para la región dada, entonces $x = \sqrt{y}$.

El sólido de revolución y una capa cilíndrica, elemento de volumen, se muestran en la figura 10. El radio exterior de la capa cilíndrica es $(y_i + 3)$ unidades, mientras que el radio interior es $(y_{i-1} + 3)$ unidades. En consecuencia, el radio medio es $(m_i + 3)$ unidades. Como la altura y el espesor de la capa cilíndrica son, respectivamente, $(2 - \sqrt{m_i})$ unidades y $\Delta_i y$ unidades, entonces

$$\Delta_i V = 2\pi(m_i + 3)(2 - \sqrt{m_i})\,\Delta_i y$$

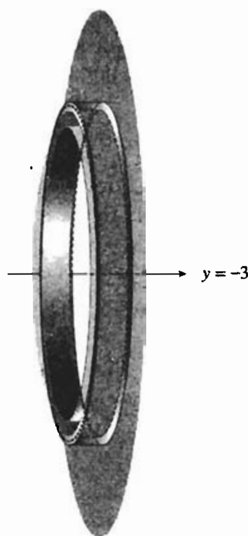


FIGURA 10

En consecuencia, si V unidades cúbicas es el volumen del sólido de revolución, entonces

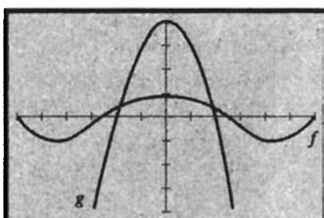
$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(m_i + 3)(2 - \sqrt{m_i})\,\Delta_i y$$
$$= \int_1^4 2\pi(y + 3)(2 - \sqrt{y})\,dy$$
$$= 2\pi \int_1^4 (-y^{3/2} + 2y - 3y^{1/2} + 6)\,dy$$
$$= 2\pi\Big[-\tfrac{2}{5}y^{5/2} + y^2 - 2y^{5/2} + 6y\Big]_1^4$$
$$= \tfrac{66}{5}\pi$$

Conclusión: El volumen del sólido es $\frac{66}{5}\pi$ unidades cúbicas. ◀

▶ ***EJEMPLO 4*** Calcule con cuatro dígitos significativos el volumen del sólido generado al girar la región del ejemplo 5 de la sección 4.9 alrededor del eje y.

Solución En la figura 11 se repite la figura 25 de la sección 4.9, la cual muestra las gráficas de

$$f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + 4} \quad \text{y} \quad g(x) = 4 - x^2$$



[-6, 6] por [-4, 4]

$f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + 4}$

$g(x) = 4 - x^2$

FIGURA 11

trazadas en el rectángulo de inspección de [−6, 6] por [−4, 4]. Debido a la simetría con respecto al eje y, se obtiene el sólido completo al girar únicamente la región acotada por las curvas en el primer cuadrante. Por tanto, se toma una partición del intervalo [0, 1.905]. Con elementos rectangulares de área paralelos al eje de revolución se obtienen como elementos de volumen, capas cilíndricas que tiene un radio medio de m_i unidades, una altura de $[g(m_i) - f(m_i)]$ unidades y un espesor de $\Delta_i x$ unidades. Por tanto, si $\Delta_i V$ unidades cúbicas es el volumen del sólido de revolución, entonces

$$\Delta_i V = 2\pi m_i[g(m_i) - f(m_i)]\,\Delta_i x$$

De modo que si V unidades cúbicas es el volumen del sólido de revolución, entonces

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i[g(m_i) - f(m_i)]\,\Delta_i x$$
$$= \int_0^{1.905} 2\pi x[g(x) - f(x)]\,dx$$
$$= \int_0^{1.905} 2\pi x[(4 - x^2) - \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + 4}\,]\,dx$$

Al evaluar la integral definida con cuatro dígitos significativos en la graficadora se obtiene

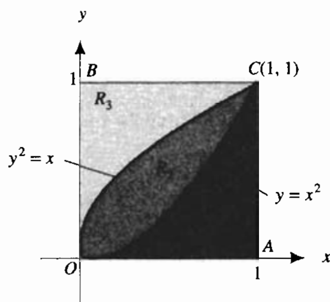
$$\text{NINT}(2\pi x(4 - x^2 - \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + 4}), 0, 1.905) = 17.41$$

Conclusión: El volumen del sólido con cuatro dígitos significativos es 17.41 unidades cúbicas. ◀

EJERCICIOS 4.10

1–12. Resuelva los ejercicios 5 a 16 de la sección 4.9 mediante el método de capas cilíndricas.

En la figura adjunta, la región limitada por el eje x, la recta $x = 1$ y la curva $y = x^2$ se denota por R_1; la región acotada por las curvas $y = x^2$ y $y^2 = x$ se representa mediante R_2; y la región limitada por el eje y, la recta $y = 1$ y la curva $y^2 = x$ se denota por R_3. En los ejercicios 13 a 20, calcule el volumen del sólido generado cuando la región indicada se gira alrededor de la recta dada.



13. R_1 se gira alrededor del eje y; los elementos rectangulares son paralelos al eje de revolución.

14. Igual que en el ejercicio 13, pero los elementos rectangulares son perpendiculares al eje de revolución.

15. R_2 se gira alrededor del eje x; los elementos rectangulares son paralelos al eje de revolución.

16. Igual que en el ejercicio 15, pero los elementos rectangulares son perpendiculares al eje de revolución.

17. R_3 se gira alrededor de la recta $y = 2$; los elementos rectangulares son paralelos al eje de revolución.

18. Igual que en el ejercicio 17, pero los elementos rectangulares son perpendiculares al eje de revolución.

19. R_2 se gira alrededor de la recta $x = -2$; los elementos rectangulares son paralelos al eje de revolución.

20. Igual que en el ejercicio 19, pero los elementos rectangulares son perpendiculares al eje de revolución.

En los ejercicios 21 a 24, la región acotada por las curvas $x = y^2 - 2$ y $x = 6 - y^2$ se gira alrededor del eje indicado. Determine el volumen del sólido generado.

21. El eje x.

22. El eje y.

23. La recta $x = 2$.

24. La recta $y = 2$.

25. Obtenga el volumen del sólido generado si la región limitada por la parábola $y^2 = 4px (p > 0)$ y la recta $x = p$, se gira alrededor de la recta $x = p$.

26. Determine el volumen del sólido generado si la región del ejercicio 25 se gira alrededor del eje y.

27. Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y la región limitada por la gráfica de $y = 3x - x^3$, el eje x y la recta $x = 1$.

28. Obtenga el volumen del sólido generado al girar la región del ejercicio 27 alrededor de la recta $x = 1$.

29. Determine el volumen del sólido generado al girar la región del ejemplo 2 alrededor de la recta $x = 1$.

30. Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y la región acotada por la gráfica de $y = 4x - \frac{1}{8}x^4$, el eje x, el eje y y la recta $x = 2$.

31. Obtenga el volumen del sólido generado al girar la región del ejercicio 30 alrededor de la recta $x = 2$.

32. Determine el volumen del sólido generado al girar la región limitada por la gráfica de $y = 4x - \frac{1}{8}x^4$, el eje y y la recta $y = 6$ alrededor de la recta $x = 2$.

33. Calcule el volumen del sólido generado al girar la región del ejercicio 32 alrededor del eje y.

34. Obtenga el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región acotada por las curvas $y = x^3$ y $x = y^3$. Considere los elementos rectangulares de área paralelos al eje de revolución.

35. Determine el volumen del sólido generado al girar alrededor de la recta $y = 1$ la región limitada por esa recta y la parábola $x^2 = 4y$. Considere los elementos rectangulares de área paralelos al eje de revolución.

36. Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y la región acotada por la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

37. Obtenga el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y la región limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x^2$, el eje x y las rectas $x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ y $x = \sqrt{\pi}$.

38. Determine el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y la región del primer cuadrante acotada por la curva $y = \cos x^2$ y los ejes coordenados.

39. La región del primer cuadrante limitada por la curva $x = \cos y^2$, el eje y y el eje x, con $0 \leq x \leq 1$, se gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido generado.

40. Obtenga el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y la región limitada por la gráfica de $y = |x - 3|$, y las rectas $x = 1, x = 5$ y $y = 0$. Tome los elementos rectangulares paralelos el eje de revolución.

En los ejercicios 41 a 50, utilice la graficadora para calcular el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje indicado la región del ejercicio señalado de la sección 4.9. Emplee el método de capas cilíndricas para expresar la respuesta con cuatro dígitos significativos.

41. La región del ejercicio 41 alrededor del eje y.

42. La región del ejercicio 42 alrededor del eje y.

43. La región del ejercicio 43 alrededor del eje x.

44. La región del ejercicio 44 alrededor del eje x.

45. La región del ejercicio 45 alrededor del eje y.

46. La región del ejercicio 46 alrededor de la recta $x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

47. La región del ejercicio 47 alrededor de la recta $x = 2$.

48. La región del ejercicio 48 alrededor de la recta $x = -1$

49. La región del ejercicio 49 alrededor del eje y.

50. La región del ejercicio 50 alrededor de la recta $x = 1$.

51. Se perfora un agujero de $2\sqrt{3}$ pulg de radio a través del centro de un sólido de forma esférica de 4 pul de radio. Determine el volumen del sólido extraído.

52. Se perfora un agujero de 2 cm de radio a través del centro de un sólido en forma de esfera con un radio de 6 cm, y el eje del agujero es un diámetro de la esfera. Obtenga el volumen de la parte del sólido que quedó.

53. Un sólido de revolución se genera al girar alrededor del eje y la región acotada por la curva $y = \sqrt[3]{x}$, el eje x y la recta $x = c$ $(c > 0)$. Considere los elementos rectangulares de área paralelos al eje de revolución a fin de calcular el valor de c para el cual el sólido tenga un volumen de 12π unidades cúbicas.

54. Determine el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y la región exterior a la curva $y = x^2$ y entre las rectas $y = 2x - 1$ y $y = x + 2$.

55. Explique en qué circunstancias es preferible calcular volúmenes de sólidos de revolución mediante el método de capas cilíndricas al método de discos o de arandelas.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 4

SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 4

1. Defina una *antiderivada* de una función f en un intervalo I.

2. Escriba una ecuación satisfecha por dos funciones f y g que tengan la misma antiderivada.

3. ¿Cómo se sabe que una antiderivada de una función f en un intervalo I permite obtener todas las antiderivadas de f en I? Invente un ejemplo particular.

4. ¿Cómo se demuestran los teoremas sobre antiderivación?

5. Explique cómo se antideriva una función polinomial. Invente un ejemplo para ilustrar la explicación.

6. En economía, ¿qué funciones pueden obtenerse mediante la antiderivación de otras funciones?

7. ¿Qué es la *regla de la cadena para antiderivación*, y cómo está relacionada con la regla de la cadena para diferenciación?

8. Invente un ejemplo para mostrar cómo se emplea la regla de la cadena para la antiderivación como una técnica de antiderivación.

9. Explique cuándo un *cambio de variable* es una técnica conveniente de antiderivación.

10. Invente un ejemplo para ilustrar cómo se utiliza un cambio de variable como técnica de antiderivación.

11. ¿Qué es una *ecuación diferencial separable*?

12. ¿Qué se entiende por *solución completa* de una ecuación diferencial?

13. Si un objeto se mueve libremente sobre una recta vertical, ¿cómo se obtiene una ecuación diferencial del movimiento que involucre la velocidad y el tiempo?

14. Si un objeto se mueve libremente sobre una recta vertical, ¿cómo se conoce la velocidad inicial utilizada en la solución de la ecuación diferencial de movimiento?

15. Si se sabe que la velocidad de un objeto es una función del tiempo, ¿cómo se obtiene una ecuación diferencial del movimiento que relacione la distancia y el tiempo?

16. Si un objeto se mueve libremente hacia arriba y después hacia abajo, ¿cómo se determina **(a)** la altura que alcanzará el objeto, **(b)** cuánto tiempo tardará el objeto en alcanzar el suelo, y **(c)** con qué rapidez golpea el objeto el suelo?

17. ¿Cómo se utiliza la *notación sigma* para escribir una suma finita? Invente un ejemplo.

18. Dé una definición precisa, que implique únicamente rectángulos inscritos, del *área de una región plana* limitada por la gráfica de una función f, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$.

19. Responda la sugerencia 18 si la definición debe involucrar sólo rectángulos circunscritos.

20. Explique por qué parece posible que el área de la región plana de las sugerencias 18 y 19 pueda definirse mediante rectángulos inscritos o circunscritos.

21. Invente un ejemplo de una función no polinomial y elija valores específicos para a y b que muestren cómo se aplica la definición de la sugerencia 18.

22. Utilice el ejemplo de la sugerencia 21 para ilustrar cómo se aplica la definición de la sugerencia 19.

23. ¿Qué es una *partición* de un intervalo cerrado $[a, b]$ y qué es la *norma* de la partición? Invente un ejemplo que ilustre estos conceptos.

24. ¿Qué es una *suma de Riemann*? Invente un ejemplo para ilustrar este concepto.

25. ¿Cuál es la relación entre integrales definidas y sumas de Riemann? Incluya un ejemplo en su respuesta.

26. ¿Qué es una *integral definida* y cómo se relaciona con el área de una región plana? Incluya ejemplos en su respuesta.

27. Invente un ejemplo de una integral definida que satisfaga la siguiente condición y explique cómo determinar que el ejemplo satisface la condición sin evaluar la integral definida: **(a)** el valor es positivo; **(b)** el valor es negativo; **(c)** el valor es cero.

28. Si a, b y c son tres números de un intervalo cerrado en el que la función f es integrable, establezca un teorema que proporcione una igualdad que contenga las integrales finitas de f y los tres intervalos cerrados $[a, b]$, $[a, c]$ y

$[b, c]$. ¿Existe alguna restricción en el orden de las magnitudes de a, b y c? Explique su respuesta e invente un ejemplo.

29. Establezca un teorema que proporcione una condición suficiente para que una función sea *integrable* en el intervalo cerrado $[a, b]$. ¿Es la condición también necesaria? Explique su respuesta.

30. Enuncie la hipótesis de un teorema que garantice que la integral definida de una función f en $[a, b]$ es mayor que o igual a la integral definida de una función g en el intervalo $[a, b]$. Invente un ejemplo para ilustrar su respuesta.

31. Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si m y M son, respectivamente, los valores de función mínimo absoluto y máximo absoluto en $[a, b]$, ¿qué desigualdad continua es satisfecha por la integral definida de f en $[a, b]$? Dé un ejemplo que ilustre su respuesta.

32. Establezca el *teorema del valor medio para integrales.* Invente un ejemplo para ilustrar este teorema.

33. Describa la interpretación geométrica del teorema del valor medio para integrales. Utilice un ejemplo particular en la descripción.

34. Si la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$, ¿qué es el *valor promedio* de f en $[a, b]$? Invente un ejemplo para mostrar cómo se calcula el valor promedio de una función en un intervalo cerrado.

35. Enuncie el *primer teorema fundamental del Cálculo.* Invente un ejemplo que ilustre su aplicación.

36. Establezca el *segundo teorema fundamental del Cálculo.* Invente un ejemplo para mostrar su aplicación.

37. ¿Por qué son importantes los dos teoremas fundamentales del Cálculo?

38. Si la función f es diferenciable en cada número del intervalo cerrado $[a, b]$, ¿puede concluirse que existe la integral definida de f en $[a, b]$? Explique su respuesta. Invente un ejemplo para ilustrar su respuesta.

39. Si la integral definida de una función f en el intervalo cerrado $[a, b]$ existe, ¿puede concluirse que f es diferenciable en el intervalo $[a, b]$? explique su respuesta. Invente un ejemplo que ilustre su respuesta.

40. Explique la diferencia entre una integral definida y una integral indefinida.

41. ¿Cómo calcularía mediante integración el área de una región plana acotada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, donde f es continua en $[a, b]$, en cada uno de los casos siguientes: **(i)** $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$; **(ii)** $f(x) \leq 0$ para toda x en $[a, b]$; **(iii)** $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, c]$ y $f(x) \leq 0$ para toda x en $[c, b]$?

42. Suponga que las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x)$ se intersectan en los puntos donde $x = a$ y $x = b$, y que f y g son continuas en $[a, b]$, ¿cómo calcularía mediante integración el área de una región plana acotada por estas dos gráficas en cada uno de los siguientes casos: **(i)** $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, b]$; **(ii)** $g(x) \geq f(x)$ para toda x en $[a, b]$; **(iii)** $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, c]$ y $g(x) \geq f(x)$ para toda x en $[c, b]$?

43. ¿En qué circunstancias no es posible calcular un valor exacto del área de la región plana limitada por las gráficas de dos funciones continuas f y g? Explique cómo utilizaría la graficadora para obtener un valor aproximado del área en esas circunstancias.

44. Describa cómo calcularía volúmenes de sólidos de revolución mediante el método de rebanado. Incluya un ejemplo en su descripción.

45. Describa cómo calcularía volúmenes de sólidos de revolución mediante el método de discos. Incluya un ejemplo en su descripción.

46. Describa cómo calcularía volúmenes de sólidos de revolución mediante el método de arandelas. Incluya un ejemplo en su descripción.

47. ¿Como determinaría cuál de los dos métodos, mediante discos o por medio de arandelas, utilizaría para calcular volúmenes de sólidos. Incluya un ejemplo para cada situación.

48. Explique en qué circunstancias es indispensable la graficadora para calcular volúmenes de sólidos. Incluya un ejemplo en su explicación.

49. Describa cómo calcularía el volumen de sólidos de revolución mediante el método de capas cilíndricas. Incluya un ejemplo en su descripción.

50. Describa cómo decidiría cuál de los tres métodos, por capas cilíndricas, arandelas o discos, emplear para calcular el volumen de un sólido de revolución. Incluya ejemplos en su descripción.

▶ EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 4

En los ejercicios 1 a 10, efectúe la antiderivación; esto es, evalúe la integral indefinida.

1. $\int (2x^3 - x^2 + 3)\, dx$ **2.** $\int 5x(2 + 3x^2)^8\, dx$

3. $\int x^4 \sqrt{x^5 - 1}\, dx$ **4.** $\int \sqrt{x}\,(1 + x^2)\, dx$

5. $\int \frac{s}{\sqrt{2s + 3}}\, ds$ **6.** $\int x^3 \sqrt{x^2 + 3}\, dx$

7. $\int \tan^2 3\theta\, d\theta$ **8.** $\int t \csc^2 t^2\, dt$

9. $\int \frac{5 \cos^2 x - 3 \tan x}{\cos x}\, dx$ **10.** $\int \operatorname{sen}^3 2\theta \cot 2\theta\, d\theta$

En los ejercicios 11 a 14, determine el valor exacto de la integral definida interpretándolo como la medida del área de una región plana y después calcule el área mediante el método de la sección 4.4; utilice rectángulos inscritos o circunscritos, como se indica. Verifique la respuesta evaluando la integral

mediante el segundo teorema fundamental del Cálculo. Para cada ejercicio dibuje una figura que muestre la región y el i-ésimo rectángulo.

11. $\int_2^4 x^2\,dx$; rectángulos inscritos

12. $\int_0^3 x^3\,dx$; rectángulos inscritos

13. $\int_1^2 (x^3 - 1)\,dx$; rectángulos inscritos

14. $\int_{-3}^2 (x^2 + 2)\,dx$; rectángulos inscritos

En los ejercicios 15 a 22, evalúe la integral definida mediante el segundo teorema fundamental del Cálculo. Apoye la respuesta empleando NINT *en la graficadora.*

15. $\int_2^3 \frac{12x}{(x^2-1)^2}\,dx$ **16.** $\int_{-5}^5 2x^3\sqrt{x^2+2}\,dx$

17. $\int_0^{\pi/6} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos^2 2\theta}\,d\theta$ **18.** $\int_{\pi/3}^{\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t \cos \frac{1}{2}t\,dt$

19. $\int_{-1}^7 \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}\,dx$ **20.** $\int_1^2 \frac{y}{\sqrt{5-y}}\,dy$

21. $\int_0^{\pi/2} (\tan^2 \frac{1}{2}x + \sec^2 \frac{1}{2}x)\,dx$

22. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 - \cos\theta)\csc^2\theta\,d\theta$

En los ejercicios 23 a 26, determine la solución completa de la ecuación diferencial.

23. $x^2 y \frac{dy}{dx} = (y^2 - 1)^2$ **24.** $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 30x$

25. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{2x-1}$ **26.** $\frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt{1-y^2}}{y\sqrt{2x^2+1}}$

27. La pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y) de una curva es $10 - 4x$, y el punto $(1, -1)$ está sobre la curva. Determine una ecuación de la curva.

28. La función costo marginal para cierta mercancía está dada por $C'(x) = 6x - 17$. Si el costo de producción de 2 unidades es \$25, obtenga la función de costo total.

29. La función de ingreso marginal para cierto artículo está dada por $R'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 10x + 12$. Determine **(a)** la función de ingreso total y **(b)** una ecuación que relacione a p y x (ecuación de demanda) donde x unidades son demandadas cuando p dólares es el precio por unidad.

30. Suponga que una compañía particular estima su ingreso bruto por ventas mediante la fórmula

$$\frac{dS}{dt} = 2(t-1)^{2/3}$$

donde S millones de dólares es el ingreso bruto de las ventas t años a partir de este momento. Si el ingreso bruto de las ventas del año en curso es de 8 millones de dólares, ¿cuál debe ser el ingreso bruto de las ventas esperado dentro de 2 años a partir de ahora?

31. El volumen de un globo se incrementa de acuerdo a la fórmula

$$\frac{dV}{dt} = \sqrt{t+1} + \frac{2}{3}t$$

donde V centímetros cúbicos es el volumen del globo a los t segundos. Si $V = 33$ cuando $t = 3$, calcule **(a)** una fórmula para V en términos de t; **(b)** el volumen del globo a los 8 s.

32. La matrícula de cierta escuela se ha incrementado a una tasa de $1\,000(t + 1)^{-1/2}$ estudiantes por año desde 1993. Si la matrícula en 1996 fue de 10 000 alumnos, **(a)** ¿cuál fue la matrícula en 1993? **(b)** ¿cuál es la matrícula esperada para el año 2001, si se supone que se incrementará a la misma tasa?

33. Es julio 31 y un tumor ha estado creciendo dentro del cuerpo de una persona de modo que t días a partir del 1o. de julio el volumen del tumor se ha incrementado a una tasa de $\frac{1}{100}(t + 6)^{1/2}$ centímetros cúbicos por día. Si el volumen del tumor el 4 de julio fue de 0.20 cm^3, ¿cuál es el volumen ahora?

34. Después de un experimento, un fabricante determinó que si producía x unidades por día de cierto artículo, el costo marginal estaba dado por $C'(x) = 0.3x - 11$, donde $C(x)$ dólares es el costo total de producción de x unidades. Si el precio de venta del artículo está fijo en \$19 por unidad y los costos generales son \$100 por día, calcule la máxima utilidad diaria que puede obtener.

35. Un fabricante de juguetes infantiles tiene un nuevo juguete que quiere introducir al mercado y desea determinar el precio de venta para el juguete de modo que la utilidad total sea máxima. Del análisis del precio y demanda de un juguete semejante, estimó que si x juguetes son demandados cuando p dólares es el precio por juguete, entonces $\frac{dp}{dx} = -\frac{p^2}{30\,000}$, y la demanda debe ser 1 800 cuando el precio es de \$10. Si $C(x)$ dólares es el costo de producción de x juguetes, entonces $C(x) = x + 7\,500$. Calcule el precio que debe cobrar el fabricante para que su utilidad sea máxima.

En los ejercicios 36 a 38, una partícula se mueve a lo largo de una recta. A los t segundos, s pies es la distancia dirigida de la partícula desde el origen, v pies por segundo es la velocidad de la partícula y a pies por segundo por segundo es su aceleración.

36. $a = 3t + 4$; $v = 5$ y $s = 0$ cuando $t = 0$. Exprese v y s en términos de t.

37. $a = 6\cos 2t$; $v = 3$ y $s = 4$ cuando $t = \frac{1}{2}\pi$. Exprese v y s en términos de t.

38. $a = 3s + 4$; $v = 5$ cuando $s = 1$. Obtenga una ecuación que contenga a v y s.

En los ejercicios 39 a 47, defina las variables como números y escriba una conclusión. En los ejercicios 40 a 44 y 46, suponga que la única fuerza que actúa es la aceleración debida a la gravedad, considerada como 32 pie/s^2 *o* 9.8 m/s^2 *en el sentido hacia abajo.*

39. Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo que si v centímetros por segundo es la velocidad de la partícula a los t segundos, entonces $v = 3 \cos 2\pi t$, donde el sentido positivo es hacia la derecha del origen. Si la partícula se encuentra en el origen al iniciar el movimiento, determine su posición cuando t es igual a **(a)** 0.2; **(b)** 0.8; **(c)** 1.7; **(d)** 2.25. Simule el movimiento en la graficadora y apoye sus respuestas.

40. Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 25 pie/s.
(a) ¿Durante cuánto tiempo subirá la piedra?
(b) ¿Qué tan alto llegará la piedra?
(c) ¿Cuánto tardará la piedra en llegar al suelo?
(d) Simule el movimiento en la graficadora y apoye sus respuestas de los incisos (a)–(c)
(e) ¿Con qué rapidez se estrellará la piedra contra el suelo?

41. Sin considerar la resistencia del aire, si se deja caer un objeto desde un avión que vuela horizontalmente a una altura de 30 000 pie sobre el océano, **(a)** ¿cuánto tardará el objeto en llegar al agua? **(b)** Con qué rapidez golpeará el objeto el agua?

42. Suponga que se dispara una bala directamente hacia abajo desde el avión del ejercicio 41 con una velocidad de salida de 2 500 pie/s. Si se desprecia la resistencia del aire, **(a)** ¿cuánto tardará la bala en llegar al océano? **(b)** ¿con qué rapidez chocará la bala contra el océano?

43. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde la azotea de una casa a 64 pie del suelo, con una velocidad inicial de 48 pie/s.
(a) ¿Cuánto tardará la pelota en alcanzar su máxima altura?
(b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?
(c) ¿Cuánto tardará la pelota en llegar al suelo?
(d) ¿Con qué velocidad golpeará la pelota el suelo?

44. Suponga que la pelota del ejercicio 43 se deja caer desde la azotea de una casa.
(a) ¿Cuánto tardará la pelota en llegar al suelo?
(b) ¿Con qué velocidad golpeará la pelota el suelo?

45. Un cohete se lanza desde el suelo con una aceleración constante de 25 m/s^2. Determine **(a)** la velocidad del cohete 1 minuto después de su lanzamiento, y **(b)** ¿Qué tan alto llegará el cohete en ese instante?

46. Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 200 m/s desde un punto situado a 2.5 m del suelo.
(a) Si s metros es la altura del proyectil desde el suelo a los t segundos después de ser disparado, exprese s en términos de t.
(b) ¿Qué altura, desde el suelo, alcanzará el proyectil 3 s después de ser disparado?
(c) ¿Cuánto tardará el proyectil en alcanzar una altura de 600 m desde el suelo.

47. Un automóvil se desplaza a una velocidad constante de 60 mi/h a lo largo de una autopista recta y no se detiene ante una señal de alto. Si 3 s más tarde una patrulla de caminos parte del reposo desde la señal de alto y mantiene una aceleración constante de 8 pie/s^2, ¿cuánto tardará la patrulla en alcanzar al automóvil, y a qué distancia ocurrirá esto? También determine la rapidez de la patrulla cuando alcance al automóvil.

En los ejercicios 48 y 49, calcule la suma.

48. $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} 2i(i^3 - 1)$ **49.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{41} (\sqrt[3]{3i-1} - \sqrt[3]{3i+2})$

50. Demuestre que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$, y verifique la fórmula para $n = 1, 2$ y 3.

51. Demuestre que cada una de las siguientes desigualdades se cumple:

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x-3} \geq \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$

(b) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{x} \geq \int_{1}^{2} \frac{dx}{x-3}$

(c) $\displaystyle\int_{4}^{5} \frac{dx}{x-3} \geq \int_{4}^{5} \frac{dx}{x}$

52. Exprese como una integral definida y evalúe la integral: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} (8\sqrt{i}/n^{3/2}$ *Sugerencia:* considere la función f para la cual $f(x) = \sqrt{x}$.

En los ejercicios 53 y 54, evalúe la integral definida mediante el segundo teorema fundamental del Cálculo. Apoye las respuestas usando NINT *en la graficadora.*

53. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos t}\, dt$ **54.** $\displaystyle\int_{0}^{3} \sqrt{x^2 - 2x + 6}\, dx$

En los ejercicios 55 y 56, evalúe la integral definida mediante el segundo teorema fundamental del Cálculo. Apoye la respuesta utilizando NINT *en la graficadora.*

55. $\displaystyle\int_{-3}^{3} |x-2|^3 dx$ **56.** $\displaystyle\int_{-2}^{2} x|x-3|\, dx$

En los ejercicios 57 a 60, calcule la derivada.

57. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{x}^{4} (3t^2 - 4)^{3/2}\, dt$ **58.** $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} \frac{4}{1+t^2}\, dt$

59. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{x}^{x^2} \frac{1}{t} dt \quad x > 0$

60. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{1}^{\sec x} \sqrt{t^2 - 1}\, dt \quad 0 < x < \tfrac{1}{2}\pi$

61. Determine el valor promedio de función coseno en el intervalo cerrado $[a, a + 2\pi]$.

62. Interprete el teorema del valor medio para integrales (4.6.3) en términos de un valor de promedio de la función.

63. Si $f(x) = x^2\sqrt{x-3}$, calcule el valor promedio de f en $[7, 12]$.

64. **(a)** Calcule el valor promedio de la función f definida por $f(x) = 1/x^2$ en el intervalo $[1, r]$.

(b) Si A es el valor promedio determinado en el inciso (a), calcule $\lim_{r \to +\infty} A$.

65. Un cuerpo cae, desde su posición de reposo, y recorre una distancia de s pies antes de llegar al suelo. Si la única fuerza que actúa es debida a la gravedad, la cual proporciona al cuerpo una aceleración de g pies por segundo cuadrado hacia el suelo, demuestre que el valor promedio de la velocidad, expresada como una función de la distancia, mientras recorre esta distancia es $\frac{2}{3}\sqrt{2gs}$ pies por segundo, y que la velocidad promedio es dos terceras partes de la velocidad final.

66. Suponga que se deja caer una pelota desde su estado en reposo y después de t segundos su distancia dirigida, desde el punto donde se dejó caer, es s pies y su velocidad es v pies por segundo. No considere la resistencia del aire. Cuando $t = t_1, s = s_1$ y $v = v_1$.

(a) Exprese v como una función de t, $v = f(t)$, y calcule el valor promedio de f en $[0, t_1]$.

(b) Exprese v como una función de s, $v = h(s)$, y determine el valor promedio de h en $[0, s_1]$,

(c) Escriba los resultados de los incisos (a) y (b) en términos de t_1, y determine qué velocidad promedio es mayor.

En los ejercicios 67 a 72, calcule el área de la región limitada por la curva y las rectas dadas. En cada ejercicio haga lo siguiente: (a) dibuje una figura que muestre la región y un elemento rectangular de área; (b) exprese la medida del área de la región como el límite de una suma de Riemann; (c) calcule el límite del inciso (b) evaluando una integral definida mediante el segundo teorema fundamental del Cálculo.

67. $y = 9 - x^2$; eje x; eje y; $x = 2$

68. $y = 3\cos\frac{1}{2}x$; eje x; $x = -\frac{1}{2}\pi$; $x = \frac{1}{2}\pi$

69. $y = 2\sqrt{x-1}$; eje x; $x = 5$; $x = 17$

70. $y = \dfrac{4}{x^2} - x$; eje x; $x = -2$; $x = -1$

71. $x^2 + y - 5 = 0$; $y = -4$

72. $y = x^2 - 7x$; eje x; $x = 2$; $x = 4$

En los ejercicios 73 a 76, aproxime con cuatro cifras decimales el área de la región acotada por las curvas realizando lo siguiente: (a) dibuje una figura que muestre la región y un elemento rectangular de área; (b) exprese la medida del área de la región como el límite de una suma de Riemann; (c) aproxime el límite del inciso (b) evaluando una integral definida utilizando NINT *en la graficadora.*

73. $y = 9 - x^2$; $y = x^4$

74. $y = 16 - x^2$; $y = x^3$; eje y

75. $y = x^2$; $y = \cos^2 x$

76. $y = x^2$; $y = \frac{1}{4}\tan^2 x$; $0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$

En los ejercicios 77 a 81, calcule el área exacta de la región descrita.

77. La región limitada por las curvas $x = y^2$ y $x = y^3$.

78. La región acotada por las curvas $y = \operatorname{sen} 2x$ y $y = \operatorname{sen} x$, desde $x = 0$ hasta $x = \frac{1}{3}\pi$.

79. La región limitada por las curvas $y = \cos x$ y $y = \operatorname{sen} x$, desde $x = \frac{1}{4}\pi$ hasta $x = \frac{5}{4}\pi$.

80. La región acotada por el lazo (o bucle) de la curva $y^2 = x^2(4 - x)$.

81. La región del primer cuadrante limitada por el eje y y las curvas $y = \sec^2 x$ y $y = 2\tan^2 x$.

82. Suponga que en un día particular en cierta ciudad la temperatura Fahrenheit es $f(t)$ grados t horas después a partir de la media noche, donde

$$f(t) = 60 - 15\operatorname{sen}\tfrac{1}{12}\pi(8 - t) \qquad 0 \le t \le 24$$

(a) Dibuje la gráfica de f. Determine la temperatura a las **(b)** 12 de la noche; **(c)** 8 a.m.; **(d)** 12 del día; **(e)** 2 p.m. y **(f)** 6 p.m. **(g)** Calcule la temperatura promedio entre las 8 a.m. y las 6 p.m.

83. Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región limitada por la curva $y = x^4$, la recta $x = 1$ y el eje x.

84. Determine el volumen del sólido generado si la región del ejercicio 83 se gira alrededor del eje y.

85. La región acotada por la curva $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$, el eje x y la recta $x = \frac{1}{2}\pi$ se gira alrededor del eje x. Obtenga el volumen del sólido generado.

86. La región limitada por la curva $x = \sqrt{\cos y}$, la recta $y = \frac{1}{6}\pi$ y el eje y, donde $\frac{1}{6}\pi \le y \le \frac{1}{2}\pi$, se gira alrededor del eje y. Calcule el volumen del sólido generado.

87. La región limitada por la curva $y = \csc x$, el eje x y las rectas $x = \frac{1}{4}\pi$ y $x = \frac{1}{2}\pi$ se gira alrededor del eje x. Determine el volumen del sólido generado.

88. Obtenga el volumen del sólido de revolución generado cuando la región acotada por la parábola $y^2 = x$, el eje x, y la recta $x = 4$ se gira alrededor de la recta $x = 4$. Considere los elementos de área paralelos al eje de revolución.

89. Determine el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y la región limitada por la parábola $x = y^2 + 2$ y la recta $x = y + 8$.

90. La región del primer cuadrante acotada por las curvas $x = y^2$ y $x = y^4$ se gira alrededor del eje y. Calcule el volumen del sólido generado.

91. La base de un sólido es la región plana limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x = 8$. Obtenga el volumen del sólido si cada sección plana perpendicular al eje de la base es un cuadrado.

92. Utilice integración para calcular el volumen de la porción de la esfera de radio r unidades cortado por un plano a h unidades de un polo.

93. Determine el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región limitada por la curva $y = |x - 2|$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 4$.

94. La base de un sólido es la región acotada por una circunferencia que tiene un radio de r unidades, y cada sección plana perpendicular a un diámetro fijo de la base es un cuadrado para el cual una cuerda de la circunferencia es una diagonal. Calcule el volumen del sólido.

95. Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor de la recta $y = -1$ la región por arriba del eje x limitada por la recta $2y = x + 3$, y las curvas $y^2 + x = 0$ y $y^2 - 4x = 0$ desde $x = -1$ hasta $x = 1$.

96. Una esfera de 10 cm de radio se intersecta por dos planos paralelos en el mismo lado del centro de la esfera. La distancia entre el centro de la esfera y uno de los planos es de 1 cm, y la distancia entre los dos planos es de 6 cm. Calcule el volumen de la porción sólida de la esfera entre los dos planos.

97. Resuelva el ejercicio 96 considerando que los dos planos están en lados opuestos del centro de la esfera y las demás condiciones son las mismas.

98. Al girar alrededor del eje y la región acotada por la curva $y^3 = x$, el eje x y la recta $x = c$, donde $c > 0$, se genera un sólido. ¿Para qué valor de c el volumen del sólido será de 12π unidades cúbicas?

En los ejercicios 99 a 106, utilice la graficadora para calcular el volumen del sólido generado al girar la región dada alrededor del eje indicado. Considere los elementos rectangulares de área perpendiculares o paralelos al eje de revolución según se indica, y exprese la respuesta con cuatro dígitos significativos.

99. La región limitada por la gráfica de $y = \sqrt[3]{x^2 - 7}$ y el eje x; alrededor del eje x; elementos perpendiculares.

100. La región del ejercicio 99; alrededor del eje y; elementos paralelos.

101. La región del ejercicio 99; alrededor del eje x; elementos paralelos.

102. La región del ejercicio 99; alrededor del eje y; elementos perpendiculares.

103. La región acotada por las gráficas de $y = \cos x^2$ y $y = x^3$, y el eje y; alrededor del eje y; elementos paralelos.

104. La región limitada por las gráficas de $y = \cos \sqrt{x}$ y $y = x^2$, y el eje y; alrededor del eje x; elementos perpendiculares.

105. La región limitada por las gráficas de

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1 \text{ y } y = x^2 - 2x + 2$$

no intersectada por la recta $y = 4$; alrededor de la recta $y = 4$; elementos perpendiculares.

106. La región del ejercicio 105; alrededor de la recta $x = -1$; elementos paralelos.

107. El campanario de una iglesia mide 30 pie de altura, y cada sección plana horizontal es un cuadrado cuyos lados miden un décimo de la distancia de la sección plana desde la parte superior del campanario. Calcule el volumen del campanario.

108. Determine mediante el método de rebanado el volumen del tetraedro que tiene tres caras mutuamente perpendiculares y tres aristas perpendiculares entre si, cuyas longitudes son a, b y c unidades.

109. La región limitada por un pentágono cuyos vértices son $(-4, 4)$, $(-2, 0)$, $(0, 8)$, $(2, 0)$ y $(4, 4)$, se gira alrededor del eje x. Obtenga el volumen del sólido generado.

110. La región acotada por las curvas $y = \tan x$ y $y = \cot x$ y el eje x, donde $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$, se gira alrededor del eje x. Obtenga el volumen del sólido generado.

111. La región de $x = 0$ a $x = \frac{1}{2}\pi$ limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$, la recta $y = 1$, y el eje y, se gira alrededor del eje x. Determine el volumen del sólido generado. *Sugerencia:* utilice la identidad $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

112. De un cilindro circular recto con un radio de r unidades, se corta una cuña mediante dos planos, uno perpendicular al eje del cilindro y el otro intersecta al primero a lo largo de un diámetro de la sección plana circular, formando un ángulo de 30°. Calcule el volumen de la cuña.

En los ejercicios 113 y 114, aplique el segundo teorema fundamental del Cálculo para evaluar la integral definida. Después calcule el valor de c que satisfaga el teorema del valor medio para integrales.

113. $\displaystyle\int_0^3 (x^2 + 1)\, dx$ **114.** $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$

115. Sea f una función continua en $[a, b]$ y $\int_a^b f(t)\, dt \neq 0$. Demuestre que para cualquier número k en $(0, 1)$ existe un número c en (a, b) tal que $\int_a^c f(t)\, dt = k \int_a^b f(t)\, dt$. *Sugerencia:* considere la función F para la cual $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt / \int_a^b f(t)\, dt$, y aplique el teorema del valor medio.

116. Sea $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\, dt$ y $x > 0$. Demuestre que F es una función constante mostrando que $F'(x) = 0$. *Sugerencia:* utilice el primer teorema fundamental del Cálculo después de escribir la integral dada como la diferencia de dos integrales.

117. Si $f(x) = x + |x + 1|$ y

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

demuestre que F es una antiderivada de f en $(-\infty, +\infty)$.

118. Sean f y g dos funciones tales que para toda x en $(-\infty, +\infty)$ $f'(x) = g(x)$ y $g'(x) = -f(x)$. Además suponga que $f(0) = 0$ y $g(0) = 1$. Demuestre que

$$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1$$

Sugerencia: considere las funciones F y G donde $F(x) = [f(x)]^2$ y $G(x) = -[g(x)]^2$, y muestre que $F'(x) = G'(x)$ para toda x.

119. Evalúe $\displaystyle\int_0^{\pi} \left|\cos x + \tfrac{1}{2}\right| dx$

120. Invente un ejemplo de una función discontinua para la cual la conclusión del teorema del valor medio para integrales (**a**) no se cumpla, y (**b**) se cumpla.

Capítulo 5

Funciones logarítmicas, exponenciales, trigonométricas inversas e hiperbólicas

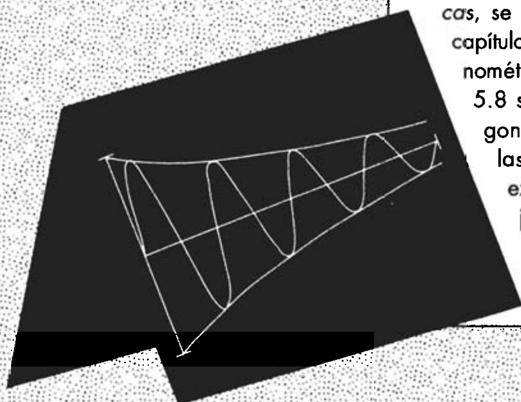
VISIÓN PRELIMINAR

Las funciones que no son algebraicas se denominan *trascendentes*, ejemplo de las cuales son las seis funciones trigonométricas. Las funciones *logarítmica natural* y *exponencial natural* también son funciones trascendentes y se estudiarán en este capítulo. Como esas dos funciones son *inversas* una de la otra, se dedicará la primera sección al estudio de las *funciones inversas* y sus propiedades. En la discusión se tratarán condiciones suficientes para que una función tenga una inversa, los teoremas de la función inversa y de la derivada de la inversa de una función.

La función logarítmica natural *ln* se define como una integral en la sección 5.2 y la función exponencial natural *exp* se define como inversa de la función logarítmica natural. Con estos antecedentes se podrá definir una potencia irracional de un número real.

Las funciones *ln* y *exp* se aplican en la sección 5.6. Las aplicaciones incluyen las *leyes de crecimiento* y *decrecimiento* que surgen en una gran variedad de campos como biología, psicología, sociología, química, física, administración y economía.

Las restantes categorías de funciones trascendentes, *funciones trigonométricas inversas* y *funciones hiperbólicas*, se estudian en las tres últimas secciones de este capítulo. La sección 5.7 se dedica a las funciones trigonométricas inversas y sus derivadas. En la sección 5.8 se tratan integrales que producen funciones trigonométricas inversas. Las funciones hiperbólicas, las cuales se definen en términos de la función exponencial natural, tienen propiedades semejantes a las de las funciones trigonométricas. Las funciones hiperbólicas se estudian junto con sus inversas en la sección 5.9.



5.1. INVERSA DE UNA FUNCIÓN

La palabra *inversa* se trató al principio de este libro en relación con las operaciones inversas del Cálculo de diferenciación y antiderivación. En un par de operaciones inversas esencialmente una "deshace" lo que la otra hace. En el ejemplo ilustrativo siguiente se utilizan pares de funciones asociadas con operaciones aritméticas inversas.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

(a) Sean $f(x) = x + 4$ y $g(x) = x - 4$. Entonces

$$f(g(x)) = f(x - 4) = (x - 4) + 4 = x \qquad g(f(x)) = g(x + 4) = (x + 4) - 4 = x$$

(b) Sean $f(x) = 2x$ y $g(x) = \frac{x}{2}$. Entonces

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2}\right) = 2\left(\frac{x}{2}\right) = x \qquad g(f(x)) = g(2x) = \left(\frac{2x}{2}\right) = x$$

(c) Sean $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Entonces

$$f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x \qquad g(f(x)) = g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$$

◀

Cada par de funciones f y g del ejemplo ilustrativo 1 satisface las dos afirmaciones siguientes:

$$f(g(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en el dominio de } g$$

y

$$g(f(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en el dominio de } f$$

Observe que para las funciones f y g en estas dos ecuaciones las funciones compuestas $f(g(x))$ y $g(f(x))$ son iguales, relación que en general no es cierta para funciones arbitrarias f y g. Posteriormente se verá (en el ejemplo ilustrativo 5) que cada par de funciones del ejemplo 1 es un conjunto de *funciones inversas*, y que es la razón por la que se satisfacen las dos ecuaciones anteriores.

Se llegará a la definición formal de la *inversa de una función* despúes de consider algunas funciones particulares más. La figura 1 muestra la gráfica de la función definida por

$$f(x) = x^2$$

El dominio de f es el conjunto de números reales y su contradominio es el intervalo $[0, +\infty)$. Observe que como $f(2) = 4$ y $f(-2) = 4$, el número 4 es el valor de función de dos números distintos del dominio de f. Además, cada número diferente de 0 del contradominio de esta función es el valor de función de dos números diferentes de su dominio. En particular, $\frac{25}{4}$ es el valor de función de $\frac{5}{2}$ y $-\frac{5}{2}$, 1 es valor de función de 1 y -1, y 9 es el valor de función de 3 y -3.

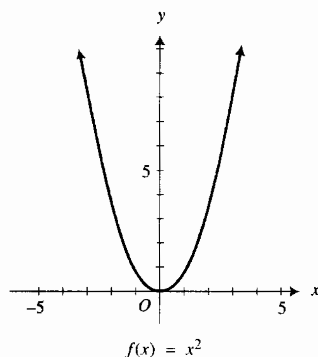
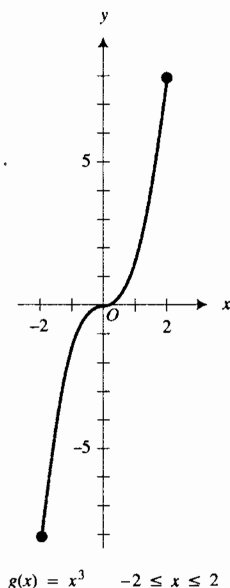


FIGURA 1



$g(x) = x^3 \quad -2 \leq x \leq 2$

FIGURA 2

Una situación diferente ocurre con la función g definida por

$$g(x) = x^3 \qquad -2 \leq x \leq 2$$

El dominio de g es el intervalo cerrado $[-2, 2]$, y su contradominio es $[-8, 8]$. La gráfica de g se muestra en la figura 2. Para esta función, un número de su contradominio es el valor de función de uno y sólo un número de su dominio. A tales funciones se les llama *uno a uno*.

5.1.1 Definición de función uno a uno*

Se dice que una función f es **uno a uno** si cada número de su contradominio corresponde a exactamente un número de su dominio; es decir, para toda x_1 y x_2 del dominio de f

$$\text{si} \quad x_1 \neq x_2, \quad \text{entonces} \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

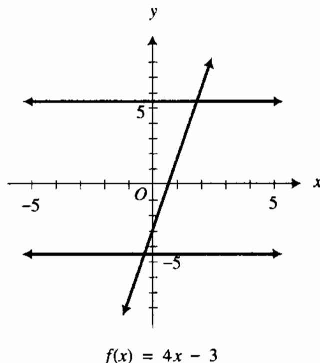
$$\Leftrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2) \quad \text{sólo cuando} \quad x_1 = x_2$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 La función definida por $f(x) = x^2$ no satisface la definición anterior porque, por ejemplo, 3 y −3 son dos números diferentes de su dominio, y sin embargo, $f(3) = f(-3)$. Por tanto, esta función no es uno a uno. ◀

Se sabe que una recta vertical puede intersectar la gráfica de una función en sólo un punto. Para una función uno a uno, también es cierto que una recta horizontal puede intersectar la gráfica a lo más en un punto. Observe que ésta es la situación para la función uno a uno definida por $f(x) = x^3$, donde $-2 \leq x \leq 2$, cuya gráfica se muestra en la figura 2. Además, observe en la figura 1 que para la función definida por $f(x) = x^2$, la cual no es uno a uno, cualquier recta horizontal por arriba del eje x intersecta la gráfica en dos puntos. Por tanto, se tiene el siguiente criterio geométrico para determinar si una función es uno a uno.

Criterio de la recta horizontal

Una función es uno a uno si y sólo si cada recta horizontal intersecta la gráfica de la función a lo más en un punto.



$f(x) = 4x - 3$

FIGURA 3

EJEMPLO 1 Aplique el criterio de la recta horizontal para determinar si la función es uno a uno:

(a) $f(x) = 4x - 3$ **(b)** $f(x) = (x + 1)^4$

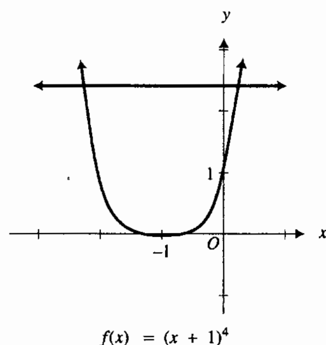
(c) $f(x) = |x|$ **(d)** $f(x) = \dfrac{3x + 4}{x - 2}$

Solución

(a) Esta función es lineal, y su gráfica es la recta de la figura 3. Como cualquier recta horizontal intersecta la gráfica en exactamente un punto, la función es uno a uno.

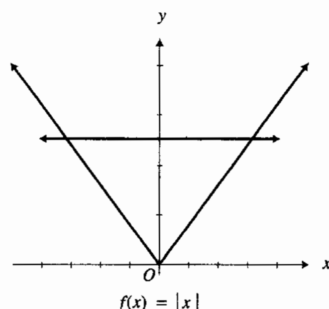
(b) La gráfica de esta función, presentada en la figura 4, muestra que cualquier recta horizontal por arriba del eje x intersecta la gráfica en dos puntos. Por tanto, la función no es uno a uno.

* **N. del T.** Otro nombre para una función uno a uno es *inyectiva*.



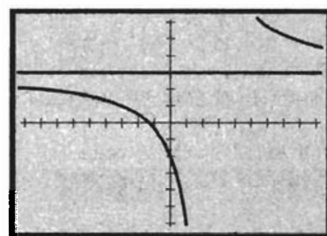
$f(x) = (x + 1)^4$

FIGURA 4



$f(x) = |x|$

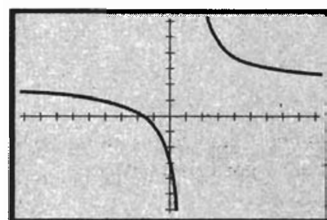
FIGURA 5



[−9.4, 9.4] por [−6.2, 6.2]

$f(x) = \dfrac{3x + 4}{x - 2}$ y $y = 3$

FIGURA 6



[−9.4, 9.4] por [−6.2, 6.2]

$f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$

FIGURA 7

(c) La gráfica de la función valor absoluto se muestra en la figura 5. Observe que cualquier recta horizontal por arriba del eje x intersecta la gráfica en dos puntos. Así, la función valor absoluto no es uno a uno.

(d) La figura 6 presenta la gráfica de la función racional dada y su asíntota horizontal, la recta $y = 3$, trazadas en el mismo rectángulo de inspección. Cualquier recta horizontal, excepto la asíntota, intersecta la gráfica en exactamente un punto. Por tanto, la función es uno a uno. ◀

El teorema siguiente proporciona un criterio que en ocasiones puede aplicarse para demostrar analíticamente que una función es uno a uno.

5.1.2 Teorema

Si una función es monótona en un intervalo, entonces es uno a uno en el intervalo.

Demostración Suponga que la función f es creciente en el intervalo I. Si x_1 y x_2 son dos números del intervalo y $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1 < x_2$ o $x_2 < x_1$. Si $x_1 < x_2$, entonces de la definición de función creciente (3.4.1), $f(x_1) < f(x_2)$; de modo que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Si $x_2 < x_1$, entonces $f(x_2) < f(x_1)$; de modo que otra vez $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por tanto, de la definición 5.1.1, f es uno a uno en el intervalo. La demostración es semejante si f es decreciente en el intervalo. ■

Para aplicar el teorema 5.1.2, primero se debe determinar si la función es creciente o decreciente en un intervalo. El teorema 3.4.3 puede emplearse para este propósito.

▶ EJEMPLO 2 Si

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$$

demuestre analíticamente que f es uno a uno en cada uno de los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, +\infty)$. Apoye gráficamente la respuesta.

Solución El dominio de f es el conjunto de los números reales diferentes de 1, o equivalentemente, el conjunto $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Al calcular $f'(x)$ se obtiene

$$f'(x) = \frac{2(x - 1) - (2x + 3)}{(x - 1)^2}$$
$$= -\frac{5}{(x - 1)^2}$$

Como $f'(x) < 0$ para toda $x \neq 1$, se concluye por el teorema 3.4.3 que f es decreciente en cada uno de los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, +\infty)$. Por tanto, por el teorema 5.1.2, f es uno a uno en cada uno de estos intervalos.

La figura 7 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-9.4, 9.4]$ por $[-6.2, 6.2]$, la cual no solo apoya el hecho de que f es uno a uno en cada uno de los intervalos, sino que también es uno a uno en su dominio ◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Considere la ecuación

$$y = x^3 \qquad -2 \leq x \leq 2 \tag{1}$$

Esta ecuación define la función g, que es uno a uno, discutida antes de presentar la definición 5.1.1, donde

$$g(x) = x^3 \qquad -2 \leq x \leq 2$$

La función g es el conjunto de pares ordenados (x, y) que satisfacen (1). Si se resuelve (1) para x, se obtiene

$$x = \sqrt[3]{y} \qquad -8 \leq y \leq 8 \tag{2}$$

la cual define una función G donde

$$G(y) = \sqrt[3]{y} \qquad -8 \leq y \leq 8$$

La función G es el conjunto de pares ordenados (y, x) que satisfacen (2). ◀

La función G del ejemplo ilustrativo 3 se denomina *inversa* de la función g. En la siguiente definición formal de la inversa de una función, se utiliza la notación f^{-1} para denotar la inversa de f. Esta expresión se lee "f inversa", y no debe confundirse con el uso de -1 como exponente.

5.1.3 Definición de la inversa de una función

Si f es una función uno a uno considerada como el conjunto de pares ordenados (x, y), entonces existe una función f^{-1}, llamada **inversa** de f, que es el conjunto de pares ordenados (y, x) definida por

$$x = f^{-1}(y) \quad \text{si y sólo si} \quad y = f(x)$$

El dominio de f^{-1} es el contradominio de f y el contradominio de f^{-1} es el dominio de f.

En la definición anterior la condición de que f debe ser uno a uno asegura que $f^{-1}(y)$ es única para cada valor de y.

Se elimina y de las ecuaciones de la definición al escribir la ecuación

$$f^{-1}(y) = x$$

y sustituir y por $f(x)$, obteniéndose

$$f^{-1}(f(x)) = x \tag{3}$$

donde x está en el dominio de f.

Si se elimina x del mismo par de ecuaciones escribiendo la ecuación

$$f(x) = y$$

y reemplazando x por $f^{-1}(y)$, se tiene

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

donde y está en el dominio de f^{-1}. Como el símbolo empleado para la variable independiente es arbitrario, se puede sustituir y por x para obtener

$$f(f^{-1}(x)) = x \tag{4}$$

donde x está en el dominio de f^{-1}.

De las ecuaciones (3) y (4) se ve que si f^{-1} es la inversa de la función f, entonces la inversa de f^{-1} es f. Este resultado se establece formalmente en el teorema siguiente.

5.1.4 Teorema

Si f es una función uno a uno y tiene a f^{-1} como su inversa, entonces f^{-1} es una función uno a uno y tiene a f como su inversa. Además,

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en el dominio de } f$$

y

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en el dominio de } f^{-1}$$

Se emplea el término funciones inversas cuando se hace referencia a una función y su inversa.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** En el ejemplo ilustrativo 3, la función G definida por

$$G(y) = \sqrt[3]{y} \qquad -8 \leq y \leq 8$$

es la inversa de la función g definida por

$$g(x) = x^3 \qquad -2 \leq x \leq 2$$

Por tanto, al reemplazar g^{-1} por G se obtiene

$$g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} \qquad -8 \leq y \leq 8$$

o, equivalentemente, si se sustituye y por x,

$$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \qquad -8 \leq x \leq 8$$

Observe que el dominio de g es $[-2, 2]$, que es el contradominio de g^{-1}; así mismo, el contradominio de g es $[-8, 8]$, el cual es el dominio de g^{-1}. ◀

Si una función f tiene una inversa, entonces $f^{-1}(x)$ puede determinarse mediante el método empleado en el siguiente ejemplo ilustrativo.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** Cada una de las funciones del ejemplo ilustrativo 1 es uno a uno. Por tanto, $f^{-1}(x)$ existe. Para cada función se calcula $f^{-1}(x)$ a partir de la definición de $f(x)$ al sustituir y por $f(x)$ y resolver la ecuación que resulta para x. Este procedimiento proporciona la ecuación $x = f^{-1}(y)$. Entonces se tiene la definición de f^{-1}, de la cual se obtiene $f^{-1}(x)$.

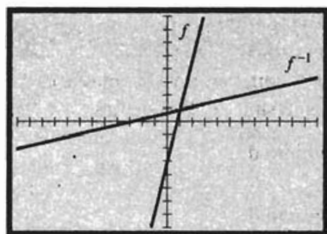
(a)
$$\begin{aligned} f(x) &= x + 4 \\ y &= x + 4 \\ x &= y - 4 \\ f^{-1}(y) &= y - 4 \\ f^{-1}(x) &= x - 4 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} f(x) &= 2x \\ y &= 2x \\ x &= \frac{y}{2} \\ f^{-1}(y) &= \frac{y}{2} \\ f^{-1}(x) &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \\ y &= x^3 \\ x &= \sqrt[3]{y} \\ f^{-1}(y) &= \sqrt[3]{y} \\ f^{-1}(x) &= \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

Observe que la función f^{-1} en cada inciso es la función g del inciso correspondiente del ejemplo ilustrativo 1. ◀

▶ ***EJEMPLO 3*** Determine $f^{-1}(x)$ para la función f del ejemplo 1(a) y verifique las ecuaciones del teorema 5.1.4 para f y f^{-1}. Trace las gráficas de f y f^{-1} en el mismo rectángulo de inspección.



[−12, 12] por [−8, 8]

$f(x) = 4x - 3$ y $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{4}$

FIGURA 8

Solución En el ejemplo 1(a) se mostró, mediante el criterio de la recta horizontal, que la función definida por

$$f(x) = 4x - 3$$

es uno a uno. Por tanto, existe f^{-1}. Para determinar $f^{-1}(x)$, se escribe la ecuación

$$y = 4x - 3$$

y se resuelve para x, obteniéndose

$$x = \frac{y+3}{4}$$

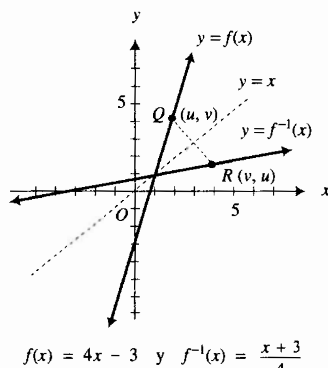
En consecuencia,

$$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{x+3}{4}$$

Al verificar las ecuaciones del teorema 5.1.4 se tiene

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}(4x-3) \\ &= \frac{(4x-3)+3}{4} \\ &= \frac{4x}{4} \\ &= x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= f\left(\frac{x+3}{4}\right) \\ &= 4\left(\frac{x+3}{4}\right) - 3 \\ &= (x+3) - 3 \\ &= x \end{aligned}$$

La figura 8 muestra las gráficas de f y, f^{-1} trazadas en el mismo rectángulo de inspección. ◀



$f(x) = 4x - 3$ y $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{4}$

FIGURA 9

Refiérase a la figura 9, la cual presenta las gráficas de f y f^{-1} del ejemplo 3 con el punto $Q(u, v)$ en la gráfica de f y el punto $R(v, u)$ sobre la gráfica de f^{-1}. El segmento de recta QR de la figura es perpendicular a la recta $y = x$ y es bisectado por ella. El punto Q es la *reflexión del punto R* con respecto a la recta $y = x$, y el punto R es la *reflexión del punto Q* con respecto a la recta $y = x$.

Si x y y se intercambian en la ecuación $y = f(x)$, se obtiene la ecuación $x = f(y)$, y la gráfica de la ecuación $x = f(y)$ es la *reflexión de la gráfica* de la ecuación $y = f(x)$ con respecto a la recta $y = x$. Como la ecuación $x = f(y)$ es equivalente a la ecuación $y = f^{-1}(x)$, la gráfica de la ecuación $y = f^{-1}(y)$ es la reflexión de la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ con respecto a la recta $y = x$. Por tanto, si una función tiene una inversa, las gráficas de las funciones son reflexiones una de la otra con respecto a la recta $y = x$.

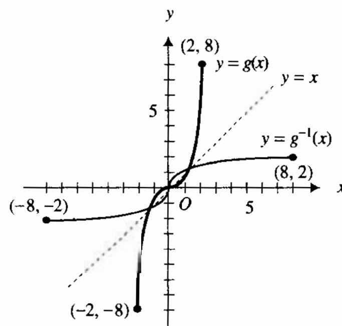
▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 6** Las funciones g y g^{-1} del ejemplo ilustrativo 4 están definidas por

$$g(x) = x^3 \qquad -2 \leq x \leq 2$$

y

$$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \qquad -8 \leq x \leq 8$$

Las gráficas de g y g^{-1} se muestran en la figura 10. Observe que estas gráficas son reflexiones una de la otra con respecto a la recta $y = x$. ◀



$g(x) = x^3 \quad -2 \leq x \leq 2$

$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \quad -8 \leq x \leq 8$

FIGURA 10

▶ ***EJEMPLO 4*** Determine $f^{-1}(x)$ para la función f del ejemplo 2, y verifique las ecuaciones del teorema 5.1.4. Trace las gráficas de f y f^{-1} y la recta $y = x$ en el mismo rectángulo de inspección y observe que las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones una de la otra con respecto a la recta $y = x$.

Solución La función f del ejemplo 2 está definida por

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

Como f es uno a uno, según se mostró en el ejemplo 2, f tiene una inversa f^{-1}. Para determinar f^{-1}, se considera $y = f(x)$ y se resuelve para x, obteniéndose $x = f^{-1}(y)$. Así

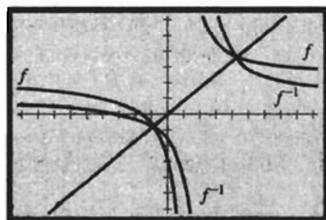
$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+3}{x-1} \\ xy - y &= 2x + 3 \\ x(y-2) &= y + 3 \\ x &= \frac{y+3}{y-2} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{y-2} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

El dominio de f^{-1} es el conjunto de números reales diferentes de 2. Al verificar las ecuaciones del teorema 5.1.4 se tiene

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}\left(\frac{2x+3}{x-1}\right) \\ &= \frac{\left(\frac{2x+3}{x-1}\right) + 3}{\left(\frac{2x+3}{x-1}\right) - 2} \\ &= \frac{(2x+3) + 3(x-1)}{(2x+3) - 2(x-1)} \\ &= \frac{5x}{5} \\ &= x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= f\left(\frac{x+3}{x-2}\right) \\ &= \frac{2\left(\frac{x+3}{x-2}\right) + 3}{\left(\frac{x+3}{x-2}\right) - 1} \\ &= \frac{2(x+3) + 3(x-2)}{(x+3) - (x-2)} \\ &= \frac{5x}{5} \\ &= x \end{aligned}$$



[−9.4, 9.4] por [−6.2, 6.2]

$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ y $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}$

$y = x$

FIGURA 11

Las gráficas de f y f^{-1} y la recta $y = x$ están trazadas en el rectángulo de inspección de [−9.4, 9.4] por [−6.2, 6.2] de la figura 11. En esta figura se observa que las gráficas de las dos funciones parecen ser reflexiones una de la otra con respecto a la recta $y = x$. ◀

Se pueden trazar las gráficas de una función y su inversa en el mismo rectángulo de inspección en la graficadora activando el modo paramétrico. El siguiente ejemplo ilustrativo muestra el procedimiento para las funciones g y g^{-1} del ejemplo ilustrativo 6.

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 7** Con la graficadora en modo paramétrico, se traza la gráfica de

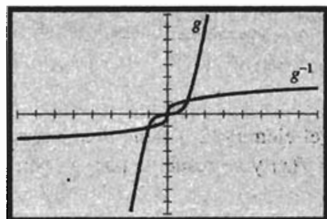
$$g(x) = x^3 \qquad -2 \le x \le 2$$

considerando

$$x_1(t) = t \quad \text{y} \quad y_1(t) = t^3$$

Para la gráfica de

$$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \qquad -8 \le x \le 8$$



[−8, 8] por [−8, 8]
$g(x) = x^3 \quad -2 \leq x \leq 2$
$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \quad -8 \leq x \leq 8$

FIGURA 12

considere

$$x_2(t) = t^3 \quad \text{y} \quad y_2(t) = t$$

Como variables para el rectángulo de inspección tome: $t_{mín} = -8$, $t_{máx} = 8$, $t_{step} = 0.05$, $x_{mín} = -8$, $x_{máx} = 8$, $x_{scl} = 1$, $y_{mín} = -8$, $y_{máx} = 8$ y $y_{scl} = 1$. La figura 12, la cual muestra las dos gráficas, apoya las gráficas de la figura 10. ◀

Algunas funciones tienen una función inversa para la cual no puede obtenerse una ecuación que la defina explícitamente. Por ejemplo, sea

$$f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 2 \tag{5}$$

Al derivar esta función se obtiene

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2$$

Como $f'(x) > 0$ para toda x, f es una función creciente y por tanto tiene una inversa. Sin embargo, si se reemplaza $f(x)$ por y en (5), se obtiene una ecuación de quinto grado en x, la cual no puede resolverse para x en términos de y. No obstante, aunque $f^{-1}(x)$ no está definida explícitamente, se puede trazar la gráfica de la función inversa en la graficadora activada en modo paramétrico, como se hizo en el ejemplo ilustrativo 7. En algunas graficadoras pueden trazarse una función y su inversa en el mismo rectángulo de inspección activando el modo de función. Consulte *DrawInv* en su manual para trabajar con esta característica de la graficadora.

Algunas propiedades importantes de la función inversa f^{-1} pueden determinarse directamente de las propiedades de f. En los teoremas restantes de esta sección se presentan algunas de estas propiedades, y en el ejemplo ilustrativo 12 se reconsidera la función definida por la ecuación (5).

La información acerca de la continuidad y diferenciabilidad de una función la proporcionan los *teoremas de la función inversa* presentados a continuación. Antes de establecer el teorema de la función inversa para funciones crecientes, se presentan dos ejemplos ilustrativos que proporcionan ejemplos de una función y su inversa que satisfacen las condiciones del teorema.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 8** En el ejemplo 3 se tuvo la función f y su inversa f^{-1} definidas por

$$f(x) = 4x - 3 \quad y \quad f^{-1}(x) = \frac{x+3}{4}$$

En la figura 8 se muestran las gráficas de f y f^{-1} trazadas en el mismo rectángulo de inspección. Observe que f y f^{-1} son continuas y crecientes. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 9** En el ejemplo ilustrativo 6, la función g y su inversa g^{-1} están definidas por

$$g(x) = x^3, -2 \leq x \leq 2 \quad \text{y} \quad g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}, -8 \leq x \leq 8$$

y las gráficas de g y g^{-1} se presentan en la figura 10. Cada una de estas funciones es continua y creciente en su dominio. ◀

5.1.5 Teorema (Teorema de la función inversa)

Suponga que la función f es continua y creciente en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces

(i) f tiene una inversa f^{-1} definida en $[f(a), f(b)]$;
(ii) f^{-1} es creciente en $[f(a), f(b)]$;
(iii) f^{-1} es continua en $[f(a), f(b)]$.

La demostración de este teorema se presenta en el suplemento de esta sección. A continuación se presentará el teorema de la función inversa para funciones decrecientes. La demostración se deja como ejercicio. Consulte el ejercicio suplementario 2.

5.1.6 Teorema (Teorema de la función inversa)

Suponga que la función f es continua y decreciente en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces

(i) f tiene una inversa f^{-1} definida en $[f(b), f(a)]$;
(ii) f^{-1} es creciente en $[f(b), f(a)]$;
(iii) f^{-1} es continua en $[f(b), f(a)]$.

Los teoremas de la función inversa se utilizan para demostrar el siguiente teorema, el cual expresa una relación entre las derivadas de una función y su inversa. En el enunciado del teorema se emplea la notación de Leibniz para la derivada, lo cual hace fácil de recordar la ecuación.

5.1.7 Teorema

Suponga que la función f es continua y monótona en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea $y = f(x)$. Si $f'(x)$ existe y es diferente de cero para toda x en $[a, b]$, entonces la derivada de la función inversa f^{-1}, definida por $x = f^{-1}(y)$, existe y está dada por

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

La demostración de este teorema también se proporciona en el suplemento de esta sección.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 10** Se verificará el teorema 5.1.7 para la función definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Si se considera $y = f(x)$, se tiene la ecuación

$$y = \sqrt{x} \qquad x \geq 0,\ y \geq 0$$

Como f es uno a uno, f^{-1} existe y está definida por $f^{-1}(y) = y^2$. Si se considera $x = f^{-1}(y)$, se tiene la ecuación

$$x = y^2 \qquad y \geq 0, x \geq 0$$

Debido a que $y = \sqrt{x}$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

y puesto que $x = y^2$, se obtiene

$$\frac{dx}{dy} = 2y$$

Al sustituir y por $\sqrt{x}$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= 2\sqrt{x} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \\ &= \frac{1}{\frac{dy}{dx}}\end{aligned}$$

Cuando $x = 0$, $\frac{dy}{dx}$ no existe; de modo que la ecuación anterior no se satisface para este valor de x. Como el dominio de f es el intervalo semicerrado $[0, +\infty)$, el teorema es válido para esta función en el intervalo abierto $(0, +\infty)$. ◀

▶ ***EJEMPLO 5*** Muestre que el teorema 5.1.7 se cumple para la función f de los ejemplos 2 y 4.

Solución La función está definida por $f(x) = (2x + 3)/(x - 1)$. Si se considera $y = f(x)$, se tiene

$$y = \frac{2x + 3}{x - 1} \qquad \textbf{(6)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{(x - 1)^2}$$

En la solución del ejemplo 4 se mostró que

$$x = \frac{y + 3}{y - 2}$$

Al calcular $\frac{dx}{dy}$ de esta ecuación se tiene

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{5}{(y - 2)^2}$$

Si en la ecuación anterior se sustituye el valor de y de (6) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= -\frac{5}{\left(\frac{2x + 3}{x - 1} - 2\right)^2} \\ &= -\frac{5(x - 1)^2}{(2x + 3 - 2x + 2)^2} \\ &= -\tfrac{5}{25}(x - 1)^2 \\ &= -\tfrac{1}{5}(x - 1)^2 \\ &= \frac{1}{\frac{dy}{dx}}\end{aligned}$$

◀

Cuando se aplica el teorema 5.1.7 para calcular la derivada de la inversa de una función en un número particular, es más conveniente tener el enunciado del teorema con la notación f' y $(f^{-1})'$ para las derivadas. Con esta notación se reexpresa el teorema 5.1.7 como el teorema 5.1.8.

5.1.8 Teorema

Suponga que la función f es continua y monótona en el intervalo cerrado $[a, b]$ que contiene el número c, y sea $f(c) = d$. Si $f'(c)$ existe y $f'(c) \neq 0$, entonces $(f^{-1})'(d)$ existe y

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(c)}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 11 Se mostrará que el teorema 5.1.8 se cumple para una función particular y valores particulares de c y d. Si f es la función del ejemplo ilustrativo 10, entonces

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f^{-1}(x) = x^2 \qquad (f^{-1})'(x) = 2x \qquad x \geq 0$$

La función f es continua y monótona en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ para el cual $0 \leq a < b$. Sea $c = 9$, entonces $d = f(9)$; esto es, $d = 3$. El teorema 5.1.8 afirma que

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(9)}$$

Esta ecuación es válida porque

$$(f^{-1})'(3) = 2 \cdot 3 \quad \text{y} \quad f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}}$$

$$= 6 \quad \text{y} \quad = \tfrac{1}{6}$$

◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 12 Considere la función f definida por la ecuación (5):

$$f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 2$$

La derivada de esta función es

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2 \tag{7}$$

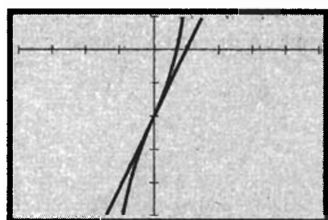
Previamente se estableció que f es creciente en vista de que $f'(x) > 0$, y por tanto tiene una inversa f^{-1}. Pero no se tiene una ecuación que defina explícitamente los valores de función de f^{-1}. Sin embargo, se puede calcular la derivada de f^{-1} en un punto particular de la gráfica de f^{-1}. Por ejemplo, como $(0, -2)$ está en la gráfica de f, el punto $(-2, 0)$ está en la gráfica de f^{-1}. Si se calcula el valor de $(f^{-1})'(-2)$ aplicando el teorema 5.1.8 se tiene

$$(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(0)}$$

De (7), $f'(0) = 2$. De modo que

$$(f^{-1})'(-2) = \tfrac{1}{2}$$

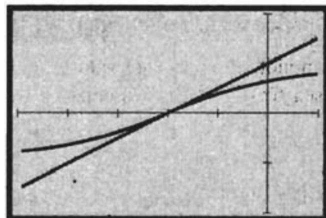
Ahora se apoyará este resultado con la graficadora. La figura 13 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-4, 5]$ por $[-5, 1]$. También en la figura se ha trazado la recta tangente a la gráfica en el punto $(0, -2)$; la pendiente de la recta tangente es 2.



$[-4, 5]$ por $[-5, 1]$

$f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 2$
recta tangente en $(0, -2)$

FIGURA 13



$[-5, 1]$ por $[-2, 2]$

$x(t) = t^5 + t^3 + 2t - 2$ y $y(t) = t$
recta tangente en $(-2, 0)$

FIGURA 14

A fin de trazar la gráfica de f^{-1}, se activa la graficadora en modo paramétrico y se consideran

$$x(t) = t^5 + t^3 + 2t - 2 \quad \text{y} \quad y(t) = t$$

Como variables para el rectángulo de inspección tome: $t_{\text{mín}} = -1$, $t_{\text{máx}} = 1$, $t_{\text{step}} = 0.05$, $x_{\text{mín}} = -5$, $x_{\text{máx}} = 1$, $x_{\text{scl}} = 1$, $y_{\text{mín}} = -2$, $y_{\text{máx}} = 2$ y $y_{\text{scl}} = 1$. La figura 14 muestra esta gráfica así como la recta tangente en el punto $(-2, 0)$; la pendiente de la recta tangente es $\frac{1}{2}$. ◀

EJEMPLO 6 Para la función f del ejemplo ilustrativo 12 calcule $(f^{-1})'(4)$.

Solución La función f y su derivada f' están definidas por

$$f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 2 \quad \text{y} \quad f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2$$

Del teorema 5.1.8, si $f(c) = 4$, entonces $(f^{-1})'(4) = \dfrac{1}{f'(c)}$. Para calcular c se resuelve la ecuación

$$c^5 + c^3 + 2c - 2 = 4$$

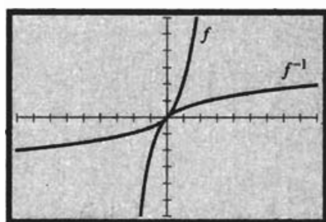
o, equivalentemente,

$$c^5 + c^3 + 2c - 6 = 0$$

Al aproximar la raíz de esta ecuación en la graficadora mediante los procedimientos *raíz* (*root*) o *rastreo* (*trace*) y *aumento* (*zoom in*) se obtiene $c = 1.16124$. Por tanto,

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(4) &= \frac{1}{f'(1.16124)}\\ &= \frac{1}{15.1374}\\ &= 0.06606\end{aligned}$$

◀



$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

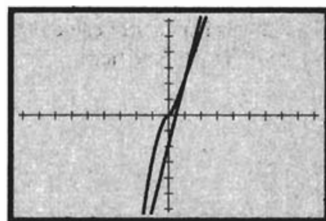
$f(x) = x^3 + x$

FIGURA 15

EJEMPLO 7 Sea

$$f(x) = x^3 + x$$

(**a**) Demuestre que f tiene una inversa f^{-1}. (**b**) Determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 2)$. (**c**) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en el punto $(2, 1)$. Apoye las respuestas de los incisos (*a*)–(*c*) realizando lo siguiente: (**d**) trace las gráficas de f y f^{-1} en el mismo rectángulo de inspección; (**e**) trace las gráficas de f y de su recta tangente en el punto $(1, 2)$ en el mismo rectángulo de inspección; (**f**) trace las gráficas de f^{-1} y de su recta tangente en el punto $(2, 1)$ en el mismo rectángulo de inspección.



$[-9.4, 9.4]$ por $[-6.2, 6.2]$

$f(x) = x^3 + x$
recta tangente en $(1, 2)$

FIGURA 16

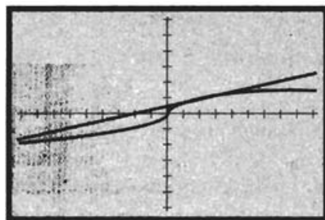
Solución La derivada de f es

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

(**a**) Como $f'(x) > 0$ para todos los números reales, entonces f es creciente en su dominio. Así, f es una función uno a uno, y en consecuencia tiene una inversa f^{-1}.

(**b**) La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 2)$ es $f'(1)$ y

$$f'(1) = 4$$



$[-9.4, 9.4]$ por $[-6.2, 6.2]$

gráfica de f^{-1} donde $f(x) = x^3 + x$
recta tangente en (2, 1)

FIGURA 17

(c) La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en el punto (2, 1) es $(f^{-1})'(2)$, y por teorema 5.1.8

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(2) &= \frac{1}{f'(1)}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

(d) En la figura 15 se muestran las gráficas de f y f^{-1} trazadas en el mismo rectángulo de inspección. Observe que las gráficas son reflexiones una de la otra con respecto a la recta $y = x$, como se esperaba.

(e) La figura 16 presenta las gráficas de f y de su recta tangente en (1, 2) trazadas en el rectángulo de inspección de $[-9.4, 9.4]$ por $[-6.2, 6.2]$. La pendiente de la recta tangente es 4.

(f) Las gráficas de f^{-1} y de su recta tangente en (2, 1) están trazadas en el rectángulo de inspección de $[-9.4, 9.4]$ por $[-6.2, 6.2]$ y se muestran en la figura 17. La pendiente de la recta tangente es $\frac{1}{4}$. ◀

EJERCICIOS 5.1

En los ejercicios 1 a 6, utilice el criterio de la recta horizontal para determinar si la función es uno a uno. Dibuje la gráfica de la función a mano o trace la gráfica en la graficadora.

1. **(a)** $f(x) = 2x + 3$ **(b)** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$
(c) $g(x) = 4 - x^3$

2. **(a)** $g(x) = 8 - 4x$ **(b)** $f(x) = 3 - x^2$
(c) $h(x) = \frac{1}{2}x^3 + 1$

3. **(a)** $f(x) = \sqrt{x + 3}$ **(b)** $g(x) = \dfrac{2}{x + 3}$
(c) $h(x) = |x - 2|$

4. **(a)** $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ **(b)** $g(x) = 5$
(c) $f(x) = \dfrac{1}{2x - 4}$

5. **(a)** $h(x) = 2 \operatorname{sen} x, -\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$
(b) $f(x) = \frac{1}{2}\tan x, -\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$
(c) $G(x) = \sec x, x \in [0, \frac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$

6. **(a)** $f(x) = 1 - \cos x, 0 \leq x \leq \pi$
(b) $F(x) = \cot \frac{1}{2}x, 0 < x < 2\pi$
(c) $g(x) = \csc x, x \in (0, \frac{1}{2}\pi] \cup (\pi, \frac{3}{2}\pi]$

En los ejercicios 7 a 18, determine si la función tiene inversa. Si la inversa existe, haga lo siguiente: (i) determínela y establezca su dominio y contradominio; (ii) trace las gráficas de la función y de su inversa en el mismo rectángulo de inspección. Si la función no tiene inversa, apoye gráficamente este hecho verificando que una recta horizontal intersecta la gráfica en más de un punto.

7. **(a)** $f(x) = 5x - 7$ **(b)** $g(x) = 1 - x^2$

8. **(a)** $f(x) = 3x + 6$ **(b)** $g(x) = x^5$

9. **(a)** $f(x) = (4 - x)^3$ **(b)** $h(x) = \sqrt{2x - 6}$

10. **(a)** $F(x) = 3(x^2 + 1)$ **(b)** $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

11. **(a)** $F(x) = \sqrt[3]{x + 1}$ **(b)** $f(x) = (x + 2)^4$

12. **(a)** $f(x) = |x| + x$ **(b)** $g(x) = 3\sqrt[3]{x} + 1$

13. **(a)** $f(x) = 2\sqrt[5]{x}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{x - 3}{x + 1}$

14. **(a)** $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x}$ **(b)** $g(x) = \dfrac{8}{x^3 + 1}$

15. **(a)** $g(x) = x^2 + 5, x \geq 0$
(b) $f(x) = (2x + 1)^3, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

16. **(a)** $f(x) = (2x - 1)^2, x \leq \frac{1}{2}$
(b) $f(x) = \frac{1}{8}x^3, -1 \leq x \leq 1$

17. $F(x) = \sqrt{9 - x^2}, 0 \leq x \leq 3$

18. $G(x) = \sqrt{4x^2 - 9}, x \geq \frac{3}{2}$

En los ejercicios 19 a 24, considere $y = f(x)$ y $x = f^{-1}(y)$, y verifique que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

19. **(a)** $f(x) = 4x - 3$ **(b)** $f(x) = \sqrt{x + 1}$

20. **(a)** $f(x) = 7 - 2x$ **(b)** $f(x) = 8x^3$

21. **(a)** $f(x) = \frac{1}{5}x^5$ **(b)** $f(x) = \sqrt[3]{x - 8}$

22. **(a)** $f(x) = \sqrt{4 - 3x}$ **(b)** $f(x) = \sqrt[5]{x}$

23. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 2}$ **24.** $f(x) = \dfrac{3x + 4}{2x + 6}$

En los ejercicios 25 a 40, calcule $(f^{-1})'(d)$.

25. **(a)** $f(x) = \sqrt{3x + 1}; d = 1$
(b) $f(x) = x^2 - 16, x \geq 0; d = 9$

26. **(a)** $f(x) = x^5 + 2; d = 1$
(b) $f(x) = \sqrt{4 - x}; d = 3$

27. **(a)** $f(x) = x^3 + 5; d = -3$
(b) $f(x) = 3x^5 + 2x^3; d = 5$

28. **(a)** $f(x) = 4x^3 + 2x; d = 6$
(b) $f(x) = \operatorname{sen} x, -\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi; d = \frac{1}{2}$

29. **(a)** $f(x) = \frac{1}{2}\cos^2 x, 0 \le x \le \frac{1}{2}\pi; d = \frac{1}{4}$

(b) $f(x) = 2\cot x, 0 < x < \pi; d = 2$

30. **(a)** $f(x) = \tan 2x, -\frac{1}{4}\pi < x < \frac{1}{4}\pi; d = 1$

(b) $f(x) = \sec \frac{1}{2}x, 0 \le x < \pi; d = 2$

31. **(a)** $f(x) = \frac{1}{2}\csc x, 0 < x \le \frac{1}{2}\pi; d = 1$

(b) $f(x) = 2x^2 + 8x + 7, x \le -2; d = 1$

32. **(a)** $f(x) = x^2 - 6x + 7, x \le 3; d = 0$

(b) $f(x) = 2x^3 + x + 20; d = 2$

33. $f(x) = x^3 - \dfrac{2}{x} - 3, x > 0; d = 2$

34. $f(x) = x^3 - \dfrac{2}{x} - 3, x < 0; d = -2$

35. $f(x) = x^4 + x^2 - 4, x \ge 0; d = 1$

36. $f(x) = x^4 + x^2 - 4, x \le 0; d = -0.5$

37. $f(x) = x + \sqrt{\operatorname{sen} x}, 0 \le x \le \pi; d = 3$

38. $f(x) = \cos^2 x + 2x,\ 0 \le x \le \frac{1}{2}\pi; d = 2$

39. $f(x) = \displaystyle\int_{-3}^{x} \sqrt{t+3}\, dt,\ x > -3; d = 18$

40. $f(x) = \displaystyle\int_{x}^{2} t\, dt,\ x < 0; d = -6$

En los ejercicios 41 a 46, (a) demuestre que la función f tiene inversa, (b) calcule $f^{-1}(x)$, y (c) verifique las ecuaciones del teorema 5.1.4 para f y f^{-1}.

41. $f(x) = 4x - 3$

42. $f(x) = 5x + 2$

43. $f(x) = x^3 + 2$

44. $f(x) = (x + 2)^3$

45. $f(x) = \dfrac{3x + 1}{2x + 4}$

46. $f(x) = \dfrac{x - 3}{3x - 6}$

47. Si x grados es la temperatura Celsius, entonces el número de grados en la temperatura Fahrenheit puede expresarse como una función de x. Si f es esta función, entonces $f(x)$ es la temperatura Fahrenheit y $f(x) = 32 + \frac{9}{5}x$. Determine la función inversa f^{-1} que exprese el número de grados Celsius como una función del número de grados de la temperatura Fahrenheit.

48. Si $f(t)$ dólares es el monto en t años de una inversión de \$1 000 al 12% de interés simple, entonces

$$f(t) = 1\,000(1 + 0.12t)$$

Determine la función inversa f^{-1} que exprese el número de años que deben invertirse \$1 000 al 12% de interés simple como una función del monto de la inversión.

49. Como se mencionó en el ejercicio 51 de la sección 1.7, de acuerdo con la teoría especial de la relatividad de Einstein, si $m(v)$ es la medida de la masa de una partícula que se desplaza con una velocidad de medida v, entonces

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

donde m_0 es la medida constante de la masa de la partícula en reposo respecto a un sistema de referencia y c es la medida constante de la rapidez de la luz. Determine la función inversa de m que exprese la medida de la velocidad de la partícula como una función de la medida de su masa.

50. Como se mencionó en el ejercicio 39 de la sección 2.8, la ley de Dulong establece que si $P(T)$ atmósferas es la presión absoluta de un vapor saturado a una temperatura de T grados Celsius, entonces

$$P(T) = \left(\frac{40 + T}{140}\right)^5 \qquad t > 80$$

(a) Determine la función inversa de P que exprese el número de grados Celsius de la temperatura como una función del número de atmósferas de la presión absoluta, e indique el dominio de la función inversa. **(b)** Trace las gráficas de P y la función inversa obtenida en el inciso (a).

51. Sea $f(x) = x^3 + 3x - 1$. **(a)** Demuestre que f tiene una inversa f^{-1}. **(b)** Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (1, 3). **(c)** Obtenga la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en el punto (3, 1). Apoye las respuestas de los incisos (a)-(c) haciendo lo siguiente: **(d)** trace las gráficas de f y f^{-1} en el mismo rectángulo de inspección. **(e)** Trace las gráficas de f y de su recta tangente en el punto (1, 3) en el mismo rectángulo de inspección. **(f)** Trace las gráficas de f^{-1} y de su recta tangente en el punto (3, 1) en el mismo rectángulo de inspección.

52. Sea $f(x) = 6 - x - x^3$. **(a)** Demuestre que f tiene una inversa f^{-1}. **(b)** Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (2, −4). **(c)** Obtenga la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en el punto (−4, 2). Apoye las respuestas de los incisos (a)-(c) haciendo lo siguiente: **(d)** trace las gráficas de f y f^{-1} en el mismo rectángulo de inspección. **(e)** Trace las gráficas de f y de su recta tangente en el punto (2, −4) en el mismo rectángulo de inspección. **(f)** Trace las gráficas de f^{-1} y de su recta tangente en el punto (−4, 2) en el mismo rectángulo de inspección.

En los ejercicios 53 y 54, demuestre que la función f es su propia inversa.

53. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}, 0 \le x \le 4$

54. $f(x) = \dfrac{x + 6}{x - 1}$

55. Determine el valor de k de modo que la función uno a uno f, definida por

$$f(x) = \frac{x + 5}{x + k}$$

sea su propia inversa.

En los ejercicios 56 y 57, demuestre que la función f es su propia inversa para cualquier constante k.

56. $f(x) = \dfrac{x + k}{x - 1}$

57. $f(x) = \dfrac{kx + 1}{x - k}$

58. Muestre que la función definida por

$$f(x) = \frac{x + h}{kx - 1}$$

es su propia inversa para cualesquiera valores de las constantes h y k.

En los ejercicios 59 y 60, (a) muestre que la función f no es uno a uno, y en consecuencia no tiene inversa; (b) restrinja el dominio y obtenga dos funciones uno a uno f_1 y f_2 que tengan el mismo contradominio que f; (c) calcule f_1^{-1} y f_2^{-1} y establezca sus dominios; (d) trace las gráficas de f_1 y f_1^{-1} en el mismo rectángulo de inspección; (e) trace las gráficas de f_2 y f_2^{-1} en el mismo rectángulo de inspección.

59. $f(x) = x^2 + 4$ **60.** $f(x) = x^2 - 9$

61. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 9 \\ 27\sqrt{x} & \text{si } 9 < x \end{cases}$$

Demuestre que f tiene una función inversa y calcule $f^{-1}(x)$.

62. Sea $f(x) = \int_1^x \sqrt{16 - t^4}\, dt$, $-2 \leq x \leq 2$. Demuestre que f tiene una inversa f^{-1} y calcule $(f^{-1})'(0)$.

63. Sea $f(x) = \int_2^x \sqrt{9 + t^4}\, dt$. Demuestre que f tiene una inversa f^{-1} y calcule $(f^{-1})'(0)$.

64. Sea $f(x) = \int_1^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^4}}$. Demuestre que f tiene una inversa y calcule $(f^{-1})'(0)$.

65. Sea

$$f(x) = \int_{\pi^3}^{x^2} \cos^2 \sqrt[3]{t}\, dt$$

Demuestre que f tiene una inversa f^{-1} y calcule $(f^{-1})'(0)$.

66. Muestre que la fórmula del teorema 5.1.7 puede escribirse como

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

67. Utilice la fórmula del ejercicio 66 para mostrar que

$$(f^{-1})''(x) = \frac{f''(f^{-1})x))}{[f'(f^{-1}(x))]^3}$$

68. Suponga que la función f está definida por la ecuación $y = f(x)$ y se ha determinado que f tiene una inversa f^{-1}. Sin embargo, no puede calcularse $f^{-1}(x)$. ¿Cómo dibujaría a mano la gráfica de f^{-1}? ¿Cómo trazaría en la graficadora la gráfica de f^{-1} sin trazar la de f?

5.2 FUNCIÓN LOGARÍTMICA NATURAL

La definición de función logarítmica presentada en álgebra estuvo basada en los exponentes, después se demostraron las propiedades de los logaritmos a partir de las propiedades correspondientes de los exponentes. A continuación se presentará un breve repaso de algunas de estas propiedades y de cómo las aprendió en el curso de álgebra.

Una propiedad de los exponentes es

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \tag{1}$$

Si los exponentes x y y son números enteros positivos y si a es cualquier número real, entonces (1) se deduce de la definición de exponente entero positivo e inducción matemática. Si se considera que los exponentes son cualesquiera números enteros, positivos, negativos o cero, y $a \neq 0$, entonces se cumple (1) si se define el exponente cero y el exponente negativo como

$$a^0 = 1 \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad n > 0$$

Si los exponentes son números racionales y $a \geq 0$, entonces se cumple (1) cuando se define $a^{m/n}$ como

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

No es simple definir a^x cuando x es un número irracional. Por ejemplo, ¿qué significa $2^{\sqrt{3}}$? Sin embargo, en su curso de álgebra se supuso que dicho número existe debido a que la definición de función logarítmica pre-

sentada estuvo basada en la suposición de que a^x existía si a era cualquier número positivo y x era cualquier número real. En esa definición se estableció que la ecuación

$$a^x = N$$

donde a es cualquier número positivo diferente de 1 y N es cualquier número positivo, puede resolverse para x, y x está determinado de manera única por

$$x = \log_a N$$

A partir de esta ecuación y de las propiedades de los exponentes, se demostraron las siguientes propiedades de los logaritmos para cualesquiera números positivos M y N:

$$\log_a 1 = 0 \tag{2}$$

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N \tag{3}$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \tag{4}$$

$$\log_a M^n = n \log_a M \tag{5}$$

$$\log_a a = 1 \tag{6}$$

En este capítulo se le capacitará con el fin de llenar el vacío dejado en álgebra; esto es, se definirá a^x donde x es un número irracional. En esta sección se inicia el proceso al definir la función logarítmica empleando el Cálculo y después, demostrando las propiedades de los logaritmos mediante esta definición.

Recuerde la fórmula

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Esta fórmula no se cumple cuando $n = -1$.

A fin de evaluar $\int x^n\,dx$ para $n = -1$, es decir, $\int \frac{1}{x}\,dx$, se necesita una función cuya derivada sea $\frac{1}{x}$. El primer teorema fundamental del Cálculo (4.7.1) proporciona una función; la cual es

$$\int_a^x \frac{1}{t}\,dt$$

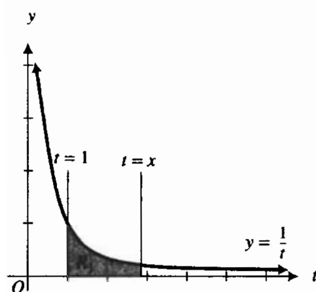


FIGURA 1

donde a puede ser cualquier número real con la condición de que tenga el mismo signo de x. A fin de interpretar dicha función, sea R_1 la región limitada por la curva $y = 1/t$, el eje t, a la izquierda por la recta $t = 1$ y a la derecha por la recta $t = x$, donde $x > 1$. Esta región R_1 se muestra en la figura 1. La medida del área de la región R_1 es una función de x; denótela por $A(x)$ y defínala como una integral definida mediante

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

Ahora considere esta integral si $0 < x < 1$. De la definición 4.5.5,

$$\int_1^x \frac{1}{t}dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt$$

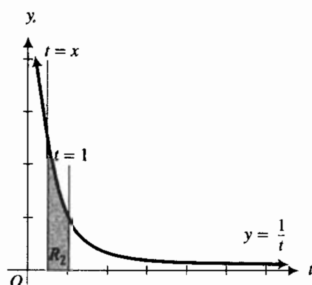


FIGURA 2

La integral $\int_1^x (1/t)\, dt$ representa la medida del área de la región R_2 acotada por la curva $y = 1/t$, el eje t, a la izquierda por la recta $t = x$ y a la derecha por la recta $t = 1$. De modo que la integral $\int_1^x (1/t)\, dt$ es el negativo de la medida del área de la región R_2 mostrada en la figura 2.

Si $x = 1$, la integral $\int_1^x (1/t)\, dt$ se transforma en $\int_1^1 (1/t)\, dt$, la cual es igual a cero, debido a la definición 4.5.6. En este caso, las fronteras laterales derecha e izquierda son la misma y la medida del área es 0.

Así, la integral $\int_1^x (1/t)\, dt$ para $x > 0$ puede interpretarse en términos de la medida del área de una región. Su valor depende de x y se emplea para definir la *función logarítmica natural*, denotada por ln.

5.2.1 Definición de la función logarítmica natural

La función logarítmica natural es la función definida por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt \qquad x > 0$$

El dominio de esta función es el conjunto de los números reales positivos. Se lee $\ln x$ como "el logaritmo natural de x".

La función logaritmo natural es diferenciable debido a que al aplicar el primer teorema fundamental del Cálculo se obtiene

$$D_x(\ln x) = D_x\left(\int_1^x \frac{1}{t}dt\right)$$

$$= \frac{1}{x}$$

De este resultado y de la regla de la cadena se tiene el siguiente teorema.

5.2.2 Teorema

Si u es una función diferenciable de x y $u(x) > 0$, entonces

$$D_x(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot D_x u$$

EJEMPLO 1 Calcule $f'(x)$ si

$$f(x) = \ln(3x^2 - 6x + 8)$$

Solución Del teorema 5.2.2,

$$f'(x) = \frac{1}{3x^2 - 6x + 8}(6x - 6)$$

$$= \frac{6x - 6}{3x^2 - 6x + 8}$$

Ahora se mostrará que la función logarítmica natural obedece las propiedades de los logaritmos estudiadas en álgebra.

5.2.3 Teorema

$\ln 1 = 0$

Demostración Si $x = 1$ en la definición 5.2.1, entonces

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt$$

El miembro derecho de la ecuación anterior es cero debido a la definición 4.5.6. Por tanto,

$$\ln 1 = 0$$ ■

El teorema 5.2.3 corresponde a la propiedad de los logaritmos dada por (2). Los tres teoremas siguientes corresponden a las propiedades de los logaritmos dadas por (3), (4) y (5). La discusión de la propiedad (6) se pospone porque hasta este momento no se tiene una base para los logaritmos naturales. Antes de establecer cada uno de los tres teoremas, se dará un ejemplo ilustrativo del teorema correspondiente al calcular los logaritmos naturales de números específicos empleando NINT en la graficadora.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** De la definición 5.2.1.

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{NINT}(1/t, 1, 2) = 0.693147$$

$$\ln 3 = \int_1^3 \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{NINT}(1/t, 1, 3) = 1.098612$$

$$\ln 6 = \int_1^6 \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{NINT}(1/t, 1, 6) = 1.791759$$

A partir de estos cálculos,

$$\begin{aligned}\ln 2 + \ln 3 &= 0.693147 + 1.098612\\ &= 1.791759\\ &= \ln 6\end{aligned}$$ ◀

5.2.4 Teorema

Si a y b son cualesquiera dos números positivos, entonces

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Demostración Considere la función f definida por

$$f(x) = \ln(ax)$$

donde $x > 0$. Entonces

$$f'(x) = \frac{1}{ax}(a)$$
$$= \frac{1}{x}$$

Por tanto, las derivadas de $\ln(ax)$ y $\ln x$ son iguales. De modo que por el teorema 4.1.2, existe una constante K tal que

$$\ln(ax) = \ln x + K \qquad \text{para toda } x > 0 \tag{7}$$

A fin de determinar K, considere $x = 1$ en esta ecuación, de donde resulta

$$\ln a = \ln 1 + K$$

Como $\ln 1 = 0$, se obtiene $K = \ln a$. Al sustituir K por $\ln a$ en (7), se tiene

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a \qquad \text{para toda} \quad x > 0$$

Ahora considere $x = b$, entonces se obtiene

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$ ■

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Del ejemplo ilustrativo 1,

$$\ln 6 - \ln 3 = 1.791759 - 1.098612$$
$$= 0.693147$$
$$= \ln 2$$ ◀

5.2.5 Teorema

Si a y b son cualesquiera dos números positivos, entonces

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

Demostración Como $a = (a/b) \cdot b$, entonces

$$\ln a = \ln \left(\frac{a}{b} \cdot b \right)$$

Al aplicar el teorema 5.2.4 al miembro derecho de esta ecuación se obtiene

$$\ln a = \ln \frac{a}{b} + \ln b$$
$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$ ■

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** De la definición 5.2.1 se tiene

$$\ln 49 = \int_1^{49} \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{NINT}(1/t, 1, 49) = 3.891820$$

$$\ln 7 = \int_1^7 \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{NINT}(1/t, 1, 7) = 1.945910$$

De estos cálculos se obtiene

$$\begin{aligned} 2 \ln 7 &= 2(1.945910) \\ &= 3.891820 \\ &= \ln 49 \end{aligned}$$

◀

5.2.6 Teorema

Si a es cualquier número positivo y r es cualquier número racional, entonces

$$\ln a^r = r \ln a$$

Demostración Del teorema 5.2.2, si r es cualquier número racional y $x > 0$, entonces

$$\begin{aligned} D_x(\ln x^r) &= \frac{1}{x^r} \cdot r x^{r-1} \\ &= \frac{r}{x} \end{aligned}$$

y

$$D_x(r \ln x) = \frac{r}{x}$$

Por tanto,

$$D_x(\ln x^r) = D_x(r \ln x)$$

De esta ecuación, las derivadas de $\ln x^r$ y $r \ln x$ son iguales; de modo que, por el teorema 4.1.2, existe una constante K tal que

$$\ln x^r = r \ln x + K \qquad \text{para toda} \qquad x > 0 \tag{8}$$

Para determinar K, se sustituye 1 por x en (8) y se obtiene

$$\ln 1^r = r \ln 1 + K$$

Pero $\ln 1 = 0$; en consecuencia $K = 0$. Al reemplazar K por 0 en (8) se obtiene

$$\ln x^r = r \ln x \qquad \text{para toda} \qquad x > 0$$

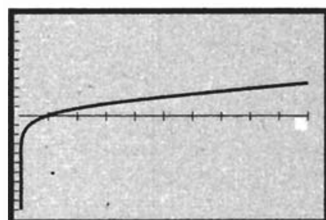
de lo cual se deduce que si $x = a$, donde a es cualquier número positivo, entonces

$$\ln a^r = r \ln a$$

■

Para dibujar la gráfica de la función logarítmica natural deben considerarse las propiedades de esta función. Pero antes, se trazará en la graficadora la gráfica de

$$\text{NINT}(1/t, 1, x)$$



[0.0001, 10] por [−10, 10]
NINT $(1/t, 1, x)$

FIGURA 3

Como el dominio de ln es el conjunto de los números reales positivos, se elige un rectángulo de inspección que contenga únicamente valores positivos de x. La figura 3 muestra la gráfica de ln trazada en el rectángulo de inspección de [0.0001, 10] por [−10, 10]. De esta figura, parece que la función logarítmica natural es continua y creciente, y también cóncava hacia abajo. Estos hechos se confirmarán analíticamente.

Con $f(x) = \ln x$, se tiene

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt \quad \text{y} \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{para} \quad x > 0$$

Como f es diferenciable para toda $x > 0$, f es continua para toda $x > 0$. Además, $f'(x) > 0$ para toda $x > 0$, y por tanto, f es una función creciente.

La segunda derivada de $\ln x$ es

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Debido a que $f''(x) < 0$ cuando $x > 0$, la gráfica de f es cóncava hacia abajo en cada punto.

Ahora se determinará mediante geometría una desigualdad que implica a ln 2. La integral definida en la ecuación

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}dt$$

puede interpretarse como la medida del área de la región que se muestra en la figura 4. De esta figura, se observa que ln 2 está entre las medidas de las áreas de los rectángulos que tienen base de longitud 1 unidad y alturas de longitud $\frac{1}{2}$ unidades y 1 unidad; esto es,

$$0.5 < \ln 2 < 1$$

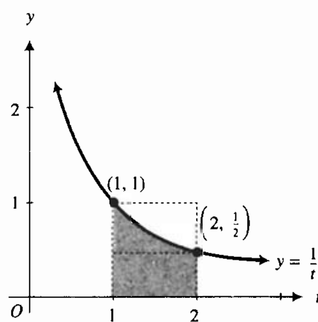


FIGURA 4

Esta desigualdad puede obtenerse analíticamente a partir del teorema 4.6.1 al proceder como sigue. Sean $f(t) = 1/t$ y $g(t) = \frac{1}{2}$, entonces $f(t) \geq g(t)$ para toda t en [1, 2]. Como f y g son continuas en [1, 2], entonces son integrables en [1, 2], y por el teorema 4.6.1,

$$\int_1^2 \frac{1}{1}dt \geq \int_1^2 \frac{1}{2}dt$$

$$\ln 2 \geq \frac{1}{2} \qquad \textbf{(9)}$$

De manera semejante, si $f(t) = 1/t$ y $h(t) = 1$, entonces $h(t) \geq f(t)$ para toda t en [1, 2]. Debido a que f y h son continuas en [1, 2], entonces son integrables en [1, 2]; y otra vez, empleando el teorema 4.6.1 se obtiene

$$\int_1^2 1\,dt \geq \int_1^2 \frac{1}{t}dt$$

$$1 \geq \ln 2$$

Al combinar esta desigualdad con (9) se tiene

$$0.5 \leq \ln 2 \leq 1 \tag{10}$$

El número 0.5 es una *cota* (o límite) inferior de ln 2 y 1 es una cota superior de ln 2. De igual manera se puede obtener una cota inferior y otra superior para el logaritmo natural de cualquier número real positivo. Posteriormente aprenderá, aplicando series infinitas, cómo calcular el logaritmo de cualquier número real positivo con cualquier número de cifras decimales deseado.

El valor de ln 2 con cinco cifras decimales está dado por

$$\ln 2 \approx 0.69315$$

Por supuesto, cualquier calculadora que incluya la tecla [ln] puede emplearse para obtener los valores de la función logarítmica natural. Sin embargo, se puede aproximar el valor del logaritmo natural de cualquier potencia de 2 empleando el valor de ln 2 y aplicando el teorema 5.2.6. En particular,

$$\begin{aligned} \ln 4 &= \ln 2^2 \\ &= 2\ln 2 \\ &\approx 1.3863 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \ln 8 &= \ln 2^3 \\ &= 3\ln 2 \\ &\approx 2.0795 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \ln \tfrac{1}{2} &= \ln 2^{-1} \\ &= -1 \cdot \ln 2 \\ &\approx -0.69315 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \ln \tfrac{1}{4} &= \ln 2^{-2} \\ &= -2\ln 2 \\ &\approx -1.3863 \end{aligned}$$

Ahora se determinará el comportamiento de la función logarítmica natural para valores grandes de x considerando el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x$.

Como la función logarítmica natural es creciente, si se considera p como cualquier número racional positivo, se tiene

$$\text{si } x > 2^p \quad \text{entonces} \quad \ln x > \ln 2^p \tag{11}$$

Del teorema 5.2.6 se tiene

$$\ln 2^p = p \ln 2$$

Si se sustituye de esta ecuación en (11) se tiene

$$\text{si } x > 2^p \quad \text{entonces} \quad \ln x > p \ln 2$$

Como $\ln 2 \geq \frac{1}{2}$, de lo anterior se obtiene

$$\text{si } x > 2^p \quad \text{entonces} \quad \ln x > \tfrac{1}{2}p$$

Al considerar $p = 2n$, donde $n > 0$, se tiene

$$\text{si } x > 2^{2n} \quad \text{entonces} \quad \ln x > n$$

De este enunciado se sigue, si se toma $N = 2^{2n}$, que para cualquier $n > 0$

$$\text{si } x > N \quad \text{entonces} \quad \ln x > n$$

Por lo que se puede concluir que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \tag{12}$$

A fin de determinar el comportamiento de la función logarítmica natural para valores positivos de x cercanos a cero, se investigará el límite $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$. Como $\ln x = \ln (x^{-1})^{-1}$, entonces

$$\ln x = -\ln \frac{1}{x}$$

La expresión "$x \to 0^+$" equivale a "$\frac{1}{x} \to +\infty$"; por lo que la ecuación anterior se escribe como

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\lim_{1/x \to +\infty} \ln \frac{1}{x} \tag{13}$$

De (12) se tiene

$$\lim_{1/x \to +\infty} \ln \frac{1}{x} = +\infty$$

Por tanto, de este resultado y de (13) se obtiene

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \tag{14}$$

De (14), (12) y el teorema del valor intermedio (1.9.8), el contradominio de la función logarítmica natural es el conjunto de todos los números reales. De (14) se concluye que la gráfica de la función logarítmica natural es asintótica a la parte negativa del eje y a través del cuarto cuadrante.

En resumen, la función logarítmica natural satisface las siguientes propiedades:

(i) Su dominio es el conjunto de los números reales positivos.
(ii) Su contradominio es el conjunto de los números reales.
(iii) La función es creciente en su dominio.
(iv) La función es continua en todos los números de su dominio.
(v) Su gráfica es cóncava hacia abajo en todos sus puntos.
(vi) La gráfica de la función es asintótica a la parte negativa del eje y a través del cuarto cuadrante.

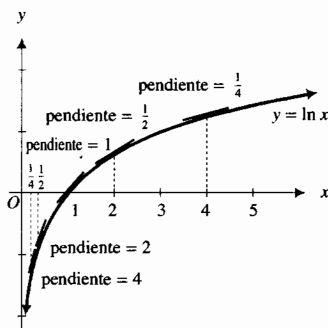


FIGURA 5

A partir de estas propiedades y trazando algunos puntos con un segmento de la recta tangente en los puntos, se puede dibujar la gráfica de la función logarítmica natural, como se muestra en la figura 5, donde se han considerado los puntos de abscisas $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2 y 4. La pendiente de la recta tangente se determinó mediante la fórmula $D_x(\ln x) = \frac{1}{x}$.

Ahora se presentarán algunos ejemplos más del cálculo de derivadas de funciones que contienen logaritmos naturales.

▶ *EJEMPLO 2* Calcule $\frac{dy}{dx}$ si

$$y = \ln[(4x^2 + 3)(2x - 1)]$$

Solución Al aplicar el teorema 5.2.2, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(4x^2 + 3)(2x - 1)} \cdot [8x(2x - 1) + 2(4x^2 + 3)]$$

$$= \frac{24x^2 - 8x + 6}{(4x^2 + 3)(2x - 1)} \tag{15}$$

◀

▶ *EJEMPLO 3* Determine $\frac{dy}{dx}$ si

$$y = \ln\left(\frac{x}{x + 1}\right)$$

Solución Del teorema 5.2.2,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}\\ &= \frac{x+1}{x} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}\\ &= \frac{1}{x(x+1)}\end{aligned}$$

◀

Observe que cuando se aplica el teorema 5.2.2, $u(x)$ debe ser positiva; esto es, un número del dominio de la derivada debe estar en el dominio de la función dada, ln u.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** En el ejemplo 1, el dominio de la función dada es el conjunto de los números reales, porque $3x^2 - 6x + 8 > 0$ para toda x. Esto puede verse a partir del hecho de que la parábola cuya ecuación es $y = 3x^2 - 6x + 8$ tiene su vértice en el punto $(1, 5)$ y abre hacia arriba. En consecuencia, $(6x - 6)/(3x^2 - 6x + 8)$ es la derivada para todos los valores de x.

En el ejemplo 2, como $(4x^2 + 3)(2x - 1) > 0$ sólo cuando $x > \frac{1}{2}$, el dominio de la función dada es el intervalo $(\frac{1}{2}, +\infty)$. Por tanto, se entiende que la fracción (15) es la derivada únicamente si $x > \frac{1}{2}$.

Como $x/(x + 1) > 0$ cuando $x < -1$ o $x > 0$, el dominio de la función del ejemplo 3 es $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$; por lo que $1/[x(x + 1)]$ es la derivada si $x < -1$ o $x > 0$. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** En el ejemplo 2, si se aplica el teorema 5.2.4 antes de calcular la derivada, se tiene

$$y = \ln(4x^2 + 3) + \ln(2x - 1) \qquad \textbf{(16)}$$

El dominio de la función definida por esta ecuación es el intervalo $(\frac{1}{2}, +\infty)$, el cual es el mismo que el de la función dada. De (16),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{4x^2 + 3} + \frac{2}{2x - 1}$$

y sumando las fracciones se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x(2x + 1) + 2(4x^2 + 3)}{(4x^2 + 3)(2x - 1)}$$

lo cual equivale al primer renglón de la solución del ejemplo 2. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 6** Si se aplica el teorema 5.2.5 antes de calcular la derivada en el ejemplo 3, se tiene

$$y = \ln x - \ln(x + 1) \qquad \textbf{(17)}$$

Debido a que ln x está definida sólo cuando $x > 0$, y $\ln(x + 1)$ está definida únicamente cuando $x > -1$, el dominio de la función definida por (17) es el intervalo $(0, +\infty)$. Pero el dominio de la función dada en el ejemplo 3 consiste de los dos intervalos $(-\infty, -1)$ y $(0, +\infty)$. Al calcular la derivada de (17) se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$
$$= \frac{1}{x(x+1)}$$

pero recuerde que aquí x debe ser mayor que cero, mientras que en la solución del ejemplo 3 los valores de x menores que -1 también están incluidos. ◀

El ejemplo ilustrativo 6 muestra el cuidado que debe tenerse cuando se aplican los teoremas 5.2.4, 5.2.5 y 5.2.6 a funciones que implican logaritmos naturales.

▶ ***EJEMPLO 4*** Calcule $f'(x)$ si

$$f(x) = \ln(2x - 1)^3$$

Solución Del teorema 5.2.6,

$$f(x) = 3 \ln(2x - 1)$$

Observe que tanto $\ln(2x - 1)^3$ como $3 \ln(2x - 1)$ tienen el mismo dominio: $x > 0.5$. Al aplicar el teorema 5.2.2 se tiene

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2x-1} \cdot 2$$
$$= \frac{6}{2x-1}$$ ◀

EJERCICIOS 5.2

En los ejercicios 1 a 4, demuestre las propiedades dadas de la función logarítmica natural aplicando la definición 5.2.1 y NINT *la graficadora para calcular los logaritmos naturales indicados.*

1. $\ln 68 = \ln 4 + \ln 17$ **2.** $\ln 1000 = 3 \ln 10$

3. $\ln 13 = \ln 117 - \ln 9$ **4.** $\ln 81 = 2 \ln 9$

En los ejercicios 5 a 30, derive la función y simplifique el resultado.

5. $f(x) = \ln(4 + 5x)$ **6.** $g(x) = \ln(1 + 4x^2)$

7. $h(x) = \ln\sqrt{4 + 5x}$ **8.** $f(x) = \ln(8 - 2x)$

9. $f(t) = \ln(3t + 1)^2$ **10.** $h(x) = \ln(8 - 2x)^5$

11. $g(t) = \ln^2(3t + 1)$ **12.** $G(x) = \ln\sqrt{1 + 4x^2}$

13. $f(x) = \ln\sqrt[3]{4 - x^2}$ **14.** $g(y) = \ln(\ln y)$

15. $F(y) = \ln(\text{sen } 5y)$ **16.** $f(x) = x \ln x$

17. $f(x) = \cos(\ln x)$ **18.** $g(x) = \ln \cos\sqrt{x}$

19. $G(x) = \ln(\sec 2x + \tan 2x)$ **20.** $h(y) = \csc(\ln y)$

21. $f(x) = \ln\sqrt{\tan x}$ **22.** $f(t) = \ln\sqrt[4]{\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}}$

23. $f(w) = \ln\sqrt{\frac{3w + 1}{2w - 5}}$ **24.** $f(x) = \ln[(5x - 3)^4(2x^2 + 7)^3]$

25. $h(x) = \frac{x}{\ln x}$ **26.** $g(x) = \ln(\cos 2x + \text{sen } 2x)$

27. $g(x) = \ln\sqrt[3]{\frac{x + 1}{x^2 + 1}}$ **28.** $f(x) = \sqrt[3]{\ln x^3}$

29. $F(x) = \sqrt{x + 1} - \ln(1 + \sqrt{x + 1})$

30. $G(x) = x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}$

En los ejercicios 31 a 36, calcule $\frac{dy}{dx}$ mediante diferenciación implícita.

31. $\ln xy + x + y = 2$ **32.** $\ln \frac{x}{y} + xy = 1$

33. $x = \ln(x + y + 1)$ **34.** $\ln(x + y) - \ln(x - y) = 4$

35. $x + \ln x^2y + 3y^2 = 2x^2 - 1$

36. $x \ln y + y \ln x = xy$

37. Dibuje la gráfica de $y = \ln x$ trazando los puntos de abscisas $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, 1, 3 y 9, y utilice $\ln 3 \approx 1.1$. En cada uno de los cinco puntos calcule la pendiente de la recta tangente y dibuje un segmento de dicha recta.

En los ejercicios 38 a 45, dibuje la gráfica de la ecuación.

38. $x = \ln y$ **39.** $y = \ln(-x)$

40. $y = \ln(x + 1)$ **41.** $x = \ln|x|$

42. $y = \ln \frac{1}{x - 1}$ **43.** $y = x - \ln x$

44. $y = x + 2 \ln x$ **45.** $y = \ln \operatorname{sen} x$

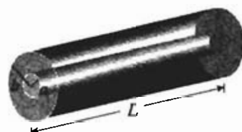
46. Realice el ejercicio 56 de la sección 3.10 considerando el logaritmo natural en ambos miembros de la ecuación dada antes de calcular la diferencial.

47. Realice el ejercicio 55 de la sección 3.10 considerando el logaritmo natural en ambos miembros de la ecuación de la ley de Boyle antes de calcular la diferencial.

48. La longitud de dos cilindros coaxiales, mostrados en la figura adjunta, es L centímetros y los radios de los cilindros interior y exterior son a y b centímetros, respectivamente. La capacitancia entre los cilindros es C faradios donde

$$C = \frac{2\epsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}}$$

donde ϵ_0 es una constante eléctrica. ¿Cuál es el valor de $\lim\limits_{a \to b^-} C$?



49. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $y = \ln x$ en el punto cuya abscisa es 2.

50. Determine una ecuación de la recta normal a la curva $y = \ln x$ que es paralela a la recta $x + 2y - 1 = 0$.

51. Obtenga una ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = x \ln x$ que es perpendicular a la recta que tiene la ecuación $x - y + 7 = 0$.

52. Una partícula se mueve sobre una recta de acuerdo a la ecuación de movimiento $s = (t + 1)^2 \ln(t + 1)$, donde s pies es la distancia dirigida de la partícula desde el punto inicial a los t segundos. Calcule la velocidad y la aceleración cuando $t = 3$.

53. En un cable para televisión, la medida de la rapidez de la señal es proporcional a $x^2 \ln(1/x)$, donde x es la razón de la medida del radio del núcleo del cable a la medida del espesor del embobinado del cable. Determine el valor de $\ln x$ para el cual la rapidez de la señal sea máxima.

54. Un fabricante de generadores eléctricos comenzó sus operaciones el 1 de enero de 1986. Durante el primer año no hubo ventas porque la compañía se concentró en el desarrollo e investigación del producto. Después del primer año las ventas se incrementaron constantemente de acuerdo con la ecuación $y = x \ln x$, donde x es el número de años durante los cuales la compañía ha estado operando y y es el número de millones de dólares por el volumen de ventas. **(a)** Dibuje la gráfica de la ecuación. Determine la tasa a la que las ventas se incrementaron **(b)** el 1 de enero de 1991, y **(c)** el 1 de enero de 1996.

55. Cierta compañía ha determinado que cuando su gasto de publicidad semanal es x dólares, entonces si S dólares es su ingreso semanal total por ventas, $S = 4\,000 \ln x$. **(a)** Determine la tasa de variación del ingreso por ventas respecto al gasto de publicidad cuando se ha previsto un gasto de publicidad semanal de \$800. **(b)** Si el gasto de publicidad semanal programado se incrementa a \$950, ¿cuál es el incremento aproximado del ingreso semanal total por ventas?

56. **(a)** Trace en el mismo rectángulo de inspección las gráficas de

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} \qquad g(x) = \ln x \qquad h(x) = x - 1$$

y observe que $f(x) < g(x) < h(x)$.

(b) Confirme la observación del inciso (a) analíticamente estableciendo la desigualdad

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1 \quad \text{para toda } x > 0 \quad \text{y} \quad x \neq 1$$

mostrando que

$$x - 1 - \ln x > 0 \qquad \text{y} \qquad 1 - \ln x - \frac{1}{x} < 0$$

para toda $x > 0$ y $x \neq 1$. *Sugerencia:* sea

$$F(x) = x - 1 - \ln x \quad \text{y} \quad G(x) = 1 - \ln x - \frac{1}{x}$$

y determine el signo de $F'(x)$ y $G'(x)$ en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

57. Utilice el resultado del ejercicio 56 para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

58. Establezca el límite del ejercicio 57 aplicando la definición de la derivada para calcular $F'(0)$ si $F(x) = \ln(1 + x)$.

59. Demuestre que

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Sugerencia: primero demuestre que $x > \ln x$ si $x > 0$, y utilice este resultado para probar que $-2\sqrt{x} < x \ln x < 0$ si $0 < x < 1$; después utilice el teorema de estricción.

60. A.P. Hunter, Jr. y A. H. Rubenstein en su artículo "Market Penetration by New Innovations: the Technological Literature" muestran que si $f(t)$ mide el mercado compartido de una tecnología sustituta en t unidades de tiempo, entonces

$$\ln \frac{f(t)}{1 - f(t)} + \frac{\sigma}{1 - f(t)} = c_1 + c_2 t$$

donde σ, c_1 y c_2 son constantes. Muestre que $f'(t)$, la tasa de sustitución, está dada por

$$f'(t) = \frac{c_2 f(t)[1 - f(t)]^2}{\sigma f(t) + [1 - f(t)]}$$

61. Explique cómo puede ser afectado el dominio de la derivada de una función que implica un logaritmo natural si se aplican las propiedades de los logaritmos a la función antes de calcular la derivada.

5.3 DIFERENCIACIÓN LOGARÍTMICA E INTEGRALES QUE PRODUCEN FUNCIONES LOGARÍTMICAS NATURALES

Para el estudio de los dos temas de esta sección, se necesita la fórmula de $D_x(\ln|x|)$. A fin de deducir esta fórmula a partir del teorema 5.2.2, se sustituye $\sqrt{x^2}$ por $|x|$ y se aplica la regla de la cadena. Así,

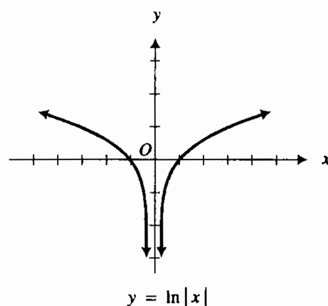
$$\begin{aligned} D_x(\ln|x|) &= D_x(\ln\sqrt{x^2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot D_x(\sqrt{x^2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2}} \\ &= \frac{x}{x^2} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

De esta fórmula y de la regla de la cadena se obtiene el teorema siguiente.

5.3.1 Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(\ln|u|) = \frac{1}{u} \cdot D_x u$$



$y = \ln|x|$

FIGURA 1

En el ejercicio 41 de la sección 5.2 se le pidió que dibujara la gráfica de $y = \ln|x|$. Esta gráfica se muestra en la figura 1. La pendiente de la recta tangente en cada punto (x, y) de la gráfica es $\frac{1}{x}$.

▶ ***EJEMPLO 1*** Calcule $f'(x)$ si

$$f(x) = \ln|x^4 + x^3|$$

Solución Del teorema 5.3.1,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^4 + x^3}(4x^3 + 3x^2) \\ &= \frac{x^2(4x + 3)}{x^4 + x^3} \\ &= \frac{4x + 3}{x^2 + x} \end{aligned}$$ ◀

El ejemplo siguiente ilustra cómo las propiedades de la función logarítmica natural, dadas en los teoremas 5.2.4–5.2.6, pueden simplificar el trabajo relacionado con la diferenciación de expresiones complejas que contienen productos, cocientes y potencias.

▶ ***EJEMPLO 2*** Calcule $\frac{dy}{dx}$ si

$$y = \frac{\sqrt[3]{x + 1}}{(x + 2)\sqrt{x + 3}}$$

Solución De la ecuación dada,

$$|y| = \left|\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}\right|$$

$$= \frac{|\sqrt[3]{x+1}|}{|x+2|\,|\sqrt{x+3}|}$$

Si se toma el logaritmo natural en los dos miembros de la ecuación anterior y se aplican las propiedades de logaritmos, se obtiene

$$\ln|y| = \tfrac{1}{3}\ln|x+1| - \ln|x+2| - \tfrac{1}{2}\ln|x+3|$$

Al diferenciar implícitamente ambos miembros de esta ecuación con respecto a x y al aplicar el teorema 5.3.1 se tiene

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+3)}$$

Si se multiplican los dos miembros de la ecuación anterior por y se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = y\cdot\frac{2(x+2)(x+3) - 6(x+1)(x+3) - 3(x+1)(x+2)}{6(x+1)(x+2)(x+3)}$$

Al sustituir y por su valor dado resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)^{1/3}}{(x+2)(x+3)^{1/2}}\cdot\frac{2x^2+10x+12-6x^2-24x-18-3x^2-9x-6}{6(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{-7x^2-23x-12}{6(x+1)^{2/3}(x+2)^2(x+3)^{3/2}}$$ ◀

El proceso ilustrado en el ejemplo 2 se denomina **diferenciación logarítmica,** desarrollada en 1697 por el matemático suizo **Johann Bernoulli** (1667–1748).

Del teorema 5.3.1 se obtiene el teorema siguiente para integración indefinida.

5.3.2 Teorema

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$$

De los teoremas 5.3.2 y 4.1.8, para cualquier número racional n se tiene

$$\int u^n\,du = \begin{cases} \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C & \text{si } n \neq -1 \\ \ln|u| + C & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

 ***EJEMPLO 3*** Evalúe

$$\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$$

Solución

$$\frac{x^2}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\frac{3x^2}{x^3+1}dx$$

$$= \tfrac{1}{3}\ln|x^3+1| + C$$

EJEMPLO 4 Calcule el valor exacto de

$$\int_0^2 \frac{x^2+2}{x+1}dx$$

y apoye la respuesta empleando NINT en la graficadora.

Solución Como $(x^2+2)/(x+1)$ es una fracción impropia, se divide el numerador entre el denominador, obteniéndose

$$\frac{x^2+2}{x+1} = x - 1 + \frac{3}{x+1}$$

Por tanto,

$$\int_0^2 \frac{x^2+2}{x+1}dx = \int_0^2 \left(x - 1 + \frac{3}{x+1}\right)dx$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 - x + 3\ln|x+1|\Big]_0^2$$

$$= 2 - 2 + 3\ln 3 - 3\ln 1$$

$$= 3\ln 3 - 3\cdot 0$$

$$= 3\ln 3$$

Debido a que $3\ln 3 = \ln 3^3$, la respuesta puede escribirse como ln 27.

En la graficadora se obtiene

$$\text{NINT}((x^2+2)/(x+1), 0, 2) = 3.295836866$$

lo cual es acorde con el valor de ln 27.

EJEMPLO 5 Evalúe

$$\int \frac{\ln x}{x}dx$$

Solución Sean

$$u = \ln x \quad \text{y} \quad du = \frac{1}{x}dx$$

Por tanto,

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int u\,du$$

$$= \frac{u^2}{2} + C$$

$$= \tfrac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

Se pospusieron las fórmulas para las integrales indefinidas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante hasta debido a que están relacionadas con la función lagarítmica natural.

Una fórmula para la integral indefinida de la función tangente se deduce como sigue: Puesto que

$$\int \tan u\, du = \int \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\, du$$

sean

$$v = \cos u \qquad dv = -\operatorname{sen} u\, du$$

y al sustituirlas en la integral anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \int \tan u\, du &= -\int \frac{dv}{v} \\ &= -\ln|v| + C \\ &= -\ln|\cos u| + C \\ &= \ln|(\cos u)^{-1}| + C \\ &= \ln|\sec u| + C \end{aligned}$$

De esta manera se ha demostrado el teorema siguiente.

5.3.3 Teorema

$$\int \tan u\, du = \ln|\sec u| + C$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

$$\begin{aligned} \int \tan 3x\, dx &= \frac{1}{3}\int \tan 3x(3\, dx) \\ &= \tfrac{1}{3}\ln|\sec 3x| + C \end{aligned}$$ ◀

El teorema que proporciona la integral indefinida de la función cotangente se demuestra en forma semejante a la demostración del teorema 5.3.3. Consulte el ejercicio 45.

5.3.4 Teorema

$$\int \cot u\, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

A fin de obtener la fórmula de $\int \sec u\, du$ se multiplica el numerador y el denominador del integrando por $\sec u + \tan u$, obteniéndose

$$\begin{aligned} \int \sec u\, du &= \int \frac{\sec u(\sec u + \tan u)}{\sec u + \tan u}\, du \\ &= \int \frac{(\sec^2 u + \sec u \tan u)}{\sec u + \tan u}\, du \end{aligned}$$

Considere

$$v = \sec u + \tan u \qquad dv = (\sec u \tan u + \sec^2 u)\, du$$

Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}\int \sec u\, du &= \int \frac{dv}{v} \\ &= \ln|v| + C \\ &= \ln|\sec u + \tan u| + C\end{aligned}$$

Así, se ha demostrado el teorema siguiente.

5.3.5 Teorema

$$\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

En la sección 7.5 se obtendrá una fórmula para la integral indefinida de la función secante mediante un método que no depende del "truco" de multiplicar el numerador y el denominador por $\sec u + \tan u$ empleado en la demostración del teorema 5.3.5.

Una fórmula para $\int \csc u\, du$ puede deducirse al multiplicar el numerador y el denominador del integrando por $\csc u - \cot u$ y proceder como se hizo en la demostración del teorema 5.3.5. Otro procedimiento consiste en considerar

$$\int \csc u\, du = \int \sec(u - \tfrac{1}{2}\pi)\, du$$

y utilizar el teorema 5.3.5 e identidades trigonométricas. Se le pedirá que demuestre esto en el ejercicio 45. La fórmula que se obtiene está dada en el teorema siguiente.

5.3.6 Teorema

$$\int \csc u\, du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\operatorname{sen} 2x} &= \int \csc 2x\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int \csc 2x(2\, dx) \\ &= \tfrac{1}{2}\ln|\csc 2x - \cot 2x| + C\end{aligned}$$ ◀

▶ *EJEMPLO 6* Calcule el valor exacto de

$$\int_{\pi/8}^{\pi/6} (\csc 4x - \cot 4x)\, dx$$

y apoye la respuesta utilizando NINT en la graficadora.

Solución

$$\int_{\pi/8}^{\pi/6} (\csc 4x - \cot 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\pi/8}^{\pi/6} (\csc 4x - \cot 4x)(4\, dx)$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\ln|\csc 4x - \cot 4x| - \ln|\operatorname{sen} 4x|\Big]_{\pi/8}^{\pi/6}$$

$$= \tfrac{1}{4}[(\ln|\csc \tfrac{2}{3}\pi - \cot \tfrac{2}{3}\pi| - \ln|\operatorname{sen} \tfrac{2}{3}\pi|) - (\ln|\csc \tfrac{1}{2}\pi - \cot \tfrac{1}{2}\pi| - \ln|\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\pi|)]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| - \ln\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\right) - (\ln|1 - 0| - \ln|1|)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\ln\frac{3}{\sqrt{3}} - \ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (0 - 0)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln\sqrt{3} - \ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right] \quad \text{(por el teorema 5.2.5)}$$

$$= \tfrac{1}{4}\ln 2$$

En la graficadora se obtiene

$$\text{NINT}(\csc 4x - \cot 4x, \pi/8, \pi/6) = 0.1732867951$$

lo cual es acorde con el valor de $\frac{1}{4}\ln 2$. ◀

EJERCICIOS 5.3

En los ejercicios 1 a 8, utilice el teorema 5.3.1 para calcular $\frac{dy}{dx}$.

1. $y = \ln|x^3 + 1|$
2. $y = \ln|x^2 - 1|$
3. $y = \ln|\cos 3x|$
4. $y = \ln|\sec 2x|$
5. $y = \ln|\tan 4x + \sec 4x|$
6. $y = \ln|\cot 3x - \csc 3x|$
7. $y = \ln\left|\frac{3x}{x^2 + 4}\right|$
8. $y = \operatorname{sen}(\ln|2x + 1|)$

En los ejercicios 9 a 14, obtenga $\frac{dy}{dx}$ *mediante diferenciación logarítmica.*

9. $y = x^2(x^2 - 1)^3(x + 1)^4$
10. $y = (5x - 4)(x^2 + 3)(3x^3 - 5)$
11. $y = \frac{x^2(x - 1)^2(x + 2)^3}{(x - 4)^5}$
12. $y = \frac{x^5(x + 2)}{x - 3}$
13. $y = \frac{x^3 + 2x}{\sqrt[5]{x^7 + 1}}$
14. $y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{(x + 1)^{2/3}}$

En los ejercicios 15 a 32, evalúe la integral indefinida.

15. $\int \frac{1}{3 - 2x}\, dx$
16. $\int \frac{x}{2 - x^2}\, dx$
17. $\int \frac{3x^2}{5x^3 - 1}\, dx$
18. $\int \frac{2x - 1}{x(x - 1)}\, dx$
19. $\int \frac{1}{y \ln y}\, dy$
20. $\int \frac{\operatorname{sen} 3t}{\cos 3t - 1}\, dt$
21. $\int (\cot 5x + \csc 5x)\, dx$
22. $\int \frac{\cos 3x + 3}{\operatorname{sen} 3x}\, dx$
23. $\int \frac{2 - 3\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}\, dx$
24. $\int (\tan 2x - \sec 2x)\, dx$

25. $\displaystyle\int \frac{2x^3}{x^2 - 4}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int \frac{5 - 4y^2}{3 + 2y}\,dy$

27. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 3x}{x}\,dx$ **28.** $\displaystyle\int \frac{(2 + \ln^2 x)}{x(1 - \ln x)}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{2\ln x + 1}{x[(\ln x)^2 + \ln x]}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{3x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 2}{x^3 + 1}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{\tan(\ln x)}{x}\,dx$ **32.** $\displaystyle\int \frac{\cot\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$

En los ejercicios 33 a 44, determine el valor exacto de la integral definida y apoye la respuesta empleando NINT *en la graficadora.*

33. $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{x^2 + 4}\,dx$ **34.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{7x + 10}\,dx$

35. $\displaystyle\int_4^5 \frac{x}{4 - x^2}\,dx$ **36.** $\displaystyle\int_1^5 \frac{4z^3 - 1}{2z - 1}\,dz$

37. $\displaystyle\int_1^3 \frac{2t + 3}{t + 1}\,dt$ **38.** $\displaystyle\int_3^5 \frac{2x}{x^2 - 5}\,dx$

39. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1 + 2\,\text{sen}\,t}\,dt$ **40.** $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})}\,dx$

41. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} (\tan 2x + \sec 2x)\,dx$

42. $\displaystyle\int_{\pi/12}^{\pi/6} (\cot 3x + \csc 3x)\,dx$

43. $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x\ln^2 x}$ **44.** $\displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x}\,dx$

45. **(a)** Demuestre el teorema 5.3.4. **(b)** Demuestre el teorema 5.3.6 multiplicando el numerador y el denominador del integrando por $\csc u - \cot u$. **(c)** Demuestre el teorema 5.3.6 considerando

$$\int \csc u\,du = \int \sec(u - \tfrac{1}{2}\pi)\,du$$

y empleando el teorema 5.3.5 e identidades trigonométricas.

46. Demuestre que $\int \csc u\,du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$ en dos formas: **(a)** utilice el teorema 5.3.6; **(b)** multiplique el numerador y el denominador del integrando por $\csc u + \cot u$.

En los ejercicios 47 a 55, proporcione el valor exacto del número a determinarse, y después obtenga una aproximación de este número con cinco cifras decimales en la calculadora.

47. Si $f(x) = 1/x$, determine el valor promedio de f en el intervalo $[1, 5]$.

48. Si $f(x) = (x + 2)/(x - 3)$, calcule el valor promedio de f en el intervalo $[4, 6]$.

49. Utilice la ley de Boyle para la expansión de un gas (consulte el ejercicio 8 de la sección 2.6) para determinar la presión promedio con respecto al volumen cuando éste se incrementa de 4 pie^3 a 8 pie^3 y la presión es 2 000 lb/pie^2 cuando el volumen es de 4 pie^3.

50. Calcule el área de la región acotada por la curva $y = x/(2x^2 + 4)$, el eje x, el eje y y la recta $x = 4$.

51. Determine el área de la región limitada por la curva $y = 2/(x - 3)$, el eje x y las rectas $x = 4$ y $x = 5$.

52. Obtenga el volumen del sólido de revolución generado cuando la región acotada por la curva $y = 1 - 3/x$, el eje x y la recta $x = 1$ se gira alrededor del eje x.

53. Calcule el volumen del sólido de revolución generado cuando la región limitada por el eje x, la curva $y = 1 + 2/\sqrt{x}$ y las rectas $x = 1$ y $x = 4$ se gira alrededor del eje x.

54. Una línea de transmisión elétrica, que consiste de dos cables conductores paralelos de radio a unidades, conducen corrientes eléctricas en sentidos opuestos. Si L es la medida del flujo de encadenamiento por unidad de longitud de la línea de transmisión y d unidades es la distancia entre los dos cables, donde $d > 2a$, entonces

$$L = \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d - x}\right)dx$$

donde μ_0 es la constante de permeabilidad de los alambres e I es la corriente eléctrica constante. Demuestre que

$$L = \frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\left(\frac{d - a}{a}\right)$$

55. Demuestre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ por medio de dos métodos: **(a)** sea $x = \dfrac{1}{t}$ y utilice el resultado del ejercicio 59 de la sección 5.2. **(b)** Primero demuestre que $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \geq \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ aplicando el teorema 4.6.1. Después emplee el teorema de estricción.

56. Explique la diferencia entre el teorema 5.2.2 y el teorema 5.3.1, y por qué se obtuvo el teorema 5.3.1 antes que el teorema 5.3.2.

5.4 FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

Como la función logarítmica natural es creciente en todo su dominio, entonces por el teorema de la función inversa (5.1.5), ella tiene una inversa que también es una función creciente. La inversa de ln se denomina *función exponencial natural*, denotada por exp, la cual se define formalmente a continuación.

5.4.1 Definición de la función exponencial natural

La **función exponencial natural** es la inversa de la función logarítmica natural; por tanto, se define como

$$\exp(x) = y \quad \text{si y sólo si} \quad x = \ln y$$

La notación $\exp(x)$ denota "el valor de la función exponencial natural en x".

El dominio de exp es el conjunto de todos los números reales y su contradominio es el conjunto de los números reales positivos debido a que estos conjuntos son, respectivamente, el contradominio y el dominio de ln.

Debido a que exp y ln son inversas una de la otra, se tiene del teorema 5.1.4:

$$\ln(\exp(x)) = x \quad \text{y} \quad \exp(\ln x) = x \qquad \textbf{(1)}$$

Ahora está preparado para definir a^x, donde a es un número real positivo y x es un número irracional. Para llegar a una definición razonable, consistente con la definición de exponente racional, se considera el caso a^r, donde $a > 0$ y r es un número racional. Como exp y ln son inversas una de la otra, entonces

$$a^r = \exp[\ln(a^r)] \qquad \textbf{(2)}$$

Pero por el teorema 5.2.6, donde r es un número racional,

$$\ln a^r = r \ln a \qquad \textbf{(3)}$$

Al sustituir de (3) en (2), se tiene

$$a^r = \exp(r \ln a)$$

Como el miembro derecho de esta ecuación tiene significado no sólo cuando r es un número racional, sino también cuando r es cualquier número real, se emplea dicha ecuación en la definición.

5.4.2 Definición de exponente real

Si a es cualquier número real positivo y x es cualquier número real, entonces

$$a^x = \exp(x \ln a)$$

Además, si $x > 0$, entonces $0^x = 0$.

En la ecuación (3) se restringió r a los números racionales, pero ahora, debido a esta definición, la ecuación (3) también es válida si r es cualquier número real. Este hecho se establece como el teorema siguiente.

5.4.3 Teorema

Si a es cualquier número real positivo y x es cualquier número real, entonces

$$\ln a^x = x \ln a$$

Demostración De la definición 5.4.2,

$$a^x = \exp(x \ln a)$$

De modo que, de la definición 5.4.1,

$$\ln a^x = x \ln a$$ ■

Aunque la definición 5.4.2 nos indica lo que significa a^x cuando x es un número irracional, la definición no proporciona un método para calcular una potencia irracional de un número positivo. Para obtener un procedimiento de cálculo, se indica el valor de la función exponencial en 1, y se le da una definición formal. Este número es uno de los más importantes en matemáticas.

5.4.4 Definición del número *e*

El número e es el valor de la función exponencial en 1:

$$e = \exp 1$$

La letra e fue elegida como el símbolo de este número por el matemático y físico suizo **Leonhard Euler** (1707-1783). Casualmente, e es la primera letra de la palabra "exponente" y también del apellido Euler.

El número e es un *número trascendente*; es decir, es un número que no puede expresarse como la raíz de cualquier polinimio con coeficientes enteros. El número π es otro ejemplo de número trascendente. La demostración de que e es un número trascendente fue presentada primero en 1873 por el matemático francés **Charles Hermite** (1822-1901), y su valor puede expresarse con cualquier grado de exactitud. En el capítulo 8 estudiará un método para aproximar el número e. El valor de e con siete cifras decimales es 2.7182818. Así,

$$e \approx 2.7182818$$

La importancia del número e se hará evidente conforme usted estudie este capítulo.

5.4.5 Teorema

$$\ln e = 1$$

Demostración Por la definición 5.4.4,

$$e = \exp 1$$

Por tanto,

$$\ln e = \ln(\exp 1)$$

Como la función logarítmica natural y la función exponencial natural son inversas, se deduce que el miembro derecho de esta ecuación es 1. De este modo,

$$\ln e = 1$$ ■

Observe que el teorema 5.4.5 corresponde a la propiedad (6) de la sección 5.2. Por tanto, el número e es la base de los logaritmos naturales. Así, se ha completado la demostración de que la función ln satisface las propiedades (2)–(6) de los logaritmos dadas en la sección 5.2.

5.4.6 Teorema

Para todo valor de x,

$$\exp(x) = e^x$$

Demostración Por la definición 5.4.2, con $a = e$,

$$e^x = \exp(x \ln e)$$

Pero de acuerdo con el teorema 5.4.5, $\ln e = 1$, y al sustituir en la ecuación anterior se obtiene

$$e^x = \exp(x)$$ ■

A partir de este momento se escribirá e^x en lugar de $\exp(x)$; por lo que de la definición 5.4.1 se tiene

$$e^x = y \quad \text{si y sólo si} \quad x = \ln y \tag{4}$$

Con e^x en lugar de $\exp(x)$, (1) se transforma en

$$\ln e^x = x \quad \text{y} \quad e^{\ln x} = x$$

Si se reemplaza $\exp(x \ln a)$ por $e^{x \ln a}$ en la ecuación de la definición 5.4.2, se tiene

$$a^x = e^{x \ln a} \quad \text{para todo} \quad a > 0 \tag{5}$$

Esta ecuación puede emplearse para calcular a^x, donde $a > 0$, si x es cualquier número real. Para valores de potencias de e utilice la tecla $\boxed{e^x}$ de la calculadora. Por supuesto, muchas calculadoras proporcionan a^x directamente. En el ejemplo siguiente se efectúan los cálculos en las dos formas.

► ***EJEMPLO 1*** Obtenga en una calculadora el valor de $2^{\sqrt{3}}$ con cinco dígitos significativos aplicando primero la ecuación (5). Apoye la respuesta calculando el valor directamente.

Solución Como $a^x = e^{x \ln a}$ si $a > 0$, entonces

$$\begin{aligned} 2^{\sqrt{3}} &= e^{\sqrt{3} \ln 2} \\ &= e^{(1.73205)(0.693147)} \\ &= e^{1.20057} \\ &= 3.3220 \end{aligned}$$

Al calcular directamente el valor de $2^{\sqrt{3}}$, se obtiene $2^{\sqrt{3}} = 3.3220$, lo cual apoya la respuesta anterior. ◄

Puesto que $0 = \ln 1$, se tiene de la proposición (4)

$$e^0 = 1$$

A continuación se establecerán algunas propiedades de la función exponencial natural como teoremas. Observe que estas propiedades son consistentes con las propiedades de los exponentes estudiados en álgebra.

5.4.7 Teorema

Si a y b son cualesquiera dos números reales, entonces

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$$

Demostración Sean $A = e^a$ y $B = e^b$. Entonces, de la proposición (4),

$$\ln A = a \quad \text{y} \quad \ln B = b \tag{6}$$

Del teorema 5.2.4,

$$\ln AB = \ln A + \ln B$$

Al sustituir de (6) en esta ecuación se obtiene

$$\ln AB = a + b$$

Así,

$$e^{\ln AB} = e^{a+b}$$

Como $e^{\ln x} = x$, el miembro izquierdo de la ecuación anterior es igual a AB; de modo que

$$AB = e^{a+b}$$

Si se reemplaza en esta ecuación A y B por sus valores, se obtiene

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$$ ■

5.4.8 Teorema

Si a y b son cualesquiera dos números reales, entonces

$$e^a \div e^b = e^{a-b}$$

La demostración de este teorema es análoga a la demostración del anterior, donde el teorema 5.2.4 se sustituye por el 5.2.5.

5.4.9 Teorema

Si a y b son cualesquiera dos números reales, entonces

$$(e^a)^b = e^{ab}$$

Demostración Si en la ecuación $x = e^{\ln x}$ se considera a x como $(e^a)^b$, se tiene

$$(e^a)^b = e^{\ln(e^a)^b}$$

Al aplicar el teorema 5.4.3 al exponente del miembro derecho de esta ecuación se obtiene

$$(e^a)^b = e^{b \ln e^a}$$

Pero $\ln e^a = a$, por tanto

$$(e^a)^b = e^{ab}$$ ■

Debido a que la función exponencial natural es la inversa de la función logarítmica natural, por el teorema 5.1.7 es diferenciable. El teorema para la derivada de la función exponencial natural se obtiene mediante diferenciación implícita. Sea

$$y = e^x$$

Entonces, de la proposición (4),

$$x = \ln y$$

En ambos miembros de esta ecuación se deriva implícitamente con respecto a x a fin de tener

$$1 = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Al sustituir y por e^x se obtiene

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

El teorema siguiente se deduce de esta ecuación y de la regla de la cadena.

5.4.10 Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(e^u) = e^u D_x u$$

Observe que la derivada de la función definida por $f(x) = ke^x$, donde k es una constante, es ella misma. La otra única función que tiene ésta propiedad y que anteriormente se trató es la función constante cero; en realidad ésta es un caso especial de $f(x) = ke^x$ cuando $k = 0$. Se puede probar que la función más general que es su propia derivada está dada por $f(x) = ke^x$. Refiérase al ejercicio 59.

EJEMPLO 2 Calcule dy/dx si

$$y = e^{1/x^2}$$

Solución Del teorema 5.4.10,

$$\frac{dy}{dx} = e^{1/x^2}\left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$= -\frac{2e^{1/x^2}}{x^3}$$

EJEMPLO 3 Obtenga dy/dx si

$$y = e^{2x+\ln x}$$

Solución Como $e^{2x+\ln x} = e^{2x}e^{\ln x}$ y $e^{\ln x} = x$, entonces

$$y = xe^{2x}$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} + 2xe^{2x}$$ ◀

La fórmula de integración indefinida dada en el teorema siguiente es una consecuencia del teorema 5.4.10.

5.4.11 Teorema

$$\int e^u \, du = e^u + C$$

▶ **EJEMPLO 4** Evalúe

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$$

Solución Sean

$$u = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad du = \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx &= 2 \int e^u \, du \\ &= 2e^u + C \\ &= 2e^{\sqrt{x}} + C \end{aligned}$$ ◀

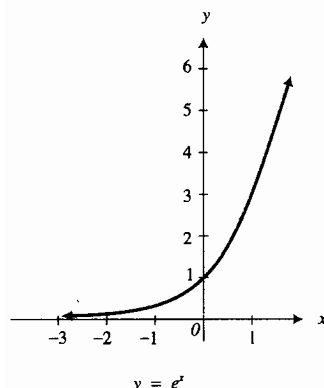


FIGURA 1

Puesto que de (4) $e^x = y$ si y sólo si $x = \ln y$, la gráfica de $y = e^x$ es idéntica a la gráfica de $x = \ln y$. Así se puede obtener la gráfica de $y = e^x$, mostrada en la figura 1, al reflejar con respecto a la recta $y = x$ la figura 5 de la sección 5.2 e intercambiar los ejes x y y.

La gráfica de $y = e^x$ puede obtenerse sin hacer referencia a la gráfica de la función logarítmica natural. Puesto que el contradominio de la función exponencial natural es el conjunto de los números reales positivos, se deduce que $e^x > 0$ para todos los valores de x. Por tanto, la gráfica está completamente por arriba del eje x. Como $\frac{dy}{dx} = e^x > 0$ para toda x, la función es creciente para toda x. Debido a que $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x > 0$ para toda x, la gráfica cóncava hacia arriba en todos sus puntos.

También se tiene los dos límites siguientes:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Las demostraciones de estos límites se dejan como ejercicios. Consulte los ejercicios 65 y 66. Para trazar algunos puntos específicos, utilice una calculadora a fin de determinar las potencias de e.

Las funciones que tienen valores de la forma Ce^{kx}, donde C y k son constantes, ocurren con frecuencia en varios campos. Algunas de las aplicaciones se presentan en los ejercicios de esta sección y otras se tratan en la sección 5.6.

Como x^n, donde $x > 0$, se ha definido para cualquier número real n, se puede probar ahora el teorema para la derivada de la función potencia si el exponente es cualquier número real.

5.4.12 Teorema

Si n es cualquier número real y la función f está definida por

$$f(x) = x^n \quad \text{donde } x > 0$$

entonces

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

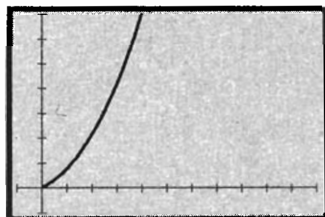
Demostración De la definición 5.4.2,

$$f(x) = e^{n \ln x}$$

Así,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{n \ln x} D_x(n \ln x) \\ &= e^{n \ln x}\left(\frac{n}{x}\right) \\ &= x^n \cdot \frac{n}{x} \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

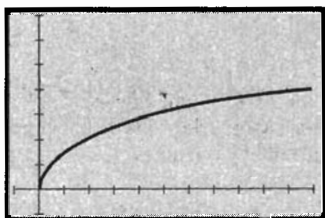
■



$[-1, 11]$ por $[-1, 7]$

$f(x) = x^{\sqrt{2}}, \ x > 0$

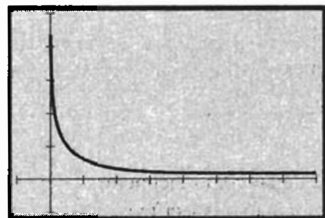
FIGURA 2



$[-1, 11]$ por $[-1, 7]$

$f'(x) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

FIGURA 3



$[-1, 8]$ por $[-1, 5]$

$f''(x) = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)x^{\sqrt{2}-2}$

FIGURA 4

▶ **EJEMPLO 5** Sea

$$f(x) = x^{\sqrt{2}} \quad x \geq 0$$

(**a**) Demuestre analíticamente que f es una función creciente. (**b**) Determine analíticamente la concavidad de la gráfica de f. (**c**) Trace en rectángulos de inspección separados las gráficas de f, f' y f'', y muestre que estas gráficas apoyan los resultados de los incisos (*a*) y (*b*).

Solución

(**a**) Del teorema 5.4.12, si $x > 0$, entonces

$$f'(x) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$$

Como $f'(x) > 0$ para toda $x > 0$, f es una función creciente.

(**b**) Al calcular f'' aplicando otra vez el teorema 5.4.12, se tiene

$$f''(x) = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)x^{\sqrt{2}-2}$$

Ya que $f''(x) > 0$ para toda $x > 0$, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en todos sus puntos.

(**c**) Las figuras 2, 3 y 4 muestran las gráficas de f, f' y f'' trazadas en rectángulos de inspección convenientes. En la figura 3 se observa que $f'(x) > 0$ para toda $x > 0$, lo cual apoya el resultado del inciso (a). La figura 4 apoya el resultado del inciso (b) porque $f''(x) > 0$. La figura 2 apoya los incisos (a) y (b). ◀

El número e se ha definido como el valor de la función exponencial natural en 1; esto es, $e = \exp 1$. Para llegar a otra definición de e, considere la función logarítmica natural

$$f(x) = \ln x$$

Se sabe que la derivada de f está dada por $f'(x) = 1/x$; en consecuencia, $f'(1) = 1$. Sin embargo, al aplicar la definición de derivada para calcular $f'(1)$, se tiene

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1 + \Delta x) - \ln(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln(1 + \Delta x) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln(1 + \Delta x) = 1$$

Si se sustituye Δx por h, se obtiene de la ecuación anterior y del teorema 5.4.3

$$\lim_{h \to 0} \ln(1 + h)^{1/h} = 1 \tag{7}$$

Ahora, como la función exponencial natural y la función logarítmica natural son funciones inversas, se tiene

$$\lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h} = \lim_{h \to 0} \exp[\ln(1 + h)^{1/h}] \tag{8}$$

Debido a que la función exponencial natural es continua y $\lim_{h \to 0} \ln(1 + h)^{1/h}$ existe y es igual a 1, como se muestra en la ecuación (7), se puede aplicar el teorema 1.9.1 al miembro derecho de (8) obteniéndose

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h} &= \exp\left[\lim_{h \to 0} \ln(1 + h)^{1/h}\right] \\ &= \exp 1 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h} = e \tag{9}$$

En ocasiones, la ecuación (9) se da como la definición de e; sin embargo, para emplear esta ecuación como definición es necesario demostrar que el límite existe.

Considere la función F defina por

$$F(h) = (1 + h)^{1/h} \tag{10}$$

y determine en la calculadora los valores de función para algunos valores de h cercanos a cero. Cuando h es positivo, los valores se muestran en la tabla 1; y cuando h es negativo, los valores se presentan en la tabla 2.

Las dos tablas conducen a sospechar que, probablemente, $\lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h}$ es un número que está entre 2.7181 y 2.7184.

Tabla 1

h	$F(h) = (1 + h)^{1/h}$
1	2
0.5	2.25
0.05	2.6533
0.01	2.7048
0.001	2.7169
0.0001	2.7181

Tabla 2

h	$F(h) = (1 + h)^{1/h}$
−0.5	4
−0.05	2.7895
−0.01	2.7320
−0.001	2.7196
−0.0001	2.7184

En el ejercicio 55 se le pedirá que demuestre que

$$\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = e \quad \text{y} \quad \lim_{z\to-\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = e$$

En ese ejercicio también se le solicitará que apoye estos límites gráficamente.

En el ejercicio 56 se le indicará que trace la gráfica de la función definida por (10) y que aproxime el valor de e a partir de la gráfica.

En la sección 2.8 se dijo que el movimiento armónico simple continúa indefinidamente, repitiendo un ciclo cada intervalo de longitud de un periodo. De este modo, en el ejemplo 7 de esa sección, un cuerpo suspendido de un resorte se mueve verticalmente hacia arriba y hacia abajo, y se tiene una oscilación completa cada intervalo de 6 s. Sin embargo, en la práctica la fricción hace que la amplitud del movimiento disminuya hasta que el cuerpo alcance finalmente el estado de reposo. Éste es el caso del **movimiento armónico amortiguado,** el cual puede describirse mediante el producto de una función seno y una función no constante denominada **factor de amortiguamiento,** que ocasiona la disminución de la amplitud. El movimiento armónico amortiguado juega un papel importante en el diseño de edificios, puentes y vehículos. Por ejemplo, el propósito de los amortiguadores es suavizar las oscilaciones ocacionadas a un automóvil cuando éste se encuentra con un obstáculo en el camino.

Un factor de amortiguamiento importante es una función exponencial cuyos valores se aproximan a cero conforme la variable independiente crece sin límite. El ejemplo siguiente ilustra el efecto de este factor.

▶ ***EJEMPLO 6*** La función f definida por

$$f(t) = e^{-t/4}\,\text{sen}\,4t \qquad t \geq 0$$

es un modelo matemático que describe un movimiento armónico amortiguado. Considere

$$F(t) = -e^{-t/4} \quad \text{y} \quad G(t) = e^{-t/4}$$

y realice lo siguiente: (**a**) muestre que $F(t) \leq f(t) \leq G(t)$; (**b**) trace las gráficas de las tres funciones en el rectángulo de inspección de $[0, 2\pi]$ por $[-1, 1]$; (**c**) demuestre que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t/4}\,\text{sen}\,4t = 0$.

Solución

(**a**) Como $|\text{sen}\,4t| \leq 1$ y $e^{-t/4} > 0$ para toda t, entonces

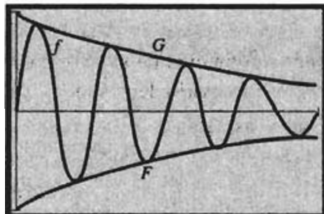
$$|f(t)| \leq e^{-t/4} \qquad \text{para todo } t$$

Así,

$$-e^{-t/4} \leq f(t) \leq e^{-t/4} \qquad \text{para todo } t \tag{11}$$

Esto es, $F(t) \leq f(t) \leq G(t)$.

(**b**) La figura 5 muestra las gráficas requeridas. Observe que la gráfica de f está entre las gráficas de F y G.



$[0, 2\pi]$ por $[-1, 1]$

$F(t) = -e^{-t/4}, f(t) = e^{-t/4}\,\text{sen}\,4t,$ y $G(t) = e^{-t/4}$

FIGURA 5

(**c**) Debido a que $\lim\limits_{t\to+\infty}(-e^{-t/4}) = 0$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t/4} = 0$, se concluye de (11) y del teorema de estricción que $\lim\limits_{t\to+\infty}(e^{-t/4}\,\text{sen}\,4t) = 0$. ◀

EJERCICIOS 5.4

En los ejercicios 1 a 4, obtenga en una calculadora el valor de a^x para los valores dados de a y x aplicando primero la ecuación (5). Apoye la respuesta calculando el valor directamente.

1. **(a)** $a = 2, x = \sqrt{2}$ **(b)** $a = \sqrt{2}, x = e$
2. **(a)** $a = \sqrt{2}, x = \sqrt{2}$ **(b)** $a = 5, x = \pi$
3. **(a)** $a = e, x = e$ **(b)** $a = \sqrt{3}, x = \pi$
4. **(a)** $a = \pi, x = e$ **(b)** $a = \pi, x = \pi$

En los ejercicios 5 a 20, determine $\frac{dy}{dx}$, y apoye la respuesta trazando las gráficas de la respuesta y de la derivada numérica en el mismo rectángulo de inspección.

5. $y = e^{5x}$
6. $y = e^{-7x}$
7. $y = e^{-3x^2}$
8. $y = e^{x^2-3}$
9. $y = e^{\cos x}$
10. $y = e^{2 \operatorname{sen} 3x}$
11. $y = e^x \operatorname{sen} e^x$
12. $y = \dfrac{e^x}{x}$
13. $y = \tan e^{\sqrt{x}}$
14. $y = e^{e^x}$
15. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
16. $y = \ln \dfrac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}$
17. $y = x^5 e^{-3 \ln x}$
18. $y = \ln(e^x + e^{-x})$
19. $y = \sec e^{2x} + e^{2 \sec x}$
20. $y = \tan e^{3x} + e^{\tan 3x}$

En los ejercicios 21 a 24, calcule $\frac{dy}{dx}$ mediante diferenciación implícita.

21. $e^x + e^y = e^{x+y}$
22. $e^y = \ln(x^3 + 3y)$
23. $y^2 e^{2x} + xy^3 = 1$
24. $ye^{2x} + xe^{2y} = 1$

En los ejercicios 25 a 32, evalúe la integral indefinida y apoye la respuesta gráficamente.

25. $\int e^{2-5x}\, dx$
26. $\int e^{2x+1}\, dx$
27. $\int \dfrac{1 + e^{2x}}{e^x}\, dx$
28. $\int e^{3x} e^{2x}\, dx$
29. $\int \dfrac{e^{3x}}{(1 - 2e^{3x})^2}\, dx$
30. $\int x^2 e^{2x^3}\, dx$
31. $\int \dfrac{e^{2x}}{e^x + 3}\, dx$
32. $\int \dfrac{dx}{1 + e^x}$

En los ejercicios 33 a 40, evalúe la integral definida. Apoye la respuesta empleando NINT en la graficadora.

33. $\int_0^1 e^2\, dx$
34. $\int_1^{e^2} \dfrac{dx}{x}$
35. $\int_e^{e^3} \dfrac{dx}{x}\, dx$
36. $\int_1^e \dfrac{\ln x}{x}\, dx$
37. $\int_e^{e^2} \dfrac{dx}{x(\ln x)^2}\, dx$
38. $\int_0^3 \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx$
39. $\int_0^2 xe^{4-x^2}\, dx$
40. $\int_1^2 \dfrac{e^x}{e^x + e}\, dx$

41. Trace las gráficas de $y = \ln x$ y $y = e^x$ en el mismo rectángulo de inspección. ¿Para qué valores de x **(a)** $\ln x = 0$, **(b)** $e^x = 1$, **(c)** $\ln x = 1$? **(d)** ¿e^x es cero alguna vez? Describa el comportamiento de la grafica de $y = e^x$ con respecto al eje x.

42. Dibuje las gráficas de las ecuaciones siguientes: **(a)** $y = e^{-x}$; **(b)** $y = e^{|x|}$

En los ejercicios 43 y 44, calcule el área exacta de la región descrita.

43. La región limitada por la curva $y = e^x$, los ejes coordenados y la recta $x = 2$.

44. La región limitada por la curva $y = e^x$, y la recta que pasa por los puntos (0, 1) y (1, e).

45. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^{-x}$ que es perpendicular a la recta $2x - y = 5$.

46. Obtenga una ecuación de la recta normal a la curva $y = e^{2x}$ en el punto donde $x = \ln 2$.

47. Una partícula se desplaza sobre una recta y a los t segundos su velocidad es v pies por segundo, donde $v = e^3 - e^{2t}$. Determine la distancia recorrida por la partícula mientras $v > 0$ después de que $t = 0$.

48. Una partícula se mueve a lo largo de una recta, donde s pies es la distancia dirigida de la partícula desde el origen, v pies por segundo es su velocidad y a pies por segundo cuadrado es su aceleración, a los t segundos. Si $a = e^t + e^t$, $v = 1$ y $s = 2$ cuando $t = 0$, exprese v y s en términos de t.

49. Si p lb/pie^2 es la presión atmosférica a una altura de h pies sobre el nivel del mar, entonces $p = 2116e^{-0.0000318h}$. Determine la tasa de variación (o derivada) del tiempo de la presión atmosférica fuera de un avión que se encuentra a una altura de 5 000 pie y se eleva a una tasa de 160 pie/s.

50. A cierta altura el manómetro de un avión indica que la presión atmosférica es de 1 500 lb/pie^2. Aplique la fórmula del ejercicio 49 a fin de aproximar mediante diferenciales qué tan alto debe subir el avión de modo que la presión sea de 1 480 lb/pie^2.

51. Si l pies es la longitud de una barra de acero cuando su temperatura es de t grados, entonces $l = 60e^{0.00001t}$. Utilice diferenciales para determinar el incremento aproximado de l cuando t aumenta de 0 a 10.

52. Un circuito eléctrico simple que no contiene condensadores, tiene una resistencia de R ohms y una inductancia de L henrys, no tiene tensión (o fuerza electromotriz) cuando la corriente es I_0 amperes. La corriente disminuye lentamente de modo que a los t segundos la corriente es i amperes,

e $i = I_0 e^{-(R/L)t}$. Demuestre que la tasa de variación de la corriente es proporcional a la corriente.

53. Una agencia de publicidad determinó estadísticamente que si un empresario de desayunos preparados aumenta su presupuesto para comerciales en televisión por x miles de dólares, tendrá un incremento en la ganancia total de $25x^2e^{-0.2x}$ cientos de dólares. ¿Cuál debe ser el incremento en el presupuesto para publicidad a fin de que el empresario obtenga la máxima ganancia?

54. Sea $f(x) = x^\pi$, $x > 0$. **(a)** Demuestre analíticamente que f es una función creciente. **(b)** Determine analíticamente la concavidad de la gráfica de f. **(c)** Trace en rectángulos de inspección separados las gráficas de f, f' y f'', y explique por qué estas gráficas apoyan los resultados de los incisos (a) y (b).

55. **(a)** Considere $h = \dfrac{1}{z}$ en la ecuación (9) y demuestre que

$$\lim_{z\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e \quad \text{y} \quad \lim_{z\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e$$

(b) Utilice la calculadora para determinar los valores de

$$\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \text{cuando } z = 10\,000 \quad \text{y} \quad z = -10\,000.$$

Después obtenga una aproximación del número e utilizando estos valores para calcular el valor promedio de $(1.0001)^{10\,000}$ y $(0.9999)^{-10\,000}$.

(c) Apoye los límites del inciso (a) trazando en el mismo rectángulo de inspección la recta $y = e$ y la gráfica de la función definida por

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Observe que la recta es una asíntota horizontal de la gráfica.

56. Trace la gráfica de la función definida por

$$f(x) = (1 + x)^{1/x}$$

en el rectángulo de inspección de $[-0.5, 0.5]$ por $[2, 3]$. Por supuesto, la gráfica tiene un agujero en el eje y porque $f(0)$ no está definido. Sin embargo,

$$\lim_{x\to0} f(x) = e$$

Aproxime el valor de e con cinco dígitos significativos empleando esta gráfica y los procedimientos de intersección (*intersect*) o, rastreo (*trace*) y aumento (*zoom in*) de la graficadora.

En los ejercicios 57 y 58, la función f es un modelo matemático que describe un movimiento armónico amortiguado. En cada ejercicio haga lo siguiente: (a) muestre que $F(t) \leq f(t) \leq G(t)$. *(b) Trace las gráficas de las tres funciones en el rectángulo de inspección* $[0, 2\pi]$ *por* $[-1, 1]$. *(c) demuestre que* $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

57. $f(t) = e^{-t/2}\cos 4t$; $F(t) = -e^{-t/2}$; $G(t) = e^{-t/2}$

58. $f(t) = e^{-t/8}\operatorname{sen} 3t$; $F(t) = -e^{-t/8}$; $G(t) = e^{-t/8}$

59. Demuestre que la función más general igual a su derivada está dada por $f(x) = ke^x$. *Sugerencia:* sea $y = f(x)$ y resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = y$.

60. Demuestre que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0$$

Sugerencia: utilice el resultado del ejercicio 55 de la sección 5.3.

En los ejercicios 61 y 62, realice analíticamente lo siguiente: (a) obtenga los extremos relativos de f; (b) determine los valores de x en los que ocurren los extremos relativos; (c) determine los intervalos en los que f es creciente; (d) determine los intervalos en los que f es decreciente; (e) determine dónde la gráfica de f es cóncava hacia arriba; (f) determine dónde la gráfica de f es cóncava hacia abajo; (g) calcule la pendiente de la recta de inflexión. Utilice la información de los incisos (a) a (f) para dibujar la gráfica de f. En el ejercicio 62 emplee el resultado del ejercicio 60 para dibujar la gráfica. Apoye las respuestas en la graficadora.

61. $f(x) = e^{-x^2}$

62. $f(x) = xe^{-x}$

63. Para la función del ejemplo 6, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$; sin embargo, el eje t no es una asíntota horizontal de la gráfica de f. ¿Por qué no se cumple la definición (3.7.4) de asíntota horizontal para esta función?

64. Demuestre que la función del ejemplo 5 es continua por la derecha en 0 mostrando que

$$\lim_{x\to0^+} x^{\sqrt{2}} = 0$$

65. Demuestre que

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

mostrando que para cualquier $N > 0$ existe una $M > 0$ tal que si $x > M$ entonces $e^x > N$.

66. Demuestre que

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

mostrando que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $N < 0$ tal que si $x < N$ entonces $e^x < \epsilon$.

67. Se inició el estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas en la sección 5.2 con la definición de la función logarítmica natural, de modo que pudo definirse en esta sección un exponente irracional. Este procedimiento proporciona una aplicación puramente matemática del Cálculo. Describa paso a paso brevemente, como sea posible, el proceso que condujo de la definición (5.2.1) de función logarítmica natural a la definición (5.4.2) de exponente irracional.

5.5 OTRAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

En las tres secciones anteriores se estudiaron las funciones exponencial natural y logarítmica natural, las cuales tienen base e. Ahora se tratarán funciones exponenciales y logarítmicas con otras bases.

Recuerde de la definición 5.4.2 que si $a > 0$, entonces

$$a^x = e^{x \ln a} \tag{1}$$

La expresión del miembro izquierdo de esta ecuación se denomina *función exponencial de base a*.

5.5.1 Definición de función exponencial de base *a*

Si a es cualquier número real positivo y x es cualquier número real, entonces la función f definida por

$$f(x) = a^x$$

se denomina **función exponencial de base *a*.**

La función exponencial de base a satisface las mismas propiedades que la función exponencial natural.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Si x y y son cualesquiera dos números reales y a es positivo, entonces de (1),

$$\begin{aligned} a^x a^y &= e^{x \ln a} e^{y \ln a} \\ &= e^{x \ln a + y \ln a} \\ &= e^{(x+y) \ln a} \\ &= a^{x+y} \end{aligned}$$ ◀

Del ejemplo ilustrativo 1 se tiene la propiedad

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

También se tienen las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} a^x \div a^y &= a^{x-y} \\ (a^x)^y &= a^{xy} \\ (ab)^x &= a^x b^x \\ a^0 &= 1 \end{aligned}$$

Las demostraciones de estas propiedades se dejan como ejercicios (refiérase a los ejercicios 37 a 40).

A fin de obtener la derivada de la función exponencial de base a se considera $a^x = e^{x \ln a}$ y se aplica la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} a^x &= e^{x \ln a} \\ D_x(a^x) &= e^{x \ln a} D_x(x \ln a) \\ &= e^{x \ln a}(\ln a) \\ &= a^x \ln a \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene el siguiente teorema.

5.5.2 Teorema

Si a es cualquier número real positivo y u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(a^u) = a^u \ln a \, D_x u$$

EJEMPLO 1 Calcule $f'(x)$ si

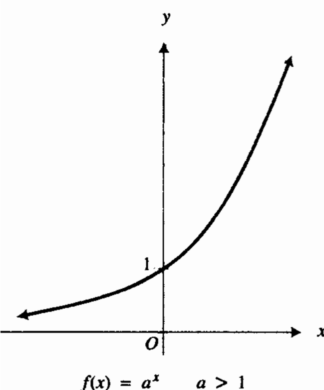
$$f(x) = 3^{x^2}$$

Solución Del teorema 5.5.2

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3^{x^2}(\ln 3)(2x) \\ &= 2(\ln 3)x3^{x^2} \end{aligned}$$

A continuación se discutirá la gráfica de

$$f(x) = a^x \qquad a > 0$$



$f(x) = a^x \qquad a > 1$

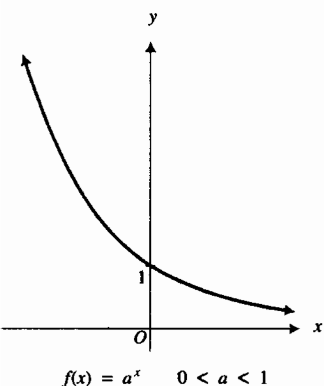
FIGURA 1

Al calcular las derivadas primera y segunda de f, se obtiene

$$f'(x) = a^x \ln a \qquad f''(x) = a^x(\ln a)^2$$

Recuerde que $\ln a > 0$ si $a > 1$ y que $\ln a < 0$ si $0 < a < 1$. Así, cuando $a > 1, f'(x) > 0$ y f es una función creciente, y cuando $0 < a < 1, f'(x) < 0$ y f es una función decreciente. Como $f''(x) > 0$ para toda x y toda $a > 0$, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en todos sus puntos. Con esta información se dibuja la gráfica en la figura 1 cuando $a > 1$, y en la figura 2 cuando $0 < a < 1$.

El siguiente teorema, que proporciona la fórmula de integración indefinida para la función exponecial de base a, se deduce del teorema 5.5.2.



$f(x) = a^x \qquad 0 < a < 1$

FIGURA 2

5.5.3 Teorema

Si a es cualquier número real positivo diferente de 1, entonces

$$\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

EJEMPLO 2 Evalúe

$$\int \sqrt{10^{3x}} \, dx$$

Solución Como $\sqrt{10^{3x}} = 10^{3x/2}$, se aplica el teorema 5.5.3 con $u = \frac{3}{2}x$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \int \sqrt{10^{3x}} \, dx &= \int 10^{3x/2} \, dx \\ &= \frac{2}{3} \int 10^{3x/2} \left(\frac{3}{2} dx \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{10^{3x/2}}{\ln 10} + C$$

$$= \frac{2\sqrt{10^{3x}}}{3 \ln 10} + C$$ ◀

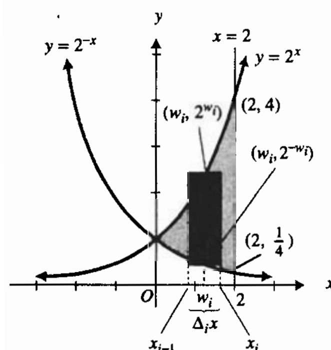


FIGURA 3

EJEMPLO 3 (**a**) Dibuje las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 2^{-x}$ en el mismo sistema de ejes. (**b**) Calcule el área exacta de la región limitada por estas dos gráficas y la recta $x = 2$. (**c**) Apoye la respuesta del inciso (b) mediante el cálculo de la integral definida empleando NINT en la graficadora.

Solución

(**a**) Las gráficas requeridas se muestran en la figura 3. La región está sombreada en la figura.

(**b**) Si A unidades cuadradas es el área deseada, entonces

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [2^{w_i} - 2^{-w_i}]\Delta_i x$$

$$= \int_0^2 (2x - 2^{-x})\, dx$$

$$= \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2}\Bigg]_0^2$$

$$= \frac{4}{\ln 2} + \frac{\frac{1}{4}}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}$$

$$= \frac{9}{4 \ln 2}$$

(**c**) En la graficadora se obtiene

$$\text{NINT}(2^x - 2^{-x}, 0, 2) = 3.2461$$

Este resultado es acorde con la respuesta del inciso (b) debido a que, con cinco dígitos significativos, $9/(4 \ln 2) = 3.2461$. ◀

Ahora se puede definir la *función logarítmica de base a*, denotada por $\log_a$, donde a es cualquier número real positivo diferente de 1.

5.5.4 Definición de función logarítmica de base a

Si a es cualquier número real positivo diferente de 1, la **función logarítmica** de base a es la inversa de la función exponencial de base a; esto es,

$$y = \log_a x \quad \text{si y sólo si} \quad a^y = x \qquad \textbf{(2)}$$

Esta definición es la misma que la presentada en álgebra; sin embargo, (2) tiene significado para cualquier número real y porque a^y se ha definido precisamente para cualquier número real como exponente. Si $a = e$, se tiene la función logarítmica de base e, la cual es la función logarítmica natural.

El símbolo $\log_a x$ se lee como "el logaritmo de x de base a".

Debido a que las gráficas de una función y su inversa son reflexiones una de la otra con respecto a la recta $y = x$, se obtiene la gráfica de $y = \log_a x$

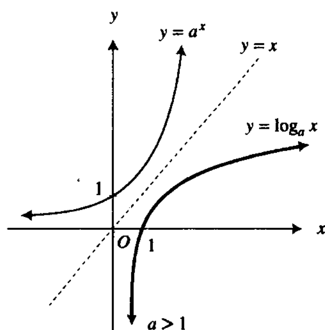


FIGURA 4

FIGURA 5

a partir de la gráfica de $y = a^x$. La figura 4 muestra las dos gráficas si $a > 1$, mientras que la figura 5 muestra las gráficas si $0 < a < 1$.

La función logarítmica de base a cumple las mismas leyes que la función logarítmica natural. Estas leyes son:

$$\begin{aligned}\log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y\\ \log_a(x \div y) &= \log_a x - \log_a y\\ \log_a 1 &= 0\\ \log_a x^y &= y \log_a x\end{aligned}$$

Las demostraciones de estas propiedades se dejan como ejercicios (refiérase a los ejercicios 41 a 44).

A continuación se deduce una relación entre los logaritmos de base a y los logaritmos naturales. Sea

$$y = \log_a x$$

Entonces

$$\begin{aligned}a^y &= x\\ \ln a^y &= \ln x\\ y \ln a &= \ln x\\ y &= \frac{\ln x}{\ln a}\end{aligned}$$

Al sustituir y por $\log_a x$ en la ecuación anterior se obtiene

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad (3)$$

La mayoría de las calculadoras no tiene la tecla $\boxed{\log_a x}$. De modo que (3) es una fórmula conveniente para calcular valores de $\log_a x$ en la calculadora.

La ecuación (3) se emplea en ocasiones como la definición de la función logarítmica de base a. Como la función logarítmica natural es continua en toda $x > 0$, se deduce de (3) que la función logarítmica de base a es continua en toda $x > 0$.

Si en (3) se considera $x = e$, se obtiene

$$\log_a e = \frac{\ln e}{\ln a}$$

$$\log_a e = \frac{1}{\ln a} \qquad (4)$$

A continuación se determinará la derivada de la función logarítmica de base a diferenciando los dos miembros de (3) con respecto a x.

$$D_x(\log_a x) = \frac{1}{\ln a} D_x(\ln x)$$

$$D_x(\log_a x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \qquad (5)$$

Al sustituir de (4) en esta ecuación se tiene

$$D_x(\log_a x) = \frac{\log_a e}{x}$$

Si se aplica la regla de la cadena a esta fórmula y a (5) se obtiene el teorema siguiente.

5.5.5 Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(\log_a u) = \frac{\log_a e}{u} \cdot D_x u$$
$$\Leftrightarrow \quad D_x(\log_a u) = \frac{1}{(\ln a)u} \cdot D_x u$$

Si en este teorema se considera $a = e$, se tiene

$$D_x(\log_e u) = \frac{\log_e e}{u} D_x u$$
$$\Leftrightarrow \quad D_x(\ln u) = \frac{1}{u} D_x u$$

el cual es el teorema 5.5.2 para la derivada de la función logarítmica natural.

▶ **EJEMPLO 4** Calcule $\frac{dy}{dx}$ si

$$y = \log_{10} \frac{x+1}{x^2+1}$$

Solución Al emplear una propiedad de logaritmos, se tiene

$$y = \log_{10}(x+1) - \log_{10}(x^2+1)$$

Del teorema 5.5.5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_{10} e}{x+1} - \frac{\log_{10} e}{x^2+1} \cdot 2x$$
$$= \log_{10} e\left(\frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1}\right)$$
$$= \frac{\log_{10} e(1 - 2x - x^2)}{(x+1)(x^2+1)}$$ ◀

A fin de evaluar integrales que contiene logaritmos de base a, primero se aplica la fórmula (3) para cambiar a logaritmos naturales.

▶ **EJEMPLO 5** Evalúe

$$\int \frac{\log_{10} x}{x} dx = \frac{1}{\ln 10} \int \frac{\ln x}{x} dx$$

Solución La integral de la derecha se evalúa como en el ejemplo 5 de la sección 5.3, y se obtiene

$$\int \frac{\log_{10} x}{x} dx = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$
$$= \frac{(\ln x)^2}{2 \ln 10} + C$$ ◀

El teorema 5.4.12 permite diferenciar una variable elevada a un exponente constante. En esta sección se estudió cómo calcular la derivada de una constante elevada a un exponente variable. Ahora se considerará la derivada de una función cuyo valor es una variable elevada a un exponente variable.

EJEMPLO 6 Si $y = x^x$, donde $x > 0$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

Solución De la definición 5.4.2, si $x > 0$, $x^x = e^{x \ln x}$. Por tanto,

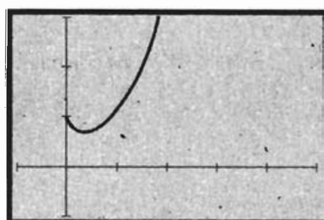
$$y = e^{x \ln x}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x \ln x} D_x(x \ln x)$$

$$= e^{x \ln x}\left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x\right)$$

$$= x^x(1 + \ln x)$$

La derivada de una variable elevada a un exponente variable también puede calcularse mediante diferenciación logarítmica, como se muestra en el ejemplo siguiente.



[−1, 5] por [−1, 3]

$y_1 = x^x$

FIGURA 6

EJEMPLO 7 Calcule la derivada del ejemplo 6 mediante derivación logarítmica.

Solución Se tiene

$$y = x^x$$

Al tomar el logaritmo en los dos miembros de esta ecuación se obtiene

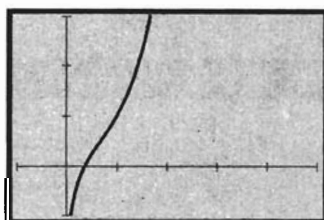
$$\ln y = \ln x^x$$
$$\ln y = x \ln x$$

Si se derivan ambos miembros de la ecuación anterior con respecto a x se tiene

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x)$$

$$= x^x(1 + \ln x)$$



[−1, 5] por [−1, 3]

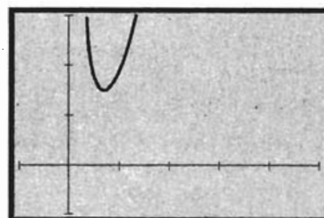
$y_2 = \text{NDER}(y_1, x)$

FIGURA 7

EJEMPLO 8 Sea

$$f(x) = x^x \qquad x > 0$$

Trace las gráficas de f, NDER(x^x, x) y NDER2(x^x, x) en rectángulos de inspección convenientes. A partir de las gráficas, estime los extremos relativos de f, los valores de x donde ocurren los extremos relativos, donde es creciente f, donde es decreciente f, donde es cóncava hacia arriba la gráfica de f y donde lo es hacia abajo, y sus puntos de inflexión. Confirme las estimaciones analíticamente.



[−1, 5] por [−1, 3]

$y_3 = \text{NDER}(y_2, x)$

FIGURA 8

Solución En la graficadora, considere

$$y_1 = x^x \qquad y_2 = \text{NDER}(y_1, x) \qquad y_3 = \text{NDER}(y_2, x)$$

Al trazar las gráficas de y_1, y_2 y y_3 en el rectángulo de inspección de [−1, 5] por [−1, 3], se obtienen las figuras 6, 7 y 8, las cuales muestran las gráficas de f, f' y f'', respectivamente. De la figura 7, con los procedimientos raíz (*root*) o

rastreo (*trace*) y aumento (*zoom in*) de la graficadora, se estima que la gráfica de f' intersecta al eje x en el punto donde $x = 0.368$. Como $f'(x) < 0$ cuando $0 < x < 0.368$, y $f'(x) > 0$ cuando $x > 0.368$, se estima que f es decreciente cuando $0 < x < 0.368$, y es creciente cuando $x > 0.368$; además, f tiene un valor mínimo relativo en 0.368. De la figura 8, $f''(x) > 0$ para toda $x > 0$. Por tanto, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en todos sus puntos.

A continuación se confirmarán analíticamente estos resultados. Del ejemplo 6,

$$f'(x) = x^x(1 + \ln x)$$

De modo que,

$$\begin{aligned} f''(x) &= D_x(x^x)(1 + \ln x) + x^x D_x(1 + \ln x) \\ &= [x^x(1 + \ln x)](1 + \ln x) + x^x\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x^x(1 + \ln x)^2 + x^{x-1} \end{aligned}$$

Al considerar $f'(x) = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} 1 + \ln x &= 0 \\ \ln x &= -1 \\ x &= e^{-1} \end{aligned}$$

Con tres dígitos significativos, $e^{-1} = 0.368$. La expresión para $f'(x)$ es negativa cuando $0 < x < e^{-1}$ y positiva cuando $x > e^{-1}$, y la expresión para $f''(x)$ es positiva para toda $x > 0$. Estos hechos confirman las estimaciones efectuadas gráficamente. La gráfica de la figura 6 también es acorde con los resultados. ◀

EJERCICIOS 5.5

En los ejercicios 1 a 20, calcule la derivada de la función.

1. $f(x) = 3^{5x}$
2. $f(x) = 6^{-3x}$
3. $f(t) = 4^{3t^2}$
4. $g(x) = 10^{x^2-2x}$
5. $f(x) = 4^{\text{sen } 2x}$
6. $f(z) = 2^{\csc 3z}$
7. $g(x) = 2^{5x}3^{4x^2}$
8. $f(x) = (x^3 + 3)2^{-7x}$
9. $h(x) = \dfrac{\log_{10} x}{x}$
10. $f(t) = \log_{10} \dfrac{t}{t + 1}$
11. $f(x) = \sqrt{\log_a x}$
12. $g(w) = \tan 2^{3w}$
13. $f(t) = \sec 3^{t^2}$
14. $f(x) = x^{\ln x}; x > 0$
15. $f(x) = x^{\sqrt{x}}; x > 0$
16. $f(x) = x^{x^2}; x > 0$
17. $g(z) = z^{\cos z}; z > 0$
18. $f(x) = x^{e^x}; x > 0$
19. $h(x) = (\text{sen } x)^{\tan x}$; sen $x > 0$
20. $g(t) = (\cos t)^t; \cos t > 0$

En los ejercicios 21 a 30, evalúe la integral indefinida.

21. $\displaystyle\int 3^{2x}\, dx$
22. $\displaystyle\int a^{nx}\, dx$
23. $\displaystyle\int a^t e^t\, dt$
24. $\displaystyle\int 5^{x^4+2x}(2x^3 + 1)\, dx$
25. $\displaystyle\int x^2 10^{x^3}\, dx$
26. $\displaystyle\int a^{z \ln z}(\ln z + 1)\, dz$
27. $\displaystyle\int e^y 2^{e^y} 3^{e^y}\, dy$
28. $\displaystyle\int \frac{4^{\ln(1/x)}}{x}\, dx$
29. $\displaystyle\int \frac{\log_2 x^2}{x}\, dx$
30. $\displaystyle\int \frac{(\log_3 x)^2}{x}\, dx$

En los ejercicios 31 a 34, obtenga el valor del logaritmo con cinco dígitos significativos en una calculadora.

31. **(a)** $\log_5 e$ **(b)** $\log_3 7$
32. **(a)** $\log_6 10$ **(b)** $\log_2 361$
33. **(a)** $\log_2 10$ **(b)** $\log_{10} e$
34. **(a)** $\log_3 2$ **(b)** $\log_4 4728$

En los ejercicios 35 y 36, dado que $\log_{10} e = 0.4343$, utilice diferenciales para obtener una aproximación del valor del logaritmo con tres dígitos significativos; apoye la respuesta obteniendo el valor en una calculadora.

35. $\log_{10} 997$
36. $\log_{10} 1.015$

En los ejercicios 37 a 40, demuestre la propiedad si a y b son cualesquiera dos números reales positivos, en tanto que x y y son números reales.

37. $a^x \div a^y = a^{x-y}$

38. $(a^x)^y = a^{xy}$

39. $(ab)^x = a^x b^x$

40. $a^0 = 1$

En los ejercicios 41 a 44, demuestre la propiedad si a y b son cualesquiera dos números reales positivos diferentes de 1, en tanto que x y y son números reales.

41. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

42. $\log_a(x \div y) = \log_a x - \log_a y$

43. $\log_a 1 = 0$

44. $\log_a x^y = y \log_a x$

45. Una compañía ha aprendido que cuando inicia una campaña de ventas, el número de ventas por día se incrementa. Sin embargo, el número de ventas extras diarias disminuye conforme el impacto de la campaña disminuye. Para una campaña específica la compañía ha determinado que si hay $S(t)$ ventas extras diarias como resultado de la campaña y han transcurrido t días desde que la campaña terminó, entonces $S(t) = 1000(3^{-t/2})$. Calcule la tasa a la cual las ventas extras diarias decrecen cuando **(a)** $t = 4$, y **(b)** $t = 10$.

46. Una compañía estima que en t años el número de sus empleados será $N(t)$, donde $N(t) = 1\,000(0.8)^{t/2}$. **(a)** ¿Cuántos empleados espera tener la compañía en 4 años? **(b)** ¿A qué tasa se espera que el número de empleados esté variando en 4 años?

47. Una partícula se desplaza a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación de movimiento $s = A \cdot 2^{kt} + B \cdot 2^{-kt}$, donde A, B y k son constantes y s pies es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Demuestre que si a pies por segundo cuadrado es la aceleración a los t segundos, entonces a es proporcional a s. ¿Por qué el movimiento no es armónico simple?

48. Una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación de movimiento $s = t^{1/t}$, donde s pies es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Calcule la velocidad y la aceleración a los 2 s.

49. Un cuadro abstracto, importante históricamente, fue comprado en 1934 por $200, y su valor se ha duplicado cada 10 años a partir de su compra. Si y dólares es el valor del cuadro t años después de su compra, **(a)** defina y en términos de t. **(b)** ¿Cuál fue el valor del cuadro en 1994? **(c)** Determine la tasa a la cual el valor del cuadro estuvo incrementándose en 1994.

En los ejercicios 50 a 52, dibuje la gráfica de la ecuación.

50. **(a)** $y = 3^x$ **(b)** $y = \log_3 x$

51. **(a)** $y = 2^x$ **(b)** $y = \log_2 x$

52. **(a)** $y = 3^{-x}$ **(b)** $y = \log_{1/3} x$

En los ejercicios 53 a 56, apoye la respuesta al calcular la integral definida empleando NINT *en la graficadora.*

53. Calcule el área exacta de la región limitada por la gráfica de $y = 5^x$ y las rectas $x = 1$ y $y = 1$.

54. Obtenga el área exacta de la región acotada por las gráficas de $y = e^x$ y $y = 2^x$, y la recta $x = 2$.

55. Determine el volumen exacto del sólido generado al girar la región del ejercicio 53 alrededor del eje x.

56. Calcule el volumen exacto del sólido generado al girar la región del ejercicio 54 alrededor del eje x.

57. Calcule con cinco dígitos significativos el área de la región limitada por las gráficas de $y = \log_{10} x$, $y = \ln x$ y la recta $x = 3$.

58. Obtenga con cinco dígitos significativos el volumen del sólido generado al girar la región del ejercicio 57 alrededor del eje x.

En los ejercicios 59 y 60, haga lo siguiente: (a) trace las gráficas de f, NDER$(f(x), x)$ *y* NDER2$(f(x), x)$ *en rectángulos de inspección convenientes. A partir de las gráficas, estime (b) los extremos relativos de f, (c) donde es creciente f, (d) donde es decreciente f, (e) donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba y donde lo es hacia abajo, y (f) los puntos de inflexión. (g) Confirme analíticamente las estimaciones.*

59. $f(x) = x^{\ln x}$

60. $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

61. En la sección 5.4, las funciones del ejemplo 6 y de los ejercicios 57 y 58 son modelos matemáticos que describen movimiento armónico amortiguado, donde la amplitud decrece hasta cero conforme el tiempo se incrementa. Si la ampltud aumenta sin límite conforme el tiempo crece, se tiene un movimiento armónico ilimitado y ocurre la **resonancia.** La función definida por

$$f(t) = 2^t \cos 4t \qquad t \geq 0$$

es un modelo matemático que describe el fenómeno de resonancia. **(a)** Considere

$$F(t) = -2^t \quad \text{y} \quad G(t) = 2^t$$

y trace las gráficas de f, F y G en el rectángulo de inspección de $[0, \pi]$ por $[-10, 10]$. **(b)** A partir de las gráficas del inciso (a), observe que

$$F(t) \leq f(t) \leq G(t)$$

Confirme analíticamente esta desigualdad continua. **(c)** Describa el comportamiento de $f(t)$ conforme t crece sin límite.

62. Realice el ejercicio 61 considerando ahora que $f(t) = 3^{t/3} \operatorname{sen} 8t$, $F(t) = -3^{t/3}$ y $G(t) = 3^{t/3}$. En el inciso (a) trace las gráficas en el rectángulo de inspección de $[0, 2\pi]$ por $[-10, 10]$.

63. Sea $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$. Demuestre que

$$f(b + c) + f(b - c) = 2f(b)f(c)$$

64. Explique por qué, conociendo los valores de $\log_{10} 2$ y $\log_{10} 3$, se puede obtener, sin emplear una calculadora, $\log_{10} 4$, $\log_{10} 5$, $\log_{10} 6$, $\log_{10} 8$, $\log_{10} 9$, pero no $\log_{10} 7$.

65. La única solución de la ecuación

$$\log_{10} x = \ln x$$

es $x = 1$. Explique por qué ésta es una solución y por qué no existen otras.

66. Describa las características comunes de las gráficas de $y = \log_{10} x$ y $y = \ln x$. También describa sus diferencias.

67. Sea $f(x) = \log_x 5$. **(a)** Trace la gráfica de f en un rectángulo de inspección conveniente. *Sugerencia:* primero aplique la

ecuación (3) de esta sección. Describa la gráfica y en su descripción incluya: (**i**) donde parece que f es creciente, donde parece que f es decreciente, y los extremos relativos de f; (**ii**) donde parece que la gráfica de f es cóncava hacia arriba, donde lo es hacia abajo, y los puntos de inflexión de f. (**b**) Trace la gráfica de f' en un rectángulo de inspección adecuado. A partir de esta gráfica determine donde f es creciente, donde f es decreciente y los extremos relativos de f. ¿Son estas conclusiones consistentes con las obtenidas en el inciso (a)? (**c**) Trace la gráfica de f'' en un rectángulo de inspección conveniente. A partir de esta gráfica determine donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba, donde lo es hacia abajo y los puntos de inflexión de f. ¿Son estas conclusiones consistentes con las obtenidas en el inciso (a)? (**d**) Confirme analíticamente sus conclusiones.

5.6 APLICACIONES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

Los modelos matemáticos que implican ecuaciones diferenciales cuyas soluciones contienen potencias de e, ocurren en muchos campos tales como química, física, biología, sicología, sociología, administración y economía.

Esta sección se inicia con el estudio de modelos que implican *crecimiento* y *decrecimiento*, los cuales se obtienen cuando la tasa de variación (derivada) de una cantidad con respecto al tiempo es proporcional a la cantidad presente en un instante dado. Por ejemplo, la tasa de crecimiento de la población de una comunidad puede ser proporcional a la población real en cualquier instante dado. En biología, bajo ciertas circunstancias, la tasa de crecimiento de un cultivo de bacterias es proporcional a la cantidad de bacterias presentes en cualquier momento específico. En una reacción química, la tasa (velocidad) de reacción con frecuencia es proporcional a la cantidad de sustancia presente; por ejemplo, los químicos saben, a partir de experimentos, que la tasa de decrecimiento (decaimiento o desintegración) del radio es proporcional a la cantidad de radio presente en un instante dado. Una aplicación en finanzas se tiene cuando el interés se compone continuamente.

En tales casos, si el tiempo se representa mediante t unidades, y si y unidades representa la cantidad presente en cualquier momento, entonces

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

donde k es una constante y $y > 0$ para toda $t \geq 0$. Si y crece conforme t se incrementa, entonces $k > 0$ y se tiene la **ley de crecimiento natural.** Si y decrece cuando t aumenta, entonces $k < 0$, y se tiene la **ley de decrecimiento natural.**

Si por definición y es un número entero positivo (por ejemplo, si y es la población de cierta comunidad), se supondrá que y puede ser cualquier número real positivo a fin de que y sea una función continua de t.

Suponga que se tiene un modelo matemático que implica la ley de crecimiento o decrecimiento natural y la condición inicial $y = y_0$ cuando $t = 0$. Entonces la ecuación diferencial que representa este modelo es

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Al separar las variables se obtiene

$$\frac{dy}{y} = k\,dt$$

Si se integran ambos miembros de esta ecuación se tiene

$$\int \frac{dy}{y} = k \int dt$$

$$\ln |y| = kt + \bar{c}$$

$$|y| = e^{kt+\bar{c}}$$
$$|y| = e^{\bar{c}} \cdot e^{kt}$$

Al considerar $e^{\bar{c}} = C$ se tiene $|y| = Ce^{kt}$, y como y es positivo se pueden omitir las barras de valor absoluto, obteniéndose

$$y = Ce^{kt}$$

debido a que $y = y_0$ cuando $t = 0$, se tiene $C = y_0$. De modo que

$$y = y_0 e^{kt}$$

De esta manera se ha demostrado el teorema siguiente.

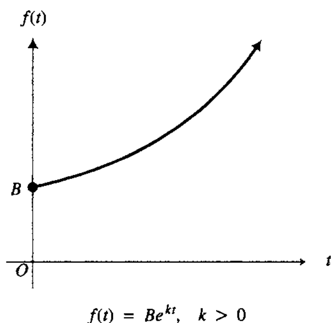
5.6.1 Teorema

Suponga que y es una función continua de t con $y > 0$ para toda $t \geq 0$. Además, suponga que

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

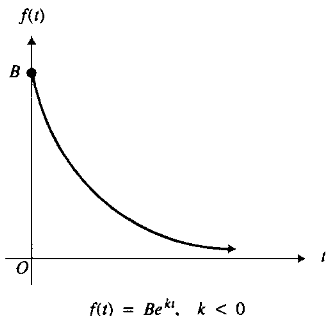
donde k es una constante y $y = y_0$ cuando $t = 0$. Entonces

$$y = y_0 e^{kt}$$



$f(t) = Be^{kt}, \quad k > 0$

FIGURA 1



$f(t) = Be^{kt}, \quad k < 0$

FIGURA 2

Considere el enunciado de este teorema con la notación funcional. Con $y = f(t)$ y $f(0) = B$ y $B > 0$ (esto es $y_0 = B$), el teorema establece que si

$$f'(t) = kf(t) \qquad t \geq 0 \tag{1}$$

entonces

$$f(t) = Be^{kt} \qquad t \geq 0 \tag{2}$$

Si $k > 0$, entonces (1) es la ley de crecimiento natural y (2) define una función que tiene **crecimiento exponencial**. Con $k > 0$ se tiene

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = B \lim_{t \to +\infty} e^{kt}$$
$$= +\infty$$

Así, $f(t)$ crece sin límite conforme t aumenta sin límite. La gráfica de (2) cuando $k > 0$ se presenta en la figura 1.

Si $k < 0$, entonces (1) es la ley de decrecimiento natural y (2) define una función que tiene **decrecimiento exponencial.** De (2), con $k < 0$, se tiene

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = B \lim_{t \to +\infty} e^{kt}$$
$$= 0$$

y $f(t)$ se aproxima a cero a través de valores positivos. La figura 2 muestra la gráfica de (2) cuando $k < 0$.



EJEMPLO 1 En cierto cultivo, la tasa de crecimiento de bacterias es proporcional a la cantidad presente. Inicialmente, se tenían 1 000 bacterias y la cantidad se duplicó en 12 min. (**a**) Si y bacterias están presentes a los t minutos, exprese y como una función de t. (**b**) En una graficadora, estime con

precisión de minutos, el tiempo que deberá trancurrir para que se tengan 10 000 bacterias. (**c**) Confirme analíticamente la estimación del inciso (b).

Tabla 1

t	0	12	T
y	1 000	2 000	10 000

Solución La tabla 1 muestra las condiciones de frontera,donde y bacterias están presentes a los t minutos. Observe que T minutos serán necesarios para que se tengan 10 000 bacterias en el cultivo.

(**a**) El modelo matemático consiste en la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

donde k es una constante y $y = 1\,000$ cuanto $t = 0$. Del teorema 5.6.1,

$$y = 1\,000e^{kt} \qquad \textbf{(3)}$$

Como $y = 2\,000$ cuando $t = 12$, de (3) se obtiene

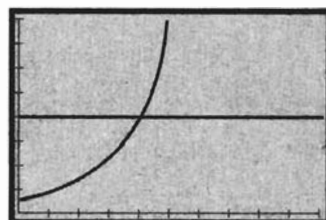
$$e^{12k} = 2 \qquad \textbf{(4)}$$

A partir de (3) se tiene

$$y = 1\,000(e^{12k})^{t/12}$$

Al sustituir de (4) en la ecuación anterior se obtiene

$$y = 1\,000 \cdot 2^{t/12} \qquad \textbf{(5)}$$



[0, 100] por [0, 20 000]

$y = 1\,000 \cdot 2^{t/12}$ y $y = 10\,000$

FIGURA 3

(**b**) La figura 3 muestra las gráficas de la ecuación (5) y la recta $y = 10\,000$ trazadas en el rectángulo de inspección de [0, 100] por [0, 20 000]. Utilizando los procedimientos intersección (*intersec*), o rastreo (*trace*), y aumento (*zoom in*) de la graficadora, se determina que la gráfica y la recta se intersectan en el punto donde $t = 39.9$. De este modo, se estima que son necesarios 40 minutos para que se tengan 10 000 baterias en el cultivo.

(**c**) A fin de confirmar analíticamente la estimación, en (5) se sustituye t por T y y por 10 000, obteniéndose

$$\begin{aligned} 10\,000 &= 1\,000 \cdot 2^{T/12} \\ 2^{T/12} &= 10 \\ \ln(2^{T/12}) &= \ln 10 \\ \frac{T}{12} \cdot \ln 2 &= \ln 10 \\ T &= \frac{12 \ln 10}{\ln 2} \\ T &= 39.9 \end{aligned}$$

lo cual confirma la estimación del inciso (b).

<u>**Conclusión:**</u> En 40 minutos se tendrán 10 000 bacterias en el cultivo. ◀

▶ ***EJEMPLO 2*** La tasa de crecimiento de la población de cierta comunidad es proporcional a la población. En 1950 la población fue de 50 000 y en 1980 fue de 75 000. (**a**) Si y es la población t años a partir de 1950, exprese y como una función de t. (**b**) Estime en la graficadora la población que habrá en el año 2010. (**c**) Confirme analíticamente la estimación del inciso (b).

Tabla 2

t	0	30	60
y	50 000	75 000	y_{60}

Solución La tabla 2 proporciona las condiciones iniciales donde y_{60} es la población esperada para el año 2010.

(a) El modelo matemático está representado por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

donde k es una constante y $y = 50\,000$ cuando $t = 0$. Del teorema 5.6.1 se tiene

$$y = 50\,000e^{kt} \tag{6}$$

Como $y = 75\,000$ cuando $t = 30$, de (6) se obtiene

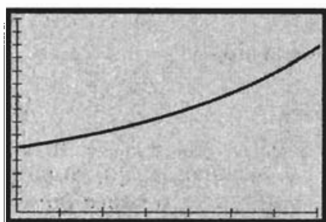
$$\begin{aligned} 75\,000 &= 50\,000e^{30k} \\ e^{30k} &= 1.5 \end{aligned} \tag{7}$$

A partir de (6) se tiene

$$y = 50\,000(e^{30k})^{t/30}$$

Si se sustituye de (7) en esta ecuación, se obtiene

$$y = 50\,000(1.5)^{t/30} \tag{8}$$



[0, 70] por [0, 150 000]

$y = 50\,000(1.5)^{t/30}$

FIGURA 4

(b) La gráfica de la ecuación (8) está trazada en el rectángulo de inspección de [0, 70] por [0, 150 000] y se muestra en la figura 4. Se emplea el aumento (*zoom in*) para determinar que el valor de y es 112 500 cuando $t = 60$.

(c) Al sustituir 60 por t y y_{60} por y en (8) se obtiene

$$\begin{aligned} y_{60} &= 50\,000(1.5)^2 \\ &= 112\,500 \end{aligned}$$

lo cual confirma la estimación del inciso (b).

Conclusión: La población en el año 2010 será de 112 500. ◀

En el ejemplo anterior, como la población crece con el tiempo se tiene un caso de crecimiento exponencial. Si una población decrece al transcurrir el tiempo, lo cual puede ocurrir si la tasa de mortalidad es mayor que la tasa de natalidad, entonces se tiene el caso de decrecimiento exponencial (refiérase al ejercicio 4). El ejemplo siguiente proporciona otra situación que implica decrecimiento exponencial. En los problemas que tratan acerca de este tipo de decrecimiento, la **semivida** (o **vida media**) de una sustancia es el tiempo necesario para que la cantidad de sustancia se reduzca a la mitad.

▶ ***EJEMPLO 3*** La tasa de decrecimiento (rapidez de desintegración) del radio es proporcional a la cantidad presente en cualquier momento. La semivida del radio es de 1 690 años y se tienen actualmente 20 mg de este elemento químico. **(a)** Si se tendrán y miligramos de radio dentro de t años a partir de ahora, exprese y como una función de t. **(b)** Estime en la graficadora la cantidad de radio que se tendrá dentro de 1 000 años a partir de ahora. **(c)** Confirme analíticamente la estimación del inciso (b).

Tabla 3

t	0	1690	1000
y	20	10	$y_{1\,000}$

Solución Las condiciones de frontera se presentan en la tabla 3, donde $y_{1\,000}$ miligramos de radio se tendrán dentro de 1 000 a partir de ahora.

(a) El modelo matemático consiste en la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

donde k es una constante y $y = 20$ cuando $t = 0$. Del teorema 5.6.1 se tiene

$$y = 20e^{kt} \tag{9}$$

Como $y = 10$ cuando $t = 1690$, de (9) se obtiene

$$10 = 20e^{1690k}$$

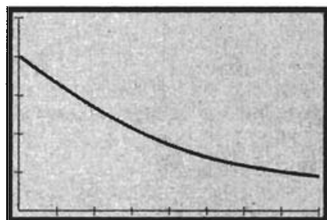
$$e^{1690k} = \frac{1}{2} \tag{10}$$

A partir de (9) se tiene

$$y = 20(e^{1690k})^{t/1690}$$

Al sustituir de (10) en la ecuación anterior se obtiene

$$y = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1690} \tag{11}$$



[0, 4 000] por [0, 25]

$y = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1690}$

FIGURA 5

(b) La figura 5 muestra la gráfica de (11) trazada en el rectángulo de inspección de [0, 4 000] por [0, 25]. Al aplicar los procesos rastreo (*trace*) y aumento (*zoom in*) de la graficadora se determina que $y = 13.27$ cuando $t = 1\,000$.

(c) A partir de la ecuación (11), considerando $y = y_{1\,000}$ y $t = 1000$, se tiene

$$y_{1\,000} = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{1\,000/1690}$$

$$= 13.27$$

lo cual confirma la estimación del inciso (b).

Conclusión: Dentro de mil años, a partir de ahora, se tendrán 13.27 mg de radio. ◀

Observe que la ecuación (11) en la solución del ejemplo 3 es un caso especial de la siguiente situación más general: Si la semivida de una sustancia es de h años y y_0 unidades de la sustancia están presentes ahora, entonces dentro de t años se tendrán y unidades de sustancia, donde

$$y = y_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/h}$$

Se le pedirá que demuestre esto en el ejercicio 34.

▶ ***EJEMPLO 4*** Un depósito contiene 100 millones de litros de agua fluorada para el suministro de una ciudad, y el agua contiene 700 kg de cierto fluoruro. A fin de disminuir la cantidad del fluoruro, se introduce agua pura al depósito a una tasa de 3 millones de litros por día. La mezcla de agua y fluoruro se mantiene uniforme, y sale del depósito a una tasa igual a la que entra. ¿Cuántos kilogramos del fluoruro contiene el depósito 60 días después de que comenzó a fluir agua pura al depósito?

Solución Sean t días el tiempo que transcurre desde que comenzó a fluir agua pura al depósito. Sean x kilogramos la cantidad del fluoruro en el depósito a los t días.

Como se tienen 100 millones de litros de agua en el depósito en cualquier instante, a los t días la cantidad de fluoruro por millón de litros es $x/100$ kilogramos. Del depósito salen tres millones de litros por día de agua fluorada; de modo que el depósito pierde $3(x/100)$ kilogramos del fluoruro por día. Como $\frac{dx}{dt}$ es la tasa de variación de x con respecto a t, y x decrece conforme a t aumenta, entonces se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3x}{100}$$

Tabla 4

t	0	60
x	700	x_{60}

Esta ecuación es de la forma $\frac{dx}{dt} = kx$, donde $k = -0.03$. Las condiciones iniciales dadas se muestran en la tabla 4, donde x_{60} kilogramos es la cantidad del fluoruro en el depósito después de 60 días. Cuando $t = 0$, $x = 700$; de modo que, por el teorema 5.6.1, se tiene

$$x = 700e^{-0.03t}$$

Al considerar $t = 60$ y $x = x_{60}$ en esta ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} x_{60} &= 700e^{-1.8} \\ &= 115.71 \end{aligned}$$

Conclusión: El depósito contiene 116 kg del fluoruro 60 días después de introducir agua pura al depósito. ◀

El Cálculo a menudo es útil para los economistas en la evaluación de ciertas decisiones sobre cuestiones financieras. Sin embargo, para aplicar el Cálculo debe tratarse con funciones continuas. Considere, por ejemplo, la siguiente fórmula, la cual proporciona A, el monto de una inversión a los t años, si P dólares se invierten a una tasa anual de $100i$ %, compuesto m veces al año:

$$A = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} \tag{12}$$

Imagine una situación en la cual el interés se compone continuamente; esto es, considere la fórmula (12), donde se permite que el número de periodos de interés por año aumente sin límite. Entonces tomando el límite en la fórmula (12) se tiene

$$A = P \lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}$$

el cual puede escribirse como

$$A = P \lim_{m \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i}\right]^{it} \tag{13}$$

Para calcular este límite mediante el teorema 1.9.1, primero debe determinar si

$$\lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i}$$

existe. Considerando $h = i/m$ se tiene que $m/i = 1/h$; y como $m \to +\infty$ es equivalente a $h \to 0^+$, entonces

$$\lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i} = \lim_{h \to 0^+} (1 + h)^{1/h}$$
$$= e$$

En consecuencia, por teorema 1.9.1 se tiene

$$\lim_{m \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i}\right]^{it} = \left[\lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i}\right]^{it}$$
$$= e^{it}$$

y así, (13) se transforma en

$$A = Pe^{it} \qquad \textbf{(14)}$$

Si se considera que t varía en el conjunto de los números reales no negativos, se observa que (14) expresa a A como una función continua de t.

Otra forma de mirar la misma situación consiste en considerar una inversión de P dólares que se incrementa a una tasa proporcional a su monto. Ésta es la ley de crecimiento natural. Entonces, si A dólares es el monto a los t años, entonces

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

donde k es una constante y $A = P$ cuando $t = 0$. Por el teorema 5.6.1, se tiene

$$A = Pe^{kt}$$

Al comparar esta ecuación con (14) se observa que son las mismas si $k = i$. Así, si una inversión crece a una tasa proporcional a su monto, se dice que el interés es **compuesto continuamente,** y la tasa de interés anual es la constante de proporcionalidad.



EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Si P dólares se invierten a una tasa del 8% anual compuesto continuamente, y A es el monto de la inversión a los t años, entonces

$$\frac{dA}{dt} = 0.08A$$

y

$$A = Pe^{0.08t}$$ ◀

Si en (14) se toma $P = 1$, $i = 1$ y $t = 1$, se obtiene $A = e$, lo cual da una justificación de la interpretación que los economistas hacen del número e como el rédito de una inversión de \$1 por un año a una tasa de interés del 100% compuesto continuamente.

En el ejemplo siguiente se emplea el concepto de *tasa efectiva de interés anual*, la cual es la tasa que proporciona la misma cantidad de interés compuesto una vez al año.



EJEMPLO 5 Un banco anuncia que la tasa de interés en cuentas de ahorro se calcula al 4% anual compuesto diariamente. Si se depositan

$1 000 en una cuenta de ahorro en el banco, calcule **(a)** el monto aproximado al final de un año considerando la tasa de interés de 4% compuesto continuamente, y **(b)** el monto exacto al cabo de un año considerando una tasa de interés anual de 4% compuesto 365 veces al año. **(c)** Obtenga la tasa efectiva de interés anual.

Solución

(a) Sean A dólares el monto al final de 1 año. De (14) con $P = 1\,000$, $i = 0.04$ y $t = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} A &= 1\,000e^{0.04} \\ &= 1\,040.81 \end{aligned}$$

<u>Conclusión:</u> $1 040.81 es un monto aproximado del depósito al término de 1 año

(b) De (12) con $P = 1\,000$, $i = 0.04$, $m = 365$ y $t = 1$, y si A_{365} dólares es el monto, entonces

$$\begin{aligned} A_{365} &= 1\,000\left(1 + \frac{0.04}{365}\right)^{365} \\ &= 1\,040.81 \end{aligned}$$

<u>Conclusión:</u> El monto exacto del depósito al final de 1 año es $1 040.81%.

(c) Sea j la tasa efectiva de interés anual. Por tanto,

$$\begin{aligned} 1000(1 + j) &= 1\,040.81 \\ 1 + j &= 1.04081 \\ j &= 0.04081 \end{aligned}$$

<u>Conclusión:</u> La tasa efectiva de interés anual es 4.081%. ◀

Una aplicación de la función exponencial natural en física es proporcionada por la *ley de enfriamiento de Newton*, la cual establece que la tasa a la cual un cuerpo cambia de temperatura es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio ambiente.

▶ ***EJEMPLO 6*** Si un cuerpo rodeado de aire a 35° de temperatura se enfría de 120° a 60° en 40 min, utilice la ley de enfriamiento de Newton para determinar la temperatura del cuerpo después de 100 min.

Solución Sean t minutos el tiempo que ha transcurrido desde que el cuerpo comenzó a enfriarse, y y grados la temperatura del cuerpo a los t minutos. La tabla 5 muestra las condiciones de frontera, donde y_{100} grados es la temperatura del cuerpo después de 100 min.

Tabla 5

t	0	40	100
y	120	60	y_{100}

A partir de la ley de enfriamiento de Newton, se tiene

$$\frac{dy}{dt} = k(y - 35)$$

donde k es una constante y $y > 35$ para toda $t \geq 0$. Al sustituir u por $y - 35$ y du/dt por dy/dt, esta ecuación se transforma en

$$\frac{du}{dt} = ku,$$

Cuando $t = 0$, $y = 120$ y $u = 85$. De modo que por el teorema 5.6.1, la solución de esta ecuación diferencial es

$$u = 85e^{kt}$$

Si se reemplaza u por $y - 35$, se obtiene

$$y - 35 = 85e^{kt}$$
$$y = 85e^{kt} + 35 \quad \textbf{(15)}$$

Como $y = 60$ cuando $t = 40$, se tiene

$$60 = 85e^{40k} + 35$$
$$e^{40k} = \frac{5}{17} \quad \textbf{(16)}$$

De (15),

$$y = 85(e^{40k})^{t/40} + 35$$

Al sustituir de (16) en esta ecuación se obtiene

$$y = 85\left(\frac{5}{17}\right)^{t/40} + 35$$

Debido a que $y = y_{100}$ cuando $t = 100$, de la ecuación anterior resulta

$$y_{100} = 85\left(\frac{5}{17}\right)^{5/2} + 35$$
$$= 38.99$$

<u>**Conclusión:**</u> La temperatura del cuerpo después de 100 min es 39°. ◀

Suponga ahora que una cantidad crece a una tasa proporcional a la diferencia entre un número positivo fijo A y su magnitud. Entonces, si se representa el tiempo por t unidades y y unidades es la magnitud de la cantidad presente en cualquier tiempo, entonces

$$\frac{dy}{dt} = k(A - y) \quad \textbf{(17)}$$

donde k es una constante positiva y $y < A$ para toda $t \geq 0$. Al reemplazar u por $A - y$ y du/dt por $-dy/dt$, esta ecuación se transforma en

$$\frac{du}{dt} = -ku$$

Si $u = B$ (esto es, $y = A - B$) cuando $t = 0$, entonces por el teorema 5.6.1 la solución de esta ecuación es

$$u = Be^{-kt}$$

Al sustituir u por $A - y$ se obtiene

$$A - y = Be^{-kt}$$
$$y = A - Be^{-kt} \quad \textbf{(18)}$$

Si en esta ecuación se considera $y = f(t)$, se tiene

$$f(t) = A - Be^{-kt}$$

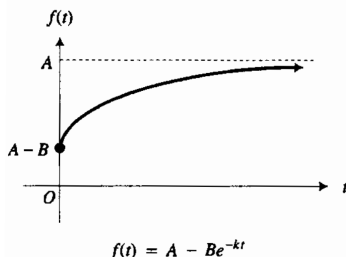
donde A, B y k son constantes positivas. Esta ecuación describe el **crecimiento limitado.**

Al considerar el límite de $f(t)$ se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} f(t) &= \lim_{t\to+\infty} (A - Be^{-kt}) \\ &= A - B \lim_{t\to+\infty} e^{-kt} \\ &= A - B \cdot 0 \\ &= A\end{aligned}$$

y $f(t)$ se aproxima a A a través de valores menores que A. Por tanto, la recta horizontal ubicada a A unidades sobre el eje t es una asíntota horizontal de la gráfica de f. También observe que

$$\begin{aligned}f(0) &= A - Be^{-k \cdot 0} \\ &= A - B\end{aligned}$$



$f(t) = A - Be^{-kt}$

FIGURA 6

A partir de esta información se obtiene la gráfica de f mostrada en la figura 6. Esta gráfica se denomina en ocasiones **curva de aprendizaje.** El nombre es apropiado cuando $f(t)$ representa la aptitud con la que una persona realiza una tarea. Conforme la experiencia de una persona aumenta, la aptitud se incrementa rápidamente al principio y después disminuye debido a que la experiencia adicional tiene poco efecto sobre la habilidad con la cual se efectúa la tarea.

EJEMPLO 7 Un empleado nuevo realiza un trabajo con mayor eficiencia cada día, de tal modo que si producen y unidades por día después de t días en el trabajo, entonces

$$\frac{dy}{dt} = k(80 - y) \tag{19}$$

donde k es una constante positiva y $y < 80$ para toda $t \geq 0$. El empleado produce 20 unidades el primer día de trabajo y 50 unidades por día después de 10 días de estar en el trabajo. **(a)** Exprese y como una función de t. **(b)** ¿Cuántas unidades por día se espera que eventualmente produzca el empleado? **(c)** Trace la gráfica de la función del inciso (a) y la asíntota horizontal de la gráfica. **(d)** ¿Cuántas unidades producirá el empleado después de estar 30 días en el trabajo? **(e)** Muestre que después de estar 60 días en el trabajo, el empleado producirá exactamente 1 unidad menos que el potencial total.

Tabla 6

t	0	10	30	60
y	20	50	y_{30}	y_{60}

Solución La ecuación diferencial (19) es la misma que (17) con $A = 80$. La tabla 6 muestra las condiciones de frontera donde y_{30} unidades y y_{60} unidades son producidas por día después de que el empleado está 30 y 60 días en el trabajo, respectivamente.

(a) La solución general de (19) es de la misma forma de (18) con $A = 80$:

$$y = 80 - Be^{-kt} \tag{20}$$

Como $y = 20$ cuando $t = 0$, de (20) se obtiene

$$\begin{aligned}20 &= 80 - Be^{0} \\ B &= 60\end{aligned}$$

Al reemplazar B por 60 en (20) resulta

$$y = 80 - 60e^{-kt} \tag{21}$$

De esta ecuación, con $y = 50$ cuando $t = 10$, se tiene

$$\begin{aligned} 50 &= 80 - 60e^{-10k} \\ e^{-10k} &= 0.5 \end{aligned}$$

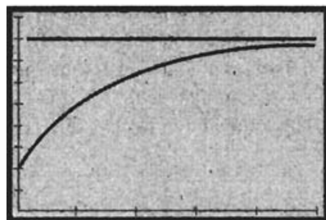
Si se sustituye este valor de e^{-10k} en (21), se tiene

$$\begin{aligned} y &= 80 - 60(e^{-10k})^{t/10} \\ y &= 80 - 60(0.5)^{t/10} \end{aligned} \qquad (22)$$

(b) El límite de (22) cuando $t \to +\infty$ es

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} [80 - 60(0.5)^{t/10}] &= 80 - 60 \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2^{t/10}} \\ &= 80 - 60 \cdot 0 \\ &= 80 \end{aligned}$$

<u>**Conclusión:**</u> Se espera que el empleado producirá eventualmente 80 unidades por día.



[0, 50] por [0, 90]

$y = 80 - 60(0.5)^{t/10}$

$y = 80$

FIGURA 7

(c) La figura 7 muestra la gráfica de (22) y su asíntota horizontal, la recta $y = 80$, trazadas en el rectángulo de inspección de [0, 50] por [0, 90].

(d) Como $y = y_{30}$ cuanto $t = 30$, de (22) se obtiene

$$\begin{aligned} y_{30} &= 80 - 60(0.5)^3 \\ &= 72.5 \end{aligned}$$

<u>**Conclusión:**</u> El empleado producirá 72 unidades por día después de estar 30 días en el trabajo.

(e) De (22), con $y = y_{60}$ cuando $t = 60$, se tiene

$$\begin{aligned} y_{60} &= 80 - 60(0.5)^6 \\ &= 79.06 \end{aligned}$$

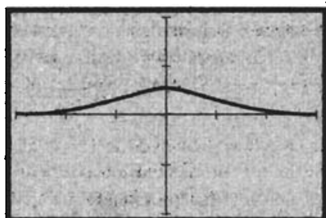
<u>**Conclusión:**</u> Después de estar 60 días en el trabajo, el empleado producirá 79 unidades por día, justo 1 menos que el potencial total. ◀

En la sección 7.4 se tratará otro tipo de crecimiento limitado, el cual proporcionará un modelo matemático del crecimiento de una población que tiene en cuenta los factores ambientales.

Una función importante en estadística, llamada **función normal estandarizada de densidad de probabilidad** está definida por

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

La gráfica de N es la curva en forma de campana, conocida en estadística. La figura 8 muestra esta gráfica trazada en el rectángulo de inspección de [−3, 3] por [−2, 2]. Observe que conforme x crece o decrece sin límite, $N(x)$ se aproxima rápidamente a cero.



[−3, 3] por [−2, 2]

$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

FIGURA 8

La probabilidad de que una elección aleatoria de x esté en el intervalo cerrado $[a, b]$ se denota por $P([a, b])$, y está dada por

$$P([a, b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx \qquad (23)$$

Esta integral definida es la medida del área de la región limitada superiormente por la curva $y = N(x)$, inferiormente por el eje x, y lateralmente por las rectas $x = a$ y $x = b$. La integral definida no puede evaluarse mediante el segundo teorema fundamental del Cálculo debido a que se ha demostrado que

una antiderivada del integrando no puede expresarse en términos de funciones elementales. Sin embargo, se puede calcular un valor aproximado por medio de NINT en la graficadora.

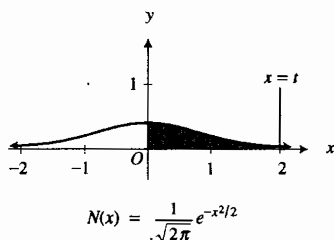


FIGURA 9

EJEMPLO 8 Para la función normal estandarizada de densidad de probabilidad, calcule la probabilidad de que una elección aleatoria de x esté en el intervalo [0, 2].

Solución La probabilidad de que una elección aleatoria de x esté en el intervalo [0, 2] es $P([0, 2])$, y de (23) se tiene

$$P([0, 2]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^2 e^{-x^2/2}\,dx$$

En la graficadora se obtiene NINT($N(x)$, 0, 2) $= 0.47725$. Así,

$$P([0, 2]) = 0.47725$$

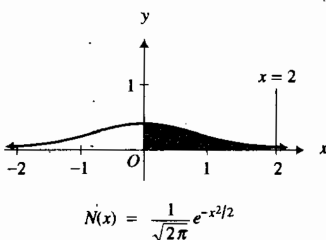


FIGURA 10

Refiérase a la figura 9. La región sombreada del primer cuadrante está limitada por la gráfica de la función normal estandarizada de densidad de probabilidad, los ejes coordenados y la recta $x = t$, donde $t > 0$. Si $A(t)$ unidades cuadradas es el área de esta región, puede demostrarse, aunque es difícil hacerlo, que $\lim_{t\to+\infty} A(t) = 0.5$. De modo que el valor exacto de $P([0, 2])$, el cual es la medida del área de la región sombreada de la figura 10, debe ser menor que 0.5. Este hecho es acorde con el resultado del ejemplo 8.

EJERCICIOS 5.6

1. La tasa de crecimiento natural de la población de cierta ciudad es proporcional a la población. En 1955 la población fue de 40 000, y en 1995 fue de 60 000. **(a)** Si y es el número de individuos de la población t años a partir de 1955, exprese y como una función de t. **(b)** Estime en la graficadora cuál será la población para el año 2001. **(c)** Estime en la graficadora en qué año la población será de 80 000. **(d)** Confirme analíticamente las estimaciones de los incisos (b) y (c).

2. Un cultivo de bacterias crece a una tasa proporcional al número de bacterias presentes. Se tienen 1 000 bacterias presentes ahora y el número se duplicará en 30 min. **(a)** Si y bacterias están presentes a los t minutos a partir de ahora, exprese y como una función de t. **(b)** Estime en la graficadora cuántas bacterias se tendrán dentro de 2 horas. **(c)** Estime en la graficadora dentro de cuánto tiempo se tendrán 50 000 bacterias. **(d)** Confirme analíticamente las estimaciones de los incisos (b) y (c).

3. Cuando a un circuito eléctrico simple, el cual no contiene capacitores pero sí capacitancia y resistencia, se le elimina la fuerza electromotriz, la tasa de decrecimiento de la corriente es proporcional a la corriente. La corriente es i amperes a los t segundos después de la interrupción de la fuerza electromotriz, $i = 40$ cuando $t = 0$, y la corriente diminuye 15 amperes en 0.01 s. **(a)** Exprese i como una función de t. **(b)** Estime en la graficadora la corriente en 0.02 s. **(c)** Confirme analíticamente la estimación del inciso (b).

4. La población de una ciudad decrece a una tasa proporcional a su tamaño. En 1980 la población fue de 50 000 y en 1990 fue de 44 000. **(a)** Si y es la población t años a partir de 1980, exprese y como una función de t. **(b)** Estime en la graficadora cuál será la población en el año 2000. **(c)** Confirme analíticamente la estimación del inciso (b).

En los ejercicios 5 a 26, defina precisamente todas las variables como números. Utilice la variable t para representar el tiempo y defina las otras variables en términos de t. No olvide escribir una conclusión.

5. Después de que se suspendió la publicidad de cierta película el primer día de exhibición, la asistencia decreció a una tasa proporcional a su tamaño. Si la asistencia del primer día de exhibición fue de 5 000 espectadores y la asistencia del tercer día fue de 2 000, ¿cuál es la asistencia esperada para el sexto día?

6. La población de cierta ciudad se duplicó de 1900 a 1960. Si la tasa de crecimiento natural de la población es proporcional a la población en cualquier tiempo y la población en 1960 fue de 60 000, estime la población para el año 2010.

7. Suponga que el valor de cierta colección de antigüedades se incrementa con el tiempo y que la tasa a la que se incrementa es proporcional a su valor en cualquier instante. Si hace 10 años el valor de la colección fue de $25 000 y su valor actual es de $35 000, ¿dentro de cuántos años su valor esperado será de $50 000?

8. Al año de usar un automóvil, su tasa de depreciación en cualquier momento es proporcional a su valor en ese tiempo. Si un automóvil se compró el 1 de marzo de 1993, y sus valores el 1 de marzo de 1994 y de 1995 fueron $7 000 y $5 800, respectivamente, ¿cuál es el valor esperado para el 1 de marzo de 1999?

9. En cierto cultivo de bacterias, donde la tasa de crecimiento es proporcional al número de bacterias presentes, el número se triplica en 1 hora. Si al final de 4 horas se tienen 10 millones de bacterias, ¿cuántas bacterias se tuvieron inicialmente?

10. Si la semivida del radio es de 1960 años, ¿qué porcentaje de la cantidad actual quedará después de (**a**) 100 años, y (**b**) 1000 años?

11. El 30% de una sustancia radiactiva se desintegra en 15 años. Determine la semivida de la sustancia.

12. En invierno, la tasa de mortalidad de cierta especie de fauna salvaje de una región geográfica particular, es proporcional al número de animales de dicha especie presentes en cualquier momento. El 21 de diciembre, el primer día de invierno, había 2 400 ejemplares de la especie presentes; 30 días después, 2 000 animales de la especie estuvieron presentes. ¿Cuántos ejemplares de la citada especie se espera que sobrevivan al invierno? Esto es, ¿cuántos animales de dicha especie se espera que vivan el 21 de marzo, primer día de primavera?

13. Se efectúa un depósito de $5 000 en una cuenta de ahorro en un banco que anuncia que el interés en este tipo de cuenta se calcula a una tasa anual del 5% compuesto diariamente. Calcule (**a**) un monto aproximado al final de 1 año tomando la tasa de interés como 5% compuesto continuamente, y (**b**) el monto exacto al término de 1 año considerando una tasa de interés del 5% compuesto 365 veces al año. (**c**) ¿Cuál es la tasa efectiva de interés anual?

14. Realice el ejercicio 13 si el banco anuncia que el interés se calcula a una tasa del 6% compuesto diariamente, y (**a**) tome la tasa como 6% compuesto continuamente, y (**b**) considere una tasa de interés anual del 6% compuesto 365 veces al año.

15. Si una cantidad de dinero invertida se duplica en 10 años a un interés compuesto continuamente, ¿cuánto tiempo tardará en triplicarse la suma inicial?

16. Si el poder de compra de un dólar disminuye a una tasa de 10% anualmente, compuesto continuamente, ¿cuánto tiempo será necesario para que el poder de compra sea de $0.50?

17. En cierta reacción química, la tasa (velocidad) de conversión de una sustancia es proporcional a la cantidad de la sustancia que aún no se transforma en ese instante. Después de 10 min, un tercio de la cantidad original de la sustancia se ha convertido y 20 g se convierte después de 15 min. ¿Cuál era la cantidad original de la sustancia?

18. Un tanque contiene 200 litros de salmuera en la cual hay 3 kg de sal por litro. Se desea diluir esta solución agregando salmuera que contiene 1 kg de sal por litro, la cual fluye hacia el tanque a una tasa de 4 L/min y la mezcla, que se mantiene uniforme mediante agitación, sale a la misma tasa. ¿Cuándo tendrá el tanque 1.5 kg de sal por litro?

19. Se tienen 100 litros (L) de salmuera en un tanque la cual contiene 70 kg de sal disuelta. Se agrega agua dulce a una tasa de 3 L/min, y la mezcla, que se mantiene uniforme revolviéndola, sale del tanque a la misma tasa. ¿Cuántos kilogramos de sal se tienen en el tanque después de una hora?

20. El azúcar se disuelve en el agua a una tasa proporcional a la cantidad insoluta. Si se tenían 50 kg de azúcar presentes inicialmente y después de 5 horas ésta se redujo a 20 kg, ¿cuánto tiempo deberá pasar para que el 90% del azúcar se disuelva?

21. El profesor Willard Libby, de la Universidad de California de Los Angeles, fue distinguido con el premio Nobel en química por el descubrimiento de un método para determinar la fecha de muerte de un ser viviente. El profesor Libby empleó el hecho de que el tejido de un organismo vivo está compuesto de dos tipos de carbono: el carbono 14 (denotado por ^{14}C) radiactivo y el carbono 12 (^{12}C) estable, de modo que la razón de la cantidad de ^{14}C a la cantidad de ^{12}C es aproximadamente constante. Cuando el organismo muere la ley de decrecimiento natural se aplica al ^{14}C. Si se determina que la cantidad de ^{14}C en un trozo de carbón vegetal es sólo el 45% de su cantidad original y que la semivida del ^{14}C es de 5 730 años, ¿hace cuánto tiempo murió el árbol de donde proviene el trozo de carbón vegetal?

22. Refiérase al ejercicio 21. Suponga que después de encontrar un fósil, un arqueólogo determina que la cantidad de ^{14}C presente en el fósil es 25% de su cantidad original. Empleando el hecho de que la semivida del ^{14}C es de 5 730 años, ¿cuál es la edad del fósil?

23. En las mismas condiciones del ejemplo 6, ¿después de cuántos minutos la temperatura del cuerpo será de 45°?

24. Una olla con agua estuvo hirviendo a 100° y se dejó enfriar al aire libre a una temperatura de 0°. Después de 20 min la temperatura del agua fue de 90°. (**a**) ¿Después de cuántos minutos la temperatura del agua será de 80°? (**b**) ¿Cuál será la temperatura del agua después de 1 hora? Utilice la ley de enfriamiento de Newton.

25. Si se lleva un termómetro de una habitación en la cual la temperatura es de 75° hacia el exterior donde la temperatura es de 35° y la lectura en el termómetro es 65° después de 30 *s*, (**a**) ¿cuánto tiempo después la lectura en el termómetro será de 50°? (**b**) ¿Cuál será la lectura en el termómetro después de 3 minutos? Utilice la ley de enfriamiento de Newton.

26. Un cuerpo rodeado de aire a una temperatura de 0° se enfría de 200° a 100° en 40 minutos, ¿cuántos minutos más serán necesarios para que el cuerpo alcance una temperatura de 50°? Utilice la ley de enfriamiento de Newton.

27. Un estudiante tiene 3 horas para preparar apresuradamente un examen y durante este tiempo desea memorizar un conjunto de 60 hechos. De acuerdo con la sicología, la tasa a la que una persona puede memorizar un conjunto de hechos es proporcional al número de hechos que quedan por

memorizar. De este modo, si el estudiante memoriza y hechos en t minutos, entonces

$$\frac{dy}{dt} = k(60 - y)$$

donde k es una constante positiva y $y < 60$ para toda $t \geq 0$. Suponga que cero hechos se memorizan inicialmente. Además, suponga que el estudiante memoriza 15 hechos en los primeros 20 min. **(a)** Exprese y como una función de t. **(b)** Trace la gráfica de la función del inciso (a) y la asíntota horizontal de la gráfica. ¿Cuántos hechos memorizará el estudiante en **(c)** 1 hora, y **(d)** 3 horas?

28. Un nuevo obrero en una línea de ensamble puede realizar una tarea particular de tal manera que si y unidades son terminadas en un día después de t días en la línea de ensamble, entonces

$$\frac{dy}{dt} = k(90 - y)$$

donde k es una constante positiva y $y < 90$ para toda $t \geq 0$. El día en que el obrero comenzó se terminaron 60 unidades y al quinto día el obrero terminó 75 unidades. **(a)** Exprese y como una función de t. **(b)** ¿Cuántas unidades por día se espera que eventualmente termine el obrero. **(c)** Trace la gráfica de la función del inciso (a) y la asíntota horizontal de la gráfica. **(d)** ¿Cuántas unidades terminará el obrero el noveno día? **(e)** Demuestre que el trabajador producirá casi a su potencial total después de los 30 días.

29. Para la función normal estandarizada de densidad de probabilidad, determine, con cinco dígitos significativos, la probabilidad de que una elección aleatoria de x esté en el intervalo $[0, 1]$.

30. Para la función normal estandarizada de densidad de probabilidad, determine, con cinco dígitos significativos, la probabilidad de que una elección aleatoria de x esté en el intervalo $[-3, 3]$.

31. La función error, denotada por erf, está definida por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Calcule un valor aproximado de erf(1) con cinco dígitos significativos.

32. Para la función error definida en el ejercicio 31, calcule un valor aproximado de erf (3) con cinco dígitos significativos.

33. En biología, la ecuación que en ocasiones se emplea para describir el crecimiento restringido de una población es la *ecuación de crecimiento de Gompertz:*

$$\frac{dy}{dt} = ky \ln \frac{a}{y}$$

donde a y k son constantes positivas. Determine la solución general de esta ecuación diferencial.

34. Si la semivida de una sustancia que tiene decrecimiento exponencial es h años y y_0 unidades de la sustancia están presentes ahora, entonces si y unidades estarán presentes en t años, demuestre que

$$y = y_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/h}$$

35. Sean f una función que describe crecimiento exponencial y g una función que describe crecimiento limitado. ¿En qué difieren las gráficas de estas dos funciones? ¿Son semejantes las gráficas en algún aspecto? ¿Por qué la gráfica de g es llamada en ocasiones curva de aprendizaje?

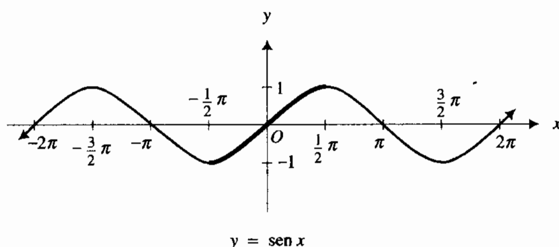
5.7 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Aunque se introdujeron las funciones trigonométricas inversas en el curso de trigonometría o de matemáticas previas al Cálculo, se revisarán brevemente en esta sección. Se centrará la atención en las funciones seno inversa, coseno inversa, tangente inversa y secante inversa porque éstas son las más importantes en Cálculo.

Recuerde de la sección 5.1 que una función debe ser uno a uno para que tenga una inversa. Como las seis funciones trigonométricas son periódicas y, por tanto, no son uno a uno, ninguna de ellas tiene inversa. Sin embargo, se pueden restringir los dominios de estas funciones de modo que tengan una inversa.

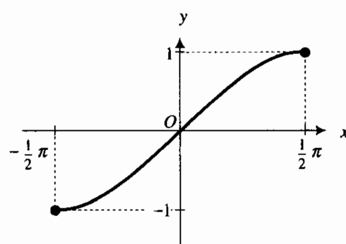
Se comenzará con la función seno cuya gráfica se muestra en la figura 1. Observe en la figura que la función seno es creciente en el intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, y en consecuencia, por el teorema 5.1.5 así como por el criterio de la recta horizontal, la función F para la cual

$$F(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad -\tfrac{1}{2}\pi \leq x \leq \tfrac{1}{2}\pi \tag{1}$$



$y = \operatorname{sen} x$

FIGURA 1



$F(x) = \operatorname{sen} x \quad -\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$

FIGURA 2

tiene inversa. La gráfica de F se presenta en la figura 2; su dominio es $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ y su contradominio es $[-1, 1]$. La inversa de esta función se denomina *función seno inversa.*

5.7.1 Definición de la función seno inversa

La función seno inversa, denotada por sen^{-1}, está definida por

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \operatorname{sen} y \text{ y } -\tfrac{1}{2}\pi \leq y \leq \tfrac{1}{2}\pi$$

El dominio de sen^{-1} es el intervalo cerrado $[-1, 1]$ y su contradominio es el intervalo cerrado $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.



EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

(a) $\operatorname{sen}^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{4}\pi$ **(b)** $\operatorname{sen}^{-1} \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{4}\pi$ ◀

Por supuesto, en la calculadora pueden obtenerse aproximaciones de los valores de la función seno inversa utilizando la tecla [sen⁻¹] o la combinación de teclas [inv] y [sen], o [2nd] y [sen].

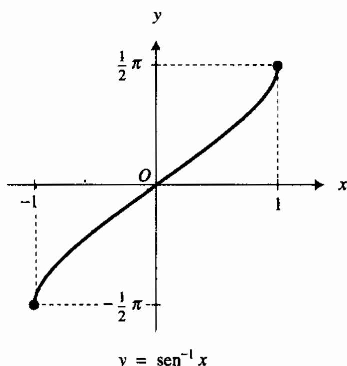
En (1) el dominio de F está restringido al intervalo cerrado $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ de modo que la función sea monótona en su dominio a fin de que tenga una función inversa. Sin embargo, la función seno tiene periodo 2π y es creciente en otros intervalos, por ejemplo, $[-\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi]$ y $[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi]$. También, la función es decreciente en ciertos intervalos cerrados; en particular, en los intervalos $[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi]$ y $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$. Cualquiera de estos intervalos podría haberse elegido para el dominio de F de la ecuación (1). No obstante, se acostumbra elegir el intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ porque es el intervalo más grande que contiene el número 0 en el cual la función es monótona.

El uso del símbolo -1 para representar la función seno inversa hace necesario denotar el recíproco de sen x mediante $(\operatorname{sen} x)^{-1}$ a fin de evitar confusiones. Una convención similar se aplica cuando se utiliza cualquier exponente negativo con una función trigonométrica, por ejemplo,

$$\frac{1}{\tan x} = (\tan x)^{-1} \qquad \frac{1}{\cos^2 x} = (\cos x)^{-2}$$

y así sucesivamente.

El término **arco seno** se utiliza en ocasiones en lugar de *función seno inversa* y la notación **arc sen** x se emplea en vez de $\operatorname{sen}^{-1} x$. Probablemente esta notación proviene del hecho de que si $t = \operatorname{arc\,sen} u$, entonces $\operatorname{sen} t = u$, y t unidades es la longitud del arco de la circunferencia unitaria para el cual el seno es u. En este texto, en la notación para las funciones trigonométricas in-



$y = \operatorname{sen}^{-1} x$

FIGURA 3

versas se empleará el símbolo −1 en lugar de la palabra *arc*. Esta convención es consistente con la notación general para las funciones inversas.

Se puede dibujar la gráfica de la función seno inversa localizando algunos puntos a partir de los valores de $\operatorname{sen}^{-1} x$ tales como los présentados en la tabla 1. La gráfica se muestra en la figura 3.

Tabla 1

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{sen}^{-1} x$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$

De la definición 5.7.1, se tiene

$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x \quad \text{para } x \text{ en } [-1, 1]$$
$$\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} y) = y \quad \text{para } y \text{ en } [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi]$$

Observe que $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} y) \neq y$ si y no está en el intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} \tfrac{3}{4}\pi) = \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{4}\pi \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} \tfrac{7}{4}\pi) = \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\tfrac{1}{4}\pi$$

▶ ***EJEMPLO 1*** Calcule (**a**) $\cos[\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})]$; (**b**) $\operatorname{sen}^{-1}(\cos \frac{2}{3}\pi)$.

Solución Como el contradominio de la función seno inversa es $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, entonces $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}\pi$.

(**a**) $\cos[\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2}) = \cos(-\frac{1}{6}\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(**b**) $\operatorname{sen}^{-1}(\cos \frac{2}{3}\pi) = \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}\pi$ ◀

Ahora se obtendrá la fórmula para la derivada de la función seno inversa aplicando el teorema 5.1.7, el cual establece que la derivada de una función monótona y continua, y la derivada de su inversa son recíprocas una de la otra. Sea

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x$$

lo cual es equivalente a

$$x = \operatorname{sen} y \quad \text{y} \quad y \text{ está en } [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi]$$

Al diferenciar los dos miembros de esta ecuación con respecto a y resulta

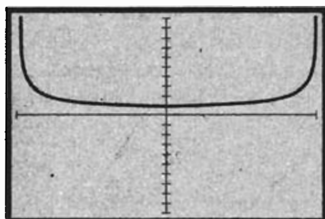
$$\frac{dx}{dy} = \cos y \quad \text{y} \quad y \text{ está en } [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi] \tag{2}$$

De la identidad $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, y sustituyendo sen y por x, se obtiene

$$\cos^2 y = 1 - x^2$$

Si y está en $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, cos y es no negativo, de modo que

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{si } y \text{ está en } [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi]$$

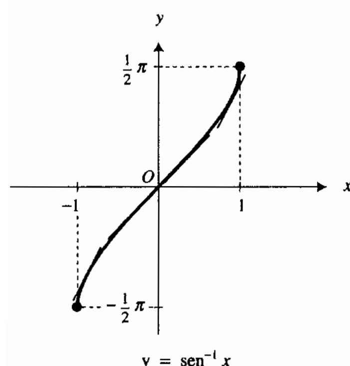


$[-1, 1]$ por $[-10, 10]$

$y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

NDER $(\text{sen}^{-1} x, x)$

FIGURA 4



$y = \text{sen}^{-1} x$

FIGURA 5

Al sustituir de esta ecuación en (2) se obtiene

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 - x^2}$$

Como $\dfrac{dy}{dx}$ es el recíproco de $\dfrac{dx}{dy}$, entonces

$$D_x(\text{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{3}$$

Este resultado se apoya gráficamente al trazar las gráficas de

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{y} \quad \text{NDER}(\text{sen}^{-1} x, x)$$

en el mismo rectángulo de inspección, observando que son idénticas. Consulte la figura 4.

Ahora se investigará la interpretación geométrica de la ecuación (3). Refiérase a la figura 5, la cual muestra la gráfica de la función seno inversa y segmentos de algunas rectas tangentes. Observe que cuando $-1 < x < 1$, el cual es el dominio de $D_x(\text{sen}^{-1} x)$, la pendiente de la recta tangente es positiva. Además, cuando $x \to -1^+$ o $x \to 1^-$, la pendiente de la recta tangente crece sin límite. Esta información apoya gráficamente los límites

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = +\infty$$

De (3) y de la regla de la cadena se tiene el teorema siguiente.

5.7.2 Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(\text{sen}^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} D_x u$$

EJEMPLO 2 Calcule $f'(x)$ si

$$f(x) = \text{sen}^{-1} x^2$$

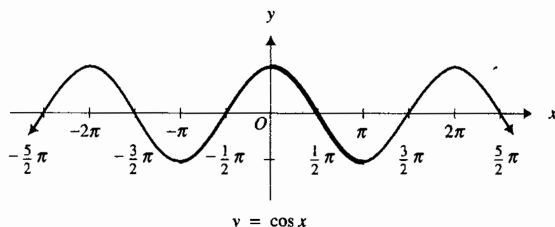
Solución Del teorema 5.7.2,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} (2x)$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

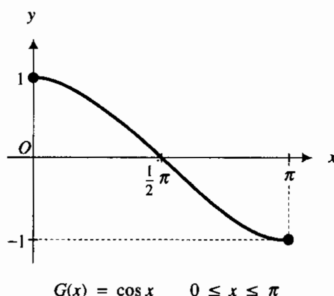
A fin de obtener la *función coseno inversa*, se procede como se hizo con la función seno inversa. Se restringe el dominio del coseno al intervalo en el cual la función sea monótona. Se elige el intervalo $[0, \pi]$ en el que el coseno es decreciente, como se muestra en la gráfica del coseno de la figura 6. Así, se considera la función G definida por

$$G(x) = \cos x \quad \text{y} \quad 0 \le x \le \pi$$



$y = \cos x$

FIGURA 6



$G(x) = \cos x \qquad 0 \le x \le \pi$

FIGURA 7

El dominio de G es el intervalo cerrado $[0, \pi]$ y su contradominio es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. La gráfica de G se presenta en la figura 7. Como G es continua y decreciente en su dominio, entonces tiene una inversa, la cual se definirá a continuación.

5.7.3 Definición de la función coseno inversa

La función coseno inversa, denotada por $\cos^{-1}$, está definida por

$$y = \cos^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \cos y \quad \text{y} \quad 0 \le y \le \pi$$

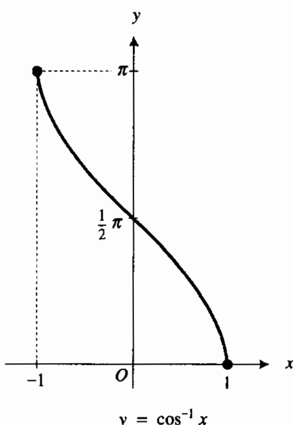
El dominio de $\cos^{-1}$ es el intervalo cerrado $[-1, 1]$ y su contradominio es el intervalo cerrado $[0, \pi]$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

(a) $\cos^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{4}\pi$ **(b)** $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3}{4}\pi$ ◀

La gráfica de la función coseno inversa se muestra en la figura 8.
De la definición 5.7.3, se tiene

$$\cos(\cos^{-1} x) = x \qquad \text{para } x \text{ en } [-1, 1]$$
$$\cos^{-1}(\cos y) = y \qquad \text{para } y \text{ en } [0, \pi]$$



$y = \cos^{-1} x$

FIGURA 8

Observe que de nuevo existe una restricción sobre y a fin de tener la igualdad $\cos^{-1}(\cos y) = y$. Por ejemplo, como $\frac{3}{4}\pi$ está en $[0, \pi]$, entonces

$$\cos^{-1}(\cos \tfrac{3}{4}\pi) = \tfrac{3}{4}\pi$$

Sin embargo,

$$\cos^{-1}(\cos \tfrac{5}{4}\pi) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{3}{4}\pi \quad \text{y} \quad \cos^{-1}(\cos \tfrac{7}{4}\pi) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{1}{4}\pi$$

EJEMPLO 3

Demuestre que

$$\cos^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{sen}^{-1} x \qquad \text{para } |x| \le 1 \tag{4}$$

Solución Suponga que x está en $[-1, 1]$ y que

$$t = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{sen}^{-1} x) \tag{5}$$

Al aplicar la fórmula de reducción $\cos(\frac{1}{2}\pi - v) = \operatorname{sen} v$, con $v = \operatorname{sen}^{-1} x$ en el miembro derecho de (5), se tiene

$$t = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)$$

Como $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x$, entonces

$$t = x$$

Si se sustituye t por x en (5) resulta

$$x = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{sen}^{-1} x) \tag{6}$$

Como $-\frac{1}{2}\pi \le \operatorname{sen}^{-1} x \le \frac{1}{2}\pi$, al sumar $-\frac{1}{2}\pi$ a cada miembro se tiene

$$-\pi \le -\tfrac{1}{2}\pi + \operatorname{sen}^{-1} x \le 0$$

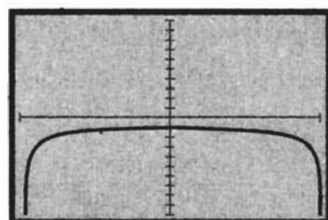
Al multiplicar cada miembro de esta desigualdad por -1 e invertir los signos de desigualdad se obtiene

$$0 \le \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{sen}^{-1} x \le \pi$$

De esta desigualdad, de (6) y de la definición 5.7.3, resulta

$$\cos^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{sen}^{-1} x \quad \text{para } |x| \le 1$$

lo cual es (4). ◀



$[-1, 1]$ por $[-10, 10]$

$y = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

NDER $(\cos^{-1} x, x)$

FIGURA 9

Observe en la solución del ejemplo 3 que la identidad depende de que la elección del contradominio de la función coseno inversa sea $[0, \pi]$.

A fin de obtener la fórmula para la derivada de la función coseno inversa se utiliza (4), la cual ya se demostró. Al diferenciar con respecto a x, se tiene

$$D_x(\cos^{-1} x) = D_x(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{sen}^{-1} x)$$

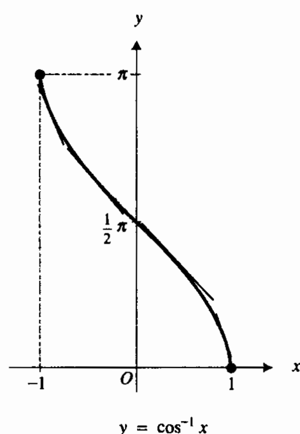
$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{7}$$

donde x está en $(-1, 1)$.

Como se hizo con la derivada de la función seno inversa, la ecuación (7) se apoya al trazar las gráficas de

$$y = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{y} \quad \text{NDER}(\cos^{-1} x, x)$$

en el mismo rectángulo de inspección, y observando que son idénticas. Consulte la figura 9.



$y = \cos^{-1} x$

FIGURA 10

También, como se hizo anteriormente, refiérase a la figura 10 para la interpretación geométrica de la ecuación (7). La figura, que muestra la gráfica de la función coseno inversa y segmentos de algunas rectas tangentes, apoya el hecho de que $D_x(\cos^{-1} x) < 0$ cuando $-1 < x < 1$ y que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} = -\infty$$

El teorema siguiente se obtiene de (7) y de la regla de la cadena.

5.7.4 Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(\cos^{-1} u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$$

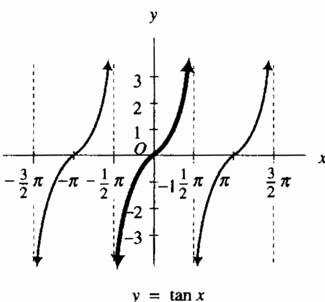


FIGURA 11

EJEMPLO 4

Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ si

$$y = \cos^{-1} e^{2x}$$

Solución Del teorema 5.7.4, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-(e^{2x})^2}}(e^{2x})(2)$$

$$= \frac{-2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}$$

A continuación se obtendrá la *función tangente inversa.* Observe en la gráfica de la figura 11 que la función tangente es continua y creciente en el intervalo abierto $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Ahora se restringe la función tangente a este intervalo y se considera la función H definida por

$$H(x) = \tan x \quad \text{y} \quad -\tfrac{1}{2}\pi < x < \tfrac{1}{2}\pi$$

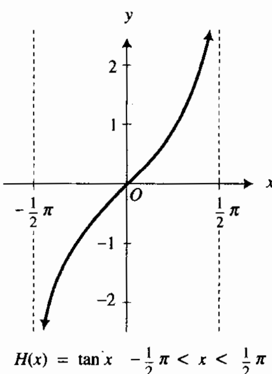


FIGURA 12

El dominio de H es el intervalo $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ y su contradominio es el conjunto R de los números reales. Refiérase a la figura 12, la cual presenta la gráfica de H. Esta función tiene una inversa llamada *función tangente inversa.*

5.7.5 Definición de la función tangente inversa

La función tangente inversa, denotada por $\tan^{-1}$, está definida por

$$y = \tan^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \tan y \quad \text{y} \quad -\tfrac{1}{2}\pi < y < \tfrac{1}{2}\pi$$

El dominio de $\tan^{-1}$ es el conjunto R de los números reales y su contradominio es el intervalo abierto $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

(a) $\tan^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{1}{3}\pi$ **(b)** $\tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{1}{6}\pi$ **(c)** $\tan^{-1} 0 = 0$

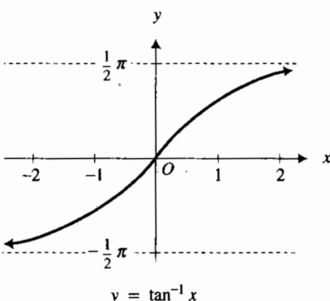


FIGURA 13

La figura 13 muestra la gráfica de la función tangente inversa. De la definición 7.5.5 se tiene

$$\tan(\tan^{-1} x) = x \qquad \text{para } x \text{ en } (-\infty, +\infty)$$
$$\tan^{-1}(\tan y) = y \qquad \text{para } y \text{ en } (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi)$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

$$\tan^{-1}(\tan \tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{4}\pi \quad \text{y} \quad \tan^{-1}[\tan(-\tfrac{1}{4}\pi)] = -\tfrac{1}{4}\pi$$

Sin embargo,

$$\tan^{-1}(\tan \tfrac{3}{4}\pi) = \tan^{-1}(-1) = -\tfrac{1}{4}\pi \quad \text{y} \quad \tan^{-1}(\tan \tfrac{5}{4}\pi) = \tan^{-1} 1 = \tfrac{1}{4}\pi$$

◀

EJEMPLO 5 Calcule el valor exacto de

$$\sec[\tan^{-1}(-3)]$$

Solución Este problema se resolverá interpretando $\tan^{-1}(-3)$ como un ángulo. Sea

$$\theta = \tan^{-1}(-3)$$

Como el contradominio de la función tangente inversa es $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, y $\tan\theta$ es negativa, entonces $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$. Así,

$$\tan\theta = -3 \quad \text{y} \quad -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < 0$$

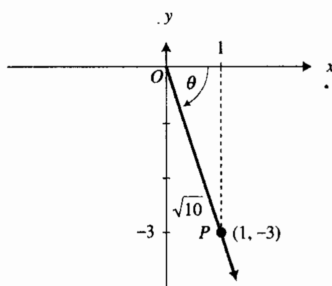


FIGURA 14

La figura 14 presenta un ángulo θ que satisface estas condiciones. Observe que el punto P seleccionado en el lado terminal de θ es $(1, -3)$. Del teorema de Pitágoras r es igual a $\sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$. Por tanto, $\sec\theta = \sqrt{10}$. En consecuencia,

$$\sec[\tan^{-1}(-3)] = \sqrt{10}$$

◀

A fin de obtener la fórmula de la derivada de la función tangente inversa se aplica otra vez el teorema 5.1.7. Si

$$y = \tan^{-1} x$$

entonces

$$x = \tan y \quad \text{y} \quad y \text{ está en } (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi)$$

Al diferenciar los dos miembros de esta ecuación con respecto a x se obtiene

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y \quad \text{y} \quad y \text{ está en } (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi) \tag{8}$$

De la identidad $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$, y sustituyendo $\tan y$ por x, se tiene

$$\sec^2 y = 1 + x^2$$

Si se reemplaza de esta ecuación en (8) resulta

$$\frac{dx}{dy} = 1 + x^2$$

De modo que, por el teorema 5.1.7,

$$D_x(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1 + x^2} \tag{9}$$

El dominio de la derivada de la función tangente inversa es el conjunto R de los números reales.

En el ejercicio 58, se le pedirá que apoye gráficamente la ecuación (9) y que proporcione una interpretación geométrica de la ecuación, como se hizo con las ecuaciones (3) y (7) para las derivadas de $\text{sen}^{-1} x$ y $\cos^{-1} x$.

De (9) y de la regla de la cadena se obtiene el teorema siguiente.

5.7.6 Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2} D_x u$$

EJEMPLO 6

Calcule $f'(x)$ si

$$f(x) = \tan^{-1} \frac{1}{x+1}$$

Solución Del teorema 5.7.6, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{(x+1)^2}} \cdot \frac{-1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-1}{(x+1)^2 + 1} \\ &= \frac{-1}{x^2 + 2x + 2} \end{aligned}$$

◀

Antes de definir la *función secante inversa*, se dirigirá la atención sobre el hecho de que $\cos x \geq 0$ en el contradominio $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ de $\operatorname{sen}^{-1} x$, lo cual fue significativo en la obtención de la fórmula (3) para la derivada de $\operatorname{sen}^{-1} x$. Además, observe que $\operatorname{sen} x \geq 0$ en el contradominio $[0, \pi]$ de $\cos^{-1} x$, y que $\sec x > 0$ en el contradominio $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ de $\tan^{-1} x$. De modo que el valor de $\tan x$ será no negativo en el contradominio de la función secante inversa, se elige ese contradominio de modo que esté en los cuadrantes primero y tercero, lo cual aportará ventajas cuando se obtenga la fórmula de la derivada de la función secante inversa. Se verán otras ventajas de estas relaciones cuando se apliquen las funciones trigonométricas inversas en ciertos cálculos, en particular en la sección 7.3, concernientes a una técnica de integración que implica sustituciones trigonométricas.

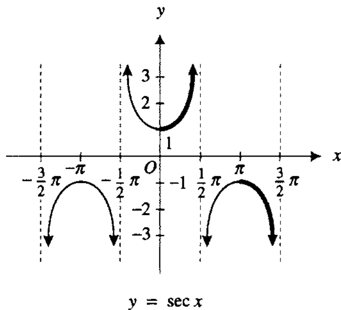


FIGURA 15

Refiérase a la figura 15, la cual muestra la gráfica de la función secante, y observe que la secante es creciente en el intervalo $[0, \frac{1}{2}\pi)$ y es decreciente en el intervalo $[\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Más aún, si $x \in [0, \frac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$, entonces $\sec x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Así, se tiene la definición siguiente.

5.7.7 Definición de la función secante inversa

La función secante inversa, denotada por $\sec^{-1}$, está definida por

$$y = \sec^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \sec y \quad \text{y} \quad \begin{cases} 0 \leq y < \frac{1}{2}\pi & \text{si } x \geq 1 \\ \pi \leq y < \frac{3}{2}\pi & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

El dominio de $\sec^{-1}$ es $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. El contradominio de $\sec^{-1}$ es $[0, \frac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

(a) $\sec^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{1}{4}\pi$ **(b)** $\sec^{-1}(-\sqrt{2}) = \frac{5}{4}\pi$ ◀

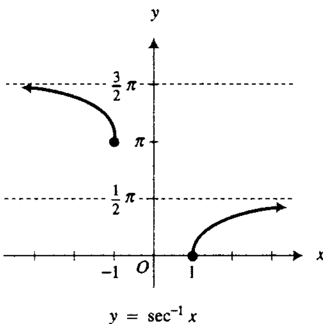


FIGURA 16

Consulte la figura 16, la cual presenta la gráfica de la función secante inversa.

De la definición 5.7.7, se tiene

$$\sec(\sec^{-1} x) = x \quad \text{para } x \text{ en } (-\infty, -1)] \cup [1, +\infty)$$
$$\sec^{-1}(\sec y) = y \quad \text{para } y \text{ en } [0, \tfrac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \tfrac{3}{2}\pi)$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

$$\sec^{-1}(\sec \tfrac{1}{3}\pi) = \tfrac{1}{3}\pi \quad \text{y} \quad \sec^{-1}(\sec \tfrac{4}{3}\pi) = \tfrac{4}{3}\pi$$

Sin embargo,

$$\sec^{-1}(\sec \tfrac{2}{3}\pi) = \tfrac{4}{3}\pi \quad \text{y} \quad \sec^{-1}(\sec \tfrac{5}{3}\pi) = \tfrac{1}{3}\pi$$ ◀

A fin de obtener la fórmula para la derivada de la función secante inversa, sea

$$y = \sec^{-1} x \quad \text{y} \quad |x| \geq 1$$

Entonces

$$x = \sec y \quad \text{y} \quad y \text{ está en } [0, \tfrac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \tfrac{3}{2}\pi) \tag{10}$$

Al diferenciar los dos miembros de (10) con respecto a y se obtiene

$$\frac{dx}{dy} = \sec y \tan y \quad \text{y} \quad y \text{ está en } [0, \tfrac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \tfrac{3}{2}\pi) \tag{11}$$

A partir de la identidad $\tan^2 y = \sec^2 y - 1$, con $\sec y = x$, se tiene

$$\tan^2 y = x^2 - 1$$

Como y está en $[0, \frac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$, entonces $\tan y$ es no negativo. Así,

$$\tan y = \sqrt{x^2 - 1} \qquad \text{si } y \text{ está en } [0, \tfrac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \tfrac{3}{2}\pi)$$

Si se sustituye de (10) y de esta ecuación en (11) resulta

$$\frac{dx}{dy} = x\sqrt{x^2 - 1}$$

De este modo, por el teorema 5.1.7,

$$D_x(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \tag{12}$$

donde $|x| > 1$. De (12) y de la regla de la cadena se obtiene el siguiente teorema.

5.7.8 Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(\sec^{-1} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$$

EJEMPLO 7

Calcule $f'(x)$ si

$$f(x) = x \sec^{-1} \frac{1}{x}$$

Solución

$$f'(x) = \sec^{-1}\frac{1}{x} + x\left[\frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= \sec^{-1}\frac{1}{x} + \frac{x^2}{\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \sec^{-1}\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}}$$

$$= \sec^{-1}\frac{1}{x} - \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$$ ◀

Refiérase al ejemplo 3 en el cual se demostró la identidad (4) que relaciona a $\cos^{-1}$ y sen^{-1}. Esta identidad puede emplearse para definir la función coseno inversa, y a partir de esta definición se puede determinar que el contradominio de $\cos^{-1}$ es $[0, \pi]$. Este tipo de procedimiento se empleará en la discusión de las dos funciones trigonométricas restantes.

5.7.9 Definición de la función cotangente inversa

La función cotangente inversa, denotada por $\cot^{-1}$, está definida por

$$\cot^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \tan^{-1} x \quad \text{donde } x \text{ es cualquier número real}$$

De la definición, el dominio de $\cot^{-1}$ es el conjunto R de los números reales. Para determinar el contradominio de $\cot^{-1}$, se escribe la ecuación de la definición como

$$\tan^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \cot^{-1} x \qquad \textbf{(13)}$$

Como

$$-\tfrac{1}{2}\pi < \tan^{-1} x < \tfrac{1}{2}\pi$$

al sustituir de (13) en esta desigualdad se obtiene

$$-\tfrac{1}{2}\pi < \tfrac{1}{2}\pi - \cot^{-1} x < \tfrac{1}{2}\pi$$

Si se resta $\frac{1}{2}\pi$ de cada miembro se tiene

$$-\pi < -\cot^{-1} x < 0$$

Ahora se multiplica cada miembro por -1 e invirtiendo el sentido de los signos de desigualdad se obtiene

$$0 < \cot^{-1} x < \pi$$

Por tanto, el contradominio de la función cotangente inversa es el intervalo abierto $(0, \pi)$. Su gráfica se muestra en la figura 17.

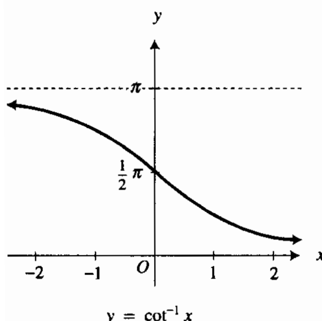


FIGURA 17

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

(a) $\tan^{-1} 1 = \frac{1}{4}\pi$ **(b)** $\tan^{-1}(-1) = -\frac{1}{4}\pi$

(c) $\cot^{-1} 1 = \frac{1}{2}\pi - \tan^{-1} 1 = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi$

(d) $\cot^{-1}(-1) = \frac{1}{2}\pi - \tan^{-1}(-1) = \frac{1}{2}\pi - (-\frac{1}{4}\pi) = \frac{3}{4}\pi$ ◀

Con objeto de deducir la fórmula para la derivada de $\cot^{-1} x$, se derivan los dos miembros de la ecuación de la definición 5.7.9:

$$D_x(\cot^{-1} x) = D_x(\tfrac{1}{2}\pi - \tan^{-1} x) = -\frac{1}{1 + x^2}$$

El teorema siguiente se deduce a partir de esta fórmula y de la regla de la cadena.

5.7.10 Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(\cot^{-1} u) = -\frac{1}{1 + u^2} D_x u$$

Ahora se definirá la *función cosecante inversa* en términos de la función secante inversa.

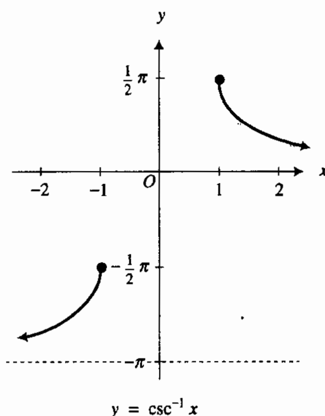


FIGURA 18

5.7.11 Definición de la función cosecante inversa

La función cosecante inversa, denotada por $\csc^{-1}$, está definida por

$$\csc^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \sec^{-1} x \qquad \text{para } |x| \geq 1$$

De la definición, el dominio de $\csc^{-1}$ es $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. El contradominio de $\csc^{-1}$ puede obtenerse de manera semejante a la empleada para determinar el contradominio de $\cot^{-1}$. El contradominio de $\csc^{-1}$ es $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi] \cup (0, \frac{1}{2}\pi]$, y se le pedirá que demuestre esto en el ejercicio 57. La gráfica de $\csc^{-1}$ se muestra en la figura 18.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 8

(a) $\sec^{-1} 2 = \frac{1}{3}\pi$ **(b)** $\sec^{-1}(-2) = \frac{4}{3}\pi$

(c) $\csc^{-1} 2 = \frac{1}{2}\pi - \sec^{-1} 2 = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi$

(d) $\csc^{-1}(-2) = \frac{1}{2}\pi - \sec^{-1}(-2) = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{3}\pi = -\frac{5}{6}\pi$ ◀

De la definición 5.7.11, se tiene

$$\csc^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \sec^{-1} x \qquad \text{para } |x| \geq 1$$

Al diferenciar con respecto a x se obtiene

$$D_x(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

donde $|x| > 1$. A partir de esta fórmula y de la regla de la cadena se tiene el teorema siguiente.

5.7.12 Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(\csc^{-1} u) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$$

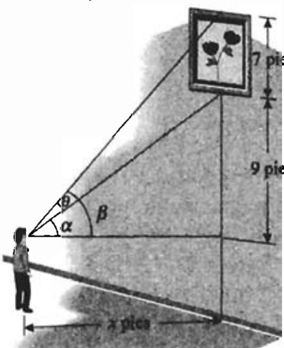


FIGURA 19

Esta sección se concluye con un ejemplo que muestra una aplicación de las funciones trigonométricas inversas. En el ejemplo, un observador mira un cuadro colocado en una pared. Consulte la figura 19. Cuando el observador está alejado de la pared, el ángulo subtendido por el cuadro en los ojos del observador es pequeño. Conforme el observador se acerca a la pared, el ángulo crece hasta alcanzar un valor máximo. Después, conforme el observador se acerca aún más a la pared, el ángulo disminuye. Cuando el ángulo es un máximo, se dice que el observador tiene la "mejor vista" del cuadro.

EJEMPLO 8 Un cuadro de 7 pie de altura se coloca en una pared con su base a 9 pie sobre el nivel de los ojos de un observador. **(a)** Estime, con aproximación de pies, en la graficadora, qué tan alejado debe estar el observador para que tenga la "mejor vista" del cuadro. **(b)** Confirme analíticamente la estimación del inciso (a).

Solución

(a) Refiérase a la figura 19. Sean x pies la distancia del observador desde la pared, θ la medida en radianes del ángulo subtendido en los ojos del observador por el cuadro, α la medida del ángulo subtendido en los ojos del observador por la porción de la pared que se encuentra entre el nivel de sus ojos y la base del cuadro, y $\beta = \alpha + \theta$. De la figura, se tiene

$$\cos \beta = \frac{x}{16} \quad \text{y} \quad \cot \alpha = \frac{x}{9}$$

Como $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$ y $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, entonces

$$\beta = \cot^{-1} \frac{x}{16} \quad \text{y} \quad \alpha = \cot^{-1} \frac{x}{9}$$

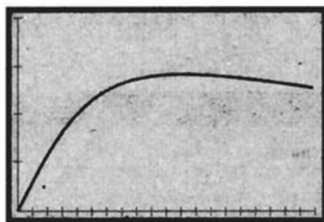
Al sustituir estos valores de β y α en la ecuación $\theta = \beta - \alpha$ se tiene

$$\theta = \cot^{-1} \frac{x}{16} - \cot^{-1} \frac{x}{9} \qquad x > 0 \tag{14}$$

A fin de trazar la gráfica de esta ecuación en la graficadora, primero se expresa el miembro derecho de la ecuación en términos de $\tan^{-1}$ porque no existe tecla para $\cot^{-1}$ en la graficadora. Al aplicar la definición 5.7.9, se tiene

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{x}{16} - \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{x}{9}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{x}{9} - \tan^{-1} \frac{x}{16}$$



[0, 20] por [0, 0.4]

$\theta = \tan^{-1}\frac{x}{9} - \tan^{-1}\frac{x}{16}$

FIGURA 20

La figura 20 muestra la gráfica de esta ecuación trazada en el rectángulo de inspección de [0, 20] por [0, 0.4]. En la graficadora se estima que el valor máximo de θ ocurre cuando $x = 12$.

(b) Se desea determinar analíticamente el valor de x que hará a θ un máximo absoluto. Como x está en el intervalo $(0, +\infty)$, el valor máximo absoluto de θ será un valor extremo relativo.

Al diferenciar los dos miembros de la ecuación 14 con respecto a x se obtiene

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\frac{1}{16}}{1+\left(\frac{x}{16}\right)^2} + \frac{\frac{1}{9}}{1+\left(\frac{x}{9}\right)^2}$$

$$= -\frac{16}{16^2+x^2} + \frac{9}{9^2+x^2}$$

Si se considera $\frac{d\theta}{dx} = 0$ se tiene

$$9(16^2 + x^2) - 16(9^2 + x^2) = 0$$

$$-7x^2 + 9 \cdot 16(16 - 9) = 0$$

$$x^2 = 9 \cdot 16$$

$$x = \pm 12$$

Se rechaza el valor -12 porque no está en el intervalo $(0, +\infty)$. La tabla 2 muestra los resultados de aplicar el criterio de la primera derivada. Como el valor máximo relativo de θ es un valor máximo absoluto, entonces se ha confirmado analíticamente la estimación del inciso (a).

Conclusión: El observador debe estar parado a 12 pie de la pared a fin de que tenga la "mejor vista".

Tabla 2

	$\frac{d\theta}{dx}$	*Conclusión*
$0 < x < 12$	+	θ es creciente
$x = 12$	0	θ tiene un valor máximo relativo
$12 < x < +\infty$	−	θ es decreciente

◀

EJERCICIOS 5.7

En los ejercicios 1 a 6, determine el valor de función exacto.

1. **(a)** $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}$ **(b)** $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$ **(c)** $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ **(d)** $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$

2. **(a)** $\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(b)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **(c)** $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(d)** $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3. **(a)** $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(b)** $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ **(c)** $\sec^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}$ **(d)** $\sec^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

4. **(a)** $\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(b)** $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ **(c)** $\csc^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}$ **(d)** $\csc^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

5. **(a)** $\operatorname{sen}^{-1} 1$ **(b)** $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$ **(c)** $\csc^{-1} 1$ **(d)** $\csc^{-1}(-1)$ **(e)** $\operatorname{sen}^{-1} 0$

6. **(a)** $\cos^{-1} 1$ **(b)** $\cos^{-1}(-1)$ **(c)** $\sec^{-1} 1$ **(d)** $\sec^{-1}(-1)$ **(e)** $\cos^{-1} 0$

7. Dada $x = \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3}$, determine el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones: **(a)** $\cos x$; **(b)** $\tan x$; **(c)** $\cot x$; **(d)** $\sec x$; **(e)** $\csc x$.

8. Dada $x = \cos^{-1}\frac{2}{3}$, determine el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones: **(a)** $\operatorname{sen} x$; **(b)** $\tan x$; **(c)** $\cot x$; **(d)** $\sec x$; **(e)** $\csc x$.

9. Realice el ejercicio 7 si $x = \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{3})$.

10. Realice el ejercicio 8 si $x = \cos^{-1}(-\frac{2}{3})$.

11. Dada $y = \tan^{-1}(-2)$, determine el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones: **(a)** $\operatorname{sen} y$; **(b)** $\cos y$; **(c)** $\cot y$; **(d)** $\sec y$; **(e)** $\csc y$.

12. Dada $t = \sec^{-1}(-3)$ determine el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones: (a) sen t; (b) $\cos t$; (c) $\tan t$; (d) $\cot t$; (e) $\csc t$.

En los ejercicios 13 a 24, determine el valor exacto de la expresión indicada.

13. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi)$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}[\operatorname{sen}(-\frac{1}{6}\pi)]$
(c) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} \frac{5}{6}\pi)$ (d) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} \frac{11}{6}\pi)$

14. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi)$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}[\operatorname{sen}(-\frac{1}{3}\pi)]$
(c) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi)$ (d) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} \frac{5}{3}\pi)$

15. (a) $\cos^{-1}(\cos \frac{1}{3}\pi)$ (b) $\cos^{-1}[\cos(-\frac{1}{3}\pi)]$
(c) $\cos^{-1}(\cos \frac{2}{3}\pi)$ (d) $\cos^{-1}(\cos \frac{4}{3}\pi)$

16. (a) $\cos^{-1}(\cos \frac{1}{4}\pi)$ (b) $\cos^{-1}[\cos(-\frac{1}{4}\pi)]$
(c) $\cos^{-1}(\cos \frac{3}{4}\pi)$ (d) $\cos^{-1}(\cos \frac{5}{4}\pi)$

17. (a) $\tan^{-1}(\tan \frac{1}{6}\pi)$ (b) $\tan^{-1}[\tan(-\frac{1}{3}\pi)]$
(c) $\tan^{-1}(\tan \frac{7}{6}\pi)$ (d) $\tan^{-1}[\tan(-\frac{4}{3}\pi)$

18. (a) $\tan^{-1}(\tan \frac{1}{3}\pi)$ (b) $\tan^{-1}[\tan(-\frac{1}{6}\pi)]$
(c) $\tan^{-1}(\tan \frac{4}{3}\pi)$ (d) $\tan^{-1}[\tan(-\frac{7}{6}\pi)]$

19. (a) $\sec^{-1}(\sec \frac{1}{3}\pi)$ (b) $\sec^{-1}[\sec(-\frac{1}{3}\pi)]$
(c) $\sec^{-1}(\sec \frac{2}{3}\pi)$ (d) $\sec^{-1}[\sec(\frac{4}{3}\pi)]$

20. (a) $\sec^{-1}(\sec \frac{1}{4}\pi)$ (b) $\sec^{-1}[\sec(-\frac{1}{4}\pi)]$
(c) $\sec^{-1}(\sec \frac{3}{4}\pi)$ (d) $\sec^{-1}(\sec \frac{5}{4}\pi)$

21. (a) $\tan[\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2}\sqrt{3}]$ (b) $\operatorname{sen}[\tan^{-1} \frac{1}{2}\sqrt{3}]$

22. (a) $\cos[\tan^{-1}(-3)]$ (b) $\tan[\sec^{-1}(-3)]$

23. (a) $\cos[\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})]$ (b) $\operatorname{sen}[\cos^{-1}(-\frac{1}{2})]$

24. (a) $\tan[\cot^{-1}(-1)]$ (b) $\cot[\tan^{-1}(-1)]$

En los ejercicios 25 a 30, dibuje la gráfica de función. Apoye la gráfica en la graficadora.

25. $f(x) = 2 \operatorname{sen}^{-1} x$ 26. $g(x) = \operatorname{sen}^{-1} 2x$

27. $g(x) = \tan^{-1} \frac{1}{2}x$ 28. $f(x) = \frac{1}{2} \tan^{-1} x$

29. $h(x) = \frac{1}{2} \cos^{-1} 3x$ 30. $h(x) = 3 \cos^{-1} \frac{1}{2}x$

31. (a) Dibuje la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)$, y apoye la gráfica en la graficadora. Establezca el dominio y el contradominio de f. (b) Dibuje la gráfica de $g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$, y apoye la gráfica en la graficadora. Establezca el dominio y contradominio de g.

32. Realice el ejercicio 31 si $f(x) = \cos(\cos^{-1} x)$ y $g(x) = \cos^{-1}(\cos x)$.

En los ejercicios 33 a 42, calcule la derivada de la función.

33. (a) $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2}x$ (b) $g(x) = \tan^{-1} 2x$

34. (a) $f(x) = \cos^{-1} 3x$ (b) $g(x) = \sec^{-1} 2x$

35. (a) $F(x) = 2 \cos^{-1} \sqrt{x}$
(b) $g(t) = \sec^{-1} 5t + \csc^{-1} 5t$

36. (a) $g(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^{-1} e^x$
(b) $f(y) = \tan^{-1} y^2 + \cot^{-1} y^2$

37. (a) $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{1 - x^2}$ (b) $G(x) = \cot^{-1} \dfrac{2}{x}$

38. (a) $f(w) = 2 \tan^{-1} \dfrac{1}{w}$ (b) $F(x) = x \cos^{-1} x$

39. (a) $f(x) = \cos^{-1}(\operatorname{sen} x)$
(b) $h(x) = 4 \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2}x + x\sqrt{4 - x^2}$

40. (a) $h(x) = \tan^{-1} \dfrac{2x}{1 - x^2}$
(b) $g(x) = \sec^{-1} \sqrt{x^2 + 4}$

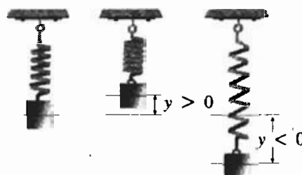
41. (a) $f(x) = x \tan^{-1} x - \ln \sqrt{1 - x^2}$
(b) $g(x) = \sec^{-1}(2e^{3x})$

42. (a) $f(x) = x \operatorname{sen}^{-1} x + x \cos^{-1} x$
(b) $f(t) = \csc^{-1} \sqrt{t}$

43. Un cuerpo está suspendido de un resorte y vibra verticalmente de acuerdo con la ecuación

$$y = 2 \operatorname{sen} 4\pi(t + \tfrac{1}{8})$$

donde y centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central t segundos después de iniciado el movimiento y el sentido positivo se considera hacia arriba. (a) Resuelva la ecuación para t. (b) Utilice la ecuación del inciso (a) para determinar los tres valores positivos más pequeños para los cuales el cuerpo está 1 cm sobre su posición central.



44. Una corriente alterna de 60 ciclos está descrita por la ecuación $x = 20 \operatorname{sen} 120\pi\,(t - \frac{11}{720})$, donde x amperes es la corriente a los t segundos. (a) Resuelva la ecuación para t. (b) Utilice la ecuación del inciso (a) para determinar los tres valores positivos más pequeños para los cuales la corriente es de 10 amperes.

45. Obtenga las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la ecuación $y = \sec^{-1}(2x + 1)$ en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\pi)$.

46. En el ejemplo 8, demuestre que otra ecuación que define a θ en términos de x es

$$\theta = \tan^{-1} \frac{7x}{x^2 + 144}$$

Utilice esta ecuación para determinar qué tan lejos de la pared debe estar ubicado el observador para que tenga la "mejor vista" del cuadro.

47. Un anuncio de 3 pie de altura está colocado en una pared con su base a 2 pie arriba del nivel de los ojos de una mujer que intenta leerlo. (a) Estime en la graficadora, con aproximación de centésimos de pies, qué tan retirada de la pared debe estar la mujer a fin de que tenga la "mejor vista" del anuncio; es decir, de modo que el ángulo subtendido por el anuncio en sus ojos sea un máximo. (b) Confirme analíticamente la estimación del inciso (a).

48. El ejemplo 8 y el ejercicio 47 son casos particulares de la situación más general: un objeto (por ejemplo, un cuadro o un anuncio) de a pies de altura está colocado en una pared

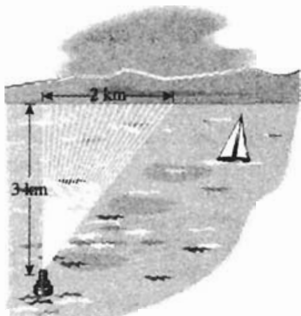
con su base a b pies sobre el nivel de los ojos de un observador. Demuestre que el observador obtiene la "mejor vista" del objeto cuando la distancia del observador desde la pared es $\sqrt{b(a+b)}$ pies.

En los ejercicios 49 a 55, defina las variables precisamente como números de unidades de medición. Utilice el símbolo t para representar el tiempo y defina las otras variables en términos de t. No olvide escribir una conclusión.

49. Un cuadro de 40 cm de altura está colocado en una pared con su base a 30 cm del nivel de los ojos de un observador. Si el observador se aproxima a la pared a una tasa de 40 cm/s, ¿qué tan rápido cambia la medida del ángulo subtendido por el cuadro en los ojos del observador cuando éste se encuentra a 1 m de la pared?

50. En un muelle, un hombre tira mediante una cuerda de un bote a una tasa de 2 pie/s. Las manos del hombre están 20 pie arriba del nivel del punto donde la cuerda está atada al bote. ¿Qué tan rápido cambia la medida del ángulo de depresión de la cuerda cuando hay 52 pie de cuerda suelta?

51. Un faro se localiza a 3 km de la playa recta. Si gira a 2 r pm (revoluciones por minuto), calcule la rapidez de su rayo luminoso a lo largo de la playa cuando el rayo se halla a 2 km del punto de la playa más cercano al faro.



52. Una escalera de 25 pie de longitud se recarga sobre una pared vertical. Si la base de la escalera se jala horizontalmente alejándola de la pared de modo que su parte superior se deslice hacia abajo a 3 pie/s, ¿qué tan rápido está cambiando la medida del ángulo formado por la escalera y el suelo cuando la base de la escalera está a 15 pie de la pared?

53. Una mujer camina a una tasa de 5 pie/s a lo largo de un diámetro de un patio circular. Una luz, ubicada en el extremo de un diámetro perpendicular al de su trayectoria proyecta su sombra sobre la pared circular. ¿Qué tan rápido se mueve la sombra a lo largo de la pared cuando la distancia de la mujer al centro del patio es de $\frac{1}{2}r$, donde r pie es el radio del patio?



54. En el ejercicio 53, ¿qué tan retirada está la mujer del centro del patio cuando la rapidez de su sombra a lo largo de la pared es de 9 pie/s?

55. Una cuerda se ata a un cuerpo y se pasa por un gancho que se encuentra a 8 pie sobre el suelo. La cuerda es tirada sobre el gancho a una tasa de $\frac{3}{4}$ pie/s y arrastra el cuerpo por el suelo. Si la longitud de la cuerda entre el cuerpo y el gancho es x pies cuando la medida en radianes del ángulo formado por la cuerda y el suelo es θ, determine la tasa de variación (derivada) de θ con respecto a x.

56. Demuestre en dos formas que si $x > 0$, entonces

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\pi$$

(**a**) utilice la definición 5.7.9; (**b**) demuestre que $\tan^{-1} x$ y $\tan^{-1} 1/x$ difieren por una constante y después determine la constante.

57. Demuestre que el contradominio de la función cosecante inversa es $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi] \cup (0, \frac{1}{2}\pi]$.

58. Confirme la ecuación

$$D_x(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

en la graficadora. También dé una interpretación geométrica de esta ecuación como se hizo con las ecuaciones (3) y (7).

59. Sea

$$f(x) = \tan^{-1}\frac{1}{x} - \cot^{-1} x$$

(**a**) Demuestre que $f'(x) = 0$ para toda x en el dominio de f. (**b**) Demuestre que no existe constante C para la cual $f(x) = C$ para toda x en el dominio de f. (**c**) ¿Por qué el inciso (b) no contradice el teorema 4.1.2?

En los ejercicios 60 a 62, una expresión algebraica en la variable x se representa como una expresión trigonométrica en la variable θ mediante una sustitución que implica una función trigonométrica inversa. Este tipo de sustitución se requerirá en la sección 7.3.

60. Demuestre que la sustitución $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(\frac{1}{3}x)$ en la expresión $\sqrt{9-x^2}$ conduce a $3\cos\theta$, y explique cómo se emplea el dominio de θ.

61. Demuestre que la sustitución $\theta = \tan^{-1}(\frac{1}{2}x)$ en la expresión $\sqrt{x^2+4}$ conduce a $2\sec\theta$, y explique cómo se utiliza el dominio de θ.

62. Demuestre que la sustitución $\theta = \sec^{-1}(\frac{1}{5}x)$ en la expresión $\sqrt{x^2-25}$ conduce a $5\tan\theta$, y explique cómo se emplea el dominio de θ.

5.8 INTEGRALES QUE PRODUCEN FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

A partir de las fórmulas de las derivadas de las funciones trigonométricas inversas se obtienen algunas fórmulas de integración indefinida. El teorema siguiente proporciona tres de estas fórmulas.

5.8.1 Teorema

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{sen}^{-1} u + C \tag{1}$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + C \tag{2}$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1} u + C \tag{3}$$

La demostración de cada fórmula es inmediata considerando la derivada del miembro derecho. El teorema siguiente proporciona algunas fórmulas más generales.

5.8.2 Teorema

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C \qquad \text{donde } a > 0 \tag{4}$$

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1} \frac{u}{a} + C \qquad \text{donde } a \neq 0 \tag{5}$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1} \frac{u}{a} + C \qquad \text{donde } a > 0 \tag{6}$$

Demostración Estas fórmulas pueden demostrarse al calcular la derivada de los miembros derechos y obtener los integrandos. Se demostrará la fórmula (4).

$$\begin{aligned} D_u\left(\text{sen}^{-1} \frac{u}{a}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}} D_u\left(\frac{u}{a}\right) \\ &= \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2-u^2}} \cdot \frac{1}{a} \\ &= \frac{a}{\sqrt{a^2-u^2}} \cdot \frac{1}{a} \qquad \text{si } a > 0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} \qquad \text{si } a > 0 \end{aligned}$$

Las demostraciones de (5) y (6) se dejan como ejercicios (consulte los ejercicios 32 y 33). ■

Las fórmulas del teorema 5.8.2 también pueden demostrarse realizando un cambio de variable conveniente y después aplicando el teorema 5.8.1

(refiérase a los ejercicios 34 a 36). Observe que las fórmulas del teorema 5.8.2 contienen a las del teorema 5.8.1 considerando $a = 1$.

EJEMPLO 1 Evalúe

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$$

Solución

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\sqrt{4 - (3x)^2}}$$
$$= \frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\frac{3x}{2} + C$$

En los tres ejemplos siguientes se completa el cuadrado de una expresión cuadrática a fin de escribir el integrando de modo que sea posible aplicar el teorema 5.8.2.

EJEMPLO 2 Evalúe

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 5}$$

y apoye la respuesta gráficamente

Solución

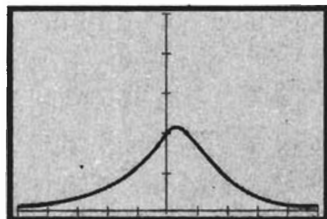
$$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 5} = \int \frac{dx}{3(x^2 - \frac{2}{3}x) + 5}$$

A fin de completar el cuadrado de $x^2 - \frac{2}{3}x$ se suma $\frac{1}{9}$, y como $\frac{1}{9}$ está multiplicado por 3, en realidad se suma $\frac{1}{3}$ en el denominador, de modo que también se restará $\frac{1}{3}$ del denominador. Por tanto, se tiene

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 5} = \int \frac{dx}{3(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}) + 5 - \frac{1}{3}}$$
$$= \int \frac{dx}{3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{14}{3}}$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{14}{9}}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{14}}\tan^{-1}\left(\frac{x - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\sqrt{14}}\right) + C$$
$$= \frac{1}{\sqrt{14}}\tan^{-1}\left(\frac{3x - 1}{\sqrt{14}}\right) + C$$

Esta respuesta se apoya gráficamente al trazar las gráficas de

$$y = \frac{1}{3x^2 - 2x + 5} \quad \text{y} \quad \text{NDER}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\tan^{-1}\frac{3x - 1}{\sqrt{14}}, x\right)$$



[−5, 5] por [0, 0.5]

$$y = \frac{1}{3x^2 - 2x + 5}$$

$$\text{NDER}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\tan^{-1}\frac{3x-1}{\sqrt{14}}, x\right)$$

FIGURA 1

en el rectángulo de inspección de [−5, 5] por [0, 0.5], como se muestra en la figura 1. El hecho de que las gráficas coincidan apoya la respuesta. ◀

▶ EJEMPLO 3 Utilice NINT en la graficadora para aproximar con seis dígitos significativos el valor de

$$\int_0^1 \frac{(2x + 7)dx}{x^2 + 2x + 5}$$

Confirme analíticamente la respuesta.

Solución En la graficadora se calcula

$$\text{NINT}\left(\frac{2x + 7}{x^2 + 2x + 5}, 0, 1\right) = 1.27438$$

Para confirmar analíticamente la respuesta, es necesario evaluar la integral definida. Pero primero se evaluará la integral indefinida.

Debido a que $d(x^2 + 2x + 5) = (2x + 2)dx$, se escribe el numerador como $(2x + 2)dx + 5dx$ y se expresa la integral original como la suma de dos integrales.

$$\begin{aligned}\int \frac{(2x + 7)dx}{x^2 + 2x + 5} &= \int \frac{(2x + 2)dx}{x^2 + 2x + 5} + 5\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} \\ &= \ln|x^2 + 2x + 5| + 5\int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 4} \\ &= \ln(x^2 + 2x + 5) + \frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{x + 1}{2} + C\end{aligned}$$

Nota: $|x^2 + 2x + 5| = x^2 + 2x + 5$ porque $x^2 + 2x + 5 > 0$ para toda x.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(2x + 7)dx}{x^2 + 2x + 5} &= \ln(x^2 + 2x + 5) + \frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{x + 1}{2}\Big]_0^1 \\ &= \ln 8 + \tfrac{5}{2}\tan^{-1} 1 - (\ln 5 + \tfrac{5}{2}\tan^{-1}\tfrac{1}{2}) \\ &= 1.27438\end{aligned}$$

lo cual confirma la respuesta. ◀

▶ EJEMPLO 4 Calcule el valor exacto de

$$\int_0^{2-\sqrt{2}} \frac{6\,dx}{(2 - x)\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$

Solución Primero se evaluará la integral indefinida.

$$\begin{aligned}\int \frac{6\,dx}{(2 - x)\sqrt{x^2 - 4x + 3}} &= \int \frac{6\,dx}{-(x - 2)\sqrt{(x^2 - 4x + 4) - 1}} \\ &= -6\int \frac{dx}{(x - 2)\sqrt{(x - 2)^2 - 1}} \\ &= -6\sec^{-1}(x - 2) + C\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{2-\sqrt{2}} \frac{6\,dx}{(2-x)\sqrt{x^2-4x+3}} &= -6\sec^{-1}(x-2)\Big]_0^{2-\sqrt{2}} \\ &= -6[\sec^{-1}(-\sqrt{2}) - \sec^{-1}(-2)] \\ &= -6(\tfrac{5}{4}\pi - \tfrac{4}{3}\pi) \\ &= \tfrac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

◀

▶ **EJEMPLO 5** Calcule el área exacta de la región del primer cuadrante limitada por la curva

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

el eje x, el eje y y la recta $x = 1$.

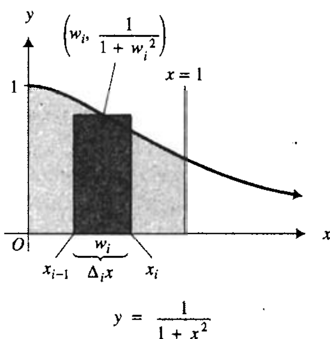


FIGURA 2

Solución La figura 2 muestra la región y un elemento rectangular de área. Si A unidades cuadradas es el área de la región, entonces

$$\begin{aligned}A &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+w_i^2}\Delta_i x \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \tan^{-1}x\Big]_0^1 \\ &= \tan^{-1}1 - \tan^{-1}0 \\ &= \tfrac{1}{4}\pi - 0 \\ &= \tfrac{1}{4}\pi\end{aligned}$$

◀

EJERCICIOS 5.8

En los ejercicios 1 a 16, evalúe la integral indefinida. Apoye la respuesta gráficamente o mostrando que la derivada de la respuesta es el integrando.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

2. $\int \frac{dx}{x^2+25}$

3. $\int \frac{dx}{9x^2+16}$

4. $\int \frac{dt}{\sqrt{1-16t^2}}$

5. $\int \frac{dx}{4x\sqrt{x^2-16}}$

6. $\int \frac{x}{x^4+16}dx$

7. $\int \frac{r}{\sqrt{16-9r^4}}dr$

8. $\int \frac{du}{u\sqrt{16u^2-9}}$

9. $\int \frac{e^x}{7+e^{2x}}dx$

10. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2-\cos^2 x}}dx$

11. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

12. $\int \frac{ds}{\sqrt{2s-s^2}}$

13. $\int \frac{dx}{x^2-x+2}$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}$

16. $\int \frac{2\,dt}{(t-3)\sqrt{t^2-6t+5}}$

En los ejercicios 17 a 24, calcule el valor exacto de la integral definida. Apoye la respuesta utilizando NINT *en la graficadora.*

17. $\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}dx$

18. $\int_2^5 \frac{dx}{x^2-4x+13}$

19. $\int_{-4}^{-2} \frac{dt}{\sqrt{-t^2-6t-5}}$

20. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{12-x^4}}dx$

21. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

22. $\int_0^{\pi/6} \frac{\sec^2 x}{1+9\tan^2 x}dx$

23. $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x[1 + (\ln x)^2]}$ **24.** $\displaystyle\int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$

En los ejercicios 25 a 28, emplee NINT *en la graficadora para aproximar, con seis dígitos significativos, el valor de la integral definida. Confirme analíticamente la respuesta.*

25. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{8 - 2x - x^2}}dx$ **26.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{2 + x}{\sqrt{4 - 2x - x^2}}dx$

27. $\displaystyle\int_0^3 \frac{2x^3}{2x^2 - 4x + 3}dx$ **28.** $\displaystyle\int_1^4 \frac{x}{x^2 + x + 1}dx$

29. Determine el área exacta de la región acotada por la curva $y = 8/(x^2 - 4)$, el eje x, el eje y y la recta $x = 2$.

30. Calcule el área exacta de la región limitada por la curvas $x^2 = 4ay$ y $y = 8a^3/(x^2 + 4a^2)$.

31. Determine el área exacta de la región acotada por la curva $y = 1/\sqrt{5 - 4x - x^2}$, el eje x, el eje y y las rectas $x = -\frac{7}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$.

En los ejercicios 32 y 33, demuestre la fórmula mostrando que la derivada del miembro derecho es igual al integrando.

32. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

33. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$ si $a > 0$

En los ejercicios 34 a 36, demuestre la fórmula indicada del teorema 5.8.2 efectuando un cambio de variable adecuado y después aplicando el teorema 5.8.1.

34. Fórmula (4) **35.** Fórmula (5) **36.** Fórmula (6)

37. En la sección 2.8 se estableció que una partícula que se desplaza sobre una recta tiene *movimiento armónico simple* si la medida de su aceleración siempre es proporcional a la medida de su desplazamiento desde un punto fijo de la recta, y su aceleración y su desplazamiento tienen sentidos opuestos. Por tanto, si a los t segundos, s centímetros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen y v centímetros por segundo es la velocidad de la partícula, entonces una ecuación diferencial para el movimiento armónico simple es

$$\frac{dv}{dt} = -k^2 s \qquad (7)$$

donde k^2 es la constante de proporcionalidad y el signo menos indica que la aceleración tiene sentido opuesto al del desplazamiento. Como $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$, se deduce que $\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds}$. De modo que (7) puede escribirse como

$$v\frac{dv}{ds} = -k^2 s \qquad (8)$$

(a) Resuelva (8) para v con la finalidad de obtener $v = \pm k\sqrt{a^2 - s^2}$. *Nota:* tome a^2k^2 como la constante arbitraria de integración, y justifique esta elección. **(b)** Al considerar $v = ds/dt$ en la solución del inciso (a) se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{ds}{dt} = \pm k\sqrt{a^2 - s^2} \qquad (9)$$

Al tomar $t = 0$ en el instante cuando $v = 0$ (y en consecuencia $s = a$), resuelva (9) para obtener

$$s = a\cos kt \qquad (10)$$

(c) Muestre que el máximo valor para $|s|$ es a. El número a se denomina *amplitud* del movimiento. **(d)** La partícula oscilará entre los puntos donde $s = a$ y $s = -a$. Si T segundos es el tiempo empleado para que la partícula vaya de a a $-a$ y regrese, demuestre que $T = 2\pi/k$. El número T recibe el nombre de *periodo* del movimiento.

38. Una partícula se mueve sobre una recta de acuerdo a la ecuación de movimiento $s = 5 - 10\,\text{sen}^2\,2t$, donde s centímetros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. **(a)** Utilice el resultado del inciso (b) del ejercicio 37 para verificar que el movimiento es armónico simple. **(b)** Verifique que el movimiento es armónico simple mostrando que la ecuación diferencial (7) se satisface. **(c)** Determine la amplitud y el periodo de este movimiento.

En los ejercicios 39 a 41, demuestre que el valor exacto de la integral definida es π. Después aproxime π, con nueve dígitos significativos, aplicando NINT *a la integral definida en la graficadora.*

39. $\displaystyle\int_0^{0.5} \frac{6}{\sqrt{1 - x^2}}dx$ **40.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{1 + x^2}dx$

41. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{12}{x\sqrt{x^2 - 1}}dx$

42. Demuestre las fórmulas (a), (b) y (c) mostrando que la derivada del miembro derecho es igual al integrando. Después explique por qué la fórmula es equivalente a la fórmula correspondiente del teorema 5.8.1.

(a) $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = -\cos^{-1} u + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{du}{1 + u^2} = -\cot^{-1} u + C$

(c) $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}} = -\csc^{-1} u + C$

5.9 FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Ciertas combinaciones de e^x y e^{-x} aparecen con frecuencia en algunas aplicaciones de matemáticas, especialmente en ingeniería y física. Estas combinaciones se denominan *funciones hiperbólicas*, de las cuales las dos más importantes son el *seno hiperbólico* y el *coseno hiperbólico*. Al final de esta sección se demuestra que los valores de estas funciones están relacionados con las coordenadas de los puntos de una hipérbola equilátera de manera semejante a la forma en que los valores de las funciones trigonométricas correspondientes están relacionados con las coordenadas de los puntos de una circunferencia.

5.9.1 Definición de las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico

La función **seno hiperbólico**, denotada por senh, y la función **coseno hiperbólico**, denotada por cosh, están definidas como sigue:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^{-x} + e^x}{2}$$

donde x es cualquier número real.

De la definición, el dominio de cada una de estas funciones es el conjunto R de los números reales. El contradominio de senh también es el conjunto R. Sin embargo, el contradominio de cosh es el conjunto de números del intervalo $[1, +\infty)$. Como

$$\begin{aligned}\operatorname{senh}(-x) &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} \\ &= -\frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= -\operatorname{senh} x\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\cosh(-x) &= \frac{e^{-x} + e^x}{2} \\ &= \cosh x\end{aligned}$$

el seno hiperbólico es una función impar y el coseno hiperbólico es una función par.

Las fórmulas de las derivadas de las funciones seno hiperbólico y el coseno hiperbólico se obtienen mediante la aplicación de la definición 5.9.1 y diferenciando las expresiones resultantes que contienen funciones exponenciales. Así,

$$\begin{aligned}D_x(\operatorname{senh} x) &= D_x\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \\ &= \frac{e^{-x} + e^x}{2} \\ &= \cosh x\end{aligned} \qquad \begin{aligned}D_x(\cosh x) &= D_x\left(\frac{e^{-x} + e^x}{2}\right) \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \operatorname{senh} x\end{aligned}$$

De estas fórmulas y de la regla de la cadena se tiene el teorema siguiente.

5.9.2 Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(\operatorname{senh} u) = \cosh u \, D_x u$$
$$D_x(\cosh u) = \operatorname{senh} u \, D_x u$$

Como D_x (senh x) > 0 para toda x, la función seno hiperbólico es creciente en su dominio completo. Con esta información, el conocimiento de que es una función impar y algunos valores obtenidos con la calculadora, se tiene la gráfica de la función seno hiperbólico, la cual se muestra en la figura 1.

La función coseno hiperbólico es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0]$ porque $D_x(\cosh x) < 0$ si $x < 0$, y es creciente en el intervalo $[0, +\infty,)$ porque $D_x(\cosh x) > 0$ si $x > 0$. Además, el coseno hiperbólico es una función par. Con estos hechos y algunos valores de cosh x, obtenidos con una calculadora, se tiene la gráfica de la función coseno hiperbólico, la cual se presenta en la figura 2.

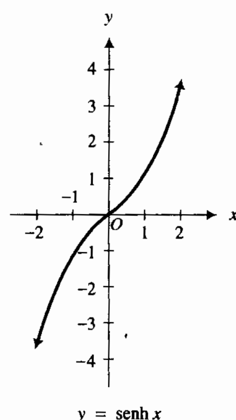


FIGURA 1

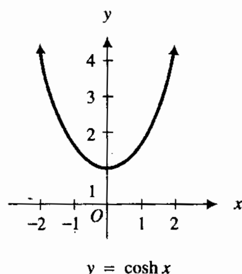


FIGURA 2

Las otras cuatro funciones hiperbólicas se definen en términos del seno hiperbólico y del coseno hiperbólico. Observe que cada una satisface una identidad análoga a la que satisfacen las funciones trigonométricas correspondientes.

5.9.3 Definición de las otras cuatro funciones hiperbólicas

Las funciones tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica, secante hiperbólica y cosecante hiperbólica, denotadas respectivamente por tanh, coth, sech y csch, están definidas como sigue:

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

Las funciones hiperbólicas de esta definición pueden expresarse en términos de e^x y e^{-x} aplicando la definición 5.9.1:

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

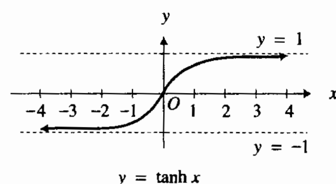


FIGURA 3

La gráfica de la tangente hiperbólica se muestra en la figura 3. Su dominio es el conjunto R de los números reales y su contradominio es el intervalo abierto $(-1, 1)$. La figura 4 presenta la gráfica de la cotangente hiperbólica cuyo dominio es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ y cuyo contradominio es $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Observe de las figuras 1 a 4, que ninguna de estas funciones es periódica, mientras que las funciones trigonométricas correspondientes son periódicas.

Las identidades que son satisfechas por las funciones hiperbólicas son semejantes a las que relacionan funciones trigonométricas. Cuatro de las identidades fundamentales se dan en la definición 5.9.3. Las otras cuatro identidades fundamentales son las siguientes:

$$\tanh x = \frac{1}{\coth x}$$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x$$

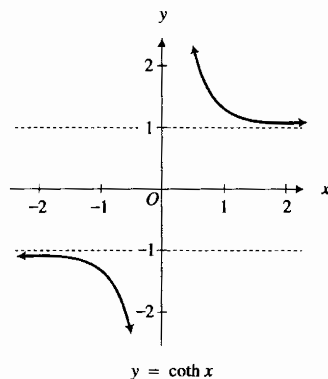


FIGURA 4

La primera de estas identidades se deduce inmediatamente de las definiciones de tanh x y coth x. Las otras tres pueden demostrarse aplicando las fórmulas para las funciones en términos e^x y e^{-x}. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^0 - e^{-2x}) \\ &= 1\end{aligned}$$

Otras identidades pueden demostrarse a partir de las ocho identidades fundamentales.

Las dos relaciones siguientes pueden obtenerse de la definición 5.9.1:

$$\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$$
$$\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$$

Estas relaciones son útiles para demostrar las siguientes identidades:

$$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$
$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

Si se sustituye y por x en estas dos identidades, se tiene

$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

A fin de obtener la derivada de la tangente hiperbólica, se aplican algunas de las identidades:

$$\begin{aligned}D_x(\tanh x) &= D_x\left(\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\right) \\ &= \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} \\ &= \operatorname{sech}^2 x\end{aligned}$$

Las fórmulas de las derivadas de las tres funciones hiperbólicas restantes son: $D_x(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$; $D_x(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$; $D_x(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$. Las demostraciones de estas fórmulas se dejan como ejercicios (refiérase a los ejercicios 11 y 12).

A partir de estas fórmulas y de la regla de la cadena se obtiene el teorema siguiente.

5.9.4 Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \, D_x u$$
$$D_x(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \, D_x u$$
$$D_x(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \, D_x u$$
$$D_x(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \, D_x u$$

Observe que las fórmulas de las derivadas del seno, coseno y tangente hiperbólicos tienen signo más, mientras que la cotangente, secante y cosecante hiperbólicas tienen signo menos. Aparte de esto, las fórmulas son semejantes a las fórmulas correspondientes de las derivadas de las funciones trigonométricas.

▶ ***EJEMPLO 1*** Calcule $f'(x)$ y simplifíquela mediante identidades de funciones hiperbólicas si

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\ln\tanh x$$

Solución

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\tanh x}\cdot D_x(\tanh x)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\tanh x}\cdot \operatorname{sech}^2 x\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}\cdot\frac{1}{\cosh^2 x}\\ &= \frac{1}{2\operatorname{senh} x\cosh x}\\ &= \frac{1}{\operatorname{senh} 2x}\\ &= \operatorname{csch} 2x \end{aligned}$$ ◀

Las fórmulas de integración indefinida del teorema siguiente se deducen a partir de las fórmulas correspondientes de diferenciación de los teoremas 5.9.2 y 5.9.4.

5.9.5 Teorema

$$\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$$

$$\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u\tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \operatorname{csch} u\coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$$

Las técnicas aplicadas para integrar funciones hiperbólicas son semejantes a las empleadas para integrar funciones trigonométricas. Los dos ejemplos siguientes ilustran el procedimiento.

EJEMPLO 2 Evalúe

$$\int \operatorname{senh} x \cosh^2 x\, dx$$

Solución

$$\begin{aligned}\int \operatorname{senh} x \cosh^2 x\, dx &= \int \cosh^2 x\, (\operatorname{senh} x\, dx)\\ &= \tfrac{1}{3}\cosh^3 x + C\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Evalúe

$$\int_0^1 \tanh^2 x\, dx$$

con cuatro dígitos significativos y apoye la respuesta utilizando NINT en la graficadora.

Solución

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tanh^2 x\, dx &= \int_0^1 (1 - \operatorname{sech}^2 x)\, dx\\ &= x - \tanh x\Big]_0^1\\ &= 1 - \tanh 1 + \tanh 0\\ &= 1 - 0.7616 + 0\\ &= 0.2384\end{aligned}$$

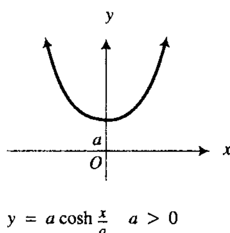
En la graficadora se obtiene

$$\text{NINT}(\tanh^2 x, 0, 1) = 0.2384$$

lo cual apoya la respuesta.

La gráfica de la función definida por

$$f(x) = a \cosh \frac{x}{a} \qquad a > 0$$



$y = a\cosh\frac{x}{a} \quad a > 0$

FIGURA 5

se muestra en la figura 5. El punto más bajo se encuentra en $(0, a)$, la función f es decreciente cuando $x < 0$ y es creciente cuando $x > 0$, y la gráfica es cóncava hacia arriba en todo punto. Se le pedirá que confirme analíticamente estas propiedades en el ejercicio 61. Esta gráfica recibe el nombre de **catenaria**, una curva formada por un cable flexible de densidad uniforme que cuelga libremente de dos puntos bajo su propio peso. Algunos cables de puentes colgantes, algunos suspendidos de postes telefónicos y algunos otros con corriente eléctrica para los tranvías y trolebuses, penden en esta forma.

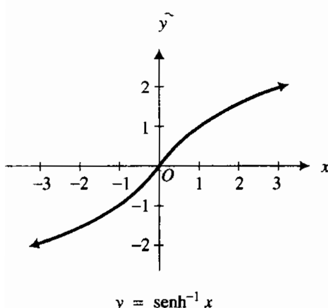
En la gráfica del seno hiperbólico mostrada en la figura 1, observe que cualquier recta horizontal intersecta a la gráfica en a lo más un punto. Por tanto, el seno hiperbólico es uno a uno. Además, el seno hiperbólico es continuo y creciente en su dominio, lo cual se le pedirá que demuestre en el ejercicio 62. Así, esta función tiene una inversa la cual se definirá a continuación.

5.9.6 Definición de la función seno hiperbólico inverso

La **función seno hiperbólico inversa**, denotada por senh^{-1}, está definida como sigue:

$$y = \operatorname{senh}^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \operatorname{senh} y$$

donde y es cualquier número real.



$y = \operatorname{senh}^{-1} x$

FIGURA 6

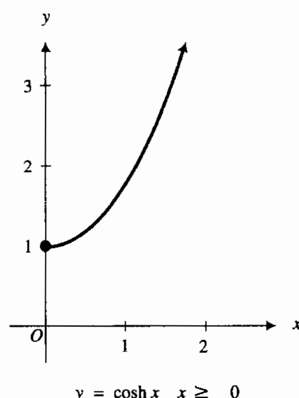
Tanto el dominio como el contradominio de senh^{-1} son el conjunto R de los números reales. La gráfica de esta función se presenta en la figura 6. De la definición,

$$\operatorname{senh}(\operatorname{senh}^{-1} x) = x \quad \text{y} \quad \operatorname{senh}^{-1}(\operatorname{senh} y) = y$$

En la figura 2 observe que una recta horizontal, $y = k$ donde $k > 1$, intersecta la gráfica del coseno hiperbólico en dos puntos. Por lo que cosh no es una función uno a uno y, en consecuencia, no tiene una función inversa. En la misma forma en que se obtuvieron las funciones trigonométricas inversas, se restringirá el dominio de cosh y se definirá una nueva función como sigue:

$$F(x) = \cosh x \qquad x \geq 0$$

El dominio de esta función es el intervalo $[0, +\infty)$ y su contradominio es el intervalo $[1, +\infty)$. La figura 7 muestra la gráfica de F. Como F es continua y creciente en su dominio, entonces tiene una inversa, denominada *función coseno hiperbólico inversa.*



$y = \cosh x \quad x \geq 0$

FIGURA 7

5.9.7 Definición de la función coseno hiperbólico inverso

La **función coseno hiperbólico inversa**, denotada por $\cosh^{-1}$, está definida como sigue:

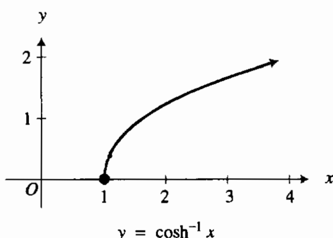
$$y = \cosh^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \cosh y \quad \text{y} \quad y \geq 0$$

El dominio de $\cosh^{-1}$ es el intervalo $[1, +\infty)$ y su contradominio es $[0, +\infty)$. La gráfica de $\cosh^{-1}$ se muestra en la figura 8. De la definición 5.9.7,

$$\cosh(\cosh^{-1} x) = x \qquad \text{si } x \geq 1$$

y

$$\cosh^{-1}(\cosh y) = y \qquad \text{si } y \geq 0$$



$y = \cosh^{-1} x$

FIGURA 8

Como con el seno hiperbólico, cualquier recta horizontal intersecta las gráficas de las funciones tangente y cotangente hiperbólicas a lo más en un punto. Esto se puede observar en la figura 3 para la tangente hiperbólica y en la figura 4 para la cotangente hiperbólica. Por tanto, estas dos funciones son uno a uno y tienen una inversa.

5.9.8 Definición de las funciones tangente y cotangente hiperbólicas inversas

Las **funciones tangente hiperbólica inversa** y **cotangente hiperbólica inversa**, denotadas respectivamente por $\tanh^{-1}$ y $\coth^{-1}$, están definidas como sigue:

$$y = \tanh^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \tanh y$$

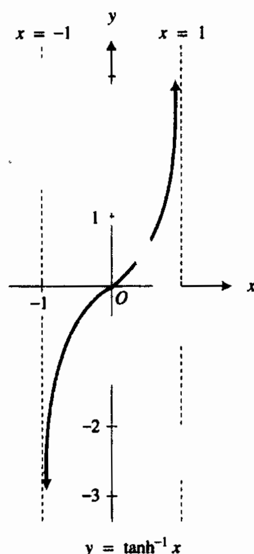


FIGURA 9

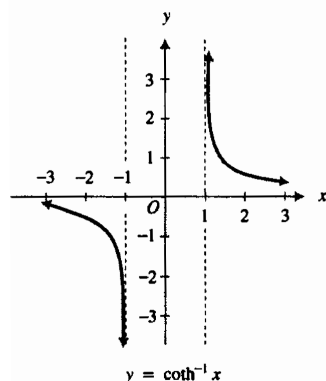


FIGURA 10

donde y es cualquier número real;

$$y = \coth^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \coth y$$

donde $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

El dominio de la función tangente hiperbólica inversa es el intervalo abierto $(-1, 1)$ y su contradominio es el conjunto R de los números reales. La gráfica de $\tanh^{-1}$ se presenta en la figura 9.

El dominio de la función cotangente hiperbólica inversa es $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y su contradominio es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. La figura 10 muestra la gráfica de $\coth^{-1}$.

No se tratarán las funciones *secante hiperbólica inversa* y *cosecante hiperbólica inversa* debido a que rara vez se emplean.

Las funciones hiperbólicas inversas se pueden expresar en términos de logaritmos naturales. Esto no debe causar sorpresa porque las funciones hiperbólicas se definieron en términos de la función exponencial natural, la inversa de la función logarítmica natural, Las siguientes son las expresiones para las cuatro funciones hiperbólicas inversas que se han tratado.

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \qquad x \text{ es un número real} \tag{1}$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad x \geq 1 \tag{2}$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} \qquad |x| < 1 \tag{3}$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1} \qquad |x| > 1 \tag{4}$$

Se demostrará la fórmula (1); las demostraciones de las otras tres fórmulas son semejantes. A fin de demostrar (1), considere

$$y = \operatorname{senh}^{-1} x$$

De la definición 5.9.6, $x = \operatorname{senh} y$. Si se aplica la definición 5.9.1 a senh y, se obtiene

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$2x = e^y - \frac{1}{e^y}$$

de donde se deduce

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

Al resolver esta ecuación para e^y mediante la fórmula cuadrática, se obtiene

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2}$$

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Se puede desechar el signo menos en esta ecuación debido a que $e^y > 0$ para toda y y $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$, para toda x. Por tanto,

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

y como $y = \operatorname{senh}^{-1} x$, se ha demostrado (1).

EJEMPLO 4 Exprese cada una de las siguientes expresiones en términos de un logaritmo natural: **(a)** $\operatorname{senh}^{-1} 2$; **(b)** $\tanh^{-1}(-\frac{4}{5})$.

Solución

(a) De (1),

$$\operatorname{senh}^{-1} 2 = \ln(2 + \sqrt{5})$$

(b) De (3),

$$\begin{aligned}\tanh^{-1}(-\tfrac{4}{5}) &= \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{5}} \\ &= \tfrac{1}{2}\ln 3^{-2} \\ &= -\ln 3\end{aligned}$$

A continuación se aplicará la ecuac ̀ (1) para calcular la derivada de la función seno hiperbólico inversa.

$$\begin{aligned}D_x(\operatorname{senh}^{-1} x) &= D_x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}(x + \sqrt{x^2 + 1})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\end{aligned}$$

Las fórmulas de las derivadas para las otras tres funciones hiperbólicas inversas se determinan de manera semejante a las fórmulas (2), (3) y (4). La obtención de sus derivadas se dejan como ejercicios (refiérase los ejercicios 37 a 39). A partir de estas fórmulas y de la regla de la cadena, se tiene el teorema siguiente.

5.9.9 Teorema

Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(\operatorname{senh}^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} D_x u \qquad (5)$$

$$D_x(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} D_x u \qquad u > 1 \qquad (6)$$

$$D_x(\tanh^{-1} u) = \frac{1}{1 - u^2} D_x u \qquad |u| < 1 \qquad (7)$$

$$D_x(\coth^{-1} u) = \frac{1}{1 - u^2} D_x u \qquad |u| > 1 \qquad (8)$$

EJEMPLO 5 Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ si

$$y = \tanh^{-1}(\cos 2x)$$

Solución

De (7),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1 - \cos^2 2x}(-2 \operatorname{sen} 2x) \\ &= \frac{-2 \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^2 2x}\end{aligned}$$

$$= \frac{-2}{\operatorname{sen} 2x}$$

$$= -2 \csc 2x$$

◀

La aplicación principal de las funciones hiperbólicas inversas está relacionada con la integración, donde se emplean las fórmulas del teorema siguiente.

5.9.10 Teorema

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \operatorname{senh}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$= \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C \quad \text{si } a > 0 \qquad \textbf{(9)}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$= \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C \quad \text{si } u > a > 0 \qquad \textbf{(10)}$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\tanh^{-1}\dfrac{u}{a} + C & \text{si } |u| < a \\ \dfrac{1}{a}\tanh^{-1}\dfrac{u}{a} + C & \text{si } |u| > a \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C \text{ si } u \neq a \text{ y } a \neq 0 \qquad \textbf{(11)}$$

Las fórmulas de este teorema pueden demostrarse mediante el cálculo de la derivada del miembro derecho y observando que se obtiene el integrando. Se mostrará el procedimiento al probar la fórmula (9).

Demostración de (9)

$$D_u\left(\operatorname{senh}^{-1} \frac{u}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2 + 1}} \cdot \frac{1}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{u^2 + a^2}} \cdot \frac{1}{a}$$

y como $a > 0$, $\sqrt{a^2} = a$; de modo que

$$D_u\left(\operatorname{senh}^{-1} \frac{u}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}$$

A fin de obtener la representación en términos de logaritmos naturales, se utiliza la fórmula (1), obteniéndose

$$\operatorname{senh}^{-1} \frac{u}{a} = \ln\left(\frac{u}{a} + \sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2 + 1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{u}{a} + \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{a}\right)$$

$$= \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) - \ln a$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}^{-1} \frac{u}{a} + C &= \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) - \ln a + C \\ &= \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C_1 \end{aligned}$$

donde $C_1 = C - \ln a$. ■

En el capítulo 7 se estudiarán otras técnicas para evaluar las integrales del teorema 5.9.10. Las fórmulas del teorema proporcionan representaciones alternativas de la integral en cuestión. Cuando se evalúa una integral en la que ocurre una de esas formas, la representación hiperbólica inversa puede ser más fácil de emplear y en ocasiones es menos engorrosa de escribir.

▶ **EJEMPLO 6** Evalúe

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}}$$

y escriba la respuesta en términos de un logaritmo natural.

Solución Se aplicará (9) después de completar el cuadrado.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 6x + 9) + 4}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x - 3)^2 + 4}} \\ &= \ln(x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 13}) + C \end{aligned}$$ ◀

▶ **EJEMPLO 7** Calcule el valor exacto de

$$\int_6^{10} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}}$$

en términos de funciones hiperbólicas inversas y apoye la respuesta utilizando NINT en la graficadora.

Solución De la fórmula (10),

$$\begin{aligned} \int_6^{10} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} &= \cosh^{-1} \frac{x}{5} \Big]_6^{10} \\ &= \cosh^{-1} 2 - \cosh^{-1} 1.2 \end{aligned}$$

En la graficadora se obtiene

$$\text{NINT}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 25}}, 6, 10\right) = 0.6945953932$$

Con el mismo número de dígitos significativos,

$$\cosh^{-1} 2 - \cosh^{-1} 1.2 = 0.6945953932$$

lo cual apoya la respuesta. ◀

Como se prometió, se concluye esta sección demostrando que los valores de función de senh y cosh tienen la misma relación con la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$ que el seno y el coseno con la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Este hecho justifica el nombre de funciones seno y coseno hiperbólicos, exactamente como el seno y el coseno reciben el nombre de *funciones circulares*.

Recuerde de sus cursos de matemáticas previas al Cálculo o de trigonometría (o consulte la sección A.9 del apéndice) que si t es la medida en radianes del ángulo formado por el eje x y el segmento de recta desde el origen hasta el punto $P\ (x, y)$ de la circunferencia unitaria, entonces

$$\operatorname{sen} t = y \text{ y } \cos t = x$$

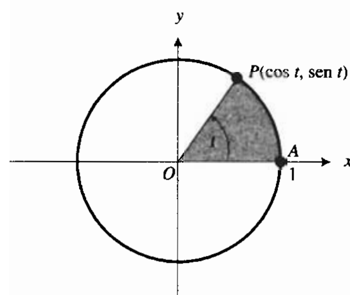


FIGURA 11

Refiérase a la figura 11. Ahora considere la figura 12 donde t es cualquier número real. El punto P (cosh t, senh t) está sobre la hipérbola unitaria porque

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$$

Observe que como cosh t nunca es menor que 1, todos los puntos (cosh t, senh t) están sobre la rama derecha de la hipérbola.

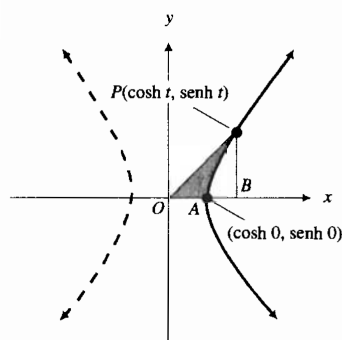


FIGURA 12

Ahora se mostrará cómo están relacionadas las áreas de las regiones sombreadas de las figuras 11 y 12. Como el área de un sector circular de radio r unidades y ángulo central de t radianes, está dada por $\frac{1}{2}r^2 t$ unidades cuadradas, el área del sector circular de la figura 11 es $\frac{1}{2}t$ unidades cuadradas, puesto que $r = 1$. El sector AOP de la figura 12 es la región limitada por el eje x, la recta OP y el arco AP de la hipérbola unitaria. Si A_1 unidades cuadradas es el área del sector AOP, A_2 unidades cuadradas es el área de la región OBP y A_3 unidades cuadradas es el área de la región ABP, entonces

$$A_1 = A_2 - A_3 \tag{12}$$

de la fórmula para determinar el área de un triángulo se tiene

$$A_2 = \tfrac{1}{2}\cosh t \operatorname{senh} t \tag{13}$$

El área A_3 se obtiene mediante integración:

$$\begin{aligned} A_3 &= \int_0^t \operatorname{senh} u \, d(\cosh u) \\ &= \int_0^t \operatorname{senh}^2 u \, du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t (\cosh 2u - 1)\, du \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{senh} 2u - \tfrac{1}{2}u \Big]_0^t \end{aligned}$$

Por tanto,

$$A_3 = \tfrac{1}{2}\cosh t \operatorname{senh} t - \tfrac{1}{2}t$$

Al sustituir de esta ecuación y (13) en (12), se tiene

$$\begin{aligned} A_1 &= \tfrac{1}{2}\cosh t \operatorname{senh} t - (\tfrac{1}{2}\cosh t \operatorname{senh} t - \tfrac{1}{2}t) \\ &= \tfrac{1}{2}t \end{aligned}$$

Así, la medida del área del sector circular AOP de la figura 11 y la medida del área del sector AOP de la figura 12 es, en cada caso, un medio del valor del parámetro asociado con el punto P. Para la circunferencia unitaria, el parámetro t es la medida en radianes del ángulo AOP. El parámetro t para la hipérbola no es interpretado como la medida de un ángulo; sin embargo, el término *radián hiperbólico* se emplea en ocasiones para referirse a t.

EJERCICIOS 5.9

En los ejercicios 1 a 6, (i) determine el valor de función exacto, y (ii) si el valor exacto no es un número racional, exprese el valor con cuatro dígitos significativos.

1. **(a)** senh 0 **(b)** cosh 0 **(c)** senh 1 **(d)** senh(−1)

2. **(a)** tanh 0 **(b)** sech 0 **(c)** cosh 1 **(d)** cosh(−1)

3. **(a)** tanh 2 **(b)** tanh(−2) **(c)** cosh(ln 2) **(d)** cosh(ln 0.5)

4. **(a)** coth(0.5) **(b)** coth(−0.5) **(c)** senh(ln 2) **(d)** senh(ln 0.5)

5. **(a)** sech 2 **(b)** sech(−2) **(c)** coth(−1) **(d)** csch(ln 1.5)

6. **(a)** csch 2 **(b)** csch(−2) **(c)** tanh 1 **(d)** sech(ln 1.5)

En los ejercicios 7 a 10, demuestre la identidad.

7. **(a)** $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
(b) $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$

8. **(a)** $1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x$
(b) $\operatorname{csch}(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

9. $\dfrac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x} = e^{2x}$ **10.** $\tanh(\ln x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

11. Demuestre: $D_x(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$.

12. Demuestre: **(a)** $D_x(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$;
(b) $D_x(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$.

En los ejercicios 13 a 18, calcule la derivada de la función.

13. **(a)** $f(x) = \operatorname{senh} x^2$ **(b)** $f(w) = \operatorname{sech}^2 4w$

14. **(a)** $f(x) = \tanh^3 \sqrt{x}$ **(b)** $g(t) = \cosh t^3$

15. **(a)** $h(x) = \coth \dfrac{1}{x}$ **(b)** $g(x) = \ln(\tanh x)$

16. **(a)** $f(y) = \coth(\ln y)$ **(b)** $h(x) = e^x \cosh x$

17. **(a)** $f(x) = \tan^{-1}(\operatorname{senh} 2x)$ **(b)** $g(x) = (\cosh x)^x$

18. **(a)** $g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\tanh x^2)$ **(b)** $f(x) = x^{\operatorname{senh} x}, x > 0$

En los ejercicios 19 a 24, evalúe la integral indefinida.

19. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^4 x \cosh x\, dx$ **20.** $\displaystyle\int x \cosh x^2 \operatorname{senh} x^2\, dx$

21. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{csch}^2 x^3\, dx$ **22.** $\displaystyle\int \coth^2 3x\, dx$

23. $\displaystyle\int \tanh 2x \ln(\cosh 2x)\, dx$ **24.** $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 x \tanh^2 x\, dx$

25. Demuestre: **(a)** $\int \tanh u\, du = \ln \cosh u + C$;
(b) $\int \operatorname{csch} u\, du = \ln \left|\tanh \frac{1}{2}u\right| + C$.

26. Demuestre: **(a)** $\int \coth u\, du = \ln |\operatorname{senh} u| + C$;
(b) $\int \operatorname{sech} u\, du = 2 \tan^{-1} e^u + C$.

En los ejercicios 27 a 32, evalúe con cuatro dígitos significativos el valor de la integral definida y apoye la respuesta utilizando NINT *en la graficadora.*

27. $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \operatorname{sech}^2 t\, dt$ **28.** $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \tanh z\, dz$

29. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\operatorname{senh} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ **30.** $\displaystyle\int_1^2 x \operatorname{sech}^2 x^2\, dx$

31. $\displaystyle\int_2^3 \operatorname{sech}^2 x \tanh^5 x\, dx$ **32.** $\displaystyle\int_0^2 \operatorname{senh}^3 x \cosh x\, dx$

En los ejercicios 33 a 36, determine el valor de función exacto.

33. **(a)** $\cosh^{-1} 1$ **(b)** $\tanh^{-1} \frac{1}{2}$

34. **(a)** $\operatorname{senh}^{-1} 1$ **(b)** $\coth^{-1} 2$

35. **(a)** $\operatorname{senh}^{-1} \frac{1}{2}$ **(b)** $\coth^{-1}(-2)$

36. **(a)** $\cosh^{-1} 2$ **(b)** $\tanh^{-1}(-\frac{1}{2})$

En los ejercicios 37 a 39, demuestre la fórmula.

37. Fórmula (6) **38.** Fórmula (7) **39.** Fórmula (8)

En los ejercicios 40 a 48, calcule la derivada de la función.

40. **(a)** $f(x) = \cosh^{-1} \frac{1}{3}x$ **(b)** $F(x) = \tanh^{-1} x^3$

41. **(a)** $g(x) = \operatorname{senh}^{-1} 4x$ **(b)** $G(x) = \coth^{-1} x^2$

42. **(a)** $h(w) = \coth^{-1}(3w + 1)$
(b) $f(x) = x^2 \operatorname{senh}^{-1} x^2$

43. **(a)** $f(x) = \cosh^{-1}(\tan x)$
(b) $g(x) = \tanh^{-1}(\cos x)$

44. **(a)** $g(x) = \tanh^{-1}(\operatorname{sen} 3x)$
(b) $F(x) = \coth^{-1}(3 \operatorname{sen} x)$

45. **(a)** $f(z) = (\coth^{-1} z^2)^3$ **(b)** $g(x) = \tanh^{-1}(\operatorname{sen} e^x)$

46. **(a)** $f(t) = \operatorname{senh}^{-1} e^{2t}$ **(b)** $h(x) = \cosh^{-1}(\ln x)$

47. $G(x) = x \operatorname{senh}^{-1} x - \sqrt{1 + x^2}$

48. $H(x) = \ln \sqrt{1 - x^2} - x \tanh^{-1} x$

En los ejercicios 49 a 54, exprese la integral indefinida en términos de una función hiperbólica inversa y como un logaritmo natural.

49. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$ **50.** $\displaystyle\int \frac{dx}{25 - x^2}$

51. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^4 - 1}} dx$ **52.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 + 9}}$

53. $\int \frac{dt}{4e^{-t} - e^t}$

54. $\int \frac{dw}{\sqrt{5 - e^{-2w}}}$

En los ejercicios 55 a 60, obtenga el valor exacto de la integral definida en términos de funciones hiperbólicas inversas y apoye la respuesta utilizando NINT *en la graficadora.*

55. $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$

56. $\int_{-4}^{-3} \frac{dx}{1 - x^2}$

57. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1 - x^2}$

58. $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{16 + x^2}}$

59. $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 12x - 5}}$

60. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x}}$

61. La figura 5 muestra la gráfica de la catenaria definida por

$$f(x) = a \cosh \frac{x}{a} \qquad a > 0$$

Confirme analíticamente que el punto más bajo está en $(0, a)$, la función f es decreciente cuando $x < 0$ y creciente cuando $x > 0$, y que la gráfica es cóncava hacia arriba en todo punto.

62. Demuestre que la función seno hiperbólico es continua y creciente en su dominio.

63. Calcule el área de la región limitada por la catenaria

$$y = 6 \cosh \frac{x}{6}$$

el eje x, el eje y y la recta $x = 6 \ln 6$.

64. Calcule el volumen del sólido de revolución generado si la región del ejercicio 63 se gira alrededor del eje x.

65. Una partícula se mueve sobre una recta de acuerdo con la ecuación de movimiento

$$s = e^{-t/2}(3 \operatorname{senh} t + 4 \cosh t)$$

donde s centímetros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Si v centímetros por segundo y a centímetros por segundo por segundo son la velocidad y la aceleración, respectivamente, de la partícula a los t segundos, **(a)** exprese v y a como funciones de t. **(b)** Demuestre que a es la suma de dos números, uno de los cuales es proporcional a s y el otro es proporcional a v.

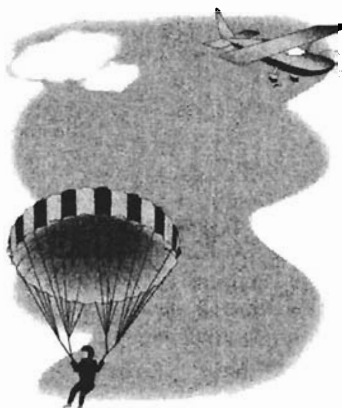
66. Una curva pasa por el punto $(0, a)$, $a > 0$, y la pendiente en cualquier punto es $\sqrt{y^2/a^2 - 1}$. Demuestre que la curva es una catenaria.

67. Una mujer con paracaídas salta desde un avión y, cuando su paracaídas se abre, su velocidad es de 200 pie/s. Si v pies por segundo es su velocidad a los t segundos después de que se abrió el paracaídas, entonces

$$\frac{324}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = 324 - v^2$$

donde g es la aceleración constante debida a la gravedad. Resuelva esta ecuación diferencial a fin de obtener

$$t = \frac{18}{g}\left(\coth^{-1} \frac{v}{18} - \coth^{-1} \frac{100}{9}\right)$$



68. La región limitada por la curva

$$y = (16 - x^2)^{-1/2}$$

el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = 3$ se gira alrededor del eje x. **(a)** Muestre que la medida exacta del volumen del sólido generado es

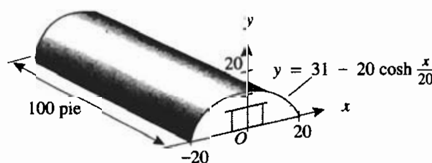
$$\tfrac{1}{4}\pi[\tanh^{-1}(\tfrac{3}{4}) - \tanh^{-1}(-\tfrac{1}{2})]$$

(b) Utilice una calculadora para aproximar el volumen con cuatro dígitos significativos.

69. La bodega mostrada en la figura adjunta tiene 100 pie de longitud y 40 pie de ancho, donde x y y se miden en pies. Una sección transversal del tejado tiene la forma de la región limitada superiormente por la catenaria invertida cuya ecuación es

$$y = 31 - 20 \cosh\left(\frac{x}{20}\right)$$

Determine el número de pies cúbicos del espacio para almacenamiento de la bodega.



70. Suponga que una partícula se mueve sobre una recta de modo que s metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Explique por qué el movimiento es armónico simple si la ecuación de movimiento es

$$s = A \operatorname{sen} kt + B \cos kt$$

pero no es armónico si

$$s = A \operatorname{senh} kt + B \cosh kt$$

donde A, B y k son constantes.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 5

▶ SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 5

1. Defina *función uno a uno* y establezca un criterio geométrico para determinar si una función es uno a uno. Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.
2. Enuncie un teorema que proporciona un criterio que en ocasiones pueda aplicarse para demostrar analíticamente que una función es uno a uno. Invente un ejemplo y muestre cómo se aplica el criterio.
3. Defina la *inversa de una función*. Invente un ejemplo de una función algebraica y su inversa.
4. Enuncie un teorema que pueda emplearse para determinar analíticamente si dos funciones son inversas una de la otra. Aplique el teorema a las funciones de la respuesta de la sugerencia 3.
5. Si se sabe que una función f tiene una inversa, ¿cómo puede obtenerse, en ocasiones, $f^{-1}(x)$ a partir de $f(x)$? ¿Por qué no siempre es posible determinar $f^{-1}(x)$ a partir de $f(x)$? Invente dos ejemplos de una función f que tenga una inversa f^{-1}: una donde pueda determinar $f^{-1}(x)$ a partir de $f(x)$ y otra donde no pueda.
6. Enuncie una propiedad geométrica satisfecha por las gráficas de una función y su inversa. ¿Cómo se puede dibujar la gráfica de la inversa de una función a partir de la gráfica de la función? ¿Cómo puede trazar en el mismo rectángulo de inspección las gráficas de una función y su inversa si se conoce $f(x)$ pero no $f^{-1}(x)$?
7. Enuncie un teorema que relacione las derivadas de una función y de su inversa. Invente un ejemplo que ilustre el teorema.
8. Defina la *función lagarítmica* e indique su dominio y su contradominio.
9. Enuncie los teoremas concernientes a la función logarítmica natural que corresponden a las propiedades de los logaritmos estudiadas en los cursos de álgebra.
10. Describa en palabras únicamente (sin figuras) la gráfica de la función logarítmica natural.
11. ¿Qué se entiende por *diferenciación logarítmica*? Invente un ejemplo donde se emplee diferenciación logarítmica.
12. Establezca la fórmula que proporciona $\int u^n \, du$ para cualquier número racional n.
13. Enuncie cuatro teoremas que impliquen integrales indefinidas de funciones trigonométricas que tengan como resultado una función logarítmica natural.
14. Defina la *función exponencial natural* y determine su dominio y su contradominio.
15. Defina lo que significa a^x si a es cualquier número real positivo y x es cualquier número real. Invente un ejemplo en el que se aplique la definición donde x es irracional.
16. Defina el número e. Muestre que e se emplea para calcular un valor aproximado en el ejemplo de la sugerencia 15.
17. ¿Cuál es la derivada de la función exponencial natural exp? ¿Cuál es la integral indefinida de exp? ¿Cuál es la función más general cuya derivada es ella misma? ¿Por qué es ésta la única función que tiene estas propiedades?
18. Describa en palabras únicamente (sin figuras) la gráfica de la función exponencial natural.
19. Exprese el número e como un límite. ¿Puede emplearse este límite para definir el número e? Dé una razón para su respuesta.
20. Enuncie los teoremas concernientes a la función exponencial que corresponden a las propiedades de los exponentes estudiadas en los cursos de álgebra.
21. Defina la función logarítmica de base a y determine su dominio y su contradominio.
22. ¿Cuáles son las fórmulas para la derivada y la integral indefinida de a^x? Invente un ejemplo que muestre el cálculo de $f'(x)$ si $f(x) = a^{g(x)}$, donde $a > 0$ y $g(x)$ es una función trascendente. Invente un ejemplo que muestre el cálculo de $\int f(x)\, dx$ si $f(x) = a^{h(x)}h'(x)$ donde $a > 0$, y h es una función trascendente.
23. Describa en palabras únicamente (sin figuras) la gráfica de la función exponencial de base a: (i) si $a > 1$; (ii) si $0 < a < 1$.
24. Describa en palabras únicamente (sin figuras) la gráfica de la función logarítmica de base a: (i) si $a > 1$; (ii) si $0 < a < 1$.
25. Escriba una ecuación que relacione $\log_a x$ y $\ln x$. Establezca dos fórmulas para la derivada de $\log_a x$, una que implique $\log_a e$ y la otra que contenga $\ln a$. Invente un ejemplo que muestre el cálculo de $f'(x)$ si $f(x) = \log_a g(x)$, donde g es una función trascendente.
26. Describa cómo se calcula la derivada de una función cuyo valor es una variable elevada a una potencia variable. Invente un ejemplo que muestre el cálculo de $f'(x)$ si $f(x) = g(x)^{h(x)}$ donde g es una función polinomial y h es una función trascendente.
27. ¿Cuáles son las leyes de *crecimiento natural* y de *decrecimiento natural*? En su respuesta incluya la ecuación diferencial que proporciona estas leyes.
28. Proporcione un ejemplo de la ley de crecimiento natural en biología y en economía.
29. Dé un ejemplo de la ley de decrecimiento natural en química y en finanzas o administración.
30. ¿Qué es la *semivida* (*vida media*) de una sustancia? Proporcione un ejemplo.

31. Defina una función que describa crecimiento exponencial y una que describa decrecimiento exponencial.

32. Defina una función que describa *crecimiento limitado*. Dé un ejemplo de crecimiento limitado en finanzas o administración.

33. ¿Qué es la *ley de enfriamiento* de Newton? Invente un ejemplo que muestre cómo se aplica la ley de enfriamiento de Newton.

34. ¿Qué es la *función normal estandarizada de densidad de probabilidad*? ¿Cómo se calcula la probabilidad de que una elección aleatoria de la variable independiente esté en el intervalo cerrado $[a, b]$?

35. Defina la función *seno inversa*, determine su dominio, su contradominio y dibuje su gráfica.

36. Defina la función *coseno inversa*, determine su dominio, su contradominio y dibuje su gráfica.

37. Establezca una identidad que relacione a las funciones seno inversa y coseno inversa.

38. Defina la función *tangente inversa*, determine su dominio, su contradominio y dibuje su gráfica.

39. Defina la función *cotangente inversa* en términos de la función tangente inversa mediante una identidad similar a la de la respuesta de la sugerencia 37. Determine el dominio y contradominio de la función cotangente inversa.

40. Defina la función *secante inversa*, determine su dominio, su contradominio y dibuje su gráfica.

41. Defina la función cosecante inversa en términos de la función secante inversa mediante una identidad similar a la de la respuesta de la sugerencia 37. Determine el dominio y contradominio de la función cosecante inversa.

42. Establezca las fórmulas que proporcionan las derivadas de las funciones seno inversa y coseno inversa. ¿Cómo están relacionadas? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

43. Establezca las fórmulas que proporcionan las derivadas de las funciones tangente inversa y cotangente inversa. ¿Cómo están relacionadas? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

44. Establezca las fórmulas que proporcionan las derivadas de las funciones secante inversa y cosecante inversa. ¿Cómo están relacionadas? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

45. Invente un ejemplo de una integral indefinida que produzca una función seno inversa.

46. Invente un ejemplo de una integral indefinida que produzca una función tangente inversa.

47. Invente un ejemplo de una integral indefinida que produzca una función secante inversa.

48. Defina las funciones *seno hiperbólico* y *coseno hiperbólico* y establezca el dominio y contradominio de cada una. Dibuje sus gráficas.

49. Defina las funciones *tangente hiperbólica*, *cotangente hiperbólica*, *secante hiperbólica* y *cosecante hiperbólica* en términos de las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico, y determine el dominio y contradominio de cada una.

50. Escriba las fórmulas de las derivadas de cada una de las seis funciones hiperbólicas y las fórmulas correspondientes de las integrales indefinidas.

51. ¿Qué es una *catenaria* y cuál es su ecuación?

52. Defina las funciones *seno hiperbólico inversa*, *coseno hiperbólico inversa*, *tangente hiperbólica inversa* y *cotangente hiperbólica inversa* y establezca el dominio y contradominio de cada una. Dibuje sus gráficas.

53. Exprese las cuatro funciones hiperbólicas inversas mecionadas en la sugerencia 52 en términos de logaritmos naturales.

54. Escriba las fórmulas de las derivadas de las cuatro funciones hiperbólicas inversas, mencionadas en la sugerencia 52.

55. ¿Cómo se utilizan las funciones hiperbólicas inversas, en ocasiones, para disminuir los cálculos en la integración? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

▶ EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 5

En los ejercicios 1 a 6, determine si la función tiene una inversa. Si la inversa existe, haga lo siguiente: (a) determínela y establezca su dominio y contradominio; (b) trace las gráficas de la función y de su inversa en el mismo rectángulo de inspección. Si la función no tiene inversa, apoye este hecho gráficamente verificando que una recta horizontal intersecta la gráfica de la función en más de un punto.

1. $f(x) = x^3 - 4$
2. $f(x) = 2\sqrt[3]{x} - 1$
3. $f(x) = 9 - x^2$
4. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
5. $f(x) = \dfrac{3x - 4}{x}$
6. $f(x) = |2x - 3|$

En los ejercicios 7 y 8, (a) demuestre que la función f tiene una inversa, (b) obtenga $f^{-1}(x)$, y (c) verifique las ecuaciones del teorema 5.1.4 para f y f^{-1}.

7. $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$
8. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{2x + 1}$

En los ejercicios 9 a 12, calcule $(f^{-1})'(d)$.

9. $f(x) = x^2 - 6x + 8, x \geq 3; d = 3$
10. $f(x) = \sqrt{3x + 4}; d = 5$
11. $f(x) = 8x^3 + 6x; d = 4$
12. $f(x) = x^5 + x - 22; d = 12$

En los ejercicios 13 a 30, derive la función y simplifique el resultado.

13. **(a)** $f(x) = \ln(\cos 3x)$ **(b)** $F(x) = \ln(x^2 + 1)^2$
14. **(a)** $g(x) = \cos(3 \ln x)$ **(b)** $G(x) = (\ln x^2)^2$
15. **(a)** $g(t) = \text{sen}\, e^{4t}$ **(b)** $G(t) = 2^{\tan t}$

16. (a) $f(w) = e^{\operatorname{sen} 4w}$ (b) $F(w) = \tan 2^w$
17. (a) $f(x) = \tan^{-1} e^x$ (b) $g(x) = e^{\cot^{-1} x}$
18. (a) $F(x) = \cos^{-1} 3^x$ (b) $G(x) = 3^{\operatorname{sen}^{-1} x}$
19. (a) $f(w) = \operatorname{senh}^3 2w$ (b) $F(w) = \cosh 2w^3$
20. (a) $g(t) = \tanh(\ln t)$ (b) $G(t) = \ln(\coth t)$
21. (a) $F(x) = \operatorname{sech}(\tan x)$ (b) $G(x) = \tanh(\sec x)$
22. (a) $f(x) = \operatorname{senh}^{-1} x^2$ (b) $g(x) = \tanh^{-1} 2x$
23. $f(x) = \log_{10}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$ 24. $g(x) = \ln \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}$
25. $g(t) = (\operatorname{sen} t)^{2t}, \operatorname{sen} t > 0$ 26. $f(t) = t^{3/\ln t}$
27. $F(x) = \cosh^{-1} \sqrt{x}$
28. $G(x) = \sec^{-1} \sqrt{x^2+1}$
29. $f(x) = \cos^{-1}(\tanh 2x)$ 30. $g(x) = \coth^{-1}(\csc x)$

En los ejercicios 31 y 32, obtenga $\dfrac{dy}{dx}$ *mediante diferenciación logarítmica.*

31. $y = x^3(x^2+1)^2(x-1)^4$ 32. $y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt[3]{x^6+8}}$

En los ejercicios 33 y 34, obtenga en una calculadora el valor de a^x para los valores dados de a y x, aplicando primero la definición de exponente real. Apoye la respuesta calculando el valor directamente.

33. (a) $a = 3, x = \sqrt{2}$ (b) $a = 2, x = \pi$
34. (a) $a = 7, x = e$ (b) $a = e, x = \pi$

En los ejercicios 35 a 48 evalúe la integral indefinida.

35. $\displaystyle\int \frac{3e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx$ 36. $\displaystyle\int e^{x^2-2x}(x-1)\,dx$
37. $\displaystyle\int (e^{3x}+2^{3x})\,dx$ 38. $\displaystyle\int \frac{10^{\ln x^2}}{x}\,dx$
39. $\displaystyle\int e^x 2^{e^x}\,dx$ 40. $\displaystyle\int \frac{10^x+1}{10^x-1}\,dx$
41. $\displaystyle\int \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ 42. $\displaystyle\int \frac{dy}{9e^y+e^{-y}}$
43. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$ 44. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$
45. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-8}}$ 46. $\displaystyle\int x \coth \tfrac{1}{2}x^2\,dx$
47. $\displaystyle\int \tanh^2 3w\,dw$ 48. $\displaystyle\int \frac{\cosh t}{\sqrt{\operatorname{senh} t}}\,dt$

En los ejercicios 49 a 58, evalúe la integral definida y apoye la respuesta utilizando NINT *en la graficadora.*

49. $\displaystyle\int_0^2 x^2 e^{x^3}\,dx$ 50. $\displaystyle\int_0^1 (e^{2x}+1)^2\,dx$
51. $\displaystyle\int_1^8 \frac{x^{1/3}}{x^{4/3}+4}\,dx$ 52. $\displaystyle\int_{1/3}^{1/2} \frac{4x^{-3}+2}{x^{-2}-x}\,dx$
53. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x-5}\,dx$ 54. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)}\,dx$
55. $\displaystyle\int_1^2 \frac{t+2}{\sqrt{4t-t^2}}\,dt$ 56. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x+6}{x^2+2x+5}\,dx$
57. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\cosh^2 y - 1}\,dy$ 58. $\displaystyle\int_0^2 \operatorname{sech}^2 \tfrac{1}{2}x\,dx$

59. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ si $ye^x + xe^y + x + y = 0$
60. Demuestre que $\cosh(\ln x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$
61. Exprese la cantidad en términos de un logaritmo natural: (a) $\cosh^{-1} 2$; (b) $\tanh^{-1} \frac{1}{4}$.
62. Demuestre: (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \coth x = 1$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{csch} x = 0$.
63. (a) Trace en el mismo rectángulo de inspección la gráfica de $y = x^{x-1}$ y la recta tangente en el punto (2, 2). (b) Obtenga una ecuación de la recta tangente.
64. Utilice diferenciales para calcular un valor aproximado con tres cifras decimales de $\log_{10} 100\,937$. Emplee el hecho de que $\log_{10} e = 0.43429$ con aproximación de cinco cifras decimales. Apoye la respuesta con la calculadora.
65. Una partícula se mueve sobre una recta, donde s pies es la distancia dirigida de la partícula desde el origen, v pies por segundo es su velocidad, y a pies por segundo por segundo es su aceleración a los t segundos. Si $a = e^t + e^{-t}$, $v = 1$ y $s = 2$ cuando $t = 0$, obtenga v y s en términos de t.
66. El área de la región limitada por la curva $y = e^{-x}$, los ejes coordenados y la recta $x = b$ $(b > 0)$ es una función de b. Si f es esta función, obtenga $f(b)$. También determine el límite $\lim\limits_{b\to+\infty} f(b)$.
67. El volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región del ejercicio 66 alrededor del eje x es una función de b. Si g es esta función, obtenga $g(b)$. También determine el límite $\lim\limits_{b\to+\infty} f(b)$.
68. Demuestre que si un rectángulo tiene su base sobre el eje x y dos de sus vértices están sobre la curva $y = e^{-x^2}$, entonces el rectángulo tendrá el área máxima posible si los dos vértices están en los puntos de inflexión de la gráfica.
69. Sea $f(x) = \ln|x|$ y $x < 0$. Demuestre que f tiene una función inversa. Si g es la función inversa, determine $g(x)$ y el dominio de g.
70. Demuestre que si $x < 1$, entonces $\ln x < x$. *Sugerencia:* Sea $f(x) = x - \ln x$, y demuestre que f es decreciente en el intervalo (0, 1) y calcule $f(1)$.
71. Cuando un gas se expande o se comprime adiabáticamente (sin ganar o perder calor), entonces la tasa de variación de la presión con respecto al volumen, varía directamente a la presión e inversamente al volumen. Si la presión es p libras por pulgada cuadrada cuando el volumen es v pulgadas cúbicas, y la presión y volumen iniciales son p_0 libras por pulgada cuadrada y v_0 pulgadas cúbicas, demuestre que $pv^k = p_0 v_0^{\,k}$.

72. Calcule el volumen del sólido de revolución generado si la región limitada por la curva $y = 2^{-x}$ y las rectas $x = 1$ y $x = 4$ se gira alrededor del eje x.

73. La semivida del cesio 137 es de 30 de años, su tasa de decrecimiento (desintegración) es proporcional a la cantidad presente en cualquier tiempo, y se tienen actualmente 65 mg de cesio.
(**a**) Si se tendrán y miligramos de cesio dentro de t años a partir de ahora, exprese y como una función de t.
(**b**) Estime en la graficadora dentro de cuántos años se tendrán 10 mg de cesio.
(**c**) Confirme analíticamente la estimación del inciso (b).

74. La tasa de crecimiento natural de una población de cierta ciudad es proporcional a la población, y se espera que ésta se duplique en 60 años. La población actualmente es de 120 000.
(**a**) Si y es el número de individuos de la población esperada dentro de t años a partir de ahora, exprese y como una función de t.
(**b**) Estime en la graficadora dentro de cuántos años se espera que la población sea de 150 000.
(**c**) Estime en la graficadora la población esperada dentro de 20 años a partir de ahora.
(**d**) Confirme analíticamente las estimaciones de los incisos (b) y (c).

75. Una persona que estudia lenguas extranjeras tiene que memorizar 50 verbos. La tasa a la que la persona puede memorizar esos verbos es proporcional al número de verbos que le restan por memorizar; esto es, si la persona memoriza y verbos en t minutos, entonces

$$\frac{dy}{dt} = k(50 - y)$$

donde k es una constante positiva y $y < 50$ para toda $t \geq 0$. Suponga que inicialmente no se ha memorizado ningún verbo y que a los 30 min se han memorizado 20 verbos.
(**a**) Exprese y como una función de t.
(**b**) Trace la gráfica de la función del inciso (a) y la asíntota horizontal de la gráfica.
(**c**) Estime en la graficadora cuántos verbos memorizará la persona en 1 hora.
(**d**) Estime en la graficadora cuánto tiempo pasará hasta que la persona tenga un verbo por memorizar.
(**e**) Confirme analíticamente las estimaciones de los incisos (c) y (d).

En los ejercicios 76 a 85, defina todas las variables precisamente como números. Utilice la variable t para representar el tiempo y defina las otras variables en términos de t. No olvide escribir una conclusión.

76. El interés de una cuenta de ahorro se calcula al 10% anual compuesto continuamente. Si una persona desea tener \$1 000 en la cuenta al final de un año realizando sólo un depósito ahora, ¿cuál debe ser la cantidad del depósito?

77. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que una inversión se duplique si el interés se paga a una tasa de 8% anual compuesto continuamente?

78. La carga eléctrica sobre una superficie esférica se pierde a una tasa proporcional a la carga. Inicialmente la carga eléctrica fue de 8 coulombs y en 15 min se perdió un cuarto de ella. ¿Dentro de cuánto tiempo se tendrán únicamente 2 coulombs?

79. La tasa de crecimiento de cierto cultivo de bacterias es proporcional al número de baterias presentes, y el número se duplica en 20 min. Si al final de una hora se tuvieron 1 500 000 bacterias, ¿cuántas baterias se tuvieron inicialmente?

80. Refiérase al ejercicio 21 de la sección 5.6. Un arqueólogo descubrió un insecto preservado dentro de ámbar transparente, el cual es una resina endurecida de un árbol, y la cantidad de ^{14}C presente en el insecto se determinó como el 2% de su cantidad original. Utilice el hecho de que la semivida del ^{14}C es de 5 730 años, para determinar la edad del insecto hasta el tiempo de su descubrimiento.

81. La tasa de decrecimiento (desintegración) de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia presente. Si un medio de una cantidad dada de la sustancia se desintegra en 1900 años, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que el 95% de la cantidad se desintegre?

82. Si la población de cierto país se duplica en 25 años, ¿a qué porcentaje anual está creciendo?

83. Un tanque contiene 60 gal de agua salada con 120 lb de sal disuelta. Se introduce al tanque agua salada con 3 lb de sal por galón a una tasa de 2 gal/min, y la mezcla, que se mantiene uniforme mediante agitación, sale del tanque a la misma tasa. ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que el tanque contenga 135 lb de sal?.

84. Un tanque contiene agua simple, y se introduce al tanque salmuera que contiene 2 kg de sal por litro de agua a una tasa de 3 L/min. Si la mezcla, que se mantiene uniforme mediante agitación, sale del tanque a la misma tasa, ¿cuántos kilogramos de sal contendrá el tanque al final de 30 min?

85. Utilice la ley de enfriamiento de Newton para determinar la temperatura actual de un cuerpo rodeado de aire a una temperatura de 40° si hace 30 min la temperatura del cuerpo fue de 150° y hace 10 min fue de 90°.

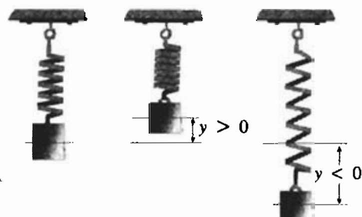
86. Determine el punto de la gráfica de $f(x) = e^x$ para el cual la recta tangente a la gráfica en ese punto pasa por el origen.

87. En un circuito eléctrico la fuerza electromotriz es E volts a los t segundos, donde $E = 20 \cos 120\pi t$.
(**a**) Resuelva la ecuación para t. Utilice la ecuación del inciso (a) para determinar el menor valor positivo de t para el cual la fuerza electromotriz es (**b**) 10 volts; (**c**) 5 volts; (**d**) −10 volts; (**e**) −5 volts.

88. Un cuerpo está suspendido de un resorte y vibra verticalmente de acuerdo con la ecuación

$$y = 4 \operatorname{sen} 2\pi(t + \tfrac{1}{6})$$

donde y centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central t segundos después de iniciado el movimiento, y el sentido positivo se considera hacia arriba. (**a**) Resuelva la ecuación para t. Utilice la ecuación del inciso (a) para determinar el menor valor positivo de t para el cual el desplazamiento del cuerpo sobre su posición central es (**b**) 2 cm, y (**c**) 3 cm.



89. Calcule el área de la región limitada por la recta $x = 2\sqrt{2}$, la curva $y = 9/\sqrt{9 - x^2}$, y los dos ejes coordenados.

90. Obtenga el volumen del sólido de revolución generado cuando la región limitada por la curva $y = \sqrt{\operatorname{senh} x}$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = \ln 2$, se gira alrededor del eje x.

91. Un faro se encuentra a $\frac{1}{2}$ km de un camino recto y mantiene su luz fija en un automóvil que viaja a una velocidad constante de 60 km/h. Calcule la tasa de variación (velocidad) a la cual el rayo de luz cambia de dirección (**a**) cuando el automóvil está en el punto más cercano al faro, y (**b**) cuando el automóvil está a $\frac{1}{2}$ km camino abajo de este punto.

92. Un helicóptero despega del suelo en un punto a 800 pie de un observador y se eleva verticalmente a 25 pie/s. Calcule la tasa de variación (derivada) de la medida del ángulo de elevación de la nave respecto al observador, cuando el helicóptero está a 600 pie del suelo.

93. Un avión vuela a una velocidad de 300 mi/h a una altura de 4 mi. Si un observador se halla en tierra, determine la tasa de variación de la medida del ángulo de elevación del avión respecto al observador, cuando el avión está directamente sobre un punto en tierra a 2 mi del observador.

94. Un cuadro de 5 pie de altura está colocado en una pared con su base a 7 pie sobre el nivel de los ojos de un observador. Si el observador se aproxima a la pared a una tasa de 3 pie/s, ¿qué tan rápido cambia la medida del ángulo subtendido por el cuadro en los ojos del observador cuando el observador está a 10 pie de la pared?

95. Dos puntos A y B son diametralmente opuestos uno del otro en las orillas de un lago circular de 1 km de diámetro. Un hombre desea ir del punto A al punto B, y puede remar a una velocidad 1.5 km/h y caminar a una velocidad de 5 km/h. Determine el tiempo mínimo que puede tomarle al hombre ir del punto A al punto B.

96. Resuelva el ejercicio 95 si las velocidades al remar y caminar son, respectivamente, 2 km/h y 3 km/h.

97. Demuestre, empleando la definición de derivada, que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e$$

(*Nota:* compare con el ejercicio 57 de la sección 5.2).

98. Demuestre sin emplear la definición de derivada que

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Sugerencia: sea $y = a^x - 1$ y exprese $(a^x - 1)/x$ como una función de y, digamos $g(y)$. Después demuestre que $y \to 0$ conforme $x \to 0$, y obtenga el límite $\lim_{y\to 0} g(y)$.

99. Utilice los resultados de los ejercicios 97 y 98 para demostrar que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^b - 1}{x - 1} = b$$

Sugerencia: escriba

$$\frac{x^b - 1}{x - 1} = \frac{e^{b \ln x} - 1}{b \ln x} \cdot \frac{b \ln x}{x - 1}$$

Después considere $s = b \ln x$ y $t = x - 1$.

100. Demuestre empleando la definición de derivada que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$$

101. Si el dominio de f es el conjunto R de los números reales y $f'(x) = cf(x)$ para toda x, donde c es una constante, demuestre que existe una constante k para la cual $f(x) = ke^{cx}$ para toda x. *Sugerencia:* considere la función g para la cual $g(x) = f(x)e^{-cx}$, y determine $g'(x)$.

102. Demuestre que

$$D_x^n(\ln x) = (-1)^{n-1} \frac{(n - 1)!}{x^n}$$

Sugerencia: utilice inducción matemática.

103. Calcule $\int_0^t e^{-|x|}\, dx$ si t es cualquier número real.

104. Demuestre que si $x > 0$, y $\int_1^x t^{h-1}\, dt = 1$, entonces

$$\lim_{h\to 0} x = \lim_{h\to 0} (1 + h)^{1/h}$$

105. La gráfica de la ecuación

$$x = a \operatorname{senh}^{-1} \sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

se denomina *tractriz*. Demuestre que la pendiente de la curva en cualquier punto (x, y) es $-y/\sqrt{a^2 - y^2}$.

106. Realice el ejercicio 51 de los ejercicios de repaso del capítulo 4 evaluando cada integral.

107. El *gudermanniano*, llamado así en honor al matemático alemán **Christoph Gudermann** (1798-1852), es la función definida por

$$\operatorname{gd} x = \tan^{-1}(\operatorname{senh} x)$$

Demuestre que $D_x(\operatorname{gd} x) = \operatorname{sech} x$.

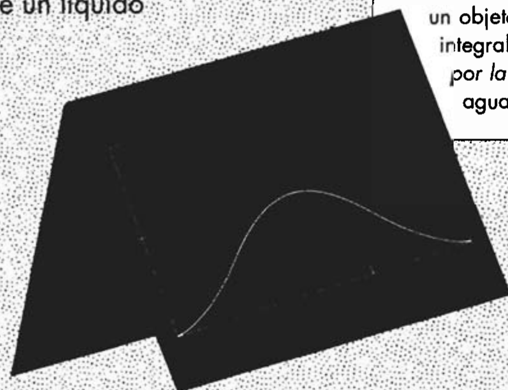
Aplicaciones adicionales de la integral definida

Capítulo 6

VISIÓN PRELIMINAR

El poder del Cálculo Integral se ha mostrado en geometría por sus aplicaciones al cálculo del área de una región plana, del volumen de un sólido de revolución y del volumen de un sólido que tiene secciones planas paralelas conocidas. En la sección 6.1 se presenta otra aplicación geométrica: el cálculo de la *longitud de arco* de la gráfica de una función entre dos puntos.

Las aplicaciones de la integración a la física e ingeniería se muestran en las otras cuatro secciones. En la sección 6.2 se determina el *centro de masa de una barra* y en la sección 6.3 se estudia el *centro de masa de una lámina*. En la sección 6.4 se calcula el trabajo realizado por una fuerza variable que se aplica sobre un objeto, mientras que en la sección 6.5 se aplica la integral definida para determinar la *fuerza ejercida por la presión de un líquido*, tal como la presión del agua sobre las paredes de un envase.



6.1 LONGITUD DE ARCO DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

En el estudio de áreas y volúmenes, se emplearon las palabras "medida del área" y "medida del volumen" para indicar un número sin incluir alguna unidad de medición. Al estudiar la *longitud de arco* se empleará la palabra "longitud" en lugar de las palabras "medida de la longitud". Así, la longitud de arco es un número sin unidades de medición.

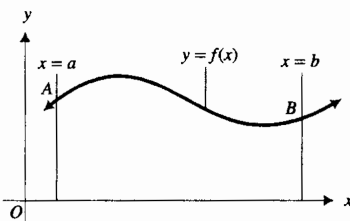


FIGURA 1

Sea f la función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y considere la gráfica de esta función definida por la ecuación $y = f(x)$, la cual se muestra en la figura 1. La porción de la curva desde el punto $A(a, f(a))$ hasta el punto $B(b, f(b))$ de denomina **arco**. Se desea asignar un número a lo que intuitivamente se considera como la longitud de dicho arco. Si el arco es un segmento de recta desde el punto (x_1, y_1) hasta el punto (x_2, y_2), se sabe por la fórmula de la distancia entre dos puntos que su longitud está dada por $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Esta fórmula se utiliza para definir la longitud de un arco en general. Recuerde de geometría que la longitud de la circunferencia está definida como el límite de los perímetros de polígonos regulares inscritos en la circunferencia. Para otras curvas se procede en forma semejante.

Sea Δ una partición del intervalo cerrado $[a, b]$ formada al dividir el intervalo en n subintervalos eligiendo cualesquiera $n - 1$ números intermedios entre a y b. Sea $x_0 = a$ y $x_n = b$, y $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$, lo números intermedios de modo que $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$. Así, el i-ésimo subintervalo es $[x_{i-1}, x_n]$, y su longitud, denotada por $\Delta_i x$, es $x_i - x_{i-1}$, donde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Entonces, si $\|\Delta\|$ es la norma de la partición Δ, cada $\Delta_i x \leq \|\Delta\|$.

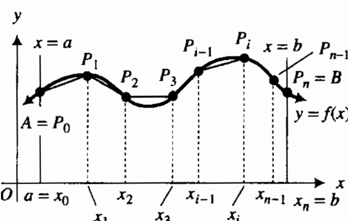


FIGURA 2

Asociado con cada punto $(x_i, 0)$ del eje x hay un punto $P_i(x_i, f(x_i))$ de la curva. Dibuje un segmento de recta desde cada punto P_{i-1} al siguiente punto P_i, como se muestra en la figura 2. La longitud del segmento de recta de P_{i-1} a P_i se denota por $|\overline{P_{i-1}P_i}|$ y está determinada por la fórmula de la distancia

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \tag{1}$$

La suma de las longitudes de los segmentos es

$$|\overline{P_0P_1}| + |\overline{P_1P_2}| + |\overline{P_2P_3}| + \ldots + |\overline{P_{i-1}P_i}| + \ldots + |\overline{P_{n-1}P_n}|$$

la cual puede escribirse con la notación sigma como

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| \tag{2}$$

Parece razonable que si n es suficientemente grande, entonces la suma de (2) se "acercará" a lo que intuitivamente se considera como la longitud del arco AB. Así, se define la longitud de arco como el límite de la suma (2) conforme la norma de Δ se aproxima a cero, en tal caso, n crece sin límite. Por tanto, se tiene la definición siguiente.

6.1.1 Definición de la longitud de arco de la gráfica de una función

Suponga que la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Además considere que existe un número L que tiene la siguiente propiedad:

Para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para cada partición Δ del intervalo $[a, b]$ es cierto que

si $\|\Delta\| < \delta$ entonces $\left|\sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| - L\right| < \epsilon$

Entonces se escribe

$$L = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| \tag{3}$$

y L se denomina la **longitud de arco** de la curva $y = f(x)$ desde el punto $A(a, f(a))$ hasta el punto $B(b, f(b))$.

Si el límite de (3) existe, entonces se dice que el arco es **rectificable**.

A continuación se deducirá una fórmula para determinar la longitud L de un arco que es rectificable. En la deducción se requiere que la derivada de f sea continua en el intervalo $[a, b]$; a la función que cumple esta condición se le llama **lisa** (o **suave**) en $[a, b]$.

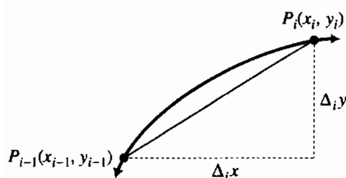


FIGURA 3

Refiérase a la figura 3. Si P_{i-1} tiene coordenadas (x_{i-1}, y_{i-1}) y P_i tiene coordenadas (x_i, y_i), entonces la longitud de la cuerda $P_{i-1}P_i$ está dada por la fórmula (1).

Al considerar $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ y $y_i - y_{i-1} = \Delta_i y$, se tiene

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2}$$

o, equivalentemente, como $\Delta_i x \neq 0$,

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x}\right)^2}\,(\Delta_i x) \tag{4}$$

Como se pidió que f' fuese continua en $[a, b]$, entonces f satisface la hipótesis del teorema del valor medio (3.3.2); de modo que existe un número z_i en el intervalo abierto (x_{i-1}, x_i) tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(z_i)(x_i - x_{i-1})$$

Debido a que $\Delta_i y = f(x_i) - f(x_{i-1})$ y $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, de la ecuación anterior se tiene

$$\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x} = f'(z_i)$$

Si se sustituye de esta ecuación en (4) se obtiene

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2}\,\Delta_i x$$

Para cada i de 1 a n existe una ecuación de esta forma, de modo que

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2}\,\Delta_i x$$

Al tomar el límite en los dos miembros de esta ecuación conforme $\|\Delta\|$ se aproxima a cero se obtiene

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2}\,\Delta_i x \tag{5}$$

si este límite existe.

A fin de demostrar que el límite del miembro derecho de (5) existe, sea F la función definida por

$$F(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

Como se pidió que f' fuese continua en $[a, b]$, entonces F es continua en $[a, b]$. Puesto que $x_{i-1} < z_i < x_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, en el miembro derecho de (5) se tiene el límite de una suma de Riemann, la cual es una integral definida. Por tanto, de (5),

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

De (3), el miembro izquierdo es L; por tanto,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

En esta forma se ha demostrado el siguiente teorema.

6.1.2 Teorema

Si la función f y su derivada f' son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la longitud de arco de la curva $y = f(x)$ a partir del punto $(a, f(a))$ hasta el punto $(b, f(b))$ está dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

El teorema siguiente, el cual proporciona la longitud de arco de una curva cuando x se expresa como una función de y, se deduce a partir del teorema anterior al intercambiar x y y así como las funciones f y g.

6.1.3 Teorema

Si la función g y su derivada g' son continuas en el intervalo cerrado $[c, d]$, entonces la longitud de arco de la curva $x = g(y)$ a partir del punto $(g(c), c)$ hasta el punto $(g(d), d)$ está dada por

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$$

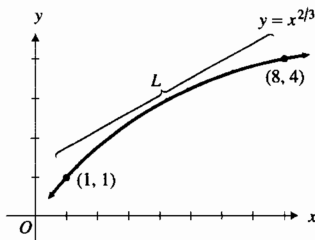


FIGURE 4

EJEMPLO 1 Calcule la longitud de arco de la curva $y = x^{2/3}$ desde el punto $(1, 1)$ hasta el punto $(8, 4)$ utilizando el teorema 6.1.2.

Solución Vea la figura 4. Como $f(x) = x^{2/3}$, $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$. Del teorema 6.1.2, se tiene

$$L = \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{2/3}}}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^8 \sqrt{\frac{9x^{2/3} + 4}{x^{1/3}}}\, dx$$

A fin de evaluar esta integral considere $u = 9x^{2/3} + 4$; entonces $du = 6x^{-1/3}\, dx$. Cuando $x = 1$, $u = 13$; cuando $x = 8$, $u = 40$. Por tanto,

$$L = \frac{1}{18}\int_{13}^{40} u^{1/2}\, du$$

$$= \frac{1}{18}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{13}^{40}$$

$$= \tfrac{1}{27}(40^{3/2} - 13^{3/2})$$
$$\approx 7.634$$

Conclusión: La longitud de arco es 7.634.

EJEMPLO 2

Determine la longitud de arco del ejemplo 1 empleando el teorema 6.1.3.

Solución Como $y = x^{2/3}$ y $x > 0$, se despeja x obteniéndose $x = y^{3/2}$. Al considerar $g(y) = y^{3/2}$ se tiene $g'(y) = \tfrac{3}{2}y^{1/2}$. Entonces, del teorema 6.1.3, se tiene

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}y}\, dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{4 + 9y}\, dy$$
$$= \tfrac{1}{18}\left[\tfrac{2}{3}(4 + 9y)^{3/2}\right]_1^4$$
$$= \tfrac{1}{27}(40^{3/2} - 13^{3/2})$$
$$\approx 7.634$$

lo que es acorde con el ejemplo 1.

EJEMPLO 3

Obtenga la longitud de arco de la catenaria definida por

$$y = 6\cosh\left(\frac{x}{6}\right)$$

desde el punto (0, 6) hasta el punto donde $x = 6 \ln 6$.

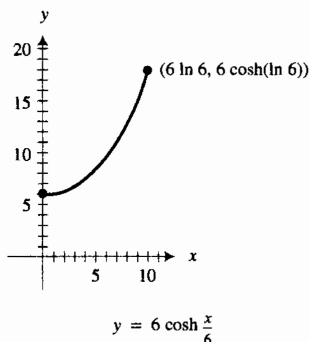


FIGURA 5

Solución Vea la figura 5, la cual muestra el arco de la catenaria. Al diferenciar y se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = 6\,\text{senh}\left(\frac{x}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}$$
$$= \text{senh}\left(\frac{x}{6}\right)$$

Si L unidades es la longitud del arco dado, entonces del teorema 6.1.2 se tiene

$$L = \int_0^{6\ln 6} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$
$$= \int_0^{6\ln 6} \sqrt{1 + \text{senh}^2\left(\frac{x}{6}\right)}\, dx$$
$$= \int_0^{6\ln 6} \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{6}\right)}\, dx$$
$$= \int_0^{6\ln 6} \cosh\left(\frac{x}{6}\right) dx \qquad \left(\text{porque } \cosh\left(\frac{x}{6}\right) \geq 1\right)$$
$$= 6\,\text{senh}\left(\frac{x}{6}\right)\Big]_0^{6\ln 6}$$

$$= 6 \operatorname{senh}(\ln 6) - 6 \operatorname{senh} 0$$
$$= 6 \cdot \frac{e^{\ln 6} - e^{-\ln 6}}{2}$$
$$= 3(6 - \tfrac{1}{6})$$
$$= \tfrac{35}{2}$$

Conclusión: La longitud de arco de la catenaria es exactamente 17.5. ◀

La integral definida que se obtiene cuando se aplican los teoremas 6.1.2 y 6.1.3, en general es difícil, y la mayoría de las ocasiones imposible, de evaluar mediante el segundo teorema fundamental del Cálculo, como se hizo en los ejemplos anteriores cuidadosamente diseñados. Sin embargo, se pueden utilizar los teoremas para indicar las integrales y después calcular un valor aproximado de la longitud de arco utilizando NINT en la graficadora, como se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

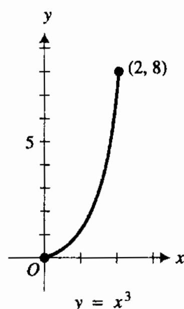


FIGURA 6

▶ **EJEMPLO 4** Calcule con cuatro dígitos significativos la longitud de arco de la curva $y = x^3$ desde el origen hasta el punto (2, 8).

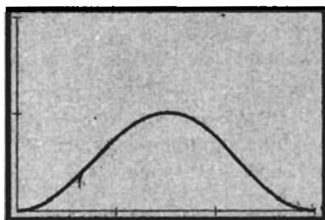
Solución La figura 6 muestra el arco. Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$. Así, por el teorema 6.1.2,

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\, dx$$
$$= \int_0^2 \sqrt{1 + 9x^4}\, dx$$

En la graficadora se obtiene, con cuatro dígitos significativos,

$$\text{NINT}(\sqrt{1 + 9x^4}, 0, 2) = 8.630$$

Conclusión: La longitud de arco es 8.630. ◀



$[0, \pi]$ por $[0, 2]$

$y = \operatorname{sen}^2 x$

FIGURA 7

▶ **EJEMPLO 5** Calcule con cuatro dígitos significativos la longitud de arco de la curva $y = \operatorname{sen}^2 x$ desde el origen hasta el punto $(\pi, 0)$.

Solución La figura 7 muestra el arco, el cual es la gráfica de $y = \operatorname{sen}^2 x$ trazada en el rectángulo de inspección de $[0, \pi]$ por $[0, 2]$. Sea $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$. Entonces

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$
$$= \operatorname{sen} 2x$$

Del teorema 6.1.2 se tiene

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 2x}\, dx$$

En la graficadora se obtiene

$$\text{NINT}(\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 2x}, 0, \pi) = 3.820$$

Conclusión: La longitud de arco es 3.820. ◀

Si se emplea la notación de Leibniz para las derivadas, las fórmulas de los teoremas 6.1.2 y 6.1.3 pueden escribirse como

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \text{ y } L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \tag{6}$$

A continuación se presentan la *función longitud de arco* y la *diferencial de la longitud de arco*, las cuales proporcionan una forma nemotécnica para recordar estas fórmulas.

Si f' es continua en $[a, b]$, la integral definida $\int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$ es una función de x; y proporciona la longitud de arco de la curva $y = f(x)$ desde el punto $(a, f(a))$ hasta el punto $(x, f(x))$, donde x es cualquier número del intervalo cerrado $[a, b]$. Considere que $s(x)$ denota la longitud de este arco; s recibe el nombre de **función longitud de arco** y

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

Del primer teorema fundamental del Cálculo se tiene

$$s'(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

o, como $s'(x) = \dfrac{ds}{dx}$ y $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Al multiplicar por dx se obtiene

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{7}$$

De manera semejante, para la longitud de arco de la curva $x = g(y)$ desde el punto $(g(c), c)$ hasta el punto $(g(y), y)$,

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \tag{8}$$

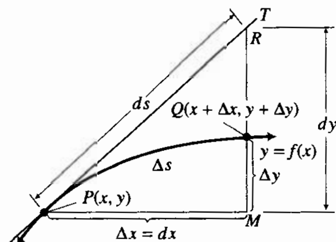


FIGURA 8

Observe que ds (la diferencial de la longitud de arco) es el integrando en las fórmulas (6). Al elevar al cuadrado los dos miembros de (7) u (8), se tiene

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \tag{9}$$

A partir de esta ecuación se obtiene la interpretación geométrica de ds, mostrada en la figura 8. En la figura, la recta T es tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P. $|\overline{PM}| = \Delta x = dx$; $|\overline{MQ}| = \Delta y$; $|\overline{MR}| = dy$; $|\overline{PR}| = ds$; la longitud de arco PQ es Δs. La figura 8 proporciona una manera fácil de recordar (9), de la cual se pueden obtener las fórmulas (6).

EJERCICIOS 6.1

En los ejercicios 1 a 24, calcule la longitud de arco exacta evaluando la integral definida que resulte mediante el segundo teorema fundamental del Cálculo.

1. Calcule la longitud del segmento de la recta $y = 3x$ desde el punto $(1, 3)$ hasta el punto $(2, 6)$ mediante tres métodos: **(a)** utilice la fórmula de la distancia; **(b)** emplee el teorema 6.1.2; **(c)** use el teorema 6.1.3.
2. Obtenga la longitud del segmento de la recta $x + 3y = 4$ desde el punto $(-2, 2)$ hasta el punto $(4, 0)$ mediante tres métodos: **(a)** utilice la fórmula de la distancia; **(b)** emplee el teorema 6.1.2; **(c)** use el teorema 6.1.3.
3. Calcule la longitud del segmento de la recta $4x + 9y = 36$ entre sus intercepciones x y y mediante tres métodos: **(a)** utilice el teorema de Pitágoras; **(b)** emplee el teorema 6.1.2; **(c)** use el teorema 6.1.3.
4. Siga las instrucciones del ejercicio 3 para la recta $5x - 2y = 10$.
5. Obtenga la longitud de arco de la curva $9y^2 = 4x^3$ desde el origen hasta el punto $(3, 2\sqrt{3})$.
6. Determine la longitud de arco de la curva $x^2 = (2y + 3)^3$ desde el punto $(1, -1)$ hasta el punto $(7\sqrt{7}, 2)$.

7. Calcule la longitud de arco de la curva $8y = x^4 + 2x^{-2}$ desde el punto donde $x = 1$ hasta el punto donde $x = 2$.

8. Utilice el teorema 6.1.2 para obtener la longitud de arco de la curva $y^3 = 8x^2$ desde el punto (1, 2) hasta el punto (27, 18).

9. Resuelva el ejercicio 8 empleando el teorema 6.1.3.

10. Calcule la longitud de arco de la curva $y = \frac{2}{3}(x - 5)^{3/2}$ desde el punto donde $x = 6$ hasta el punto donde $x = 8$.

11. Obtenga la longitud de arco de la curva $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$ desde el punto donde $x = 0$ hasta el punto donde $x = 3$.

12. Determine la longitud de arco de la curva $6xy = y^4 + 3$ desde el punto donde $y = 1$ hasta el punto donde $y = 2$.

13. Calcule la longitud de arco de la curva $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3x - 1)$ desde el punto donde $x = 1$ hasta el punto donde $x = 4$.

14. Obtenga la longitud de arco de la curva $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^{-1}$, desde el punto $(2, \frac{19}{12})$ hasta el punto $(5, \frac{314}{15})$.

15. Determine la longitud de arco de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ en el primer cuadrante desde el punto donde $x = \frac{1}{8}$ hasta el punto donde $x = 1$.

16. Calcule la longitud de arco de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (a es una constante, $a > 1$) en el primer cuadrante desde el punto donde $x = 1$ hasta el punto donde $x = a$.

17. Obtenga la longitud de arco de la curva $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{x}{b}\right)^{2/3} = 1$ en el primer cuadrante desde el punto donde $x = \frac{1}{8}a$ hasta el punto donde $x = a$.

18. Calcule la longitud de arco de la curva $9y^2 = x^2(2x + 3)$ en el segundo cuadrante desde el punto donde $x = -1$ hasta el punto donde $x = 0$.

19. Determine la longitud de arco de la curva $9y^2 = x(x - 3)^2$ en el primer cuadrante desde el punto donde $x = 1$ hasta el punto donde $x = 3$.

20. Obtenga la longitud de arco de la curva $9y^2 = 4(1 + x^2)^3$ en el primer cuadrante desde el punto donde $x = 0$ hasta el punto donde $x = 2\sqrt{2}$.

21. Calcule la longitud de arco de la curva $y = \ln \sec x$ desde $x = 0$ hasta $x = \frac{1}{4}\pi$.

22. Determine la longitud de arco de la curva $y = \ln \csc x$ desde $x = \frac{1}{6}\pi$ hasta $x = \frac{1}{2}\pi$.

23. Si

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos t}\, dt$$

determine la longitud de arco de la gráfica de f desde el punto donde $x = 0$ hasta el punto donde $x = \frac{1}{2}\pi$. *Sugerencia:* obtenga $f'(x)$ mediante el primer teorema fundamental del Cálculo y emplee la identidad $\cos^2 \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$.

24. Si

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\operatorname{sen} t}\, dt$$

calcule la longitud de arco de la gráfica de f desde el punto donde $x = 0$ hasta el punto donde $x = \frac{1}{2}\pi$. *Sugerencia:* utilice la sugerencia del ejercicio 23 y la identidad $\operatorname{sen} x = \cos(\frac{1}{2}\pi - x)$.

En los ejercicios 25 a 34, determine la longitud de arco con cuatro dígitos significativos calculando la integral que resulte mediante NINT *en la graficadora.*

25. El arco de la parábola $y = x^2$ desde el origen hasta el punto (2, 4).

26. El arco de la parábola $y = \frac{1}{4}(x - 2)^2 + 1$ desde el punto (–2, 5) hasta el punto (4, 2).

27. El arco de la curva senoidal desde el origen hasta el punto $(\pi, 0)$.

28. El arco de la curva cosenoidal desde el origen hasta el punto $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$.

29. El arco de la curva $y = \frac{1}{3}x^3$ desde el origen hasta el punto $(1, \frac{1}{3})$.

30. El arco de la curva $y = \tan x$ desde el origen hasta el punto $(\frac{1}{4}\pi, 1)$.

31. El arco de la curva $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ desde el punto (0, –1) hasta el punto (3, –1)

32. El arco de la curva $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ desde el punto (–2, 0) hasta el punto (3, 0).

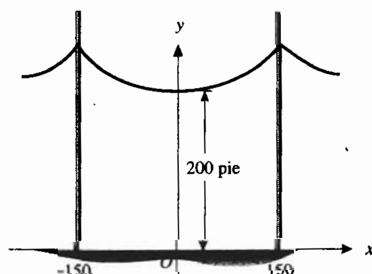
33. El arco de la curva $y = x^3 - 3x^2 + 3$ entre los dos puntos donde la gráfica intersecta a la parte positiva del eje x.

34. El arco de la curva $y = 3 - (x - 1)^4$ entre los dos puntos donde la gráfica intersecta al eje x.

35. La siguiente figura muestra un cable que pende en la forma de catenaria entre dos postes separados 300 pie, y el punto más bajo del cable está a 200 pie sobre el suelo. Los ejes coordenados se eligen de modo que el origen esté a la mitad entre las bases de los dos postes sobre el eje x. y el eje y contiene el punto más bajo del cable. Una ecuación de la catenaria es

$$y = 200 \cosh\left(\frac{x}{200}\right)$$

Calcule la longitud del cable entre los dos postes.



36. Explique por qué no puede emplearse el teorema 6.1.2 para determinar la longitud de arco de la gráfica de $y^3 = x^2$ desde el origen hasta el punto (1, 1). ¿Puede emplear el teorema 6.1.3 para calcular esta longitud de arco? Si la respuesta es no, explique por qué. Si la respuesta es sí, calcule la longitud de arco.

6.2 CENTRO DE MASA DE UNA BARRA

En la sección 4.6 se dijo que si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el valor promedio de f en $[a, b]$ está dado por

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Una aplicación importante del valor promedio de una función ocurre en física en relación con el concepto de *centro de masa.*

A fin de llegar a la definición de *masa*, considere una partícula que se pone en movimiento a lo largo de un eje mediante una fuerza ejercida sobre ella. Mientras la fuerza actúe sobre la partícula, su velocidad se incrementa; esto es, la partícula tendrá una aceleración. La razón de la fuerza a la aceleración es constante de acuerdo con la magnitud de la fuerza, y esta razón constante se denomina **masa** de la partícula. Por tanto, si la fuerza es F unidades, la aceleración es a unidades y la masa es M unidades, entonces

$$M = \frac{F}{a}$$

La fuerza, masa y aceleración se medirán en unidades de los sistemas inglés y métrico. A continuación se discutirán estas unidades.

En el sistema de ingeniería inglés la unidad de fuerza es 1 libra (lb) y la unidad de aceleración es pie/s^2. La **unidad de masa** se define como la masa de una partícula cuya aceleración es 1 pie/s^2 cuando la partícula está sujeta a una fuerza de 1 lb. Esta unidad de masa se denomina 1 *slug*. En consecuencia,

$$1 \text{ slug} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ pie/s}^2}$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 La aceleración de cierta partícula que se mueve sobre una recta horizontal es de 10 pie/s^2 cuando la fuerza es de 30 lb. Por tanto, la masa de la partícula es

$$\frac{30 \text{ lb}}{10 \text{ pie/s}^2} = \frac{3 \text{ lb}}{1 \text{ pie/s}^2}$$

De este modo, por cada 1 pie/s^2 de aceleración se ejerce una fuerza de 3 lb sobre la partícula. Por tanto, la masa de la partícula es de 3 slugs. ◀

El sistema métrico adoptado oficialmente por casi todos los países, excepto Estados Unidos, es el Sistema Internacional de Unidades, abreviado SI por su nombre oficial en francés, Système International d'Unités. En el sistema SI, la unidad de masa es 1 kilogramo (kg) y la unidad de aceleración es 1 metro por segundo cuadrado (m/s^2). La unidad de fuerza en el sistema SI es 1 *newton* (N), el cual es la fuerza que imparte a una masa de 1 kg una aceleración de 1 m/s^2.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Una partícula cuya masa es de 6 kg está sujeta a una fuerza horizontal constante de 3 N. La aceleración de la partícula se obtiene al dividir la fuerza entre la masa, de modo que

$$\frac{3 \text{ N}}{6 \text{ kg}} = 0.5 \text{ m/s}^2$$

◀

En el sistema SI, la aceleración debida a la gravedad cerca de la superficie de la Tierra es 9.81 m/s^2. Si la masa de un objeto es de M kilogramos, y si F newtons es la fuerza sobre el objeto debida a la gravedad cerca de la superficie de la Tierra, entonces

$$F = 9.81\,M$$

Otro sistema métrico, ya en desuso, es el sistema centímetro-gramo-segundo, abreviado como CGS. En el **sistema CGS** la unidad de masa es el gramo (g), donde 1 g = 0.001 kg. La unidad de aceleración en el sistema CGS es 1 cm/s^2. Por tanto, la unidad de fuerza, llamada ***dina*** (din), es la fuerza que imparte a una masa de 1 g una aceleración de 1 cm/s^2. Como

$$1 \text{ kg} = 10^3 \text{g} \quad \text{y} \quad 1 \text{ m/s}^2 = 10^2 \text{ cm/s}^2$$

entonces

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ din}$$

La tabla 1 resume las unidades de los sistemas inglés, SI y CGS.

Tabla 1

Sistema de Unidades	*Fuerza*	*Masa*	*Aceleración*
Inglés	libra (lb)	slug	pie/s^2
SI	newton (N)	kilogramo (kg)	m/s^2
CGS	dina (din)	gramo (g)	cm/s^2

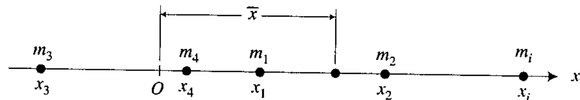


FIGURA 1

Considere ahora una barra horizontal, de peso y espesor despreciables, colocada sobre el eje x. En la barra se tiene un sistema de n partículas ubicadas en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La i-ésima partícula ($i = 1, 2, \ldots, n$) se encuentra a una distancia dirigida de x_i metros del origen y su masa es m_i kilogramos. Vea la figura 1. El número de kilogramos de la masa total del sistema es $\sum_{i=1}^{n} m_i$. Se define el número de kilogramos-metro del *momento de masa* de la i-ésima partícula con respecto al origen como $m_i x_i$. El **momento de masa** para el sistema se define como la suma de los momentos de masa de todas las partículas. En consecuencia, si M_0 kilogramosmetro es el momento de masa del sistema con respecto al origen, entonces

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

Si las medidas de las distancias es en pies y de la masa en slugs, entonces el momento de masa se mide en slug-pie.

Se desea determinar un punto $\bar{x}$ tal que si la masa total del sistema se concentrace ahí, su momento de masa con respecto al origen sería igual al momento de masa del sistema con respecto al origen. Entonces $\bar{x}$ debe satisfacer la ecuación

$$\bar{x}\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (1)$$

El punto $\bar{x}$, denominado **centro de masa** del sistema, es el punto donde el sistema estará equilibrado. La posición del centro de masa es independiente de la posición del origen; esto es, la ubicación del centro de masa, relativa a las posiciones de las partículas, no cambia cuando se cambia el origen. El centro de masa es importante debido a que *el comportamiento de un sistema completo de partículas puede describirse mediante el comportamiento del centro de masa del sistema.*

▶ EJEMPLO 1 Dadas cuatro partículas de masa 2, 3, 1 y 5 kg ubicadas en el eje x en los puntos que tiene coordenadas 5, 2, −3 y −4, respectivamente, donde la distancia se mide en metros, determine el centro de masa de este sistema.

Solución Si $\bar{x}$ es la coordenada del centro de masa, de la fórmula (1) se tiene

$$\bar{x} = \frac{2(5) + 3(2) + 1(-3) + 5(-4)}{2 + 3 + 1 + 5}$$

$$= -\frac{7}{11}$$

<u>Conclusión:</u> El centro de masa está a $\frac{7}{11}$m a la izquierda del origen. ◀

A continuación se extenderá la discusión anterior a una barra horizontal rígida cuya masa está distribuida en forma continua. Se dice que la barra es **homogénea** si tiene una densidad lineal constante, esto es, si su masa es directamente proporcional a su longitud. En otras palabras, si el segmento de la barra cuya longitud es $\Delta_i x$ metros tiene masa $\Delta_i m$ kilogramos, y $\Delta_i m = k\,\Delta_i x$, entonces la barra es homogénea. El número k es una constante y k kilogramos por metro es la **densidad lineal** de la barra.

Suponga que se tiene una barra no homogénea, de modo que en este caso, la densidad lineal varía a lo largo de la barra. Sea L metros la longitud de la barra y coloque ésta sobre el eje x de modo que su extremo izquierdo coincida con el origen y su extremo derecho quede en L. Vea la figura 2. La densidad lineal en cualquier punto x de la barra es $\rho(x)$ kilogramos por metro, donde ρ es continua en $[0, L]$. Para determinar la masa total de la barra se considera una partición Δ del intervalo cerrado $[0, L]$ en n subintervalos. El i-ésimo subintervalo es $[x_{i-1}, x_i]$ y su longitud es $\Delta_i x$ metros. Si w_i es cualquier punto de $[x_{i-1}, x_i]$, entonces una aproximación de la masa de la porción de la barra contenida en el i-ésimo subintervalo es $\Delta_i m$ kilogramos, donde

$$\Delta_i m = \rho(w_i)\,\Delta_i z$$

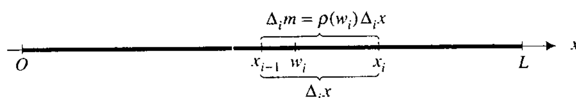


FIGURA 2

El número de kilogramos de la masa total de barra se aproxima mediante

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i m = \sum_{i=1}^{n} \rho(w_i)\, \Delta_i x$$

Cuanto más pequeña se tome la norma de la partición Δ, más cerca estará esta suma de Riemann de lo que intuitivamente pensamos como la medida de la masa de la barra, por lo que se define la medida de la masa de la barra como el límite de la suma de Riemann anterior.

6.2.1 Definición de la masa de una barra

Una barra de L metros de longitud tiene su extremo izquierdo en el origen. Si $\rho(x)$ kilogramos por metro es la densidad lineal en un punto situado a x metros del origen, donde ρ es continua en $[0, L]$, entonces la masa total de la barra es M kilogramos, donde

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(w_i)\Delta_i x$$

$$= \int_0^L \rho(x)\, dx \qquad (2)$$

En esta definición, si la distancia se mide en pies, y la masa se mide en slugs, entonces la densidad se medirá en slugs por pie.

EJEMPLO 2 La densidad lineal en cualquier punto de una barra de 4 m de longitud varía directamente conforme la distancia desde el punto a un punto exterior de la barra situado a 2 metros de su extremo derecho, donde la densidad lineal es 5 kg/m. Determine la masa total de la barra.

Solución La figura 3 muestra la barra colocada sobre el eje x. Si $\rho(x)$ kilogramos por metro es la densidad lineal de la barra en el punto ubicado a x metros del extremo que tiene la mayor densidad, entonces

$$\rho(x) = c(6 - x)$$

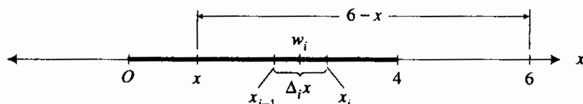


FIGURA 3

donde c es la constante de proporcionalidad. Como $\rho(4) = 5$, entonces $5 = 2c$ o $c = \frac{5}{2}$. En consecuencia $\rho(x) = \frac{5}{2}(6 - x)$. Por tanto, si M kilogramos es la masa total de la barra, de la definición 6.2.1 se tiene

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{5}{2}(6 - w_i)\, \Delta_i x$$

$$= \int_0^4 \tfrac{5}{2}(6 - x)\, dx$$

$$= \frac{5}{2}\left[6x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^4$$
$$= 40$$

Conclusión: La masa total de la barra es 40 kg. ◀

Antes de obtener una fórmula para calcular el *centro de masa* de una barra cuya masa se distribuye en forma continua, se debe definir el ***momento de masa*** **de la barra** con respecto al origen.

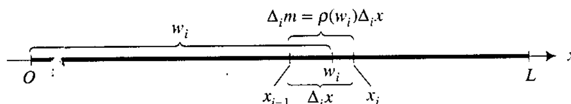


FIGURA 4

Se coloca la barra sobre el eje x de modo que su extremo izquierdo coincida con el origen y el extremo derecho quede en L. Vea la figura 4. Sea Δ una partición de $[0, L]$ en n subintervalos, de manera que el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tenga longitud $\Delta_i x$ metros. Si w_i es cualquier punto de $[x_{i-1}, x_i]$, una aproximación del momento de masa con respecto al origen de la porción de la barra contenida en el i-ésimo subintervalo es $w_i\ \Delta_i m$ kilogramos-metro, donde $\Delta_i m = \rho(w_i)\ \Delta_i x$. El número de kilogramos-metro del momento de masa de la barra completa se aproxima mediante

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \Delta_i m = \sum_{i=1}^{n} w_i \rho(w_i)\ \Delta_i x$$

Cuanto más pequeña sea la norma de la partición Δ, más cerca estará la suma de Riemann de lo que intuitivamente pensamos como el momento de masa de la barra con respecto al origen. Entonces se tiene la siguiente definición.

6.2.2 Definición del momento de masa de una barra

Una barra de L metros de longitud tiene su extremo izquierdo en el origen y $\rho(x)$ kilogramos por metro es la densidad lineal en un punto situado a x metros del origen, donde ρ es continua en $[0, L]$. El **momento de masa** de la barra con respecto al origen es M_0 kilogramos-metro, donde

$$M_0 = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i-1}^{n} w_i \rho(w_i) \Delta_i x$$
$$= \int_0^L x\rho(x)\, dx \qquad (3)$$

El **centro de masa** de la barra está en el punto $\bar{x}$ tal que si M kilogramos es la masa total de la barra, entonces $\bar{x}M = M_0$. Así, de (2) y (3) se tiene

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x\rho(x)\, dx}{\int_0^L \rho(x)\, dx} \qquad (4)$$

EJEMPLO 3 Determine el centro de masa de la barra del ejemplo 2.

Solución En el ejemplo 2, $M = 40$. De (4) con $\rho(x) = \frac{5}{2}(6 - x)$, se tiene

$$\bar{x} = \frac{\int_0^4 \frac{5}{2}(6 - x)\,dx}{40}$$
$$= \frac{1}{16}\left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4$$
$$= \frac{5}{3}$$

Conclusión: El centro de masa está a $\frac{5}{3}$m del extremo que tiene la mayor densidad.

EJEMPLO 4 Demuestre que el centro de masa de una barra de densidad lineal uniforme está en el centro de la barra.

Solución Sea k kilogramos por metro la densidad lineal uniforme, donde k es una constante. De la fórmula (4), si L es la longitud de la barra, entonces

$$x = \frac{\int_0^L xk\,dx}{\int_0^L k\,dx} = \frac{\left.\frac{kx^2}{2}\right]_0^L}{\left.kx\right]_0^L} = \frac{\frac{kL^2}{2}}{kL} = \frac{L}{2}$$

Conclusión: El centro de masa está en el centro de la barra.

EJERCICIOS 6.2

En los ejercicios 1 a 4, una partícula se mueve sobre una recta horizontal. Determine la fuerza ejercida sobre la partícula si tiene la masa y aceleración dadas.

1. La masa es 50 slugs; la aceleración es 5 pie/s^2.
2. La masa es 10 kg; la aceleración es 6 m/s^2.
3. La masa es 80 g; la aceleración es 50 cm/s^2.
4. La masa es 22 slugs; la aceleración es 4 pie/s^2.

En los ejercicios 5 a 8, una partícula está sujeta a la fuerza horizontal dada, y se proporciona la masa o la aceleración. Calcule la otra cantidad.

5. La fuerza es 6 N; la masa es 4 kg.
6. La fuerza es 32 lb; la masa es 8 slugs.
7. La fuerza es 24 lb; la aceleración es 9 pie/s^2.
8. La fuerza es 700 din; la aceleración es 80 cm/s^2.

En los ejercicios 9 a 12, en el eje x se localizà un sistema de partículas. El número de kilogramos de la masa de cada partícula y la coordenada de su posición están indicadas. La distancia se mide en metros. Determine el centro de masa de cada sistema.

9. $m_1 = 5$ en 2; $m_2 = 6$ en 3; $m_3 = 4$ en 5; $m_4 = 3$ en 8
10. $m_1 = 2$ en -4; $m_2 = 8$ en -1; $m_3 = 4$ en 2; $m_4 = 2$ en 3
11. $m_1 = 2$ en -3; $m_2 = 4$ en -2; $m_3 = 20$ en 4; $m_4 = 10$ en 6; $m_5 = 30$ en 9
12. $m_1 = 5$ en -7; $m_2 = 3$ en -2; $m_3 = 5$ en 0; $m_4 = 1$ en 2; $m_5 = 8$ en 10

En los ejercicios 13 a 21, calcule la masa total y el centro de masa de la barra indicada.

13. La longitud de una barra es de 6 m y la densidad lineal de la barra en un punto que está a x metros de un extremo es $(2x + 3)$ kg/m.
14. La longitud de una barra es de 20 cm y la densidad lineal de la barra en un punto ubicado a x centímetros de un extremo es $(3x + 2)$ g/cm.
15. La longitud de una barra es de 9 pulg y la densidad lineal de la barra en un punto que está a x pulgadas de un extremo es $(4x + 1)$ slugs/pulg.
16. La longitud de una barra es de 3 pie y la densidad lineal de la barra en un punto ubicado a x pies de un extremo es $(5 + 2x)$ slugs/pie.
17. La longitud de una barra es de 12 cm y la medida de la densidad lineal de la barra en un punto es una función lineal de

la medida de la distancia del punto al extremo izquierdo de la barra. La densidad lineal en el extremo izquierdo es 3 g/cm y en el extremo derecho es 4 g/cm.

18. La longitud de una barra es de 10 m y la medida de la densidad lineal en un punto es una función lineal de la medida de la distancia del punto al extremo izquierdo de la barra. La densidad lineal en el extremo izquierdo es 2 kg/m y en el extremo derecho es 3 kg/m.

19. La medida de la densidad lineal en cualquier punto de una barra de 6 m de longitud varía directamente como la distancia del punto a un punto externo situado a 4 m de un extremo, donde la densidad es 3 kg/m.

20. Una barra tiene 10 pie de longitud, y la medida de la densidad lineal en un punto es una función lineal de la medida de la distancia desde el centro de la barra. La densidad en cada extremo de la barra es de 5 slugs/pie y en el centro la densidad lineal es de $3\frac{1}{2}$ slugs/pie.

21. La medida de la densidad lineal en un punto de una barra varía directamente como la tercera potencia de la medida de la distancia del punto a un extremo. La longitud de la barra es de 4 pie y la densidad lineal es de 2 slugs/pie en el centro.

22. La densidad lineal en cualquier punto de una barra de 5 m de longitud varía directamente como la distancia del punto a un punto externo que está a 2 m de un extremo de la barra, en donde la densidad lineal es de K kg/m. Determine K si la masa total de la barra es de 135 kg.

23. La densidad lineal en cualquier punto de una barra de 3 m de longitud varía directamente como la distancia del punto a un punto externo situado a 1 m de un extremo de la barra, en donde la densidad lineal es 2 kg/m. Si la masa total de la barra es de 15 kg, determine el centro de masa de la barra.

24. La medida de la densidad lineal en un punto de una barra varía directamente como la cuarta potencia de la medida de la distancia del punto a un extremo. La longitud de la barra es de 2 m. Si la masa total de la barra es de $\frac{64}{5}$ kg, determine el centro de masa de la barra.

25. La densidad lineal de una barra en un punto que está a x centímetros de un extremo es $2/(1 + x)$ gramos por centímetro. Si la barra mide 15 centímetros de longitud, determine la masa y el centro de masa de la barra.

26. La masa total de una barra de L metros de longitud es M kilogramos, y la medida de la densidad lineal en un punto ubicado a x metros del extremo izquierdo es proporcional a la medida de la distancia del punto al extremo derecho. Demuestre que la densidad lineal en un punto de la barra a x metros del extremo izquierdo es $2M(L - x)/L^2$ kilogramos por metro.

27. Una barra tiene 6 m de longitud y 24 kg de masa. Si la medida de la densidad lineal en cualquier punto de la barra varía directamente como el cuadrado de la distancia del punto a un extremo, determine el valor más grande de la densidad lineal.

28. Una barra tiene L metros de longitud y su centro de masa está en el punto ubicado a $\frac{3}{4}$ L metros de su extremo izquierdo. Si la medida de la densidad lineal en un punto es proporcional a una potencia de la medida de la distancia del punto al extremo izquierdo y la densidad lineal en el extremo derecho es 20 kg/m, determine la densidad lineal en un punto ubicado a x metros del extremo izquierdo.

29. El peso de un objeto es la fuerza que resulta de la gravedad ejercida sobre el objeto. Explique la diferencia entre el peso y la masa de un objeto. Invente un ejemplo para cada sistema de unidades: inglés, SI y CGS.

6.3 CENTRO DE MASA DE UNA LÁMINA Y CENTROIDE DE UNA REGIÓN PLANA

Ahora considere una placa delgada de masa distribuida en forma continua, por ejemplo una hoja de papel o de hojalata, de dos dimensiones. A tal región plana se le llama **lámina**. En esta sección se limitará la discusión a *láminas homogéneas*, esto es, láminas que tiene densidad de área (o superficial) constante. Las láminas de densidad superficial variable se estudian en relación con las aplicaciones de las integrales múltiples, tema del capítulo 13.

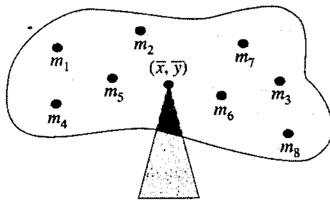


FIGURA 1

Considere un sistema de n partículas ubicadas en los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . . , (x_n, y_n), en el plano xy y sean las medidas de sus masas m_1, m_2, . . . , m_n. Imagine que las partículas están sobre una placa de peso y grosor despreciable. El *centro de masa* es el punto donde la hoja estará en equilibrio. Refiérase a la figura 1, la cual muestra ocho partículas colocadas sobre la placa. En la figura, la identificación de la i-ésima partícula es m_i, que es la medida de su masa. La placa estará en equilibrio sobre un punto de apoyo ubicado en el centro de masa denotado por $(\bar{x}, \bar{y})$. Para determinar el *centro de masa* de dicho sistema primero se debe definir la *masa* total del sistema y el *momento de masa* del sistema con respecto a los ejes coordenados.

Suponga que la i-ésima partícula, ubicada en el punto (x_i, y_i), tiene masa de m_i kilogramos. Entonces la **masa total** del sistema es M kilogramos, donde

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

El momento de masa de la i-ésima partícula con respecto al eje y es $m_i x_i$ kilogramos-metro y su momento de masa con respecto al eje x es $m_i y_i$ kilogramos-metro. Si M_y kilogramos-metro es el momento del sistema de n partículas con respecto al eje y, y M_x kilogramos-metro es el momento del sistema con respecto al eje x, entonces

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \quad \text{y} \quad M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

El centro de masa del sistema es el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

El punto $(\bar{x}, \bar{y})$ puede interpretarse como el punto tal que, si la masa total del sistema de M kilogramos se concentrace ahí, entonces el momento de masa del sistema con respecto al eje y sería $M\bar{x}$ kilogramos-metro y su momento con respecto al eje $\bar{x}$ sería My kilogramos-metro.

EJEMPLO 1 Determine el centro de masa del sistema de cuatro partículas, cuyas masas tienen medidas 2, 6, 4 y 1, y las cuales se ubican en los puntos (5, −2), (−2, 1), (0, 3) y (4, −1), respectivamente.

Solución

$$M_y = \sum_{i=1}^{4} m_i x_i = 2(5) + 6(-2) + 4(0) + 1(4) = 2$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{4} m_i y_i = 2(-2) + 6(1) + 4(3) + 1(-1) = 13$$

$$M = \sum_{i=1}^{4} m_i = 2 + 6 + 4 + 1 = 13$$

Por tanto,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2}{13} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{13}{13} = 1$$

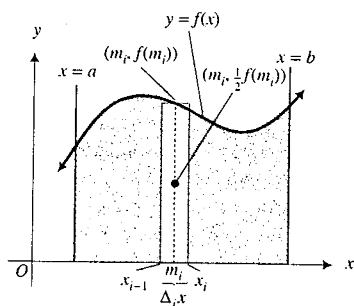


FIGURA 2

Conclusión: El centro de masa se encuentra en $(\frac{2}{13}, 1)$.

A continuación se extenderán los conceptos de masa, momentos de masa y centro de masa para láminas heterogéneas. Si la lámina homogénea es un rectángulo, se define su centro de masa como el centro del rectángulo. Esta definición se aplica a fin de obtener el centro de masa de una lámina homogénea más general.

Sea L la lámina homogénea cuya densidad de área constante es k kilogramos por metro cuadrado, la cual está limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. Suponga que la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y que $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Vea la figura 2.

partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos. El i-ésimo subintervalo es $[x_{i-1}, x_i]$, cuyo punto medio es m_i y $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. Asociado con el i-ésimo subintervalo se tiene una lámina rectangular cuya ancho, altura y densidad de área están dados por $\Delta_i x$ metros, $f(m_i)$ metros y k kilogramos por metro cuadrado, respectivamente, y cuyo centro de masa está en el punto $(m_i, \frac{1}{2}f(m_i))$. El área de la lámina rectangular es $f(m_i)\ \Delta_i x$ metros cuadrados; en consecuencia, $kf(m_i)\ \Delta_i x$ kilogramos es su masa. De modo que la suma de las medidas de las masas de las n láminas rectangulares es la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} kf(m_i)\ \Delta_i x$$

En la definición formal 6.3.1 se define la masa total de L como el límite de esta suma de Riemann.

Sea $\Delta_i M_x$ kilogramos-metro el momento de masa de la i-ésima lámina rectangular con respecto al eje x, y $\Delta_i M_y$ kilogramos-metro el momento de masa de esta lámina con respecto al eje y. Entonces

$$\Delta_i M_x = \tfrac{1}{2}f(m_i)[kf(m_i)\ \Delta_i x] \quad \text{y} \quad \Delta_i M_y = m_i[kf(m_i)\ \Delta_i x]$$

Las sumas de Riemann de las medidas de los momentos de masa de las n láminas rectangulares son

$$\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}k[f(m_i)]^2\ \Delta_i x \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} km_i f(m_i)\ \Delta_i x$$

A continuación se definen formalmente los momentos de masa de L con respecto a los ejes coordenados como los límites de estas sumas de Riemann.

6.3.1 Definición de masa, momentos de masa y centro de masa de una lámina

Sea L una lámina homogénea cuya densidad de área constante es k kilogramos por metro cuadrado, la cual está limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. La función f es continua en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x de $[a, b]$. Si M kilogramos es la **masa total de la lámina L**, entonces

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(m_i)\ \Delta_i x \\ &= k\int_a^b f(x)\, dx \end{aligned}$$

Si M_x kilogramos-metro es el **momento de masa de la lámina L con respecto al eje x**, entonces

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}k[f(m_i)]\ \Delta_i x \\ &= \tfrac{1}{2}k\int_a^b [f(x)]^2\, dx \end{aligned}$$

Si M_y kilogramos-metro es el **momento de masa de la lámina L con respecto al eje y**, entonces

$$M_y = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k m_i f(m_i)\, \Delta_i x$$
$$= k \int_a^b x f(x)\, dx$$

Si $(\bar{x}, \bar{y})$ es el **centro de masa de la lámina** L, entonces

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} \qquad (1)$$

Si se sustituye la expresión para M, M_x y M_y en (1), se obtiene

$$\bar{x} = \frac{k\int_a^b x f(x)\, dx}{k\int_a^b f(x)\, dx} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}k\int_a^b [f(x)]^2\, dx}{k\int_a^b f(x)\, dx}$$

Al dividir el numerador y el denominador entre k se tiene

$$\bar{x} = \frac{k\int_a^b x f(x)\, dx}{k\int_a^b f(x)\, dx} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}k\int_a^b [f(x)]^2\, dx}{k\int_a^b f(x)\, dx}$$

En estas fórmulas el denominador es el número de unidades cuadradas del área de la región; de modo que se ha expresado un problema físico en términos de uno geométrico. Esto es, $\bar{x}$ y $\bar{y}$ pueden considerarse como la abscisa promedio y la ordenada promedio, respectivamente, de una región geométrica. En tal caso, $\bar{x}$ y $\bar{y}$ dependen sólo de la región, y no de la masa de la lámina. Así, se hará referencia al centro de masa de una región plana en lugar de centro de masa de una lámina homogénea. En tal caso, el centro de masa recibe el nombre de *centroide* de la región. En lugar de momentos de masa se considerarán momentos de la región.

6.3.2 Definición de momentos y centroide de una región plana

Sea R la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. La función f es continua en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x de $[a, b]$. Si M_x denota el **momento de R con respecto al eje x** y M_y denota el **momento de R con respecto al eje y**, entonces

$$M_x = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(m_i)]^2\, \Delta_i x \qquad M_y = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i f(m_i)\, \Delta_i x$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2\, dx \qquad\qquad = \int_a^b x f(x)\, dx$$

Si $(\bar{x}, \bar{y})$ es el **centroide** de la región plana R cuya área es A unidades cuadradas, y M_x y M_y se definen como en el párrafo anterior, entonces

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A}$$

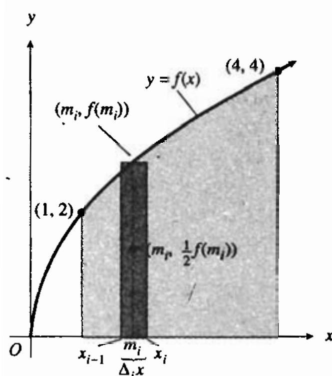


FIGURA 3

EJEMPLO 2 Determine el centroide de la región del primer cuadrante limitada por la curva $y^2 = 4x$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 4$.

Solución Sea $f(x) = 2x^{1/2}$. Entonces la ecuación de la curva es $y = f(x)$. En la figura 3 se muestra la región junto con el i-ésimo elemento rectangular de área. El centroide del rectángulo está en $(m_i, \frac{1}{2}f(m_i))$. El área A unidades cuadradas de la región está dada por

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\, \Delta_i x \\ &= \int_1^4 f(x)\, dx \\ &= \int_1^4 2x^{1/2}\, dx \\ &= \tfrac{4}{3} x^{3/2} \Big]_1^4 \\ &= \tfrac{28}{3} \end{aligned}$$

Ahora se calcularán M_y y M_x.

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i f(m_i)\, \Delta_i x \\ &= \int_1^4 x f(x)\, dx \\ &= \int_1^4 x(2x^{1/2})\, dx \\ &= 2\int_1^4 x^{3/2}\, dx \\ &= \tfrac{4}{5} x^{5/2} \Big]_1^4 \\ &= \tfrac{124}{5} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} M_x &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(m_i) \cdot f(m_i)\, \Delta_i x \\ &= \tfrac{1}{2} \int_1^4 [f(x)]^2\, dx \\ &= \tfrac{1}{2} \int_1^4 4x\, dx \\ &= x^2 \Big]_1^4 \\ &= 15 \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{A} \\ &= \frac{\frac{124}{5}}{\frac{28}{3}} \\ &= \frac{93}{35} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \bar{y} &= \frac{M_x}{A} \\ &= \frac{15}{\frac{28}{3}} \\ &= \frac{45}{28} \end{aligned}$$

<u>**Conclusión:**</u> El centroide está en el punto $(\frac{93}{35}, \frac{45}{28})$. ◀

En el ejemplo siguiente la región está limitada por dos curvas en lugar de una y el eje x. El método para determinar el centroide es el mismo que el anterior, pero las ecuaciones para M_x y M_y ahora dependen de las ecuaciones que definen las curvas.

EJEMPLO 3 Determine el centroide de la región limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 2x + 3$.

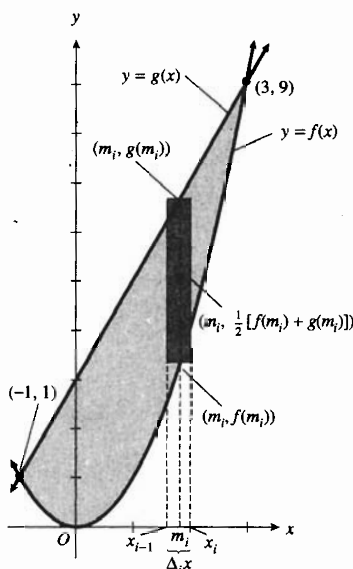


FIGURA 4

Solución Los puntos de intersección de las dos curvas son $(-1, 1)$ y $(3, 9)$. En la figura 4 se muestra la región junto con el i-ésimo elemento rectangular

Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x + 3$. El centroide del i-ésimo elemento rectangular está en el punto $(m_i, \frac{1}{2}[f(m_i + g(m_i)])$, donde m_i es punto medio del i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. La medida del área de la región está dada por

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [g(m_i) - f(m_i)]\,\Delta_i x \\ &= \int_{-1}^{3} [g(x) - f(x)]\,dx \\ &= \int_{-1}^{3} [2x + 3 - x^2]\,dx \\ &= \tfrac{32}{3} \end{aligned}$$

A continuación se calcularán M_y y M_x.

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i[g(m_i) - f(m_i)]\,\Delta_i x \\ &= \int_{-1}^{3} x[g(x) - f(x)]\,dx \\ &= \int_{-1}^{3} x[2x + 3 - x^2]\,dx \\ &= \tfrac{32}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[g(m_i) + f(m_i)][g(m_i) - f(m_i)]\,\Delta_i x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} [g(x) + f(x)][g(x) - f(x)]\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} [(2x + 3) + x^2][(2x + 3) - x^2]\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} [4x^2 + 12x + 9 - x^4]\,dx \\ &= \tfrac{544}{15} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{32}{3}}{\frac{32}{3}} = 1 \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{544}{15}}{\frac{32}{3}} = \tfrac{17}{5}$$

<u>**Conclusión:**</u> El centroide está en el punto $(1, \frac{17}{5})$. ◀

El teorema siguiente en ocasiones puede simplificar el problema de determinar el centroide de una región plana que puede dividirse en regiones que tiene ejes de simetría

6.3.3 Teorema

Si una recta es un eje de simetría de la región plana R, entonces el centroide de la región está sobre esa recta.

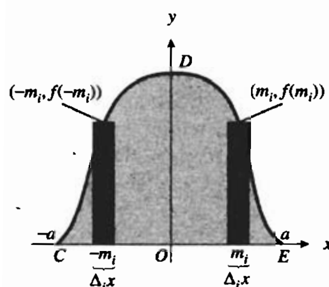


FIGURA 5

Demostración Elija los ejes coordenados de modo que el eje de simetría coincida con el eje y y el origen esté en la región R. La figura 5 muestra esta situación. En la figura, R es la región CDE, C es el punto $(-a, 0)$, E es el punto $(a, 0)$ y una ecuación de la curva CDE es $y = f(x)$.

Considere una partición del intervalo $[0, a]$. Sea m_i el punto medio del i-ésimo subintervalo. El momento con respecto al eje y del elemento rectangular que tiene altura $f(m_i)$ y ancho $\Delta_i x$ es $m_i[f(m_i)\,\Delta_i x]$. Debido a la simetría, para una partición similar del intervalo $[-a, 0]$ existe un elemento correspondiente cuyo momento con respecto al eje y es $-m_i[f(m_i)\,\Delta_i x]$. La suma de estos dos momentos es 0; por tanto, $M_y = 0$. Como $x = M_y/A$, se concluye que $\bar{x} = 0$. Así, el centroide de la región R está sobre el eje y, lo cual es lo que se deseaba demostrar. ■

▶ ***EJEMPLO 4*** Determine el centroide de la región limitada por el eje x y la semicircunferencia $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Solución La figura 6 muestra la región cuya área es 2π unidades cuadradas. Como el eje y es un eje de simetría, el centroide está sobre el eje y; de modo que $\bar{x} = 0$.

FIGURA 6

El momento de la región con respecto al eje x está dado por

$$
\begin{aligned}
M_x &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{4 - m_i^2}\right]^2 \Delta_i x \\
&= 2 \cdot \tfrac{1}{2} \int_0^2 (4 - x^2)\, dx \\
&= 4x - \tfrac{1}{3} x^3 \Big]_0^2 \\
&= \tfrac{16}{3}
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{\frac{16}{3}}{2\pi} \\
&= \frac{8}{3\pi}
\end{aligned}
$$

<u>**Conclusión:**</u> El centroide está en el punto $\left(0, \dfrac{8}{3\pi}\right)$ ◀

Una aplicación de los centroides la proporciona el *teorema de Pappus*, llamado así en honor al matemático griego **Pappus de Alejandría**, quien vivió en el siglo IV.

6.3.4 Teorema de Pappus para volúmenes de sólidos de revolución

Si una región plana se gira alrededor de una recta de su plano que no corta la región, entonces la medida del volumen del sólido de revolución generado es igual al producto de la medida del área de la región y la medida de la distancia recorrida por el centroide de la región.

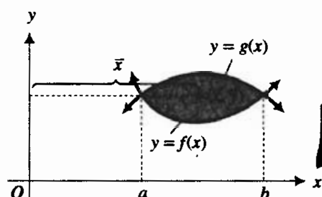


FIGURA 7

A fin de visualizar este teorema, refiérase a la figura 7 que muestra la región R limitada por las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$. Si A es la medida del

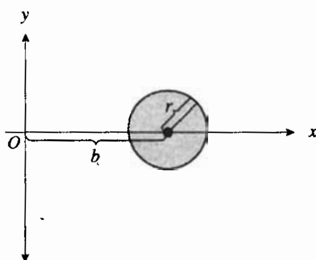


FIGURA 8

de R y si $\bar{x}$ es la abscisa del centroide de R, entonces el teorema establece que la medida del volumen V del sólido de revolución obtenido al girar R alrededor del eje y está dado por

$$V = 2\pi\bar{x}A \tag{2}$$

En el ejercicio 39 se le pedirá que demuestre el teorema de Pappus establecido como esta fórmula.

EJEMPLO 5 Aplique el teorema de Pappus para determinar el volumen del toro (forma de dona) generado al girar la circunferencia de radio r unidades alrededor de una recta de su plano a una distancia de b unidades de su centro, donde $b > r$.

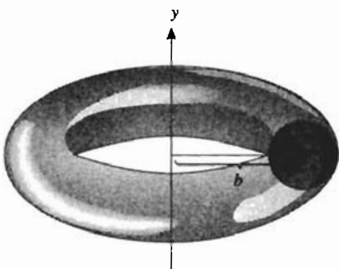


FIGURA 9

Solución Elija los ejes coordenados de modo que el centro de la circunferencia esté en el punto $(b, 0)$ del eje x. Vea la figura 8. El toro mostrado en la figura 9 se forma al girar la circunferencia alrededor del eje y. Del teorema 6.3.3, se deduce que el centroide de la región circular es el centro de la circunferencia. Por tanto, por el teorema de Pappus establecido como la fórmula (2), si V unidades cúbicas es el volumen del toro, entonces

$$V = (2\pi b)(\pi r^2)$$
$$= 2\pi^2 r^2 b$$

<u>**Conclusión:**</u> El volumen del toro es $2\pi^2 r^2 b$ unidades cúbicas ◀

EJERCICIOS 6.3

1. Determine el centro de masa de las tres partículas cuyas masas son de 1, 2 y 3 kg, las cuales están ubicadas en los puntos $(-1, 3)$, $(2, 1)$ y $(3, -1)$, respectivamente.
2. Obtenga el centro de masa de las cuatro partículas cuyas masas son de 2, 3, 3 y 4 kg, las cuales están ubicadas en los puntos $(-1, -2)$, $(1, 3)$, $(0, 5)$ y $(2, 1)$, respectivamente.
3. La coordenada y del centro de masa de cuatro partículas es 5. Las partículas tienen masas de 2, 5, 4 y m kg, las cuales están ubicadas en los puntos $(3, 2)$, $(-1, 0)$, $(0, 20)$ y $(2, -2)$, respectivamente. Determine m.
4. Obtenga el centro de masa de las tres partículas cuyas masas son de 3, 7 y 2 kg, las cuales están ubicadas en los puntos $(2, 3)$, $(-1, 4)$ y $(0, 2)$, respectivamente.
5. Determine el centro de masa de las tres partículas de igual masa, las cuales están ubicadas en los puntos $(4, -2)$, $(-3, 0)$ y $(1, 5)$.
6. Demuestre que el centro de masa de tres partículas de igual masa está en el punto de intersección de las medianas del triángulo que tiene como vértices a los puntos en los que se encuentran las partículas.

En los ejercicios 7 a 14, determine el centroide de la región limitada por las fronteras indicadas.

7. La parábola $y = 4 - x^2$ y el eje x.
8. La parábola $x = 2y - y^2$ y el eje y.
9. La parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$.
10. La parábola $y^2 = 4x$, el eje y y la recta $y = 4$.
11. Las curvas $y = x^3$ y $y = 4x$ en el primer cuadrante.
12. Las rectas $y = 2x + 1$, $x + y = 7$ y $x = 8$.
13. Las curvas $y = x^2 - 4$ y $y = 2x - x^2$.
14. Las curvas $y = x^2$ y $y = x^3$.
15. Determine el centro de masa de la lámina limitada por la parábola $2y^2 = 18 - 3x$ y el eje y, si la densidad de área (o superficial) en cualquier punto (x, y) es $\sqrt{6 - x}$ kilogramos por metro cuadrado.
16. Resuelva el ejercicio 15 si la densidad de área en cualquier punto (x, y) es x kilogramos por metro cuadrado.

En los ejercicios 17 a 24, necesitará una graficadora para determinar el centroide de la región del ejercicio indicado de la sección 4.8. Exprese la respuesta con cuatro dígitos significativos.

17. Ejercicio 39
18. Ejercicio 40
19. Ejercicio 41
20. Ejercicio 42

21. Ejercicio 43 **22.** Ejercicio 44

23. Ejercicio 45 **24.** Ejercicio 46

En los ejercicios 25 a 32, necesitará una graficadora para determinar el centroide de la región del ejercicio indicado de la sección 4.9. Exprese la respuesta con cuatro dígitos significativos.

25. Ejercicio 41 **26.** Ejercicio 42

27. Ejercicio 43 **28.** Ejercicio 44

29. Ejercicio 45 **30.** Ejercicio 46

31. Ejercicio 49 **32.** Ejercicio 50

33. Determine el valor de a si el centroide de la región limitada por la parábola $y^2 = 4px$ y la recta $x = a$, está en el punto $(p, 0)$.

34. Demuestre que la distancia del centroide de un triángulo a cualquier lado del triángulo es igual a un tercio de la longitud de la altura correspondiente al lado.

En los ejercicios 35 a 38, utilice el teorema de Pappus para determinar lo que se le pide.

35. El centroide de la región limitada por una semicircunferencia y su diámetro.

36. El volumen del cono circular recto cuyo radio de la base mide r unidades y cuya altura mide h unidades.

37. El momento con respecto a la recta $y = -r$ de la región limitada por la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y el eje x.

38. El volumen del sólido de revolución generado al girar la región del ejercicio 37 alrededor de la recta $x - y = r$. *Sugerencia:* Utilice el resultado del ejercicio 30 de la sección 3.9.

39. Demuestre el teorema de Pappus para volúmenes de sólidos de revolución establecido como la fórmula (2).

40. ¿Es el centroide de una región plana necesariamente un punto dentro de la región? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.



6.4 TRABAJO

En física se utiliza el término *trabajo* para caracterizar la energía de movimiento de un cuerpo cuando éste es movido cierta distancia debido a una fuerza que actúa sobre él, de modo que

trabajo es igual a fuerza por distancia

Por ejemplo, suponga que una fuerza constante de F libras actúa en el sentido del movimiento de un objeto que se desplaza hacia la derecha a lo largo del eje x desde un punto a hasta un punto b. Entonces si $b - a$ es el número de pies de la distancia que el objeto recorre, y si W es el número de libras por pie (denotadas por libras-pie o lb-pie) de trabajo realizado por la fuerza, entonces W está definido por

$$W = F(b - a) \tag{1}$$

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Si W libras-pie es el trabajo necesario para levantar un peso de 70 lb hasta una altura de 3 pie, entonces

$$\begin{aligned} W &= 70 \cdot 3 \\ &= 210 \end{aligned}$$

Así, el trabajo realizado es de 210 lb-pie. ◀

La unidad de medición para el trabajo depende de las unidades de fuerza y distancia. En el sistema inglés, donde la fuerza se mide en libras y la distancia en pies, el trabajo se mide en libras-pie. En el sistema SI, la unidad de fuerza es el newton, la unidad de distancia es el metro y la unidad de trabajo es un newton-metro denominado *joule* (J). En el sistema CGS la unidad de fuerza es la dina, la unidad de distancia es el centímetro y la unidad de trabajo es una dina-centímetro llamada *ergio* (erg). Para propósitos de conversión, 1 newton es igual a 10^5 dinas y 1 joule es igual a 10^7 ergios.

El ejemplo ilustrativo siguiente muestra el cálculo del trabajo empleando unidades del sistema SI.

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Se desea determinar el trabajo realizado al levantar una roca cuya masa es de 8 kg a una altura de 4 m. Se utiliza la fórmula $F = Ma$, donde F newtons es la fuerza necesaria para dar a la masa de M kg una aceleración de a metros por segundo cuadrado. En este caso la fuerza es la fuerza de gravedad y la aceleración es aquella debida a la gravedad, la cual es 9.81 m/s^2. La masa es 8 kg. Por tanto, $M = 8$ y $a = 9.81$, y

$$\begin{aligned} F &= 8(9.81) \\ &= 78.5 \end{aligned}$$

De este modo, se quiere determinar el trabajo realizado por una fuerza de 78.5 N y una distancia de 4 m. Si W joules es el trabajo, entonces

$$\begin{aligned} W &= (78.5)(4) \\ &= 314 \end{aligned}$$

En consecuencia, el trabajo realizado es de 314 joules. ◀

Ahora considere el trabajo realizado por una fuerza variable que actúa a lo largo de una recta en el sentido del movimiento. Se desea definir lo que significa el término "trabajo" en este caso.

Suponga que f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y que $f(x)$ unidades es la fuerza que actúa en el sentido del movimiento sobre un objeto que se desplaza hacia la derecha a lo largo del eje x de un punto a un punto b. Sea Δ una partición del intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

El i-ésimo subintervalo es $[x_{i-1}, x_i]$; y si x_{i-1} está cerca de x_i, entonces la fuerza es casi constante en este subintervalo. Si se supone que la fuerza es constante el i-ésimo subintervalo y w_i es cualquier punto tal que $x_{i-1} \leq w_i \leq x_i$, entonces si $\Delta_i W$ unidades de trabajo se realiza sobre el objeto conforme se mueve de x_{i-1} al punto x_i, de la formula (1) se tiene

$$\Delta_i W = f(w_i)(x_i - x_{i-1})$$

Al sustituir $x_i - x_{i-1}$ por $\Delta_i x$ se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta_i W &= f(w_i)\,\Delta_i x \\ \sum_{i=1}^{n} \Delta_i W &= \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x \end{aligned}$$

Cuanto más pequeña se tome la norma de la partición Δ, más grande será n y la suma de Riemann estará más cerca de lo que intuitivamente se piensa como la medida del trabajo total realizado. Por tanto, se define la medida del trabajo total como el límite de esta suma de Riemann.

6.4.1 Definición de trabajo

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x)$ unidades la fuerza que actúa sobre un objeto en el punto x del eje x. Si W unidades es el trabajo realizado por la fuerza conforme el objeto se desplaza de a a b, entonces

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x \\ &= \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Una partícula se mueve a lo largo del eje x debido a la acción de una fuerza de $f(x)$ libras cuando la partícula está a x pies del origen. Si $f(x) = x^2 + 4$, calcule el trabajo realizado conforme la partícula se mueve del punto donde $x = 2$ hasta el punto donde $x = 4$.

Solución Se toma una partición del intervalo cerrado [2, 4]. Si W libras-pie es el trabajo realizado cuando la partícula se mueve del punto donde $x = 2$ hasta el punto donde $x = 4$, entonces de la definición 6.4.1,

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x \\ &= \int_2^4 f(x)\,dx \\ &= \int_2^4 (x^2 + 4)\,dx \\ &= \frac{x^3}{3} + 4x\Big]_2^4 \\ &= \tfrac{64}{3} + 16 - \left(\tfrac{8}{3} + 8\right) \\ &= 26\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Conclusión: El trabajo realizado es de $26\frac{2}{3}$ lb-pie. ◀

En el siguiente ejemplo se utiliza la *ley de Hooke*, llamada así en honor del matemático británico **Robert Hooke** (1635-1703). La ley de Hooke establece que si un resorte se estira más allá de su longitud natural, sin llegar a su límite de elasticidad, se contrae con una fuerza igual a kx unidades, donde k es una constante que depende del material y del tamaño del resorte.

EJEMPLO 2 Un resorte tiene una longitud natural de 14 cm. Si una fuerza de 500 dinas se requiere para mantener el resorte estirado 2 cm, ¿cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte de su longitud natural hasta una longitud de 18 cm?

Solución Coloque el resorte a lo largo del eje x de modo que el origen quede en el punto donde empieza el estiramiento. Vea la figura 1. Sea $f(x)$ dinas la fuerza requerida para estirar el resorte x centímetros más allá de su longitud natural. Entonces, por la ley de Hooke,

$$f(x) = kx$$

Como $f(2) = 500$, se tiene

$$\begin{aligned} 500 &= k \cdot 2 \\ k &= 250 \end{aligned}$$

Así,

$$f(x) = 250x$$

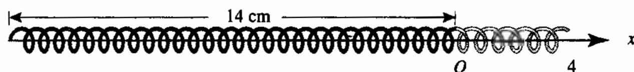


FIGURA 1

Debido a que el resorte se estira de 14 cm a 18 cm, se considera una partición del intervalo cerrado [0, 4] sobre el eje x. Sea $\Delta_i x$ centímetros la longitud del i-ésimo subintervalo y sea w_i cualquier punto de este subintervalo. Si W ergios es el trabajo realizado al estirar el resorte de 14 cm a 18 cm, entonces

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\, \Delta_i x \\ &= \int_0^4 f(x)\, dx \\ &= \int_0^4 250x\, dx \\ &= \frac{250}{2} x^2 \Big]_0^4 \\ &= 2000 \end{aligned}$$

Conclusión: El trabajo realizado al estirar el resorte es de 2000 ergios. ◀

En los ejemplos 3 y 4 tratan acerca del peso del agua. En el sistema SI el *peso específico* del agua es 9810 N/m^3, y en el sistema inglés es de 62.4 lb/pie^3.

▶ ***EJEMPLO 3*** Un tanque que contiene agua tiene la forma de un cono circular recto invertido, tiene un diámetro de 2 m en su parte superior y 1.5 m de profundidad. Si la superficie del agua está 0.5 m por debajo de la parte superior del tanque, determine el trabajo realizado para bombear el agua hasta la parte superior del tanque.

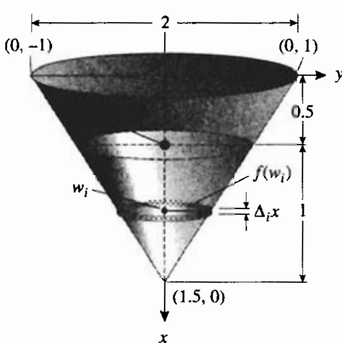


FIGURA 2

Solución Refiérase a la figura 2. La parte positiva del eje x se elige hacia abajo debido a que el movimiento es vertical. Se toma el origen en la parte superior del tanque. Ahora considere una partición del intervalo cerrado [0.5, 1.5] sobre el eje x, y sea w_i cualquier punto del i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Un elemento de volumen es un disco circular que tiene grosor $\Delta_i x$ metros y radio $f(w_i)$ metros, donde la función f está determinada por una ecuación de la recta que pasa por los puntos (0, 1) y (1.5, 0) en la forma $y = f(x)$. El volumen de este elemento es $\pi[f(w_i)]^2 \Delta_i x$ metros cúbicos. Como el peso de 1 m^3 de agua es de 9810 N, el peso del elemento es $9810\,\pi[f(w_i)]^2\, \Delta_i x$ newtons, el cual es la fuerza que actúa sobre el elemento. Si x_{i-1} está cerca de x_i, entonces la distancia que recorre el elemento es aproximadamente w_i metros. Así, el trabajo realizado al bombear el elemento a la parte superior del tanque es aproximadamente $(9810\pi[f(w_i)]^2\, \Delta_i x) \cdot w_i$ joules. De modo que si W joules es el trabajo efectuado, entonces

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 9810\pi[f(w_i)]^2 \cdot w_i\, \Delta_i x \\ &= 9810\pi \int_{0.5}^{1.5} [f(x)]^2 x\, dx \end{aligned}$$

A fin de determinar $f(x)$ se obtiene una ecuación de la recta que pasa por los puntos (0, 1) y (1.5, 0) empleando la forma pendiente-intercepción:

$$y = \frac{0-1}{1.5-0}x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\tfrac{2}{3}x + 1$$

Por tanto, $f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$, y

$$W = 9810\pi \int_{0.5}^{1.5} \left(-\tfrac{2}{3}x + 1\right)^2 x\, dx$$
$$= 9810\pi \int_{0.5}^{1.5} \left(\tfrac{4}{9}x^3 - \tfrac{4}{3}x^2 + x\right) dx$$
$$= 9810\pi \left[\tfrac{1}{9}x^4 - \tfrac{4}{9}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2\right]_{0.5}^{1.5}$$
$$= 1090\pi$$
$$\approx 3424$$

Conclusión: El trabajo realizado es de 3424 joules. ◀

▶ ***EJEMPLO 4*** Conforme se levanta un tanque que contiene agua, ésta se descarga a una tasa constante de 2 pie^3 por pie de altura. Si el peso del tanque es de 200 lb y originalmente contenía 1000 pie^3 de agua, determine el trabajo efectuado al subir el tanque 20 pie.

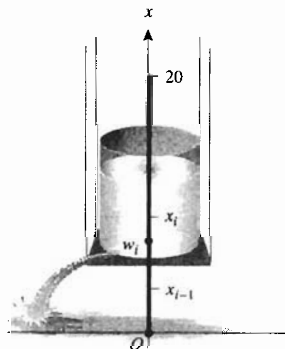


FIGURA 3

Solución Refiérase a la figura 3. En ella se considera el origen en el fondo del tanque y la parte positiva del eje x hacia arriba debido a que el movimiento es vertical hacia arriba desde O. Considere una partición del intervalo cerrado [0, 20] sobre el eje x. Sea w_i cualquier punto del i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Cuando el fondo del tanque está en w_i, existen $(1000 - 2w_i)$ pies cúbicos de agua en el tanque. Como el peso de 1 pie^3 de agua es de 62.4 lb, entonces el peso del tanque y su contenido, cuando está en w_i, es de $[200 + 62.4(1000 - 2w_i)]$ libras o $(62\,600 - 124.8w_i)$ libras, lo cual es la fuerza que actúa sobre el tanque. El trabajo realizado al subir el tanque a través del i-ésimo subintervalo es aproximadamente $(62\,600 - 124.8w_i)\,\Delta_i x$ libras-pie. Se emplea el término "aproximadamente" debido a que se supone que la cantidad de agua en el tanque es constante a través del subintervalo. Si W libras-pie es el trabajo total reali-zado al subir el tanque 20 pie, entonces

$$W = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (62\,600 - 124.8w_i)\,\Delta_i x$$
$$= \int_0^{20} (62\,600 - 124.8x)\, dx$$
$$= 62\,600x - 62.4x^2\Big]_0^{20}$$
$$\approx 1\,230\,000$$

Conclusión: El trabajo realizado es 1 230 000 lb-pie. ◀

EJERCICIOS 6.4.

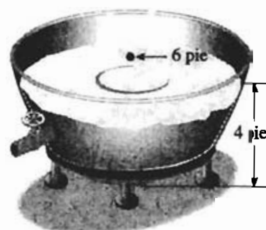
En los ejercicios 1 y 2, una partícula se mueve a lo largo del eje x debido a la acción de una fuerza de f(x) libras, dirigida a lo largo del eje x, cuando la partícula está a x pies del origen. Determine el trabajo realizado conforme la partícula se mueve del punto donde x = a al punto donde x = b.

1. $f(x) = (2x + 1)^2$; $a = 1$; $b = 3$

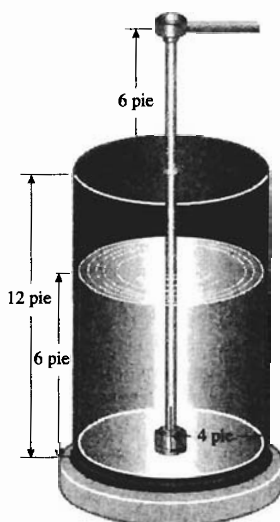
2. $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$; $x^2 a = 0$; $b = 2$

En los ejercicios 3 y 4, una partícula se mueve a lo largo del eje x debido a la acción de una fuerza de f(x) newtons, dirigida a lo largo del eje x, cuando la partícula está a x metros del origen. Determine el trabajo efectuado cuando la partícula se mueve del punto donde x = a al punto donde x = b.

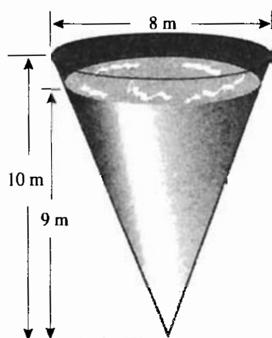
3. $f(x) = x\sqrt{x+1}$; $a = 3$; $b = 8$
4. $f(x) = (4x - 1)^2$; $a = 1$; $b = 4$
5. Un objeto se mueve a lo largo del eje x debido a la acción de una fuerza de $f(x)$ dinas cuando el objeto está a x centímetros del origen. Si el trabajo realizado al mover el objeto desde el origèn hasta el punto donde $x = K$ y $f(x) = 2x - 3$, es de 96 ergios, determine K si $K > 0$.
6. Resuelva el ejercicio 5 si el trabajo efectuado es de 90 ergios, y $f(x) = 4x - 3$.
7. Un resorte tiene una longitud natural de 8 pulg. Si una fuerza de 20 lb estira el resorte $\frac{1}{2}$ pulg, calcule el trabajo efectuado al estirar el resorte de 8 pulg a 11 pulg.
8. Un resorte tiene una longitud natural de 10 pulg, y una fuerza de 30 lb lo estira hasta $11\frac{1}{2}$ pulg. **(a)** Determine el trabajo realizado al estirar el resorte de 10 pulg a 12 pulg. **(b)** Calcule el trabajo efectuado al estirar el resorte de 12 pulg a 14 pulg.
9. Una fuerza de 8 N estira un resorte de su longitud natural de 4 m una longitud adicional de 50 cm. Determine el trabajo realizado al estirar el resorte de su longitud natural hasta una longitud de 5 m.
10. Una fuerza de 500 din estira un resorte de su longitud natural de 20 cm a una longitud de 24 cm. Calcule el trabajo efectuado al estirar el resorte de su longitud natural hasta una longitud de 28 cm.
11. Un resorte tiene una longitud natural de 12 cm. Una fuerza de 600 din lo comprime a 10 cm. Determine el trabajo realizado al comprimirlo de 12 cm a 9 cm. La ley de Hooke se cumple tanto para compresión como para el estiramiento.
12. Un resorte tiene una longitud natural de 6 pulg. Una fuerza de 1200 lb lo comprime a $5\frac{1}{2}$ pulg. Calcule el trabajo efectuado al comprimirlo de 6 pulg a $4\frac{1}{2}$ pulg.
13. Un tanque lleno de agua tiene la forma de un paralelepípedo rectangular de 5 pie de profundidad, 15 pie de ancho y 25 pie de largo. Determine el trabajo requerido para bombear el agua del tanque hasta un nivel de 1 pie por arriba de la superficie del tanque.
14. Una artesa llena de agua tiene 10 pie de largo y su sección transversal tiene la forma de un triángulo isósceles de 2 pie de ancho en su parte superior y 2 pie de altura. ¿Cuánto trabajo se efectúa al bombear toda el agua de la artesa por la parte superior.
15. Un tanque hemisférico, colocado de modo que su parte superior es una región circular cuyo radio es de 6 pie, se llena de agua hasta una altura de 4 pie. Calcule el trabajo realizado al bombear el agua hasta la parte superior del tanque.



16. Un tanque tiene la forma de un cilindro circular recto, de 12 pie de profundidad y un radio de 4 pie, está lleno hasta la mitad de aceite que pesa 60 lb/pie^3. Determine el trabajo realizado al bombear el aceite hasta una altura de 6 pie por arriba del tanque.



17. Un cable de 200 pie de longitud pesa 4 lb/pie y pende verticalmente en un pozo. Si se suspende un cuerpo cuyo peso es de 100 lb del extremo inferior del cable, determine el trabajo efectuado al subir el cable y el cuerpo hasta la parte superior del pozo.
18. Una cubeta que pesa 20 lb, y que contiene 60 libras de arena, está atada al extremo inferior de una cadena de 100 pie de longitud que pesa 10 lb y pende en un pozo profundo. Calcule el trabajo realizado al subir la cubeta a la parte superior del pozo.
19. Resuelva el ejercicio 18 si la arena sale de la cubeta a una razón constante y al llegar arriba se ha vaciado completamente.
20. Conforme se levanta un saco de harina hasta una altura de 9 pie, la harina escapa a una razón tal que el número de libras perdidas es proporcional a la raíz cuadrada de la altura alcanzada. Si el saco contenía originalmente 60 lb de harina y perdió un total de 12 lb mientras se levantó 9 pie, calcule el trabajo al levantar el saco.
21. Un tanque en forma de cilindro circular recto, cuya profundidad es de 10 m y cuyo radio mide 5 m, contiene agua hasta la mitad. Determine el trabajo necesario para bombear el agua hasta la parte superior del tanque.
22. Un tanque en forma de cono circular recto invertido tiene un diámetro de 8 m en su parte superior y una profundidad de 10 m. Si el tanque se llena a una altura de 9 m con agua, calcule el trabajo efectuado al bombear el agua hasta la parte superior del tanque.



23. Si el tanque del ejercicio 22 se llena a una altura de 8 m con aceite que pesa 950 kg/m^3, determine el trabajo realizado al bombear el aceite a la parte superior del tanque. *Sugerencia:* el número de newtons de fuerza necesaria para elevar un objeto es el producto del número de kilogramos de masa (el mismo que el número de kilogramos de peso) y 9.81, que es el número de metros por segundo cuadrado de la aceleración debida a la gravedad.

24. Si en el ejercicio 22, sólo se bombea la mitad de agua a la parte superior del tanque, calcule el trabajo.

25. Un motor de 1 caballo de fuerza (hp) puede realizar un trabajo de 550 lb-pie por segundo. Si se emplea un motor de 0.1 hp para bombear agua desde un tanque lleno que tiene forma de paralelepípedo rectangular, cuyas medidas son 2 pie de profundidad, 2 pie de ancho y 6 pie de largo, a un punto situado a 5 pie sobre la parte superior del tanque, ¿cuánto tardará en hacerlo?

26. Un meteorito está a a millas del centro de la Tierra y cae a la superficie de ésta. La fuerza de gravedad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de un cuerpo al centro de la Tierra. Calcule el trabajo realizado por la gravedad si el peso del meteorito es w libras en la superficie de la Tierra. Sean R millas el radio de la Tierra.

27. Un tanque tiene la forma de un paralelepípedo rectangular, cuyas medidas son 6 pie de profundidad, 4 pie de ancho y 12 pie de largo, está lleno de aceite que pesa 50 lb/pie^3. Cuando se ha realizado un tercio del trabajo necesario para bombear el aceite a la parte superior del tanque, determine cuánto disminuye el nivel del aceite.

28. Un tanque cilíndrico de 5 pie de radio y 10 pie de altura, que contiene agua, está colocado sobre una plataforma a 50 pie de altura. Calcule la profundidad del agua en el tanque cuando se ha efectuado la mitad del trabajo requerido para llenar el tanque desde el nivel del suelo mediante una tubería en el fondo.

29. Un recipiente tiene la forma de un sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x (con la parte positiva del eje x hacia abajo) la región limitada por la curva $y^2x = e^{-2x}$ y las rectas $x = 1$ y $x = 4$. Si el recipiente está lleno de agua, determine el trabajo al bombear el agua a 1 pie por arriba de la parte superior del recipiente. La distancia se mide en pies.

30. Si W libras-pulg es el trabajo realizado por un gas que se expande contra un pistón en un cilindro y P libras por pulgada cuadrada es la presión del gas cuando el volumen de éste es de V pulgadas cúbicas, demuestre que si V_1 pulgadas cúbicas y V_2 pulgadas cúbicas son los volúmenes inicial y final, respectivamente, entonces

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV$$

31. Suponga que un pistón comprime un gas en un cilindro de un volumen inicial de 60 pulg^3 a un volumen de 40 pulg^3. Si se cumple la ley de Boyle (vea el ejercicio 8 de la sección 2.6), y la presión inicial es de 50 lb/pulg^2, calcule el trabajo efectuado por el pistón. Utilice el resultado del ejercicio 30.

32. Explique las semejanzas y diferencias entre el uso científico del término *trabajo* y la definición de *trabajo* de Webster como “esfuerzo físico o mental para realizar algo”.

6.5 FUERZA EJERCIDA POR LA PRESIÓN DE UN LÍQUIDO

Otra aplicación de la integral definida en física consiste en determinar la fuerza ejercida por la presión de un líquido sobre una placa sumergida en él o sobre un lado del recipiente que lo contiene.

La **presión** de un líquido es la fuerza por unidad cuadrada de área ejercida por el peso del líquido. Así, si ρ es la medida de la densidad del líquido, entonces la presión ejercida por el líquido en un punto a h unidades debajo de la superficie del líquido es P unidades, donde

$$P = \rho h \tag{1}$$

Observe de (1) que el tamaño del recipiente no importa en lo que a la presión se refiere. Por ejemplo, a una profundidad de 5 pie en una alberca llena de agua salada la presión es la misma que a 5 pie en el Océano Pacífico, considerando que la densidad del agua sea la misma.

Suponga que se introduce horizontalmente una placa delgada en el líquido de un recipiente. Si A unidades cuadradas es el área de la placa sumergida y F es la medida de la fuerza ejercida por el líquido que actúa sobre la cara superior de la placa, entonces

$$F = PA$$

Si se sustituye de (1) en esta ecuación se obtiene

$$F = \rho h A$$

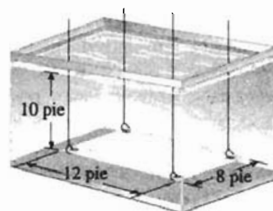


FIGURA 1

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Una lámina rectangular de hojalata de 8 pie por 12 pie se sumerge en un tanque que contiene agua a una profundidad de 10 pie. Vea la figura 1. Si P lb/pie² es la presión ejercida por el agua en un punto de la cara superior de la lámina, entonces

$$P = 10\rho$$

El área de la lámina es de 96 pie². De este modo, si F lb es la fuerza debida a la presión del agua que actúa sobre la cara superior de la lámina, entonces

$$F = 96P$$

Al sustituir 10ρ por P, se tiene

$$F = 960\rho$$

Como $\rho = 62.4$ en el sistema inglés,

$$\begin{aligned} F &= 960(62.4) \\ &= 60\,000 \end{aligned}$$

Por tanto, la fuerza ocasionada por la presión del agua sobre la cara superior de la lámina de hojalata es de 60 000 lb. ◀

Ahora suponga que se sumerge una placa delgada verticalmente en el líquido de un recipiente. Entonces, en puntos de la placa a diferentes profundidades la presión, calculada mediante (1), es diferente y será mayor en la parte inferior que en la parte superior de la placa. Para definir la presión causada por la presión de un líquido sobre esta placa vertical se utiliza el *principio de Pascal*, llamado así en honor al matemático francés **Blaise Pascal** (1623-1662).

Principio de Pascal: En cualquier punto de un líquido, la presión es la misma en todas las direcciones.

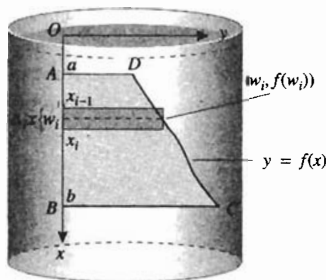


FIGURA 2

En la figura 2, sea $ABCD$ la región limitada por el eje x, las rectas $x = a$ y $x = b$, y la curva $y = f(x)$, donde la función f es continua y $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$. Elija los ejes coordenados de modo que el eje y quede sobre la superficie del líquido. Considere el eje x vertical con el sentido positivo hacia abajo, de modo que $f(x)$ unidades es la longitud de la placa a una profundidad de x unidades.

Sea Δ una partición del intervalo cerrado $[a, b]$ que divide al intervalo en n subintervalos. Elija un punto w_i en el i-ésimo subintervalo, de modo que $x_{i-1} \leq w_i \leq x_i$. Dibuje los n rectángulos horizontales. El i-ésimo rectángulo tiene una longitud de $f(w_i)$ unidades y un ancho de $\Delta_i x$ unidades (vea la figura 2).

Si se gira cada elemento rectangular un ángulo de 90°, cada elemento se convertirá en una placa sumergida horizontalmente en el líquido a una profundidad w_i unidades debajo de la superficie del líquido y perpendicular a la región *ABCD*. Entonces la medida de la fuerza sobre el *i*-ésimo elemento rectangular es $\rho w_i f(w_i)\ \Delta_i x$. Una aproximación de la medida de la fuerza total ejercida por la presión del líquido sobre la placa es

$$\sum_{i=1}^{n} \rho w_i f(w_i)\ \Delta_i x$$

la cual es una suma de Riemann. Cuanto más pequeña se tome $\|\Delta\|$, mayor será n y más cercana estará esta suma de Riemann de lo que deseamos que sea la medida de la fuerza total. De este modo, se tiene la siguiente definición.

6.5.1 Definición de fuerza ejercida por la presión de un líquido

Suponga que una placa se sumerge verticalmente en un líquido para el cual la medida de su densidad es ρ. La longitud de la placa a una profundidad de x unidades debajo de la superficie del líquido es $f(x)$ unidades, donde f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$. Si F es la medida de la **fuerza ejercida por a la presión del líquido** sobre la placa, entonces

$$F = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho w_i f(w_i)\ \Delta_i x$$

$$= \rho \int_a^b x f(x)\, dx$$

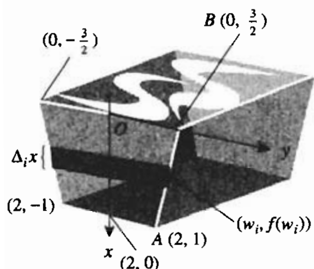


FIGURA 3

EJEMPLO 1 Una artesa, cuya sección transversal es un trapecio, está llena de agua. Si el trapecio mide 3 pie de ancho en su parte superior, 2 pie de ancho en su parte inferior, y 2 pie de profundidad, calcule la fuerza total ejercida por la presión del agua en un lado de forma trapezoidal de la artesa.

Solución La figura 3 muestra el lado de la artesa junto con un elemento rectangular de área. Puesto que una ecuación de la recta *AB* es $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x$,

$$f(x) = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{4}x$$

Si se gira el elemento rectangular un ángulo de 90°, la fuerza sobre el elemento es $2\rho w_i f(w_i)\ \Delta_i x$ libras. Si F libras es la fuerza total sobre el lado de la artesa, entonces

$$F = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\rho w_i f(w_i)\ \Delta_i x$$

$$= 2\rho \int_0^2 x f(x)\, dx$$

$$= 2\rho \int_0^2 x\left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{4}x\right) dx$$

$$= 2\rho \left[\tfrac{3}{4}x^2 - \tfrac{1}{12}x^3\right]_0^2$$

$$= \tfrac{14}{3}\rho$$

<u>**Conclusión:**</u> Con $\rho = 62.4$, la fuerza total es de 291 lb. ◀

EJEMPLO 2 Los extremos de un tanque para gasolina son regiones semicirculares, cada una con un radio de 2 pie. Determine la fuerza ejercida por la presión en un extremo si el tanque está lleno de gasolina, la cual tiene una densidad de 41 lb/pie³.

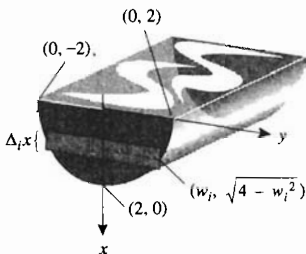


FIGURA 4

Solución La figura 4 muestra un extremo del tanque junto con un elemento rectangular de área. Al resolver la ecuación de la semicircunferencia para y se tiene $y = \sqrt{4 - x^2}$. La fuerza sobre el elemento rectangular es $2\rho w_i \sqrt{4 - w_i^2}\,\Delta_i x$ libras. Por tanto, si F libras es la fuerza total sobre el lado semicircular del tanque, entonces

$$
\begin{aligned}
F &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\rho w_i \sqrt{4 - w_i^2}\, \Delta_i x \\
&= 2\rho \int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}\, dx \\
&= -\tfrac{2}{3}\rho (4 - x^2)^{3/2} \Big]_0^2 \\
&= \tfrac{16}{3}\rho
\end{aligned}
$$

<u>**Conclusión:**</u> Con $\rho = 41$, la fuerza total es de 219 lb.

Existe una relación útil entre la fuerza ejercida por la presión de un líquido sobre una región plana y la ubicación del centroide de la región. Considere la región $ABCD$ de la figura 2 como la placa delgada sumergida verticalmente en un líquido como se describió en la definición 6.5.1. De la definición, si F es la medida de la fuerza debida a la presión del líquido sobre la placa, entonces

$$F = \rho \int_a^b x f(x)\, dx \tag{2}$$

Si x es la abscisa del centroide de la región $ABCD$, entonces $x = M_y/A$. Como $M_y = \int_a^b x f(x)\, dx$,

$$x = \frac{\int_a^b x f(x)\, dx}{A}$$

$$\int_a^b x f(x)\, dx = \bar{x}A$$

Al sustituir de esta ecuación en (2) se obtiene

$$F = \rho \bar{x} A \tag{3}$$

De (3) se deduce que la fuerza total ejercida por a la presión del líquido contra la región plana vertical es la misma que la que se obtendría si la placa estuviese en forma horizontal a una profundidad de x unidades debajo de la superficie del líquido.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Considere el tanque para gasolina del ejemplo 2. Los extremos del tanque son regiones semicirculares cada una con un radio de 2 pie. El área de la región es 2π pie², y del resultado del ejemplo 4 de la sección 6.3, el centroide de la región está a una profundidad de $8/(3\pi)$ pie. Por tanto, de (3), si F libras es la presión ejercida por el líquido sobre un extremo del tanque, entonces

$$F = \rho \frac{8}{3\pi}(2\pi)$$
$$= \tfrac{16}{3}\rho$$

lo que es acorde con el resultado del ejemplo 2. ◀

Los centroides de varias regiones planas pueden encontrarse en una tabla. Cuando el área y el centroide de la región pueden obtenerse directamente, la fórmula (3) es fácil de aplicar y en tales casos, es utilizada por los ingenieros para determinar la fuerza ejercida por la presión de un líquido.

En el ejemplo siguiente, se utilizan unidades del sistema SI, donde la densidad del agua es de 9810 N/m^3.

▶ ***EJEMPLO 3*** Un recipiente en la forma de cilindro circular recto tiene en la base un radio de 3 m, y está colocado de lado en el fondo de un tanque lleno de agua. La profundidad del tanque es de 13 m. Calcule la fuerza total ejercida por la presión del agua sobre un extremo del recipiente.

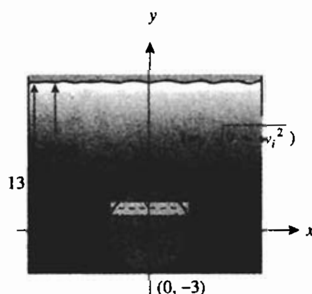


FIGURA 5

Solución La figura 5 muestra un extremo del recipiente dentro del tanque y un elemento rectangular de área. El sistema coordenado se elige de modo que el origen esté en el centro de la circunferencia. Una ecuación de esta circunferencia es $x^2 + y^2 = 9$. Si se resuelve esta ecuación para x se tiene $x = \sqrt{9 - y^2}$. El número de newtons de la fuerza sobre el elemento rectangular es

$$\rho(10 - w_i)[2\sqrt{9 - w_i^2}]\,\Delta_i y$$

De modo que si F newtons es la fuerza total sobre el extremo del recipiente, entonces

$$F = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(10 - w_i)[2\sqrt{9 - w_i^2}]\,\Delta_i y$$
$$= 2\rho \int_{-3}^{3} (10 - y)\sqrt{9 - y^2}\, dy$$

Como $\rho = 9810$, se tiene

$$F = 196\,200 \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2}\, dy - 19\,620 \int_{-3}^{3} y\sqrt{9 - y^2}\, dy \qquad \textbf{(4)}$$

Para evaluar $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2}\, dy$ se requiere una técnica de integración que se estudiará en la sección 7.3. Por el momento se puede determinar su valor al considerar la medida del área de la región encerrada por una semicircunferencia de radio 3. Por tanto,

$$\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2}\, dy = \tfrac{9}{2}\pi$$

Al sustituir este valor en (4) y evaluando la segunda integral se tiene

$$F = 196\,200(\tfrac{9}{2}\pi) + 19\,620\Big[\tfrac{1}{3}(9 - y^2)^{3/2}\Big]_{-3}^{3}$$
$$= 882\,9000\pi$$

<u>Conclusión:</u> La fuerza total es de 882 900π N. ◀

EJERCICIOS 6.5

1. Una placa rectangular de 10 pie de ancho y 8 pie de profundidad se sumerge verticalmente en un tanque que contiene agua de modo que el lado superior de la placa coincide con la superficie del agua. Calcule la fuerza ejercida por la presión del agua sobre una cara de la placa.

2. Una placa cuadrada de 4 pie por lado se sumerge verticalmente en un tanque que contiene agua y su centro está 2 pie debajo de la superficie. Determine la fuerza ejercida por la presión del agua sobre una cara de la placa.

3. Resuelva el ejercicio 2 si el centro de la placa está 4 pie debajo de la superficie.

4. Una placa en forma de triángulo rectángulo isósceles se sumerge verticalmente en un tanque que contiene agua, con un cateto en la superficie del agua. Los catetos miden cada uno 6 pie de longitud. Calcule la fuerza ejercida por a la presión del agua sobre una cara de la placa.

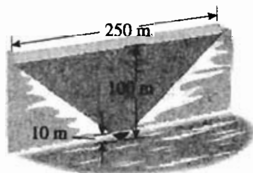
5. Un tanque rectangular lleno de agua tiene 2 pie de ancho y 18 pulg de profundidad. Determine la fuerza ejercida por la presión del agua en un extremo del tanque.

6. Los extremos de una artesa son triángulos equiláteros cuyos lados tiene una longitud de 2 pie. Si el agua de la artesa tiene 1 pie de profundidad, calcule la fuerza ejercida por la presión del agua en un extremo.

7. La cara de la compuerta de una presa tiene la forma de un triángulo isósceles de 4 m de ancho en su parte superior y una altura de 3 m. Si la lado superior de la cara de la compuerta está 15 m debajo de la superficie del agua, determine la fuerza total ejercida por la presión del agua en la compuerta.

8. La cara de la compuerta de una presa es vertical; y tiene la forma de un trapecio isósceles de 3 m de ancho en su parte superior, 4 m en su parte inferior y 3 m de altura. Si la base superior está a 20 m debajo del agua, calcule la fuerza total ejercida por la presión del agua en la compuerta.

9. La cara de una presa en contacto con el agua es vertical y tiene la forma de un triángulo isósceles de 250 m de ancho en su parte superior y 100 m de altura en su parte central. Si el agua tiene 10 m de profundidad en el centro, determine la fuerza total ejercida por la presión del agua en la cara de la presa.



10. Un tanque tiene la forma de cilindro circular recto con un diámetro de 4 m, y su eje es horizontal. Si el tanque está lleno hasta la mitad d⌐ aceite, cuya densidad es de 7360 N/m^3, calcule la fuerza total ejercida por la presión del líquido sobre uno de sus extremos.

11. Un tanque tiene la forma de cilindro circular recto con un radio de r metros y su eje es horizontal. Si el tanque está lleno hasta la mitad de aceite, cuya densidad es de 7 360 N/m^3, determine r si la fuerza total ejercida por la presión del líquido en un extremo del tanque es de 80 000 N.

12. Resuelva el ejercicio 4 utilizando la ecuación (3).

13. Resuelva el ejercicio 5 mediante la ecuación (3).

14. Resuelva el ejercicio 6 empleando la ecuación (3).

15. La cara de una presa en contacto con el agua es vertical y tiene la forma de un trapecio isósceles de 90 pie de ancho en su parte superior, 60 pie de ancho en la parte inferior y una altura de 20 pie. Utilice la ecuación (3) para calcular la fuerza total ejercida por la presión del agua en la cara de la presa.

16. Una placa semicircular de 3 pie de radio se sumerge verticalmente en un tanque que contiene agua, de modo que su diámetro coincide con la superficie del agua. Utilice la ecuación (3) para calcular la fuerza total ejercida por la presión del agua sobre una cara de la placa.

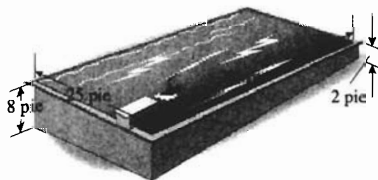
17. Calcule el momento de la fuerza del ejercicio 15 con respecto a la base inferior del trapecio.

18. Una placa tiene la forma de una región limitada por la parábola $x^2 = 6y$ y la recta $2y = 3$, y se coloca dentro de un tanque que contiene agua con su vértice hacia abajo y la recta sobre la superficie del agua. Determine la fuerza ejercida por la presión del agua sobre una cara de la placa, si la distancia se mide en metros.

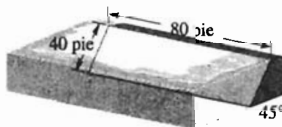
19. Un tanque cilíndrico está lleno hasta la mitad de gasolina, cuya densidad es de 42 lb/pie^3. Si el eje del cilindro es horizontal y su diámetro es de 6 pie, calcule la fuerza ejercida por la presión de la gasolina en un extremo del tanque.

20. Si el extremo de un tanque que contiene agua tiene la forma de un rectángulo y está lleno, demuestre que la medida de la fuerza ejercida por la presión del agua sobre el extremo es el producto de la medida del área del extremo y la medida de la fuerza en el centro geométrico.

21. El fondo de una alberca es un plano inclinado. La alberca tiene una profundidad de 2 pie en un extremo y 8 pie en el otro. Si el ancho de la alberca es de 25 pie y su longitud de 40 pie, determine la fuerza ejercida por la presión del agua sobre el fondo.



22. La cara de una presa, que está en contacto con el agua, está inclinada un ángulo de 45° con respecto a la vertical. La cara es un rectángulo de 80 pie de ancho y una altura inclinada de 40 pie. Si la presa está llena de agua, calcule la fuerza ejercida por la presión del agua sobre la cara.



23. La cara de una presa, que está en contacto con el agua, está inclinada un ángulo de 30° con respecto a la vertical. La forma de la cara es un rectángulo de 50 pie de ancho y una altura inclinada de 30 pie. Si la presa está llena de agua, determine la fuerza ejercida por la presión del agua sobre la cara.

24. Resuelva el ejercicio 23 si la cara de la presa es un trapecio isósceles de 120 pie de ancho en su parte superior, 80 pie de ancho en la parte inferior y 40 pie de altura.

25. Explique por qué las presas se construyen de modo que las paredes son más gruesas en la parte inferior que en la parte superior.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 6

SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 6

1. Establezca dos fórmulas que proporcionen la *longitud de arco* de la gráfica de la función f. ¿Qué condiciones debe satisfacer la función f a fin de aplicar estas dos fórmulas?

2. Invente un ejemplo donde una de las dos fórmulas de la sugerencia 1 puedan aplicarse.

3. Invente un ejemplo donde únicamente una de las fórmulas de la sugerencia 1 pueda aplicarse y explique por qué la otra fórmula no puede ser aplicada.

4. Si $s(x)$ denota la longitud de arco de la curva $y = f(x)$ desde el punto $(a, f(a))$ hasta el punto $(x, f(x))$, donde la función f satisface las condiciones pedidas en la sugerencia 1, establezca una fórmula que incluya a ds, dx y dy. Dé una interpretación geométrica de ds que proporcione una forma fácil de recordar está fórmula.

5. ¿Cómo determinaría la masa total de una barra si la *densidad lineal* varía a lo largo de la barra? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

6. ¿Cómo determinaría el *centro de masa* de una barra si la densidad lineal de la barra varía a lo largo de la barra? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

7. Si una barra tiene densidad constante, ¿dónde está ubicado su centro de masa? Justifique la respuesta aplicándola a la respuesta de la sugerencia 6.

8. ¿Cómo determinaría el *centroide de una región* limitada por una curva, el eje x y dos rectas verticales? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

9. ¿Cómo determinaría el centroide de una región plana limitada por dos curvas? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

10. ¿En qué consiste el *teorema de Pappus* y cómo puede emplearse para determinar el volumen de un sólido de revolución? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

11. Defina el significado científico de *trabajo*. Invente un ejemplo.

12. ¿Cómo calcularía el trabajo realizado por una fuerza variable que actúa a lo largo de una recta en el sentido del movimiento? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

13. ¿Cómo se utiliza la *ley de Hooke* para calcular el trabajo realizado por una fuerza utilizada para estirar un resorte? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

14. ¿Cómo calcularía el trabajo realizado al bombear el líquido de un tanque hacia afuera? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

15. ¿Cómo calcularía la *fuerza ejercida por la presión de un líquido* sobre una placa sumergida en un líquido si la cara de la placa es horizontal? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

16. ¿Cómo determinaría la fuerza ejercida por la presión de un líquido sobre una placa sumergida verticalmente en el líquido? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

17. ¿Cómo calcularía la fuerza ejercida por un líquido sobre una cara vertical de un recipiente? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

18. ¿Cuál es la relación entre la fuerza ejercida por la presión de un líquido sobre una región plana y la ubicación del centroide de la región? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 6

1. Calcule la longitud de arco de la curva $6y^2 = x(x - 2)^2$ desde el punto (2, 0) hasta el punto $(8, 4\sqrt{3})$.

2. Obtenga la longitud de arco de la curva $ay^2 = x^3$ desde el origen hasta el punto $(4a, 8a)$.

3. Determine la longitud de arco de la curva $9x^{2/3} + 4y^{2/3} = 36$ en el segundo cuadrante desde el punto donde $x = -1$ hasta el punto donde $x = -\frac{1}{8}$.

4. Calcule la longitud de arco de la curva $3y = (x^2 - 2)^{3/2}$ desde el punto donde $x = 3$ hasta el punto donde $x = 6$.

5. Tres partículas cuyas masas de 4, 2 y 7 kg, están ubicadas sobre el eje x en los puntos que tienen coordenadas −5, 4 y 2, respectivamente, donde la distancia se mide en metros. Determine el centro de masa del sistema.

6. Tres partículas tienen masas de 5, 2 y 8 slugs están ubicadas, respectivamente, en los puntos (−1, 3), (2, −1) y (5, 2). Determine el centro de masa si la distancia se mide en pies.

7. Obtenga las coordenadas del centro de masa de las cuatro partículas que tienen masas iguales y están ubicadas en los puntos (3, 0), (2, 2), (2, 4) y (−1, 2).

8. Tres partículas, con la misma masa, están ubicadas sobre el eje x en los puntos que tiene coordenadas −4, 1 y 5, donde la distancia se mide en metros. Determine las coordenadas del centro de masa del sistema.

9. La longitud de una barra es de 8 pulg y la densidad lineal de la barra en un punto ubicado a x pulgadas del extremo izquierdo es $2\sqrt{x + 1}$ slugs por pulgada. Calcule la masa total de la barra y el centro de masa.

10. La longitud de una barra es de 4 m y la densidad lineal de la barra en un punto ubicado a x metros del extremo izquierdo es $(3x + 1)$ kilogramos por metro. Determine la masa total de la barra y el centro de masa.

11. Obtenga el centroide de la región del primer cuadrante acotada por los ejes coordenados y la parábola $y = 9 - x^2$.

12. Determine el centroide de la región limitada por la parábola $y^2 = x$ y la recta $y = x - 2$.
13. Obtenga el centroide de la región acotada por las curvas $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$.
14. Determine el centroide de la región limitada superiormente por la parábola $4x^2 = 36 - 9y$ e inferiormente por el eje x.
15. Utilice el teorema de Pappus para determinar el volumen de una esfera de 4 m de radio.
16. Emplee el teorema de Pappus para calcular el volumen de un cono circular recto de 3 m de altura y cuya base tiene un radio de 2 m.

En los ejercicios 17 a 20, necesitará la graficadora para determinar el centroide de la región. Exprese la respuesta con cuatro dígitos significativos.

17. La región limitada por la gráfica de $y = \sqrt[3]{x^2 - 7}$ y el eje x.
18. La región acotada por las gráficas de $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ y $y = x^2 - 2x + 2$ y no intersectada por la recta $y = 4$.
19. La región limitada por las gráficas de $y = \cos x^2$ y $y = x^3$, y el eje y.
20. La región acotada por las gráficas de $y = \cos \sqrt{x}$ y $y = x^2$, y el eje y.

En los ejercicios 21 a 24, determine la longitud de arco con cuatro dígitos significativos al calcular la integral definida que resulte, utilizando NINT *en la graficadora.*

21. El arco de la curva $y = 4/x^2$ desde el punto $(1, 4)$ hasta el punto $(2, 1)$.
22. El arco de la curva $y = 8/x^3$ desde el punto $(1, 8)$ hasta el punto $(2, 1)$.
23. El arco de la curva $y = \tan x$ desde el origen hasta el punto donde $x = 1$.
24. El arco de la curva senoidal desde el punto donde $x = 1$ hasta el punto donde $x = 2$.
25. Calcule la longitud de la catenaria de $y = \cosh x$ desde el punto donde $x = \ln 2$ hasta el punto donde $x = \ln 3$.
26. Se requiere una fuerza de 500 lb para comprimir un resorte de su longitud natural de 10 pulg hasta una longitud de 9 pulg. Determine el trabajo realizado al comprimir el resorte hasta una longitud de 8 pulg.
27. Se necesita una fuerza de 600 din para estirar un resorte de su longitud natural de 30 cm hasta una longitud de 35 cm. Determine el trabajo efectuado al estirar el resorte de su longitud natural hasta una longitud de 40 cm.
28. El trabajo necesario para estirar un resorte de 9 pulg a 10 pulg es $\frac{3}{2}$ del trabajo necesario para estirarlo de 8 pulg a 9 pulg. ¿Cuál es la longitud natural del resorte?
29. Un cable de 20 pie de longitud y de 2 lb/pie de peso pende verticalmente de la parte superior de un poste. Determine el trabajo que se realiza al subir el cable completo hasta la parte superior del poste.
30. Una artesa llena de agua tiene 6 pie de longitud y su sección transversal tiene la forma de semicircunferencia con un diámetro de 2 pie en la parte superior. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear el agua hacia afuera por la parte superior.
31. Un tanque lleno de agua tiene la forma de un paralelepípedo rectangular de 4 m de profundidad, 15 m de ancho y 30 m de largo. Calcule el trabajo requerido para bombear el agua del tanque a un nivel de 50 cm por arriba de la parte superior del tanque.
32. Un recipiente tiene la misma forma y dimensiones que el sólido de revolución formado al girar alrededor del eje y la región del primer cuadrante limitada por la parábola $x^2 = 4py$, el eje y y la recta $y = p$. Si el recipiente está lleno de agua, determine el trabajo que se realiza al bombear toda el agua hasta un punto ubicado $3p$ pies por arriba de la parte superior del recipiente.
33. Un tanque tiene la forma de una semiesfera coronada por un cilindro circular recto. El radio de la semiesfera y del cilindro es de 4 pie, y la altura del cilindro es de 8 pie. Si el tanque está lleno de agua, calcule el trabajo necesario para vaciar el tanque bombeando el agua a través de un orificio de salida ubicado en la parte superior del tanque.
34. Un tanque hemisférico tiene un diámetro de 10 m y contiene agua hasta una profundidad de 3 m. Determine el trabajo que se realiza al bombear el agua hacia la parte superior del tanque.
35. Una placa tiene la forma de la región limitada por la parábola $x^2 = 6y$ y la recta $2y = 3$, se coloca dentro de un tanque con agua de modo que su vértice está en la parte inferior y la recta coincide con la superficie del agua. Calcule la fuerza ejercida por la la presión del agua sobre una cara de la placa si la distancia se mide en pies.
36. Una placa semicircular de 4 pie de radio se sumerge verticalmente en un tanque que contiene agua, de modo que su diámetro coincida con la superficie del agua. Utilice la ecuación (3) de la sección 6.5 para determinar la fuerza ejercida por la presión del agua sobre una cara de la placa.
37. Un tanque cilíndrico está lleno de gasolina, cuya densidad es de 40 lb/pie^3. Si el eje del cilindro es horizontal y su diámetro es de 8 pie, calcule la fuerza ejercida por la presión de la gasolina sobre un extremo del tanque.
38. La cara de una presa, que está en contacto con el agua está, inclinida 45° con respecto a la vertical. La cara es un rectángulo de 100 pie de ancho y una altura inclinada de 60 pie. Si la presa está llena de agua, determine la fuerza total ejercida por la presión del agua sobre la cara.
39. La superficie de un tanque es la misma que la de un paraboloide de revolución obtenido al girar la parábola $y = x^2$ alrededor del eje y. El vértice de la parábola está en el fondo del tanque y éste tiene 36 pie de altura. Si se llena el tanque con agua a una profundidad de 20 pie, calcule el trabajo que se realiza al bombear toda el agua hacia afuera por la parte superior.
40. Si

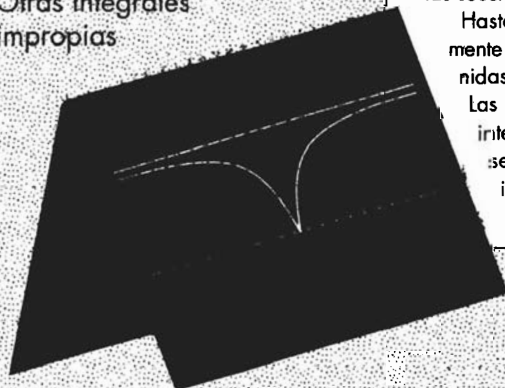
$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos t}\, dt$$

determine la longitud de arco de la gráfica de f desde el punto donde $x = \frac{1}{3}\pi$ hasta el punto donde $x = \frac{1}{2}\pi$. *Sugerencia:* utilice el primer teorema fundamental del Cálculo y la identidad $\cos^2 \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$.

Técnicas de integración, formas indeterminadas e integrales impropias

Capítulo 7

VISIÓN PRELIMINAR



Las primeras cinco secciones de este capítulo tratan sobre técnicas de integración. A pesar de que vivimos en la época de la electrónica, cuando los sistemas algebraicos computarizados pueden emplearse para calcular integrales, resulta necesario conocer ciertas técnicas de integración para expresar el integrando en una forma que la computadora pueda manejar o que puedan encontrarse en una tabla de integrales. Además, el desarrollo de las habilidades de cálculo es importante en todas las ramas de las matemáticas, de modo que los ejercicios de este capítulo le proporcionarán un buen entrenamiento.

Dos aplicaciones más se presentan en la sección 7.4: la *ley de acción de masas* estudiada en química, y *crecimiento logístico* que se presenta en economía, biología y sociología.

Los métodos numéricos para obtener un valor aproximado de una integral definida se estudian en la sección 7.6. Los cálculos mediante estos procesos son fácilmente realizados en la graficadora.

Los métodos para calcular ciertos límites que implican formas indeterminadas, mediante la aplicación de un teorema denominado *regla de L' Hôpital*, se estudian en las secciones 7.7 y 7.8.

Hasta antes de la sección 7.9 se consideran únicamente *integrales propias*, las cuales son integrales definidas de funciones continuas en un intervalo cerrado. Las *integrales impropias*, las cuales tienen límites de integración infinito o tienen un integrando que posee una discontinuidad infinita en los límites de integración, se presentan en las dos secciones finales de este capítulo.

7.1 INTEGRACIÓN POR PARTES

Antes de discutir las diferentes técnicas de integración, se presenta una lista numerada de las fórmulas típicas de integración indefinida estudiadas en los capítulos anteriores que ocurren con frecuencia.

1. $\int du = u + C$

2. $\int a\, du = au + C$ donde a es cualquier constante

3. $\int [f(u) + g(u)]\, du = \int f(u)\, du + \int g(u)\, du$

4. $\int u^n\, du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$

5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

6. $\int a^u\, du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$ donde $a > 0$ y $a \neq 1$

7. $\int e^u\, du = e^u + C$

8. $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$

9. $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$

10. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$

11. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$

12. $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$

13. $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$

14. $\int \tan u\, du = \ln|\sec u| + C$

15. $\int \cot u\, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

16. $\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

17. $\int \csc u\, du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

18. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C \qquad \text{donde } a > 0$

19. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C \qquad \text{donde } a \neq 0$

20. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C \qquad \text{donde } a > 0$

21. $\displaystyle\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

22. $\displaystyle\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

23. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$

24. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$

25. $\displaystyle\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$

26. $\displaystyle\int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$

27. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a} + C$

$$= \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C \qquad \text{si } a > 0$$

28. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\frac{u}{a} + C$

$$= \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C \qquad \text{si } u > a > 0$$

29. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\tanh^{-1}\dfrac{u}{a} + C & \text{si } |u| < a \\[2ex] \dfrac{1}{a}\coth^{-1}\dfrac{u}{a} + C & \text{si } |u| > a \end{cases}$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + u}{a - u}\right| + C \qquad \text{si } u \neq a \text{ y } a \neq 0$$

Una de las técnicas de integración más ampliamente usadas es la *integración por partes*, que se obtiene de la fórmula para la derivada del producto de dos funciones. Si f y g son funciones diferenciables, entonces

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

$$f(x)g'(x) = D_x[f(x)g(x)] - g(x)f'(x)$$

Al integrar cada miembro de esta ecuación se obtiene

$$\int f(x)g'(x)\, dx = \int D_x[f(x)g(x)]\, dx - \int g(x)f'(x)\, dx$$

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\, dx \tag{1}$$

La fórmula (1) recibe el nombre de **fórmula de integración por partes**. Para los propósitos de cálculo, una forma más conveniente de esta fórmula se obtiene al considerar

$$u = f(x) \quad \text{y} \quad v = g(x)$$

Entonces

$$du = f'(x)\,dx \quad \text{y} \quad dv = g'(x)\,dx$$

de modo que (1) se transforma en

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{2}$$

Esta fórmula expresa la integral $\int u\,dv$ en términos de otra integral, $\int v\,du$. Mediante una elección adecuada de u y dv, puede evaluarse más fácilmente la segunda integral que la primera. Cuando se eligen las sustituciones para u y dv, por lo general se considera que dv es el factor más complejo del integrando y puede integrarse directamente, y que u es una función cuya derivada es una función más simple. Este método se muestra mediante los ejemplos y ejemplos ilustrativos siguientes.



EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Se desea evaluar

$$\int x \ln x\,dx$$

A fin de determinar las sustituciones de u y dv, tenga en mente que para obtener v debe integrarse dv. Esto sugiere que se considere $dv = x\,dx$ y $u = \ln x$. Entonces,

$$v = \frac{x^2}{2} + C_1 \quad \text{y} \quad du = \frac{dx}{x}$$

Al sustituir los valores correspondientes en la fórmula (2) se obtiene

$$\begin{aligned}
\int x \ln x\,dx &= \ln x\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) - \int\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)\frac{dx}{x} \\
&= \frac{x^2}{2}\ln x + C_1 \ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx - C_1\int\frac{dx}{x} \\
&= \frac{x^2}{2}\ln x + C_1 \ln x - \frac{x^2}{4} - C_1 \ln x + C_2 \\
&= \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + C_2
\end{aligned}$$

◀

En el ejemplo ilustrativo 1 observe que la primer constante de integración C_1 no aparece en la respuesta final. C_1 se utiliza sólo para mostrar que todas las elecciones para v de la forma $\frac{1}{2}x^2 + C_1$ conducen al mismo resultado de $\int x \ln x\,dx$. Esta situación es verdad en general, y se demostrará como sigue: Al escribir $v + C_1$ en la fórmula (2) se tiene

$$\begin{aligned}
\int u\,dv &= u(v + C_1) - \int (v + C_1)\,du \\
&= uv + C_1 u - \int v\,du - C_1\int du
\end{aligned}$$

$$= uv + C_1u - \int v\,du - C_1u$$
$$= uv - \int v\,du$$

Por tanto, no es necesario escribir C_1 cuando se determina v a partir de dv.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Se verificará el resultado del ejemplo ilustrativo 1 mediante el cálculo de la derivada de la respuesta.

$$D_x\left(\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2\right) = x \ln x + \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}x$$
$$= x \ln x + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}x$$
$$= x \ln x$$ ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** A fin de evaluar

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx$$

se realiza una sustitución para los exponentes no lineales, lo cual debe ser una práctica común antes de aplicar cualquier otra técnica.

Sea $w = x^2$; por lo que $dw = 2x\,dx$. Entonces se tiene

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int x^2 e^{x^2}(2x\,dx)$$
$$= \frac{1}{2}\int we^w\,dw$$

Ahora se utiliza la integración por partes con $u = w$ y $dv = e^w dw$. Entonces

$$du = dw \quad \text{y} \quad v = e^w$$

Al efectuar las sustituciones correspondientes en la fórmula (2) se tiene

$$\frac{1}{2}\int we^w\,dw = \frac{1}{2}\left[we^w - \int e^w\,dw\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[we^w - e^w\right] + C$$

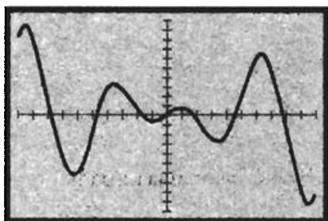
Al reemplazar w por x^2 se obtiene

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C$$ ◀

▶ ***EJEMPLO 1*** Evalúe

$$\int x \cos x\,dx$$

y apoye gráficamente la respuesta.



[−10, 10] por [−10, 10]

$y = x\cos x$ y NDER ($x \operatorname{sen} x + \cos x, x$)

FIGURA 1

Solución Sean $u = x$ y $dv = \cos x\, dx$. Entonces

$$du = dx \text{ y } v = \operatorname{sen} x$$

Por tanto,

$$\int x\cos x\, dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx$$
$$= x\operatorname{sen} x + \cos x + C$$

La figura 1 muestra las gráficas de

$$y = x\cos x \text{ y NDER } (x\operatorname{sen} x + \cos x, x)$$

trazadas en el rectángulo de inspección de [−10, 10] por [−10, 10]. El hecho de que las gráficas coincidan apoya la respuesta. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** En el ejemplo 1, si en lugar de elegir u y dv como se hizo se hubiese considerado

$$u = \cos x \text{ y } dv = x\, dx$$

entonces

$$du = -\operatorname{sen} x\, dx \text{ y } v = \tfrac{1}{2}x^2$$

Así,

$$\int x\cos x\, dx = \frac{x^2}{2}\cos x + \frac{1}{2}\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$$

La integral de la derecha es más complicada que la integral original, debido a que la potencia de x se ha incrementado, lo cual indica que éstas no son elecciones adecuadas para u y dv. ◀

La integración por partes se utiliza con frecuencia cuando el integrando contiene funciones trigonométricas inversas y logarítmicas.

▶ ***EJEMPLO 2*** Evalúe

$$\int \tan^{-1} x\, dx$$

Solución Sean $u = \tan^{-1} x$ y $dv = dx$. Entonces

$$du = \frac{dx}{1 + x^2} \text{ y } v = x$$

Por tanto,

$$\int \tan^{-1} x\, dx = x\tan^{-1} x - \int \frac{x\, dx}{1 + x^2}$$
$$= x\tan^{-1} x - \tfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$$ ◀

En el ejemplo siguiente, se tiene una integral en la que se requieren aplicaciones repetidas de la integración por partes.

EJEMPLO 3 Evalúe

$$\int (\ln x)^2\, dx$$

Solución Sean $u = (\ln x)^2$ y $dv = dx$. Entonces

$$du = 2 \ln x\left(\frac{1}{x}\, dx\right) \quad \text{y} \quad v = x$$

Por tanto,

$$\int (\ln x)^2\, dx = x(\ln x)^2 - \int x\left[2 \ln x\left(\frac{1}{x}\right) dx\right]$$

$$= x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\, dx$$

Otra vez se aplica la integración por partes. Sean $\bar{u} = \ln x$ y $d\bar{v} = dx$. Entonces,

$$d\bar{u} = \frac{1}{x} dx \quad \text{y} \quad \bar{v} = x$$

De modo que se obtiene

$$\int (\ln x)^2\, dx = x(\ln x)^2 - 2\left[x \ln x - \int x\left(\frac{1}{x}\, dx\right)\right]$$

$$= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2\int dx$$

$$= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$$

◀

EJEMPLO 4 Evalúe

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

Solución Sean $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x\, dx$. Entonces

$$du = e^x dx \quad \text{y} \quad v = -\cos x$$

Por tanto,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

La integral de la derecha es semejante a la primera integral, excepto que $\cos x$ aparece en lugar de $\operatorname{sen} x$. Se aplica la integración por partes otra vez considerando $\bar{u} = e^x$ y $d\bar{v} = \cos x\, dx$. Así,

$$d\bar{u} = e^x\, dx \quad \text{y} \quad \bar{v} = \operatorname{sen} x$$

Por tanto

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + \left(e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx\right)$$

En el miembro derecho se tiene la misma integral que en el izquierdo. Por lo que se suma $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$ en ambos miembros de la ecuación, obteniéndose

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x + 2C$$

Observe que el miembro derecho de la ecuación anterior contiene una constante arbitraria debido a que en el miembro izquierdo se tiene una integral indefinida. Esta constante arbitraria se escribió como $2C$ de modo que cuando se dividan los dos miembros entre 2, la constante arbitraria de la respuesta final será C. En consecuencia,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \tfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$ ◀

Al aplicar la integración por partes a una integral específica, un par de elecciones de u y dv puede funcionar mientras que otro no. Esto se vio en el ejemplo ilustrativo 4, y otro caso similar se presentará en el ejemplo ilustrativo 5.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** En el ejemplo 4, en el paso donde se tiene

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

si se evalúa la integral de la derecha considerando $\bar{u} = \cos x$ y $d\bar{v} = e^x\, dx$, se tiene

$$d\bar{u} = -\operatorname{sen} x\, dx \qquad \text{y} \qquad \bar{v} = e^x$$

De modo que se obtiene

$$\begin{aligned}\int e^x \operatorname{sen} x\, dx &= -e^x \cos x + \left(e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx\right)\\ &= \int e^x \operatorname{sen} x\, dx\end{aligned}$$

lo cual, por supuesto, es correcto pero no conduce a ninguna parte. ◀

La respuesta para una integral indefinida se puede apoyar empleando NINT en la graficadora para la integral definida correspondiente con una elección arbitraria de los límites de integración, como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 6** Se desea evaluar la integral definida obtenida de la integral indefinida del ejemplo 4 con 1 y 2 como límites de integración. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_1^2 e^x \operatorname{sen} x\, dx &= \tfrac{1}{2}e^x\Big[\operatorname{sen} x - \cos x\Big]_1^2\\ &= \tfrac{1}{2}e^2(\operatorname{sen} 2 - \cos 2) - \tfrac{1}{2}e(\operatorname{sen} 1 - \cos 1)\\ &= 4.487560335\end{aligned}$$

En la graficadora se tiene

$$\text{NINT}(e^x \operatorname{sen} x, 1, 2) = 4.487560335$$

lo cual apoya la respuesta anterior con diez dígitos significativos. Por supuesto, este procedimiento no es una prueba determinante de que no se han cometido errores algebraicos cuando se evalúa la integral indefinida, pero proporciona un apoyo poderoso a la respuesta. ◀

Las integrales que contienen potencias de funciones generalmente se evalúan mediante **fórmulas de reducción**, así llamadas debido a que la fórmula reduce el exponente de la potencia. Muchas de las fórmulas que aparecen en una tabla de integrales son fórmulas de reducción, algunas de las cuales se deducirán conforme se avance en este capítulo. En el ejemplo siguiente se obtiene la primera de estas fórmulas.

▶ ***EJEMPLO 5*** Deduzca la siguiente fórmula de reducción, donde n es cualquier número real.

$$\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx$$

Solución A fin de deducir la fórmula se utilizará integración por partes con $u = x^n$ y $dv = e^x \, dx$. Entonces

$$du = nx^{n-1} \, dx \quad \text{y} \quad v = e^x$$

Por tanto,

$$\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - \int e^x (nx^{n-1} \, dx)$$

$$= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx$$ ◀

La fórmula de reducción del ejemplo anterior aparece como la fórmula 98 en la tabla de integrales que se encuentran al final del libro. Esta fórmula de reducción se aplica en el ejemplo siguiente.

▶ ***EJEMPLO 6*** Utilice NINT en la graficadora para aproximar con seis dígitos significativos el valor de

$$\int_0^2 x^2 e^x \, dx$$

Confirme la respuesta aplicando la fórmula de reducción del ejemplo 5.

Solución En la graficadora se obtiene

$$\text{NINT}(x^2 e^x, 0, 2) = 12.7781$$

A partir de la fórmula de reducción del ejemplo 5 con $n = 2$, se tiene

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx$$

Otra vez se aplica la fórmula de reducción con $n = 1$, obteniéndose

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,dx\right)$$
$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Con este resultado se evalúa la integral definida.

$$\int_0^2 x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\Big]_0^2$$
$$= (4e^2 - 4e^2 + 2e^2) - 2e^0$$
$$= 2e^2 - 2$$
$$= 12.7781$$

lo cual confirma la respuesta. ◀

En los ejercicios 49 y 50 se le pedirá que deduzca las fórmulas siguientes, donde a y n son números reales diferentes de cero. Ellas corresponden a las fórmulas 105 y 106 de la tabla del final del libro.

$$\int e^{au} \operatorname{sen} nu\,du = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2}(a \operatorname{sen} nu - n \cos nu) + C \qquad (3)$$

$$\int e^{au} \cos nu\,du = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2}(a \cos nu + n \operatorname{sen} nu) + C \qquad (4)$$

En aplicaciones de ecuaciones diferenciales ocurren con frecuencia integrales de las formas (3) y (4) relacionadas con la electricidad.

EJERCICIOS 7.1

En los ejercicios 1 a 24, evalúe la integral indefinida. Verifique la respuesta mediante diferenciación, como en el ejemplo ilustrativo 2, apoye la respuesta con la graficadora, como en el ejemplo 1, o numéricamente, como en el ejemplo ilustrativo 6.

1. $\int xe^{3x}\,dx$ **2.** $\int x\cos 2x\,dx$

3. $\int x\sec x\tan x\,dx$ **4.** $\int x\,3^x\,dx$

5. $\int \ln 5x\,dx$ **6.** $\int \operatorname{sen}^{-1} w\,dw$

7. $\int \frac{(\ln t)^2}{t}\,dt$ **8.** $\int x\sec^2 x\,dx$

9. $\int x\tan^{-1} x\,dx$ **10.** $\int \ln(x^2 + 1)\,dx$

11. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$ **12.** $\int x^2 \operatorname{sen} 3x\,dx$

13. $\int \operatorname{sen}(\ln y)\,dy$ **14.** $\int \operatorname{sen} t\ln(\cos t)\,dt$

15. $\int e^x\cos x\,dx$ **16.** $\int x^5e^{x^2}\,dx$

17. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ **18.** $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{e^x}\,dx$

19. $\int x^2\operatorname{senh} x\,dx$ **20.** $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^x}}\,dx$

21. $\int \frac{\cot^{-1}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\,dz$ **22.** $\int \cos^{-1} 2x\,dx$

23. $\int \cos\sqrt{x}\,dx$ **24.** $\int \tan^{-1}\sqrt{x}\,dx$

En los ejercicios 25 a 32, calcule el valor exacto de la integral definida. Apoye la respuesta utilizando NINT *en la graficadora.*

25. $\int_0^2 x^2\,3^x\,dx$ **26.** $\int_{-1}^2 \ln(x + 2)\,dx$

27. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen} 3w\cos w\,dw$ **28.** $\int_{-\pi}^{\pi} z^2\cos 2z\,dz$

29. $\int_1^4 \sqrt{x}\, \ln x\, dx$ **30.** $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} x \cot x \csc x\, dx$

31. $\int_2^4 \sec^{-1} \sqrt{t}\, dt$ **32.** $\int_0^1 x \operatorname{sen}^{-1} x\, dx$

En los ejercicios 33 y 34, utilice NINT *en la graficadora para aproximar con seis dígitos significativos el valor de la integral definida y confirme la respuesta aplicando la fórmula de reducción del ejemplo 5.*

33. $\int_1^3 x^3 e^x\, dx$ **34.** $\int_0^4 x^2 e^{x/2}\, dx$

35. Determine el área de la región limitada por la curva $y = \ln x$, el eje x y la recta $x = e^2$.

36. Calcule el volumen del sólido generado al girar la región del ejercicio 35 alrededor del eje x.

37. Determine el volumen del sólido generado al girar la región del ejercicio 35 alrededor del eje y.

38. Calcule el área de la región acotada por la curva $y = x \csc^2 x$, el eje x y las rectas $x = \frac{1}{6}\pi$ y $x = \frac{1}{4}\pi$.

39. Determine el área de la región limitada por la curva $y = 2xe^{-x/2}$, el eje x y la recta $x = 4$.

40. Calcule el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x la región del ejercicio 39.

41. La densidad lineal de una barra en un punto situado a x metros de un extremo es $2e^{-x}$ kilogramos por metro. Si la barra mide 6 m de longitud, determine la masa y el centro de masa de la barra.

42. Determine el centroide de la región limitada por la curva $y = e^x$, los ejes coordenados y la recta $x = 3$.

43. Determine el centroide de la región del primer cuadrante acotada por las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$, y el eje y.

44. La región del primer cuadrante limitada por la curva $y = \cos x$ y las rectas $y = 1$ y $x = \frac{1}{2}\pi$ se gira alrededor de la recta $x = \frac{1}{2}\pi$. Calcule el volumen del sólido generado.

45. Un tanque lleno de agua tiene la forma de un sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x la región limitada por la curva $y = e^{-x}$, los ejes coordenados y la recta $x = 4$. Calcule el trabajo realizado al bombear toda el agua hacia la parte superior del tanque. La distancia se mide en pies. Considere la parte positiva del eje x verticalmente hacia abajo.

46. Una partícula se mueve a lo largo de una recta, y s pies es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Si v pies por segundo es la velocidad a los t segundos, $s = 0$ cuando $t = 0$, y $v \cdot s = t \operatorname{sen} t$, exprese s en términos de t y determine s cuando $t = \frac{1}{2}\pi$.

47. La función de costo marginal es C' y $C'(x) = \ln x$, donde $x > 1$. Determine la función de costo total si $C(x)$ dólares es el costo de producción de x unidades y $C(1) = 5$.

48. Un fabricante ha descubierto que si $100x$ unidades de un artículo particular se producen por semana, entonces el costo marginal está determinado por $x2^{x/2}$ y el ingreso marginal está determinado por $8 \cdot 2^{-x/2}$, donde el costo de producción y el ingreso se calculan en miles de dólares. Si el costo fijo semanal asciende a \$2 000, calcule la máxima utilidad semanal que puede obtenerse.

49. Deduzca la fórmula (3).

50. Deduzca la fórmula (4).

En los ejercicios 51 y 52, utilice NINT *en la graficadora para aproximar con seis dígitos significativos el valor de la integral definida y confirme la respuesta aplicando la fórmula (3) o (4) de esta sección.*

51. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} e^{4x} \operatorname{sen} 3x\, dx$ **52.** $\int_{\pi/8}^{\pi/4} e^{3x} \cos 4x\, dx$

53. **(a)** Deduzca la fórmula siguiente, donde n es cualquier número real:

$$\int x^n \ln x\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln x - 1] + C & \text{si } n \neq -1 \\ \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

(b) Utilice la fórmula del inciso (a) para determinar el valor exacto de

$$\int_1^3 x^3 \ln x\, dx$$

(c) Apoye la respuesta del inciso (b) empleando NINT en la graficadora.

54. Deduzca la fórmula siguiente, donde r y q son cualesquiera dos números reales.

$$\int x^r (\ln x)^q\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{r+1}(\ln x)^q}{r+1} - \dfrac{q}{r+1}\displaystyle\int x^r(\ln x)^{q-1}\, dx & \text{si } r \neq -1 \\ \dfrac{(\ln x)^{q+1}}{q+1} + C & \text{si } r = -1 \text{ y } q \neq -1 \\ \ln|\ln x| + C & \text{si } r = -1 \text{ y } q = -1 \end{cases}$$

55. Si $i(t)$ = coulombs por segundo es la corriente desde un capacitor cargado bajo decaimiento pasajero a través de un resistor a los t segundos, entonces

$$i(t) = \int_0^t xe^{-x}\, dx$$

Si $E(T)$ watts es la energía disipada para $t \in [0, T]$, entonces

$$E(T) = R\int_0^T [i(t)]^2\, dt$$

Donde R ohms es la resistencia. Si $R = 50$, ¿cuánta energía se ha disipado cuando $T = 1$?

56. Describa la técnica de integración por partes. Incluya en su descripción las directrices que deben seguirse al elegir las sustituciones para u y dv.

7.2 INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

Las **integrales trigonométricas** implican operaciones algebraicas sobre funciones trigonométricas. Ya se ha visto cómo evaluar algunas integrales trigonométricas mediante la aplicación de las fórmulas 8-17 listadas al principio de la sección 7.1. Ahora, se aplicarán estas fórmulas e identidades trigonométricas para evaluar integrales que contienen productos de potencias de funciones trigonométricas. Se comenzará con productos de potencias de seno y coseno, y se distinguirán tres casos que dependen de que los exponentes sean números enteros positivos pares o impares.

CASO 1 (i) $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ o (ii) $\int \cos^n x\,dx$, donde n es un número entero positivo impar

(i) Factor

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^n x\,dx &= (\operatorname{sen}^{n-1} x)(\operatorname{sen} x\,dx)\\ &= (\operatorname{sen}^2 x)^{(n-1)/2}(\operatorname{sen} x\,dx)\\ &= (1 - \cos^2 x)^{(n-1)/2}(\operatorname{sen} x\,dx)\end{aligned}$$

(ii) Factor

$$\begin{aligned}\cos^n x\,dx &= (\cos^{n-1} x)(\cos x\,dx)\\ &= (\cos^2 x)^{(n-1)/2}(\cos x\,dx)\\ &= (1 - \operatorname{sen}^2 x)^{(n-1)/2}(\cos x\,dx)\end{aligned}$$

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Se mostrará el caso 1(ii)

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \int \cos^2 x(\cos x\,dx)\\ &= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)(\cos x\,dx)\\ &= \int \cos x\,dx - \int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx \qquad (1)\end{aligned}$$

Para la segunda integral de (1) observe que como $d(\operatorname{sen} x) = \cos x\,dx$, se tiene

$$\int \operatorname{sen}^2 x(\cos x\,dx) = \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C_1$$

Debido a que la primera integral de (1) es $\operatorname{sen} x + C_2$,

$$\int \cos^3 x\,dx = \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$ ◀

 ***EJEMPLO 1*** Evalúe

$$\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$$

y apoye numéricamente la respuesta.

Solución Se procede como se sugirió en el caso 1(i).

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5 x\, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \int (1 - 2\cos^2 + \cos^4 x) \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \int \operatorname{sen}\ x\ dx - 2\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx + \int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx \\ &= -\cos x + 2\int \cos^2 x(-\operatorname{sen} x\, dx) - \int \cos^4 x(-\operatorname{sen} x\, dx) \\ &= -\cos x + \tfrac{2}{3}\cos^3 x - \tfrac{1}{5}\cos^5 x + C\end{aligned}$$

A fin de apoyar numéricamente la respuesta se calcula la integral definida correspondiente con una elección al azar de los límites de integración, por ejemplo, −2 y 3.

$$\int_{-2}^{3} \operatorname{sen}^5 x\, dx = -\cos x + \tfrac{2}{3}\cos^3 x - \tfrac{1}{5}\cos^5 x\Big]_{-2}^{3}$$

$$= -\cos 3 + \tfrac{2}{3}\cos^3 3 - \tfrac{1}{5}\cos^5 3 + \cos(-2) - \tfrac{2}{3}\cos^3(-2) + \tfrac{1}{5}\cos^5(-2)$$

$$= 0.1627341019$$

En la graficadora se obtiene

$$\text{NINT}(\operatorname{sen}^5 x, -2, 3) = 0.1627341019$$

lo cual es acorde con lo anterior y proporciona un apoyo poderoso para el valor de la integral indefinida. ◀

CASO 2 $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx$, donde al menos uno de los exponentes es un número entero positivo impar. En la solución de este caso se utiliza un método semejante al empleado en el caso 1.

(i) Si n es impar, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx &= \operatorname{sen}^{n-1} x \cos^m x(\operatorname{sen} x\, dx) \\ &= (\operatorname{sen}^2 x)^{(n-1)/2} \cos^m x(\operatorname{sen} x\, dx) \\ &= (1 - \cos^2 x)^{(n-1)/2} \cos^m x(\operatorname{sen} x\, dx)\end{aligned}$$

(ii) Si m es impar, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx &= \operatorname{sen}^n x \cos^{m-1} x(\cos x\, dx) \\ &= \operatorname{sen}^n x(\cos^2 x)^{(m-1)/2} (\cos x\, dx) \\ &= \operatorname{sen}^n x(1 - \operatorname{sen}^2 x)^{(m-1)/2} (\cos x\, dx)\end{aligned}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Se mostrará el caso 2(i).

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x(\operatorname{sen} x\, dx)$$
$$= \int (1 - \cos^2 x)\cos^4 x(\operatorname{sen} x\, dx)$$
$$= \int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx - \int \cos^6 x \operatorname{sen} x\, dx$$
$$= -\tfrac{1}{5}\cos^5 x + \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C$$

No se pueden seguir los procedimientos de los casos 1 y 2 para integrar potencias de seno y coseno cuando ningún exponente es impar. En tal caso se aplica una u otra de las identidades siguientes:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

CASO 3 (i) $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$, (ii) $\int \cos^n x\, dx$, o (iii) $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx$, donde m y n son números enteros positivos pares.

(i) Factor

$$\operatorname{sen}^n x\, dx = (\operatorname{sen}^2 x)^{n/2}\, dx$$
$$= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^{n/2} dx$$

(ii) Factor

$$\cos^n x\, dx = (\cos^2 x)^{n/2}\, dx$$
$$= \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^{n/2} dx$$

(iii) Factor

$$\operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx = (\operatorname{sen}^2 x)^{n/2}(\cos^2 x)^{m/2}\, dx$$
$$= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^{n/2}\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^{m/2} dx$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

EJEMPLO 2 Evalúe

$$\int \cos^4 x\, dx$$

Solución Esta integral pertenece al caso 3(ii).

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x\,dx &= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx\\ &= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx\\ &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx\\ &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx\\ &= \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{8}x + \tfrac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C\\ &= \tfrac{3}{8}x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C\end{aligned}$$

◀

▶ ***EJEMPLO 3*** Determine el centroide de la región del primer cuadrante ubicada a la izquierda de la recta $x = \frac{1}{2}\pi$ y limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$, el eje x y la recta $x = \frac{1}{2}\pi$.

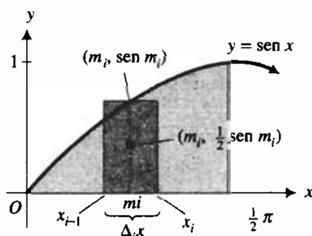


FIGURA 1

Solución Se utilizan los símbolos A, M_x, M_y, $\bar{x}$ y $\bar{y}$ como se definieron en la sección 6.3. En la figura 1 se muestra la región y el i-ésimo elemento rectangular de área. Primero se calcula el área de la región.

$$\begin{aligned}A &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} m_i\,\Delta_i x\\ &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx\\ &= -\cos x\Big]_0^{\pi/2}\\ &= 1\end{aligned}$$

Después se aplica la definición 6.3.2 para calcular M_x y M_y. A fin de evaluar la integral para M_y se utiliza integración por partes con $u = x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$.

$$\begin{aligned}M_x &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen} m_i]^2\,\Delta_i x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2}dx\\ &= \tfrac{1}{4}\Big[x - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\Big]_0^{\pi/2}\\ &= \tfrac{1}{4}\Big[\tfrac{1}{2}\pi\Big]\\ &= \tfrac{1}{8}\pi\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}M_y &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \operatorname{sen} m_i\,\Delta_i x\\ &= \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\,dx\\ &= -x\cos x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx\\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2}\\ &= -\tfrac{1}{2}\pi\cos\tfrac{1}{2}\pi + \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\pi\\ &= 1\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{1}{8}\pi}{1} = \frac{1}{8}\pi$$

Conclusión: El centroide está en el punto $(1, \frac{1}{8}\pi)$. ◀

El ejemplo siguiente presenta otro tipo de integral que contiene un producto de seno y coseno.

▶ *EJEMPLO 4* Evalúe

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x \, dx$$

Solución Se aplica la identidad trigonométrica siguiente:

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(m - n)x + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(m + n)x$$

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x \, dx &= \int \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 5x\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x \, dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 5x \, dx \\ &= -\tfrac{1}{2}\cos x - \tfrac{1}{10}\cos 5x + C\end{aligned}$$ ◀

Para evaluar integrales de la forma

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx \quad \text{y} \quad \int \cot^m x \csc^n x \, dx \tag{2}$$

donde m y n son números enteros no negativos, se aplican las identidades

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \quad \text{y} \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

$$\begin{aligned}\int \cot^2 x \, dx &= \int (\csc^2 x - 1) \, dx \\ &= \int \csc^2 x \, dx - \int dx \\ &= -\cot x - x + C\end{aligned}$$ ◀

CASO 4 (i) $\int \tan^n x \, dx$ o (ii) $\int \cot^n x \, dx$, donde n es un número entero positivo.

(i) Factor

$$\begin{aligned}\tan^n x \, dx &= \tan^{n-2} x \tan^2 x \, dx \\ &= \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1) \, dx\end{aligned}$$

(ii) Factor

$$\cot^n x\,dx = \cot^{n-2} x \cot^2 x\,dx$$
$$= \cot^{n-2} x(\csc^2 x - 1)\,dx$$

▶ ***EJEMPLO 5*** Evalúe

$$\int \tan^3 x\,dx$$

Solución Se utiliza el método sugerido por el caso 4(i).

$$\int \tan^3 x\,dx = \int \tan x(\sec^2 x - 1)\,dx$$
$$= \int \tan x \sec^2 x\,dx - \int \tan x\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$$ ◀

▶ ***EJEMPLO 6*** Evalúe

$$\int \cot^4 3x\,dx$$

Solución Esta integral pertenece al caso 4(ii).

$$\int \cot^4 3x\,dx = \int \cot^2 3x(\csc^2 3x - 1)\,dx$$
$$= \int \cot^2 3x \csc^2 3x\,dx - \int \cot^2 3x\,dx$$
$$= \tfrac{1}{9}(-\cot^3 3x) - \int (\csc^2 3x - 1)\,dx$$
$$= -\tfrac{1}{9}\cot^3 3x + \tfrac{1}{3}\cot 3x + x + C$$ ◀

CASO 5 (i) $\int \sec^n x\,dx$ o (ii) $\int \csc^n x\,dx$, donde n es un número entero positivo par.

(i) Factor

$$\sec^n x\,dx = \sec^{n-2} x(\sec^2 x\,dx)$$
$$= (\sec^2 x)^{(n-2)/2}(\sec^2 x\,dx)$$
$$= (\tan^2 x + 1)^{(n-2)/2}(\sec^2 x\,dx)$$

(ii) Factor

$$\csc^n x\,dx = \csc^{n-2} x(\csc^2 x\,dx)$$
$$= (\csc^2 x)^{(n-2)/2}(\csc^2 x\,dx)$$
$$= (\cot^2 x + 1)^{(n-2)/2}(\csc^2 x\,dx)$$

EJEMPLO 7 Evalúe

$$\int \csc^6 x\, dx$$

Solución Se sigue el procedimiento indicado en el caso 5(ii).

$$\begin{aligned}\int \csc^6 x\, dx &= \int (\cot^2 x + 1)^2 \csc^2 x\, dx \\ &= \int \cot^4 x \csc^2 x\, dx + 2\int \cot^2 x \csc^2 x\, dx + \int \csc^2 x\, dx \\ &= -\tfrac{1}{5}\cot^5 x - \tfrac{2}{3}\cot^3 x - \cot x + C\end{aligned}$$

CASO 6 (i) $\int \tan^n x \sec^m x\, dx$ o (ii) $\int \cot^n x \csc^m x\, dx$, donde m es un número entero positivo par.

(i) Factor

$$\begin{aligned}\tan^n x \sec^m x\, dx &= \tan^n x \sec^{m-2} x(\sec^2 x\, dx) \\ &= \tan^n x(\sec^2 x)^{(m-2)/2}(\sec^2 x\, dx) \\ &= \tan^n x(\tan^2 x + 1)^{(m-2)/2}(\sec^2 x\, dx)\end{aligned}$$

(ii) Factor

$$\begin{aligned}\cot^n x \csc^m x\, dx &= \cot^n x \csc^{m-2} x(\csc^2 x\, dx) \\ &= \cot^n x(\csc^2 x)^{(m-2)/2}(\csc^2 x\, dx) \\ &= \cot^n x(\cot^2 x + 1)^{(m-2)/2}(\csc^2 x\, dx)\end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Evalúe

$$\int \tan^5 x \sec^4 x\, dx$$

Solución Se procede como se sugirió en el caso 6(i).

$$\begin{aligned}\int \tan^5 x \sec^4 x\, dx &= \int \tan^5 x(\tan^2 x + 1)\sec^2 x\, dx \\ &= \int \tan^7 x \sec^2 x\, dx + \int \tan^5 x \sec^2 x\, dx \\ &= \tfrac{1}{8}\tan^8 x + \tfrac{1}{6}\tan^6 x + C\end{aligned}$$

CASO 7 (i) $\int \tan^n x \sec^m x\, dx$ o (ii) $\int \cot^n x \csc^m x\, dx$, donde n es un número entero positivo impar.

(i) Factor

$$\begin{aligned}\tan^n x \sec^m x\, dx &= \tan^{n-1} x \sec^{m-1} x(\sec x \tan x\, dx) \\ &= (\tan^2 x)^{(n-1)/2} \sec^{m-1} x(\sec x \tan x\, dx) \\ &= (\sec^2 x - 1)^{(n-1)/2} \sec^{m-1} x(\sec x \tan x\, dx)\end{aligned}$$

(ii) Factor

$$\begin{aligned}\cot^n x \csc^m x\, dx &= \cot^{n-1} x \csc^{m-1} x(\csc x \cot x\, dx)\\ &= (\cot^2 x)^{(n-1)/2} \csc^{m-1} x(\csc x \cot x\, dx)\\ &= (\csc^2 x - 1)^{(n-1)/2} \csc^{m-1} x(\csc x \cot x\, dx)\end{aligned}$$

EJEMPLO 9 Evalúe

$$\int \tan^5 x \sec^7 x\, dx$$

Solución Esta integral pertenece al caso 7(i).

$$\begin{aligned}\int \tan^5 x \sec^7 x\, dx &= \int \tan^4 x \sec^6 x \sec x \tan x\, dx\\ &= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^6 x(\sec x \tan x)\, dx\\ &= \int (\sec^{10} x - 2\sec^8 x + \sec^6 x)(\sec x \tan x\, dx)\\ &= \tfrac{1}{11}\sec^{11} x - \tfrac{2}{9}\sec^9 x + \tfrac{1}{7}\sec^7 x + C\end{aligned}$$

Se han dejado dos casos de potencias impares de la secante y la cosecante hasta el final debido a que estos casos requieren un concepto diferente que implica integración por partes. El proceso se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 10 Evalúe

$$\int \sec^3 x\, dx$$

Solución Para la integración por partes, considere $u = \sec x$ y $dv = \sec^2 x\, dx$. Entonces

$$du = \sec x \tan x\, dx \quad \text{y} \quad v = \tan x$$

Por tanto,

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

Al sumar $\int \sec^3 x\, dx$ en los dos miembros se obtiene

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + 2C$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \tfrac{1}{2}\sec x \tan x + \tfrac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

CASO 8 (i) $\int \sec^n x\,dx$ o (ii) $\int \csc^n x\,dx$, donde n es un número entero positivo impar.

Aplique integración por partes.

(i) Considere $u = \sec^{n-2} x$ y $dv = \sec^2 x\,dx$.

(ii) Considere $u = \csc^{n-2} x$ y $dv = \csc^2 x\,dx$.

A fin de integrar una potencia impar de la secante o cosecante, puede aplicarse una fórmula de reducción, como las proporcionadas por las fórmulas 77 y 78 de la tabla de integrales del final del libro. Se le pedirá que deduzca la fórmula 77 y la aplique para evaluar $\int \sec^5 x\,dx$ en el ejercicio 65.

CASO 9 (i) $\int \tan^n x \sec^m x\,dx$ o (ii) $\int \cot^n x \csc^m x\,dx$, donde n es un número entero positivo par y m es un número entero positivo impar.

Exprese el integrando en términos de potencias impares de la secante o cosecante y después siga las sugerencias del caso 8.

(i) Factor

$$\begin{aligned}\tan^n x \sec^m x\,dx &= (\tan^2 x)^{n/2} \sec^m x\,dx\\ &= (\sec^2 x - 1)^{n/2} \sec^m x\,dx\end{aligned}$$

(ii) Factor

$$\begin{aligned}\cot^n x \csc^m x\,dx &= (\cot^2 x)^{n/2} \csc^m x\,dx\\ &= (\csc^2 x - 1)^{n/2} \csc^m x\,dx\end{aligned}$$



EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \sec^3 x\,dx &= \int (\sec^2 x - 1)\sec^3 x\,dx\\ &= \int \sec^5 x\,dx - \int \sec^3 x\,dx\end{aligned}$$

Para evaluar estas integrales utilice integración por partes, como en el ejemplo 10, o una fórmula de reducción de la tabla de integrales. ◀

EJERCICIOS 7.2

En los ejercicios 1 a 34, evalúe la integral indefinida. Como usted desee, verifique la respuesta mediante diferenciación o apoye la respuesta con la graficadora, gráfica o numéricamente, como en el ejemplo 1.

1. **(a)** $\int \operatorname{sen}^4 x \cos x\,dx$ **(b)** $\int \cos^3 4x \operatorname{sen} 4x\,dx$

2. **(a)** $\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx$ **(b)** $\int \cos^6 \tfrac{1}{2}x \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}x\,dx$

3. **(a)** $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$ **(b)** $\int \cos^2 \tfrac{1}{2}x\,dx$

4. **(a)** $\int \cos^5 x\,dx$ **(b)** $\int \operatorname{sen}^2 3x\,dx$

5. **(a)** $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx$ **(b)** $\int \sqrt{\cos z}\,\operatorname{sen}^3 z\,dz$

6. **(a)** $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\,dx$ **(b)** $\int \dfrac{\cos^3 3x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} 3x}}\,dx$

7. $\int \cos 4x \cos 3x\, dx$

8. $\int \text{sen } 2x \cos 4x\, dx$

9. $\int \text{sen } 3y \cos 5y\, dy$

10. $\int \cos t \cos 3t\, dt$

11. $\int \tan^2 5x\, dx$

12. $\int e^x \tan^2(e^x)\, dx$

13. $\int x \cot^2 2x^2\, dx$

14. $\int \cot^2 4t\, dt$

15. $\int \cot^3 t\, dt$

16. $\int \tan^4 x\, dx$

17. $\int \tan^6 3x\, dx$

18. $\int \csc^3 x\, dx$

19. $\int \sec^4 x\, dx$

20. $\int \cot^5 2x\, dx$

21. $\int e^x \tan^4(e^x)\, dx$

22. $\int \frac{\sec^4 (\ln x)}{x}\, dx$

23. $\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx$

24. $\int \tan^5 x \sec^3 x\, dx$

25. $\int \cot^2 3x \csc^4 3x\, dx$

26. $\int (\sec 5x + \csc 5x)^2\, dx$

27. $\int (\tan 2x + \cot 2x)^2\, dx$

28. $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$

29. $\int \frac{2 \text{ sen } w - 1}{\cos^2 w}\, dw$

30. $\int \frac{\tan^3 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

31. $\int \frac{\csc^4 x}{\cot^2 x}\, dx$

32. $\int \frac{\tan^4 y}{\sec^5 y}\, dy$

33. $\int \frac{\sec^3 x}{\tan^4 x}\, dx$

34. $\int \frac{\text{sen}^2 \pi x}{\cos^6 \pi x}\, dx$

En los ejercicios 35 a 48, determine el valor exacto de la integral definida. Apoye la respuesta utilizando NINT *en la graficadora.*

35. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\, dx$

36. $\int_0^{\pi/3} \text{sen}^3 t \cos^2 t\, dt$

37. $\int_0^1 \text{sen}^4 \tfrac{1}{2}\pi x\, dx$

38. $\int_0^1 \text{sen}^3 \tfrac{1}{2}\pi t\, dt$

39. $\int_0^1 \text{sen}^2 \pi t \cos^2 \pi t\, dt$

40. $\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}x \cos^2 \tfrac{1}{2}x\, dx$

41. $\int_0^{\pi/8} \text{sen } 3x \cos 5x\, dx$

42. $\int_0^{\pi/6} \text{sen } 2x \cos 4x\, dx$

43. $\int_{\pi/16}^{\pi/12} \tan^3 4x\, dx$

44. $\int_{\pi/8}^{\pi/6} 3 \sec^4 2t\, dt$

45. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^6 x\, dx$

46. $\int_0^{\pi/3} \frac{\tan^3 x}{\sec x}\, dx$

47. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^4 t}{\text{sen}^6 t}\, dt$

48. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cot^3 w\, dw$

49. Calcule el área de la región acotada por la curva $y = \text{sen}^2 x$ y el eje x desde $x = 0$ hasta $x = \pi$.

50. Determine el volumen del sólido de revolución generado al girar un arco de la curva senoidal alrededor del eje x.

51. Calcule el volumen del sólido de revolución generado si la región del ejercicio 49 se gira alrededor del eje x.

52. La región limitada por el eje y y las curvas $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$ para $0 \le x \le \frac{1}{4}\pi$, se gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido de revolución generado.

53. Determine el volumen del sólido de revolución generado si la región del ejercicio 49 se gira alrededor de la recta $y = 1$.

54. La región del primer cuadrante acotada por la curva $y = \cos x$ y las rectas $y = 1$ y $x = \frac{1}{2}\pi$, se gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido generado.

55. Determine el centroide de la región desde $x = 1$ hasta $x = \frac{1}{2}\pi$ limitada por la curva $y = \cos x$ y el eje x.

56. Determine el centroide de la región del ejercicio 52.

57. Determine el área de la región limitada por la curva $y = \tan^2 x$, el eje x y la recta $x = \frac{1}{4}\pi$.

58. Calcule el volumen del sólido de revolución generado al girar, alrededor del eje x, la región acotada por la curva $y = 3 \csc^3 x$, el eje x y las rectas $x = \frac{1}{6}\pi$ y $x = \frac{1}{2}\pi$.

59. Determine el volumen del sólido de revolución generado si la región limitada por la curva $y = \sec^2 x$, los ejes coordenados y la recta $x = \frac{1}{4}\pi$, se gira alrededor del eje x.

60. La cara de una presa tiene la forma de un arco de la curva $y = -100 \cos \frac{1}{200}\pi x$, $x \in [-100, 100]$, y la superficie del agua está hasta la parte superior de la presa. Determine la fuerza debida a la presión del agua sobre la cara de la presa si la distancia se mide en pies.

61. Si n es cualquier número entero positivo, demuestre que

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^2 nx\, dx = \tfrac{1}{2}\pi$$

62. Si n es un número entero positivo impar, demuestre que

$$\int_0^{\pi} \cos^n x\, dx = 0$$

En los ejercicios 63 y 64, demuestre que la fórmula es verdadera, donde m y n son cualesquiera dos números enteros positivos.

63. $\int_{-1}^{1} \cos n\pi x \text{ sen } m\pi x\, dx = 0$

64. $\int_{-1}^{1} \text{sen } n\pi x \text{ sen } m\pi x\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \ne n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$

65. (**a**) Deduzca la fórmula de reducción siguiente, donde $n \geq 2$ y n es un número entero:

$$\int \sec^n x\, dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\, dx$$

(**b**) Aplique la fórmula de reducción del inciso (a) para evaluar $\int \sec^5 x\, dx$

66. Aplique la fórmula de reducción del ejercicio 65 para evaluar cada una de las integrales siguientes:

(**a**) $\int \sec^6 x\, dx$ (**b**) $\int \sec^7 x\, dx$

67. (**a**) Deduzca la fórmula de reducción siguiente donde $n > 1$ y n es cualquier número entero:

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

(**b**) Aplique la fórmula de reducción del inciso (a) para evaluar $\int \operatorname{sen}^5 x\, dx$. (**c**) Compare la respuesta del inciso (b) con la respuesta del ejemplo 1, y demuestre que las dos respuestas son equivalentes.

68. (**a**) Deduzca la fórmula de reducción siguiente donde $n > 1$ y n es cualquier número entero:

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$$

(**b**) Aplique la fórmula de reducción del inciso (a) para evaluar $\int \cos^4 x\, dx$. (**c**) Compare la respuesta del inciso (b) con la respuesta del ejemplo 2, y demuestre que las dos respuestas son equivalentes.

69. (**a**) Demuestre que:

$$\int \cot x \csc^n x\, dx = -\frac{\csc^n x}{n} + C \quad \text{si } n \neq 0$$

(**b**) Deduzca una fórmula semejante a la del inciso (a) para

$$\int \tan x \sec^n x\, dx \quad \text{si } n \neq 0$$

70. Evalúe

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\, dx$$

mediante tres métodos:

(**a**) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\, dx = \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x(\cos x\, dx)$

Considere $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ y $u = \operatorname{sen} x$.

(**b**) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x(\operatorname{sen} x\, dx)$

Considere $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ y $u = \cos x$.

(**c**) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\, dx = \frac{1}{8}\int (2 \operatorname{sen} x \cos x)^3\, dx$

Aplique la identidad $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

(**d**) Explique la diferencia aparente de las respuestas obtenidas en los incisos (a)–(c) y por qué son equivalentes.

7.3 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS MEDIANTE SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Ya se ha visto cómo algunas técnicas de integración requieren de una sustitución de cambio de variable. En esta sección se estudiarán sustituciones que implican funciones trigonométricas las cuales conducen a integrales trigonométricas. Se mostrará con tres casos cómo el cambio de variable mediante sustitución trigonométrica permite con frecuencia evaluar una integral que contiene una expresión de una de las formas siguientes donde $a > 0$:

$$\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \sqrt{a^2 + x^2} \qquad \sqrt{x^2 - a^2}$$

CASO 1 **El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, donde $a > 0$.**

Introduzca una nueva variable θ considerando $x = a \operatorname{sen} \theta$, donde

$$0 \leq \theta \leq \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{si } x \geq 0 \quad \text{y} \quad -\tfrac{1}{2}\pi \leq \theta < 0 \text{ si } x < 0$$

En este caso, con $x = a \operatorname{sen} \theta$, $dx = a \cos \theta \, d\theta$, y $\cos \theta \geq 0$ porque $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$. Más aún,

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \\
&= \sqrt{a^2}\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta} \\
&= \sqrt{\cos^2 \theta} && \text{porque } a > 0 \\
&= a \cos \theta && \text{porque } \cos \theta \geq 0
\end{aligned}$$

▶ *EJEMPLO 1* Evalúe

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx$$

y apoye numéricamente la respuesta.

Solución Observe que el denominador es x^2, entonces $x \neq 0$. Con la sustitución indicada en el caso 1, sea $x = 3 \operatorname{sen} \theta$, donde $0 < \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ si $x > 0$, y $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta < 0$ si $x < 0$. Entonces, $dx = 3 \cos \theta \, d\theta$ y

$$\begin{aligned}
\sqrt{9 - x^2} &= \sqrt{9 - 9 \operatorname{sen}^2 \theta} \\
&= 3\sqrt{\cos^2 \theta} \\
&= 3 \cos \theta
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx &= \int \frac{3 \cos \theta}{9 \operatorname{sen}^2 \theta} (3 \cos \theta \, d\theta) \\
&= \int \cot^2 \theta \, d\theta \\
&= \int (\csc^2 \theta - 1)\, d\theta \\
&= -\cot \theta - \theta + C
\end{aligned}$$

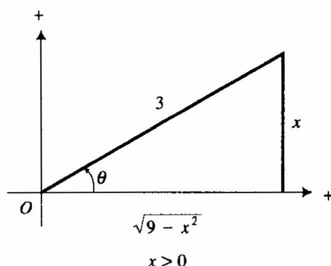


FIGURA 1

Como $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{3}x$ y $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$, $\theta = \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{3}x$. A fin de determinar $\cot \theta$, refiérase a las figuras 1 (para $x > 0$) y 2 (para $x < 0$). En cualquier caso

$$\cot \theta = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}$$

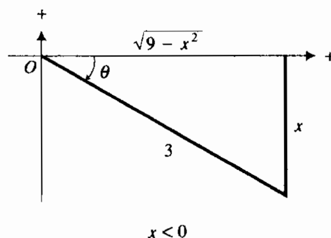


FIGURA 2

Así,

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} = -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}$$

La respuesta se apoya numéricamente al calcular una integral definida correspondiente con una elección arbitraria de los límites de integración, por ejemplo 1 y 2.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} &= \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{3} \Bigg]_1^2 \\
&= -\frac{\sqrt{5}}{2} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{2}{3} + \sqrt{8} + \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{3} \\
&= 1.320502389
\end{aligned}$$

En la graficadora se obtiene

$$\text{NINT} = \left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}, 1, 2\right) = 1.320502389$$

lo cual es acorde con lo anterior y proporciona un apoyo poderoso para el valor de la integral indefinida. ◀

CASO 2 El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2+x^2}$, donde $a > 0$.

Introduzca una nueva variable θ considerando $x = a \tan \theta$, donde

$$0 \le \theta < \tfrac{1}{2}\pi \text{ si } x \ge 0 \quad \text{y} \quad -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < 0 \quad \text{si } x < 0$$

Con $x = a\tan\theta, dx = a\sec^2\theta\, d\theta$, y como $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$, $\sec\theta \ge 1$. Además,

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+x^2} &= \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2\theta}\\ &= \sqrt{a^2}\sqrt{1+\tan^2\theta}\\ &= a\sqrt{\sec^2\theta}\\ &= a\ \sec\theta\end{aligned}$$

▶ ***EJEMPLO 2*** Evalúe

$$\int \sqrt{x^2+5}\, dx$$

y apoye gráficamente la respuesta.

Solución Esta integral pertenece al caso 2. Sea $x = \sqrt{5}\tan\theta$, donde $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$ si $x \ge 0$, y $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$ si $x < 0$. Entonces, $dx = \sqrt{5}\sec^2\theta\, d\theta$ y

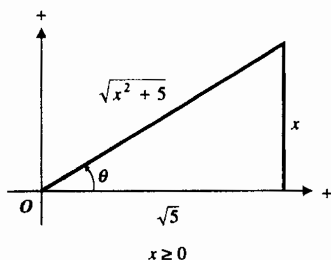


FIGURA 3

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+5} &= \sqrt{5\tan^2\theta + 5}\\ &= \sqrt{5}\sqrt{\sec^2\theta}\\ &= \sqrt{5}\sec\theta\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+5}\, dx &= \int \sqrt{5}\sec\theta(\sqrt{5}\sec^2\theta\, d\theta)\\ &= 5\int \sec^3\theta\, d\theta\end{aligned}$$

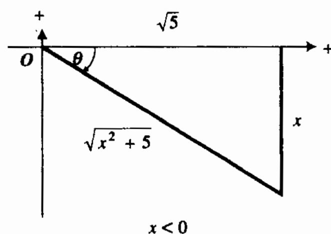


FIGURA 4

Para $\sec^3\theta$, se aplica el resultado del ejemplo 10 de la sección 7.2 y se obtiene

$$\int\sqrt{x^2+5}\, dx = \tfrac{5}{2}\sec\theta\tan\theta + \tfrac{5}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C$$

Se determina $\sec\theta$ a partir de las figuras 3 (para $x \ge 0$) y 4 (para $x < 0$). En ambos casos

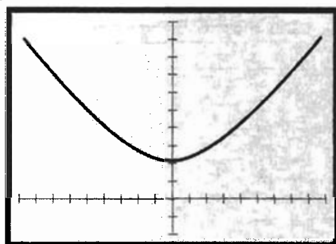
$$\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}$$

En consecuencia,

$$\int \sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{5}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}}\right| + C$$

$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+5} + \tfrac{5}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+5}+x\right| - \tfrac{5}{2}\ln\sqrt{5} + C$$

$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+5} + \tfrac{5}{2}\ln(\sqrt{x^2+5}+x) + C_1$$



[−9, 9] por [−2, 10]

$y = \sqrt{x^2+5}$

$\text{NDER}(\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2}\ln(\sqrt{x^2+5}+x), x)$

FIGURA 5

Observe que se sustituyó $-\frac{5}{2}\ln\sqrt{5} + C$ por la constante arbitraria C_1. También, como $\sqrt{x^2+5} + x > 0$, se eliminaron las barras de valor absoluto.

La figura 5 muestra las gráficas de

$$y = \sqrt{x^2+5} \quad \text{y} \quad \text{NDER}(\tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+5} + \tfrac{5}{2}\ln(\sqrt{x^2+5}+x), x)$$

trazadas en el rectángulo de inspección de [−9, 9] por [−2, 10]. El hecho de que las gráficas coinciden apoya la respuesta. ◀

CASO 3 El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{x^2-a^2}$, donde $a > 0$.

Introduzca una nueva variable θ considerando $x = a\sec\theta$, donde

$$0 \le \theta < \tfrac{1}{2}\pi \text{ si } x \ge a \quad \text{y} \quad \pi \le \theta < \tfrac{3}{2}\pi \text{ si } x \le -a$$

Con $x = a\sec\theta$, $dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$, y $\tan\theta \ge 0$ porque $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$ o $\pi \le \theta < \frac{3}{2}\pi$. Además,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-a^2} &= \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}\\ &= \sqrt{a^2}\sqrt{\sec^2\theta - 1}\\ &= a\sqrt{\tan^2\theta}\\ &= a\tan\theta\end{aligned}$$

▶ ***EJEMPLO 3*** Evalúe

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$$

Solución Se observa que $|x|$ debe ser mayor que 3 de modo que $\sqrt{x^2-9}$ sea un número real distinto de cero. Siguiendo la sugerencia del caso 3, sea $x = 3\sec\theta$, donde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ si $x > 3$, y $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ si $x < -3$. Entonces $dx = 3\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ y

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-9} &= \sqrt{9\sec^2\theta - 9}\\ &= 3\sqrt{\tan^2\theta}\\ &= 3\tan\theta\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} &= \int \frac{3\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{27\sec^3\theta\cdot 3\tan\theta}\\ &= \frac{1}{27}\int \cos^2\theta\,d\theta\end{aligned}$$

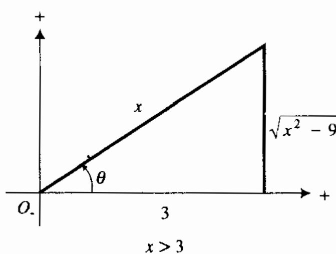


FIGURA 6

$$= \frac{1}{54}\int (1 + \cos 2\theta)\, d\theta$$
$$= \tfrac{1}{54}(\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta) + C$$
$$= \tfrac{1}{54}(\theta + \operatorname{sen}\theta \cos\theta) + C$$

Como $\sec\theta = \frac{1}{3}x$ y θ está en $(0, \frac{1}{2}\pi) \cup (\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $\theta = \sec^{-1}\frac{1}{3}x$. Cuando $x > 3, 0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, y se obtienen sen θ y cos θ de la figura 6. Cuando $x < -3, \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ y de la figura 7 se obtienen sen θ y cos θ. En ambos casos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \frac{3}{x}$$

Así,

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{1}{54}\left(\sec^{-1}\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}\cdot\frac{3}{x}\right) + C$$
$$= \tfrac{1}{54}\sec^{-1}\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{18x^2} + C$$ ◀

Observe en el ejemplo 3, el papel importante desempeñado por el contradominio de la función secante inversa. El hecho de que θ esté en el primer o tercer cuadrante permite concluir que $\tan\theta > 0$, de modo que $\sqrt{\tan^2\theta} = \tan\theta$. Recuerde que en la sección 5.7, donde se eligió este contradominio, se indicó que dicha elección rendiría frutos en esta sección.

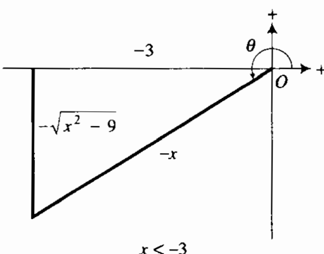


FIGURA 7

▶ *EJEMPLO 4* Utilice una sustitución trigonométrica para demostrar que si $u > a > 0$, entonces

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C$$

Solución De la sustitución indicada en el caso 3, sea $u = a\sec\theta$, donde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$. Entonces $dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$ y $\sqrt{u^2 - a^2} = a\tan\theta$. Por tanto,

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{a\tan\theta}$$
$$= \int \sec\theta\, d\theta$$
$$= \ln(\sec\theta + \tan\theta) + C$$

Observe que no se emplearon las barras de valor absoluto porque tanto sec θ como tan θ son positivos en este caso. De la figura 8 se determina tan θ, donde

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a}$$

Por tanto,

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left(\frac{u}{a} + \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a}\right) + C_1$$
$$= \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) - \ln a + C_1$$
$$= \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2} + C$$

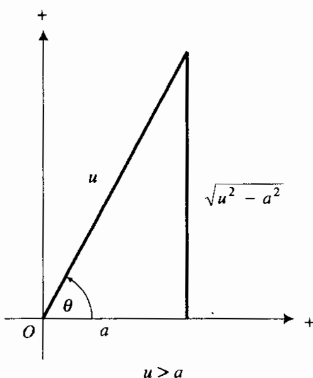


FIGURA 8

donde $C = C_1 - \ln a$. ◀

La fórmula de integración indefinida del ejemplo 4 se mostró en la sección 5.9 como una expresión, en términos de un logaritmo natural, de la fórmula (10) del teorema 5.9.10, el cual también expresa la integral en términos de la función coseno hiperbólico inversa. La mayoría de las tablas de integrales proporcionan las dos formas.

EJEMPLO 5 Calcule el valor exacto de

$$\int_1^2 \frac{dx}{(6 - x^2)^{3/2}}$$

y apoye la respuesta empleando NINT en la graficadora.

Solución La integral indefinida correspondiente pertenece al caso 1. Se restringe θ al primer cuadrante porque los límites de la integral definida indican que $x > 0$. Por tanto, se considera $x = \sqrt{6}\operatorname{sen}\theta$, donde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$. Entonces $dx = \sqrt{6}\cos\theta\, d\theta$ y

$$\begin{aligned}(6 - x^2)^{3/2} &= (6 - 6\operatorname{sen}^2\theta)^{3/2} \\ &= 6\sqrt{6}(1 - \operatorname{sen}^2\theta)^{3/2} \\ &= 6\sqrt{6}(\cos^2\theta)^{3/2} \\ &= 6\sqrt{6}\cos^3\theta\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(6 - x^2)^{3/2}} &= \int \frac{\sqrt{6}\cos\theta\, d\theta}{6\sqrt{6}\cos^3\theta} \\ &= \frac{1}{6}\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{1}{6}\int \sec^2\theta\, d\theta \\ &= \frac{1}{6}\tan\theta + C\end{aligned}$$

De la figura 9 se determina $\tan\theta$ obteniéndose

$$\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{6 - x^2}}$$

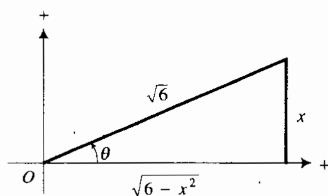


FIGURA 9

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{(6 - x^2)^{3/2}} &= \left.\frac{x}{6\sqrt{6 - x^2}}\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{5}}{30} \\ &= \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{5}}{30}\end{aligned}$$

A fin de apoyar esta respuesta, se calcula en la graficadora

$$\text{NINT}(1/(6 - x^2)^{3/2}, 1, 2) = 0.1611666611$$

Con el mismo número de dígitos significativos

$$\frac{5\sqrt{2} - \sqrt{5}}{30} = 0.1611666611$$

lo cual apoya la respuesta. ◀

EJERCICIOS 7.3

En los ejercicios 1 a 12, evalúe la integral indefinida, y apoye la respuesta numérica o gráficamente en la graficadora, según lo desee.

1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$
2. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$
3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$
4. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+6}}\,dx$
5. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$
6. $\int \frac{dx}{(2+x^2)^{3/2}}$
7. $\int \frac{dx}{(4x^2-9)^{3/2}}$
8. $\int \frac{dw}{w^2\sqrt{w^2-7}}$
9. $\int \frac{\sec^2 x}{(4-\tan^2 x)^{3/2}}\,dx$
10. $\int \frac{dz}{(z^2-6z+18)^{3/2}}$
11. $\int \frac{\ln^3 w}{w\sqrt{\ln^2 w-4}}\,dw$
12. $\int \frac{e^{-x}}{(9e^{-2x}+1)^{3/2}}\,dx$

En los ejercicios 13 a 22, determine el valor exacto de la integral definida y apoye la respuesta empleando NINT *en la graficadora.*

13. $\int_1^4 \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$
14. $\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du$
15. $\int_2^3 \frac{2}{t\sqrt{t^4+25}}\,dt$
16. $\int_1^3 \frac{dx}{x^4\sqrt{16+x^2}}$
17. $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{4x+x^2}}$
18. $\int_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}$
19. $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$
20. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$
21. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(5-4x-x^2)^{3/2}}$
22. $\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^4-4}}$

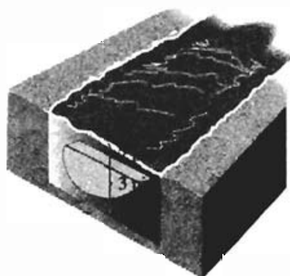
En los ejercicios 23 a 30, aproxime a cinco dígitos significativos el valor de la integral definida utilizando NINT *en la graficadora. Confirme analíticamente la respuesta.*

23. $\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$
24. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$
25. $\int_4^6 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$
26. $\int_1^3 \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+3}}$
27. $\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}\,dx$
28. $\int_4^8 \frac{dw}{(w^2-4)^{3/2}}$
29. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{(e^{2t}+8e^t+7)^{3/2}}\,dt$
30. $\int_0^1 \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x}\,dx$

En los ejercicios 31 a 33, emplee los métodos anteriores a esta sección (es decir, sin una sustitución trigonométrica) para evaluar las integrales.

31. $\int \frac{3}{x\sqrt{4x^2-9}}\,dx$
32. $\int \frac{5x}{\sqrt{3-2x^2}}\,dx$
33. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$

34. Determine el área de la región limitada por la curva $y = \sqrt{x^2-9}/x^2$, el eje x y la recta $x = 5$.
35. Calcule la longitud de arco de la curva $y = \ln x$ desde el punto donde $x = 1$ hasta el punto donde $x = 3$.
36. Obtenga el volumen del sólido generado al girar la región del ejercicio 34 alrededor del eje y.
37. Determine el volumen del sólido de revolución generado cuando la región ubicada a la derecha del eje y limitada por la curva $y = x\sqrt[4]{9-x^2}$ y el eje x, se gira alrededor del eje x.
38. Calcule la longitud de arco de la parábola $y = x^2$ desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(1, 1)$.
39. Determine el centro de masa de una barra de 8 cm de longitud si la densidad lineal en un punto a x centímetros del extremo izquierdo es $\sqrt{x^2+36}$ gramos por centímetro.
40. La densidad lineal de una barra en un punto a x metros de un extremo es $\sqrt{9+x^2}$ kilogramos por metro. Obtenga la masa y el centro de masa de la barra si ésta mide 3 m de longitud.
41. Determine el centroide de la región limitada por la curva $yx^2 = \sqrt{x^2-9}$, el eje x y la recta $x = 5$.
42. Utilice integración para obtener πr^2 unidades cuadradas como el área de la región acotada por una circunferencia de r unidades de radio.
43. Un tubo cilíndrico horizontal tiene un diámetro interior de 4 pie y está cerrado en un extremo mediante una compuerta circular que cubre exactamente la salida del tubo. Si el tubo contiene agua a una profundidad de 3 pie, calcule la fuerza ejercida por la presión del agua sobre la compuerta.
44. Una compuerta de una acequia tiene la forma de un segmento (casquete) de círculo de 4 pie de radio. La parte superior de la compuerta es horizontal y está 3 pie arriba del punto más bajo de la compuerta. Si el nivel del agua está 2 pie por arriba de la parte superior de la compuerta, calcule la fuerza ejercida por la presión del agua sobre la compuerta.



45. El tanque para gasolina de un automóvil tiene la forma de cilindro circular recto de 8 pulg de radio con un eje horizontal. Calcule la fuerza debida a la presión de la gasolina cuando ésta tiene una profundidad de 12 pie y si la densidad de la gasolina es de 0.39 oz/pulg^3.

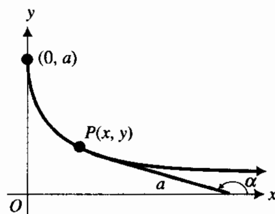
46. Una *tractriz*, la cual tiene aplicaciones en problemas de persecución, es una curva tal que la longitud del segmento de cada recta tangente desde el punto de tangencia hasta el punto de intersección con el eje x es una constante positiva a. Vea la figura adjunta. Demuestre que una ecuación de la tractriz es

$$x = a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{a^2 - y^2}$$

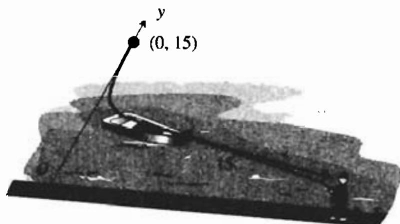
Sugerencia: sea $P(x, y)$ cualquier punto de la tractriz y sea α el ángulo de inclinación de la recta tangente a la tractriz en P. Muestre que sen $\alpha = y/a$, y en consecuencia que tan $\alpha = -y/\sqrt{a^2 - y^2}$. Después resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

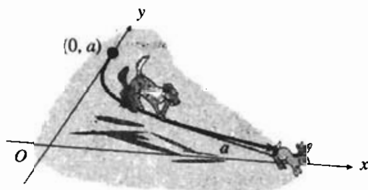
donde $y = a$ cuando $x = 0$.



47. Suponga que usted pertenece a la marina y que está en la orilla de un muelle mientras jala un bote mediante una cuerda de 15 pie de longitud, de modo que el bote se desplaza sobre una tractriz (vea el ejercicio 46). Refiérase a la figura adjunta donde el muelle está a lo largo del eje x, y que inicialmente usted estaba en el origen y el bote en el punto (0, 15) sobre el eje y. **(a)** ¿Cuánto habrá caminado usted cuando el bote se encuentre a 12 pie del muelle? Exprese la respuesta con dos cifras decimales. **(b)** ¿Qué tan alejado estará el bote del muelle cuando usted halla caminado 20 pie? Exprese la respuesta con dos cifras decimales. Necesitará la graficadora para resolver la ecuación.



48. Suponga que un perro, que persigue a un conejo, se mueve sobre la curva de persecución, una tractriz (vea el ejercicio 46), de modo que siempre avanza en dirección del conejo, y que la la rapidez del perro nunca excede a la del conejo. Refiérase a la figura adjunta donde el conejo, inicialmente ubicado en el origen, se mueve a lo largo del eje x, y el perro estaba inicialmente en el punto $(0, a)$. Explique por qué el perro siempre está a la misma distancia del conejo, de modo que nunca lo atrapará.



49. **(a)** Utilice la sustitución trigonométrica $x = 2 \sec \theta$ para determinar el valor exacto de la integral

$$\int_3^4 \frac{dx}{4 - x^2}$$

(b) Explique por qué no puede emplearse la sustitución trigonométrica $x = 2$ sen θ para evaluar la integral definida del inciso (a).

7.4 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES Y CRECIMIENTO LOGÍSTICO

Usted sabe cómo combinar dos o más expresiones racionales en una expresión racional mediante adición o sustracción. Por ejemplo,

$$\frac{3}{x + 2} + \frac{4}{x - 3} = \frac{7x - 1}{(x + 2)(x - 3)} \tag{1}$$

Suponga que se desea lo contrario, es decir, representar una expresión racional simple como una suma de dos o más cocientes simples, llamados **fracciones parciales**. Necesitará realizar esto con frecuencia cuando integre funciones racionales.

En su curso de álgebra o de matemáticas previas al Cálculo aprendió cómo escribir una función racional como la suma de fracciones parciales. Si no lo hizo y desea un repaso, o si nunca ha estudiado fracciones parciales, lea la sección A.11 del apéndice antes de continuar con esta sección.

EJEMPLO 1 Evalúe

$$\int \frac{7x - 1}{x^2 - x - 6} dx$$

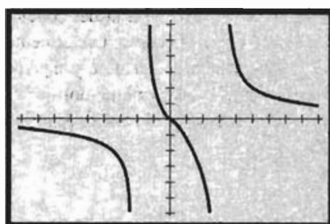
y apoye gráficamente la respuesta.

Solución Al factorizar el denominador del integrando se obtiene

$$\frac{7x - 1}{x^2 - x - 6} = \frac{7x - 1}{(x + 2)(x - 3)}$$

Observe que el miembro derecho de esta ecuación es el mismo que el miembro derecho de la ecuación (1). En el ejemplo ilustrativo de la sección A.11 del apéndice se descompone esta fracción en las fracciones parciales del miembro izquierdo de la ecuación (1). Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{7x - 1}{x^2 - x - 6} dx &= \int \frac{3}{x + 2} dx + \int \frac{4}{x - 3} dx\\ &= 3 \ln|x + 2| + 4 \ln|x - 3| + C\\ &= \ln|(x + 2)^3| + \ln|(x - 3)^4| + C\\ &= \ln|(x + 2)^3(x - 3)^4| + C\end{aligned}$$



[−9.4, 9.4] por [−6.2, 6.2]

$y = \frac{7x - 1}{x^2 - x - 6}$

NDER (ln $|(x + 2)^3(x - 3)^4|$, x)

FIGURA 1

La figura 1 muestra las gráficas de

$$y = \frac{7x - 1}{x^2 - x - 6} \quad \text{y} \quad \text{NDER}(\ln|(x + 2)^3(x - 3)^4|, x)$$

trazadas en el rectángulo de inspección de [−9.4, 9.4] por [−6.2, 6.2]. Como las gráficas coinciden, se ha apoyado la respuesta. ◀

EJEMPLO 2 Evalúe

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2}$$

Solución

$$\frac{1}{u^2 - a^2} \equiv \frac{A}{u - a} + \frac{B}{u + a}$$

Si se multiplica por $(u - a)(u + a)$ se obtiene

$$1 \equiv A(u + a) + B(u - a)$$
$$1 \equiv (A + B)u + Aa - Ba$$

Al igualar los coeficientes se tiene

$$A + B = 0$$
$$Aa - Ba = 1$$

Si se resuelve este sistema para A y B, se obtiene

$$A = \frac{1}{2a} \quad B = -\frac{1}{2a}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{u^2 - a^2} &= \frac{1}{2a}\int \frac{du}{u - a} - \frac{1}{2a}\int \frac{du}{u + a} \\ &= \frac{1}{2a}\ln|u - a| - \frac{1}{2a}\ln|u + a| + C \\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C\end{aligned}$$

◀

El tipo de integral del ejemplo anterior ocurre con demasiada frecuencia por lo que se presenta como una fórmula. No es necesario memorizarla porque la integración mediante fracciones racionales es muy simple.

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C \tag{2}$$

Si se tiene $\int du/(a^2 - u^2)$, se escribe

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{a^2 - u^2} &= -\int \frac{du}{u^2 - a^2} \\ &= -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C \\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C\end{aligned}$$

Esta integral también está listada como una fórmula.

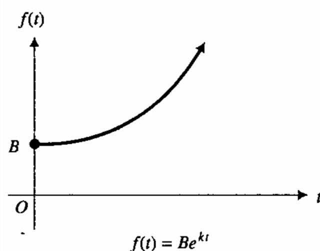
$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C \tag{3}$$

Esta fórmula se presentó en la sección 5.9 como la representación mediante un logaritmo natural de la fórmula (11) del teorema 5.9.10, en el cual también se expresa la integral en términos de una tangente o cotangente hiperbólica inversa. Encontrará las fórmulas (2) y (3) junto con sus representaciones mediante funciones hiperbólicas inversas, como las fórmulas 25 y 26 de la tabla de integrales del final del libro.

En la sección 5.6 se estudió el crecimiento exponencial que ocurre cuando la tasa de crecimiento de una cantidad es proporcional a la cantidad presente en un instante dado. El modelo matemático de esta situación es

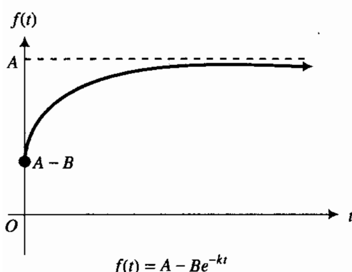
$$f(t) = Be^{kt} \tag{4}$$

donde k es una constante positiva, B unidades es la cantidad presente inicialmente y $f(t)$ unidades es la cantidad presente a las t unidades de tiempo, donde $f(t) \geq B$ para toda $t \geq 0$. También se estudió en la sección 5.6 el crecimiento limitado, el cual ocurre cuando una cantidad se incrementa a una tasa proporcional a la diferencia entre un número positivo fijo A y su tamaño. Un modelo matemático para el crecimiento limitado es



$f(t) = Be^{kt}$

FIGURA 2



$f(t) = A - Be^{-kt}$

FIGURA 3

$$f(t) = A - Be^{-kt} \tag{5}$$

donde B y k son constantes positivas y $A - B \leq f(t) < A$ para $t \geq 0$. Las gráficas de (4) y (5) se presentan en las figuras 2 y 3, respectivamente.

Considere ahora el crecimiento de una población que está afectado por el medio ambiente que le impone un límite superior a su tamaño. Por ejemplo, el espacio o la reproducción pueden ser factores limitados por el medio ambiente. En tales casos un modelo matemático de la forma (4) no se ha aplicado debido a que la población no se incrementa más allá de cierto punto. Un modelo que toma en cuenta factores del medio ambiente se obtiene cuando una cantidad crece a una tasa que es conjuntamente proporcional a su tamaño y a la diferencia entre un número positivo fijo A y su tamaño. Así, si y unidades es la cantidad presente a las t unidades de tiempo, entonces

$$\frac{dy}{dt} = ky(A - y) \tag{6}$$

donde k es una constante positiva y $0 < y < A$ para $t \geq 0$. A fin de resolver (6), primero se separan las variables y se obtiene

$$\frac{dy}{y(A - y)} = k\,dt$$

$$\int \frac{dy}{y(A - y)} = k\int dt \tag{7}$$

Al escribir el integrando de la izquierda como la suma de fracciones parciales se obtiene

$$\frac{1}{y(A - y)} = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{A - y}\right)$$

De modo que

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y(A - y)} &= \frac{1}{A}\int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{A - y}\right)dy \\ &= \frac{1}{A}(\ln|y| - \ln|A - y|) + C_1\end{aligned}$$

Por tanto, de (7), se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{A}(\ln|y| - \ln|A - y|) &= kt + C_2 \\ \ln|A - y| - \ln|y| &= -Akt - AC_2 \\ \ln\left|\frac{A - y}{y}\right| &= -Akt - AC_2 \\ \left|\frac{A - y}{y}\right| &= e^{-Akt}e^{-AC_2}\end{aligned}$$

Como $0 < y < A$, $(A - y)/y > 0$. Por tanto, se pueden omitir las barras de valor absoluto y con $B = e^{-AC_2}$ se tiene

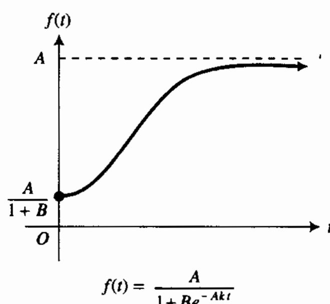
$$\begin{aligned}A - y &= Bye^{-Akt} \\ y(1 + Be^{-Akt}) &= A \\ y &= \frac{A}{1 + Be^{-Akt}}\end{aligned} \tag{8}$$

Al considerar $y = f(t)$, se escribe esta ecuación como

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-Akt}} \qquad t \geq 0 \tag{9}$$

donde A, B y k son constantes positivas. Para dibujar la gráfica de f, primero considere el límite $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$. De (9),

$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} f(t) &= \frac{A}{1 + B \lim\limits_{t \to +\infty} e^{-Akt}} \\ &= \frac{A}{1 + B \cdot 0} \\ &= A \end{aligned}$$



$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-Akt}}$

FIGURA 4

y $f(t)$ se aproxima a A mediante valores menores que A. Por tanto, la recta ubicada a A unidades por arriba del eje t es una asíntota horizontal de la gráfica de f. Como $f(0) = A/(1 + B)$, la gráfica intersecta al eje $f(t)$ en $A/(1 + B)$. En el ejercicio 44 se le pedirá que demuestre que la gráfica de f tiene un punto de inflexión en $t = \frac{1}{Ak} \ln B$. Con esta información se dibuja la gráfica de f, la cual se muestra en la figura 4. A esta gráfica se le llama *curva de crecimiento logístico.* Observe que cuando t es pequeño, la gráfica es semejante a la del crecimiento exponencial de la figura 2, y conforme t crece, la curva es análoga a la del crecimiento limitado de la figura 3.

Una aplicación del crecimiento logístico en economía es la distribución de información acerca de un producto particular. El crecimiento logístico es empleado por los biólogos para describir la propagación de una enfermedad y por los sociólogos para describir la difusión de un rumor o de un chiste.

EJEMPLO 3 En una comunidad de 45 000 habitantes, la tasa de crecimiento de una epidemia de gripe es conjuntamente proporcional al número de personas que han contraído la gripe y el número de personas que no se han contagiado. **(a)** Si 200 personas tienen la gripe al brote de la epidemia y 2 800 la tienen después de 3 semanas, obtenga un modelo matemático que describa la epidemia. **(b)** Trace la gráfica del modelo matemático en la graficadora. Estime a partir de la gráfica cuántas personas se espera que contraigan la gripe **(c)** después de 5 semanas, **(d)** después de 10 semanas. Confirme analíticamente las estimaciones. **(e)** Si la epidemia continúa indefinidamente, ¿cuántas personas se contagiarán de gripe?

Solución

Tabla 1

t	0	3	5	10
y	200	2800	y_5	y_{10}

(a) Si t semanas han transcurrido desde el brote de la epidemia y y personas tienen la gripe después de t semanas, entonces

$$\frac{dy}{dt} = ky(45\,000 - y) \tag{10}$$

donde k es una constante y $0 < y < 45\,000$ para $t \geq 0$. Las condiciones de frontera se tienen en la tabla 1, donde y_5 y y_{10} son el número de personas que tienen la gripe después de 5 y 10 semanas, respectivamente.

La ecuación diferencial (10) es de la forma (6), y su solución general es de la forma (8). Por tanto, la solución general de (10) es

$$y = \frac{45\,000}{1 + Be^{-45000\,kt}} \tag{11}$$

Como $y = 200$ cuando $t = 0$, de (11) se tiene

$$\begin{aligned} 200 &= \frac{45\,000}{1 + Be^0} \\ 1 + B &= 225 \\ B &= 224 \end{aligned}$$

Al sustituir este valor de B en (11) se obtiene

$$y = \frac{45\,000}{1 + 224e^{-45\,000kt}} \qquad (12)$$

Cuando $t = 3$, $y = 2\,800$. De modo que de (12) se tiene

$$\begin{aligned} 2\,800 &= \frac{45\,000}{1 + 224e^{-135\,000k}} \\ 1 + 224e^{-135\,000k} &= \frac{45\,000}{2\,800} \\ 1 + 224e^{-135\,000k} &= 16.0714 \\ e^{-135\,000k} &= \frac{15.0714}{224} \\ -135\,000k &= \ln 0.0672830 \\ k &= -\frac{\ln 0.0672830}{135\,000} \end{aligned}$$

Si se sustituye este valor de k en (12) resulta

$$y = \frac{45\,000}{1 + 224e^{-0.899616t}} \qquad (13)$$

la cual es el modelo matemático deseado.

(b) La figura 5 muestra la gráfica de (13) trazada en el rectángulo de inspección de [0, 15] por [0, 50 000]. Al emplear el rastreo (*trace*) y el aumento (*zoom in*), se estima que (**c**) cuando $t = 5$, $y = 12\,882$; y (**d**) cuando $t = 10$, $y = 43\,785$. Ahora se confirmarán analíticamente las estimaciones.

[0, 15] por [0, 50 000]

$$y = \frac{45\,000}{1 + 224e^{-0.899616t}}$$

FIGURA 5

(c) Como $y = y_5$ cuando $t = 5$,

$$y_5 = \frac{45\,000}{1 + 224e^{-4.49808}} = 12\,882.2$$

(d) Como $y = y_{10}$ cuando $t = 10$,

$$y_{10} = \frac{45\,000}{1 + 224e^{-8.99616}} = 43\,785.0$$

Estos valores confirman las estimaciones.

<u>**Conclusión:**</u> Después de 5 semanas, 12 882 personas tendrán la gripe, y después de 10 semanas se espera que la tengan 43 785 personas.

(e) Al calcular $\lim\limits_{t \to +\infty} y$ se obtiene

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{45\,000}{1 + 224e^{-0.899616t}} = \frac{45\,000}{1 + 224 \cdot 0} = 45\,000$$

<u>**Conclusión:**</u> La comunidad completa de 45 000 habitantes contraerá la gripe si la epidemia continúa indefinidamente. ◀

EJEMPLO 4 En el ejemplo 6 de la sección 1.3 y en el ejemplo 4 de la sección 3.2, se tuvo la siguiente situación: en una comunidad de 8000 personas, la tasa a la que se difunde un rumor es conjuntamente proporcional al número de personas que lo han escuchado y al número de personas que aún no lo han escuchado. Cuando 20 personas han escuchado el rumor, éste se difunde a una tasa de 200 personas por hora. (**a**) Si inicialmente 4 personas han escuchado el rumor, obtenga un modelo matemático que exprese el número de personas que lo han escuchado como una función del número de horas que se ha difundido el rumor. Determine cuántas personas han escuchado el rumor después de (**b**) 5 min, (**c**) 15 min, (**d**) 30 min, (**e**) 1 h, y (**f**) 1 h 30 min. (**g**) Demuestre que la población completa escuchará el rumor dentro de 2 h. (**h**) Utilice la respuesta del ejemplo 4 de la sección 3.2 para determinar el tiempo en el que el rumor se difunde a la tasa máxima.

Solución En el ejemplo 6 de la sección 1.3 se mostró que si $f(x)$ personas por hora es la tasa a la que el rumor se difunde cuando x personas lo han escuchado, entonces

$$f(x) = \frac{1}{798}x(8\,000 - x)$$

Ahora denote la tasa por dx/dt, en lugar de $f(x)$, de modo que la difusión del rumor está descrita por la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{798}x(8\,000 - x) \qquad \textbf{(14)}$$

(**a**) La ecuación diferencial (14) es de la forma (6) con $A = 8\,000$ y $k = \frac{1}{798}$. Por tanto, de (8), la solución general de (14), con x sustituida por $g(t)$, es

$$g(t) = \frac{8\,000}{1 + Be^{-(8\,000/798)t}} \qquad \textbf{(15)}$$

Observe que $g(t)$ personas han escuchado el rumor cuando éste se ha difundido por t horas. Como 4 personas escucharon el rumor inicialmente, entonces $g(0) = 4$. Así,

$$4 = \frac{8\,000}{1 + Be^0}$$
$$1 + B = 2\,000$$
$$B = 1\,999$$

Al sustituir este valor de B en (15) se obtiene el modelo matemático requerido:

$$g(t) = \frac{8\,000}{1 + 1999e^{-(8\,000/798)t}} \qquad \textbf{(16)}$$

En los incisos (b)–(f), como t se mide en horas, se convierte el tiempo indicado a horas y se calculan los valores de función requeridos:

(**b**) $g(\frac{1}{12}) = 9.2$ (**c**) $g(0.25) = 48.8$ (**d**) $g(0.5) = 559.4$

(**e**) $g(1) = 7349.5$ (**f**) $g(1.5) = 7995$

Conclusión: En 5 min, 9 personas han escuchado el rumor; en 15 min, 48 personas lo han escuchado; en 30 min, 559 personas lo han escuchado; en 1 h, 7 349 personas lo han escuchado; en 1 h 30 min, 7 995 personas lo han escuchado.

(g) Se calcula $g(2) = 7\,999.97$, de lo cual puede asumirse que la comunidad completa de 8 000 habitantes ha escuchado el rumor en 2 h.

(h) En el ejemplo 4 de la sección 3.2, se mostró que el rumor se difundió a la tasa máxima cuando 4 000 personas, la mitad de la población, habían escuchado el rumor. Se desea determinar el valor de t para el cual $g(t) = 4\,000$. Si se sustituye 4 000 por $g(t)$ en (16) se tiene

$$\begin{aligned}
4\,000 &= \frac{8\,000}{1 + 1\,999e^{-(8\,000/798)t}} \\
1 + 1999e^{-(8\,000/798)t} &= 2 \\
e^{-(8\,000/798)t} &= \frac{1}{1\,999} \\
e^{(8\,000/798)t} &= 1\,999 \\
\frac{8\,000t}{798} &= \ln 1\,999 \\
t &= \frac{798 \ln 1\,999}{8\,000} \\
t &= 0.75814
\end{aligned}$$

Al convertir 0.75814 h a minutos se obtiene 45.5 min.

Conclusión: El rumor se difunde a la tasa máxima 45.5 min después de que se inició, en dicho tiempo la mitad de la población ya ha escuchado el rumor. ◀

En química, la *ley de acción de masas* para las reacciones de segundo orden proporciona una aplicación de la integración que conduce al uso de fracciones parciales. En ciertas condiciones, una sustancia A reacciona con otra sustancia B para formar una tercera sustancia C de tal modo que la tasa de variación de la cantidad de C es proporcional al producto de las cantidades de A y B que no han reaccionado aún en un instante determinado.

Suponga que inicialmente se tienen α gramos de A y β gramos de B y que r gramos de A se combinan con s gramos de B para formar $(r + s)$ gramos de C. Si x gramos de la sustancia C están presentes a las t unidades de tiempo, entonces C contiene $rx/(r + s)$ gramos de A y $sx/(r + s)$ gramos de B. Entonces el número de gramos de la sustancia A que aún no reaccionan es $\alpha - rx/(r + s)$, y el número de gramos de la sustancia B que aún no reaccionan es $\beta - sx/(r + s)$. Por tanto, de la ley de acción de masas se tiene

$$\frac{dx}{dt} = K\left(\alpha - \frac{rx}{r + s}\right)\left(\beta - \frac{sx}{r + s}\right)$$

donde K es la constante de proporcionalidad. Esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Krx}{(r + s)^2}\left(\frac{r + s}{r}\alpha - x\right)\left(\frac{r + s}{s}\beta - x\right)$$

Al considerar

$$k = \frac{Krs}{(r + s)^2} \qquad a = \frac{r + s}{r}\alpha \qquad b = \frac{r + s}{s}\beta$$

esta ecuación se transforma en

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x) \tag{17}$$

Al separar las variables de (17) se obtiene

$$\frac{dx}{(a - x)(b - x)} = k\,dt$$

Si $a = b$, entonces el miembro izquierdo de la ecuación anterior puede integrarse mediante la fórmula de la potencia. Si $a \neq b$, se pueden emplear las fracciones parciales para la integración.

EJEMPLO 5 En una reacción química se combina una sustancia D con una sustancia E para formar una sustancia F de modo que la ley de acción de masas se cumple. Si en la ecuación (17) $a = 8$ y $b = 6$, y 2 g de la sustancia F se han formado en 10 minutos, ¿cuántos gramos de F se formarán en 15 min?

Tabla 2

t	0	10	15
x	0	2	x_{15}

Solución Sean x gramos de sustancia F presentes a los t minutos. Las condiciones de frontera se tienen en la tabla 2, donde x_{15} gramos de sustancia F están presentes a los 15 min. La ecuación (17) se transforma en

$$\frac{dx}{dt} = k(8 - x)(6 - x)$$

Al separar las variables se obtiene

$$\int \frac{dx}{(8 - x)(6 - x)} = k \int dt \tag{18}$$

Si se escribe el integrando como la suma de dos fracciones parciales se tiene

$$\frac{1}{(8 - x)(6 - x)} = \frac{A}{8 - x} + \frac{B}{6 - x}$$
$$1 = A(6 - x) + B(8 - x)$$

Al sustituir 6 por x resulta $B = \frac{1}{2}$, y si se sustituye 8 por x se obtiene $A = -\frac{1}{2}$. En consecuencia, se escribe (18) como

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{8 - x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{6 - x} = k\int dt$$

Al integrar se tiene

$$\tfrac{1}{2}\ln|8 - x| - \tfrac{1}{2}\ln|6 - x| + \tfrac{1}{2}\ln|C| = kt$$
$$\ln\left|\frac{6 - x}{C(8 - x)}\right| = -2kt$$
$$\frac{6 - x}{8 - x} = Ce^{-2kt}$$

Si se sustituye x por 0 y t por 0 en esta ecuación se obtiene $C = \frac{3}{4}$. Así,

$$\frac{6 - x}{8 - x} = \frac{3}{4}e^{-2kt} \tag{19}$$

Al sustituir x por 2 y t por 10 en (19) se tiene

$$\tfrac{4}{6} = \tfrac{3}{4}e^{-20k}$$
$$e^{-20k} = \tfrac{8}{9}$$

Si se sustituye x por x_{15} y t por 15 en (19) se obtiene

$$\frac{6 - x_{15}}{8 - x_{15}} = \tfrac{3}{4}e^{-30k}$$
$$4(6 - x_{15}) = 3(e^{-20k})^{3/2}(8 - x_{15})$$

$$
\begin{aligned}
24 - 4x_{15} &= 3(\tfrac{8}{9})^{3/2}(8 - x_{15}) \\
24 - 4x_{15} &= \frac{16\sqrt{2}}{9}(8 - x_{15}) \\
x_{15} &= \frac{54 - 32\sqrt{2}}{9 - 4\sqrt{2}} \\
x_{15} &\approx 2.6
\end{aligned}
$$

Conclusión: En 15 min se tendrán 2.6 g de la sustancia F. ◀

En el ejemplo siguiente, uno de los factores del denominador es cuadrático. Refiérase otra vez a la sección A.11 del apéndice, en donde se encuentra el procedimiento de la descomposición en fracciones parciales de este caso.

▶ ***EJEMPLO 6*** Utilice NINT en la graficadora para aproximar a seis dígitos significativos el valor de

$$
\int_2^3 \frac{x^2 - x - 5}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)}\, dx
$$

Confirme analíticamente la respuesta.

Solución En la graficadora se obtiene

$$
\text{NINT}\left(\frac{x^2 - x - 5}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)}, 2, 3\right) = -0.0857470
$$

A fin de confirmar la respuesta se evalúa la integral definida empleando la descomposición en fracciones parciales del ejemplo ilustrativo 3 de la sección A.11 del apéndice. Así,

$$
\int_2^3 \frac{x^2 - x - 5}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)}\, dx = \int_2^3 \frac{2x\, dx}{x^2 + 2x + 2} + 3\int_2^3 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} - \int_2^3 \frac{dx}{x - 1} \qquad \textbf{(20)}
$$

Para integrar $\int (2x\, dx)/(x^2 + 2x + 2)$, observe que la diferencial del denominador es $(2x + 2)dx$; por lo que se suma y resta 2 en el numerador, obteniéndose

$$
\int \frac{2x\, dx}{x^2 + 2x + 2} = \int \frac{(2x + 2)dx}{x^2 + 2x + 2} - 2\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}
$$

Si se sustituye de esta ecuación en (20), se reducen términos y se escribe $x^2 + 2x + 2$ como $(x + 1)^2 + 1$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{x^2 - x - 5}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)}\, dx &= \int_2^3 \frac{(2x + 2)dx}{x^2 + 2x + 2} + \int_2^3 \frac{dx}{(x + 1)^2 + 1} - \int_2^3 \frac{dx}{x - 1} \\
&= \ln|x^2 + 2x + 2| + \tan^{-1}(x + 1) - \ln|x - 1|\Big]_2^3 \\
&= \ln\left|\frac{x^2 + 2x + 2}{x - 1}\right| + \tan^{-1}(x + 1)\Big]_2^3 \\
&= \ln \tfrac{17}{2} + \tan^{-1} 4 - \ln 10 - \tan^{-1} 3 \\
&= -0.0857470
\end{aligned}
$$

lo cual confirma la respuesta. ◀

EJERCICIOS 7.4

En los ejercicios 1 a 20, evalúe la integral indefinida y utilice la graficadora para apoyar la respuesta numérica o gráficamente, según desee.

1. $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$

2. $\int \frac{5x - 1}{x^2 - 1} dx$

3. $\int \frac{4w - 11}{2w^2 + 7w - 4} dw$

4. $\int \frac{4x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$

5. $\int \frac{x^2}{x^2 + x - 6} dx$

6. $\int \frac{9t^2 - 26t - 5}{3t^2 - 5t - 2} dt$

Sugerencia para los ejercicios 5 y 6: divida el numerador entre el denominador.

7. $\int \frac{dt}{(t + 2)^2(t + 1)}$

8. $\int \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - x^2} dx$

9. $\int \frac{dx}{x^3 + 3x^2}$

10. $\int \frac{w^2 + 4w - 1}{w^3 - w} dw$

11. $\int \frac{6x^2 - 2x - 1}{4x^3 - x} dx$

12. $\int \frac{dx}{2x^3 + x}$

13. $\int \frac{x + 4}{x^3 + 4x} dx$

14. $\int \frac{3t}{2t^4 + 5t^2 + 2} dt$

15. $\int \frac{dx}{16x^4 - 1}$

16. $\int \frac{dx}{9x^4 + x^2}$

17. $\int \frac{x^2 + x}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$

18. $\int \frac{2x^2 + 3x + 2}{x^3 + 4x^2 + 6x + 4} dx$

19. $\int \frac{\sec^2 t(\sec^2 t + 1)}{\tan^3 t + 1} dt$

20. $\int \frac{e^{5x}}{(e^{2x} + 1)^2} dx$

En los ejercicios 21 a 26, calcule el valor exacto de la integral definida y apoye la respuesta utilizando NINT *en la graficadora.*

21. $\int_1^2 \frac{x - 3}{x^3 + x^2} dx$

22. $\int_0^4 \frac{x + 4}{2x^2 + 5x + 2} dx$

23. $\int_1^3 \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 + 2x^2 + x} dx$

24. $\int_1^4 \frac{2x^2 + 13x + 18}{x^3 + 6x^2 + 9x} dx$

25. $\int_1^4 \frac{4 + 5x^2}{4x + x^3} dx$

26. $\int_0^1 \frac{x\, dx}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$

En los ejercicios 27 a 32, emplee NINT *en la graficadora para estimar con seis dígitos significativos el valor de la integral definida. Confirme analíticamente la respuesta.*

27. $\int_1^2 \frac{5x^2 - 3x + 18}{9x - x^3} dx$

28. $\int_3^4 \frac{5x^3 - 4x}{x^4 - 16} dx$

29. $\int_0^1 \frac{x^2 + 3x + 3}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$

30. $\int_0^{0.5} \frac{1 + t}{1 - t^3} dt$

31. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{12}{e^{2t} + 16} dt$

32. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^3 x} dx$

33. Determine el área de la región limitada por la curva $y = (x - 1)/(x^2 - 5x + 6)$, el eje x y las rectas $x = 4$ y $x = 6$.

34. Calcule el área de la región del primer cuadrante acotada por la curva $(x + 2)^2 y = 4 - x$.

35. Determine el volumen del sólido de revolución generado al girar la región del ejercicio 33 alrededor del eje y.

36. Calcule el volumen del sólido de revolución generado si la región del ejercicio 34 se gira alrededor del eje x.

37. Determine el centroide de la región limitada por la curva $y = (x - 1)/(x^2 - 5x + 6)$, el eje x y las rectas $x = 4$ y $x = 6$.

38. Determine el centroide de la región del primer cuadrante acotada por la curva $(x + 2)^2 y = 4 - x$.

39. Calcule el área de la región acotada por el eje x, el eje y, la curva $y(x^2 + 1)^3 = x^3$ y la recta $x = 1$.

40. Determine el área de la región limitada por el eje x, el eje y, la curva $y(x^3 + 8) = 4$ y la recta $x = 1$.

41. Calcule el volumen del sólido de revolución generado al girar la región del ejercicio 40 alrededor del eje y.

42. Determine la abscisa del centroide de la región del ejercicio 40.

43. Utilice los métodos anteriores a los de esta sección (es decir, sin emplear fracciones parciales) para evaluar las integrales:

(a) $\int \frac{(x^2 - 4x + 6)\, dx}{x^3 - 6x^2 + 18x}$ **(b)** $\int \frac{3x + 1}{(x + 2)^4} dx$

44. Demuestre que la gráfica de la función f definida por (9) tiene un punto de inflexión en $t = \frac{1}{Ak} \ln B$ y que $y = \frac{1}{2}A$ en ese punto.

45. Un día en la universidad, cuando 5 000 personas asistieron, un estudiante oyó que cierto orador de controversia haría una aparición inesperada. Esta información fue transmitida a unos amigos quienes a su vez la pasaron a otros, de modo que la tasa de difusión de esta información fue conjuntamente proporcional al número de personas quienes la escucharon y el número de personas quienes no la habían escuchado. **(a)** Si después de 10 min, 144 personas sabían del rumor, obtenga un modelo matemático que describa la difusión de la información. **(b)** Trace la gráfica del modelo matemático en la graficadora. Estime a partir de la gráfica cuántas personas han escuchado el rumor **(c)** después de 15 min, y **(d)** después de 20 min. Confirme analíticamente las estimaciones. **(e)** ¿Cuántas personas, eventualmente, escucharán el rumor?

46. El ejercicio 26 de la sección 1.3 y el ejercicio 12 de la sección 3.2 tratan la siguiente situación: en un ambiente limitado, donde 1 millón de bacterias es el número óptimo soportado, la tasa de crecimiento es conjuntamente proporcional al número de bacterias presentes y a la diferencia entre 1 millón y el número de dichas bacterias. **(a)** Si inicialmente se tenían 500 bacterias, obtenga un modelo matemático que exprese el número de bacterias presentes como una función del número de minutos que se han estado reproduciendo las bacterias. Determine cuántas bacterias estarán presentes después de **(b)** 30 min, **(c)** 1 h, **(d)** 90 min, **(e)** 2 h, **(f)** 150 min. **(g)** Demuestre que el número óptimo de 1 millón de bacterias se tendrá en 7 h. **(h)** Utilice la respuesta del ejercicio 12 de la sección 3.2 para determinar el tiempo en el que el número de bacterias crece a la tasa máxima. Compare el resultado con el del ejercicio 44.

47. El ejercicio 27 de la sección 1.3 y el ejercicio 13 de la sección 3.2 tratan la siguiente situación: suponga que la tasa de crecimiento de una epidemia en Fort Bragg, un pequeño poblado del norte de California de 5 000 habitantes, es conjuntamente proporcional al número de personas infectadas y el número de personas no infectadas. **(a)** Si inicialmente 20 personas estuvieron infectadas, obtenga un modelo matemático que exprese el número de personas infectadas como una función del número de días en que la epidemia se ha incrementado. Si la epidemia no se controla, ¿cuántas personas estarán infectadas después de **(b)** 10 días, **(c)** 20 días, **(d)** 30 días, y **(e)** 60 días. **(f)** Demuestre que si la epidemia no se controla, entonces la población entera de Fort Bragg estará infectada dentro de 6 meses. **(g)** Utilice la respuesta del ejercicio 13 de la sección 3.2 para calcular en cuántos días la epidemia crecerá a la tasa máxima. Compare el resultado con el del ejercicio 44.

48. A las 8 a.m. en Fort Bragg (vea el ejercicio 47) 500 residentes escucharon un anuncio en la radio acerca de un escándalo político. La tasa de crecimiento de la difusión de la información del escándalo fue conjuntamente proporcional al número de personas que han escuchado acerca del escándalo y el número de personas que no lo han escuchado. **(a)** Si a las 9 a.m. 2 000 residentes habían escuchado acerca del escándalo, obtenga un modelo matemático que describa la difusión de la información. **(b)** Trace la gráfica del modelo matemático en la graficadora. Estime a partir de la gráfica **(c)** cuántas personas han escuchado acerca del escándalo a las 10 a.m., y **(d)** a qué hora la mitad de la población habrá escuchado acerca de él. Confirme analíticamente las estimaciones. **(e)** Demuestre que alrededor de las 3 p.m. la población entera habrá escuchado acerca del escándalo.

49. La población de Mendocino, un poblado cercano a Fort Bragg, fluctúa de un día a otro debido al número significante de turistas que visitan la comunidad. Suponga que el día en que surgió el escándalo político del ejercicio 48, la población de Mendocino era de A personas, y que el 20% de la población escuchó el anuncio en la radio a las 8 a.m. De igual manera que en Fort Bragg, la tasa de crecimiento de la difusión de la información acerca del escándalo en Mendocino fue conjuntamente proporcional al número de personas que lo han escuchado y el número de personas que no la han es-cuchado. Si a las 9 a.m. el 50% de la población de Mendocino han escuchado acerca del escándalo, ¿a qué hora el 80% de la población lo habrá escuchado?

50. En una comunidad en la que A personas son susceptibles a un virus particular, la tasa de crecimiento del contagio del virus fue conjuntamente proporcional al número de personas susceptibles que se han contagiado con el virus y el número de personas susceptibles que no se han contagiado. Si el 10% de las personas susceptibles tienen el virus inicialmente y el 25% han sido infectados después de 3 semanas, ¿qué porcentaje de las personas susceptibles se ha infectado después de 6 semanas?

51. Suponga en el ejemplo 5 que $a = 5$, $b = 4$ y 1 g de sustancia F se forma en 5 min. ¿Cuántos gramos de la sustancia F se formarán en 10 min?

52. Suponga en el ejemplo 5 que $a = 6$, $b = 3$ y 1 g de sustancia F se forma en 4 min. ¿Cuánto tiempo se requiere para que se formen 2 g de la sustancia F?

53. En cualquier instante, la tasa a la que una sustancia se disuelve es proporcional al producto de la cantidad de la sustancia presente en ese instante y la diferencia entre la concentración de la sustancia en ese mismo instante y la concentración de la sustancia en una solución saturada. Inicialmente, se mezcla una cantidad de un material insoluble con 10 libras de sal, y la sal se disuelve en un tanque que contiene 20 gal de agua. Si 5 lb de sal se disuelven en 10 min y la concentración de sal en una solución saturada es 3 lb/gal, ¿cuánta sal se disolverá en 20 min?

54. Un fabricante quien comenzó sus operaciones hace cuatro años ha determinado que el ingreso por ventas se ha incrementado regularmente a la tasa de $\dfrac{t^3 + 3t^2 + 6t + 7}{t^2 + 3t + 2}$ millones de dólares por año, donde t es el número de años que la compañía ha estado en operación. Se estima que el ingreso total por ventas se incrementará a la misma tasa durante los siguientes dos años. Si el ingreso total por ventas al cabo del año fue de \$6 millones, ¿cuál es el ingreso por ventas esperado para el nuevo periodo de 1 año? Dé la respuesta con aproximación de cientos de dólares.

55. Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo que si v centímetros por segundo es la velocidad de la partícula a los t segundos, entonces

$$v = \frac{t^2 - t + 1}{(t + 2)^2(t^2 + 1)}$$

Obtenga una fórmula para la distancia recorrida por la partícula desde el tiempo $t = 0$ hasta el tiempo $t = t_1$.

56. Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo que si v pies por segundo es la velocidad de la partícula a los t segundos, entonces

$$v = \frac{t + 3}{t^2 + 3t + 2}$$

Calcule la distancia recorrida por la partícula desde el tiempo $t = 0$ hasta el tiempo $t = 2$.

57. Compare la curva de crecimiento logístico con las curvas de crecimiento exponencial y crecimiento limitado. ¿En qué difieren y en qué son semejantes?

7.5 INTEGRACIÓN MEDIANTE OTRAS TÉCNICAS DE SUSTITUCIÓN Y TABLAS

Se concluye el estudio de técnicas de integración mostrando cómo pueden emplearse sustituciones particulares en ciertas situaciones.

Si una integral contiene potencias fraccionales de una variable x, el integrando puede simplificarse mediante la sustitución

$$x = z^n$$

donde n es el mínimo común denominador de los denominadores de los exponentes. Esta sustitución se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 Evalúe

$$\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$$

Solución Considere $x = z^6$; entonces $dx = 6z^5\, dz$. Así,

$$\int \frac{x^{1/2}\, dx}{1 + x^{1/3}} = \int \frac{z^3(6z^5\, dz)}{1 + z^2}$$
$$= 6\int \frac{z^8}{z^2 + 1} dz$$

Al dividir el numerador entre el denominador se tiene

$$\int \frac{x^{1/2}\, dx}{1 + x^{1/3}} = 6\int \left(z^6 - z^4 + z^2 - 1 + \frac{1}{z^2 + 1}\right) dz$$
$$= 6\left(\tfrac{1}{7}z^7 - \tfrac{1}{5}z^5 + \tfrac{1}{3}z^3 - z + \tan^{-1} z\right) + C$$
$$= \tfrac{6}{7}x^{7/6} - \tfrac{6}{5}x^{5/6} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6} + 6\tan^{-1} x^{1/6} + C$$

No se puede dar ninguna regla general para determinar una sustitución que proporcione un integrando más simple. El ejemplo siguiente muestra otra sustitución en donde se racionaliza el integrando. ◀

EJEMPLO 2 Evalúe

$$\int x^5\sqrt{x^2 + 4}\, dx$$

Solución Sea $z = \sqrt{x^2 + 4}$. Entonces $z^2 = x^2 + 4$, y $2z\, dz = 2x\, dx$. Así,

$$\int x^5\sqrt{x^2 + 4}\, dx = \int (x^2)^2\sqrt{x^2 + 4}\,(x\, dx)$$
$$= \int (z^2 - 4)^2 z(z\, dz)$$
$$= \int (z^6 - 8z^4 + 16z^2)\, dz$$
$$= \tfrac{1}{7}z^7 - \tfrac{8}{5}z^5 + \tfrac{16}{3}z^3 + C$$

$$= \tfrac{1}{105}z^3[15z^4 - 168z^2 + 560] + C$$
$$= \tfrac{1}{105}(x^2 + 4)^{3/2}[15(x^2 + 4)^2 - 168(x^2 + 4) + 560] + C$$
$$= \tfrac{1}{105}(x^2 + 4)^{3/2}(15x^4 - 48x^2 + 128) + C$$ ◀

Si un integrando es una *función racional de* sen *x y* cos *x*, se puede reducir a una función racional de z mediante la sustitución

$$z = \tan \tfrac{1}{2}x$$

como se mostrará por medio de un ejemplo. A fin de obtener la fórmula para sen x y cos x en términos de z se utilizan las identidades siguientes: $\operatorname{sen} 2y = 2 \operatorname{sen} y \cos y$ y $\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$ con $y = \tfrac{1}{2}x$. Entonces se tiene,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x &= 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}x \cos \tfrac{1}{2}x \\ &= 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}x \cos^2 \tfrac{1}{2}x}{\cos \tfrac{1}{2}x} \\ &= 2 \tan \tfrac{1}{2}x \cdot \frac{1}{\sec^2 \tfrac{1}{2}x} \\ &= \frac{2 \tan \tfrac{1}{2}x}{1 + \tan^2 \tfrac{1}{2}x} \\ &= \frac{2z}{1 + z^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x &= 2\cos^2 \tfrac{1}{2}x - 1 \\ &= \frac{2}{\sec^2 \tfrac{1}{2}x} - 1 \\ &= \frac{2}{1 + \tan^2 \tfrac{1}{2}x} - 1 \\ &= \frac{2}{1 + z^2} - 1 \\ &= \frac{1 - z^2}{1 + z^2}\end{aligned}$$

Como $z = \tan \tfrac{1}{2}x$, entonces

$$\begin{aligned}dz &= \tfrac{1}{2}\sec^2 \tfrac{1}{2}x\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}(1 + \tan^2 \tfrac{1}{2}x)\, dx\end{aligned}$$

Por tanto,

$$dx = \frac{2\, dz}{1 + z^2}$$

A continuación, estos resultados se establecen como un teorema.

7.5.1 Teorema

Si $z = \tan \tfrac{1}{2}x$, entonces

$$\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1 + z^2} \qquad \cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2} \qquad dx = \frac{2\, dz}{1 + z^2}$$

▶ ***EJEMPLO 3*** Utilice NINT en la graficadora para aproximar a seis dígitos significativos el valor de

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x + \cos x}$$

Confirme analíticamente la respuesta.

Solución En la graficadora se obtiene

$$\text{NINT}\left(\frac{1}{1 - \operatorname{sen} x + \cos x}, 0, \pi/4\right) = 0.534800$$

A fin de confirmar esta respuesta analíticamente, se evalúa la integral indefinida considerando $z = \tan \frac{1}{2}x$ y aplicando las fórmulas del teorema 7.5.1.

$$\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x + \cos x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{1 - \frac{2z}{1+z^2} + \frac{1-z^2}{1+z^2}}$$

$$= 2\int \frac{dz}{(1+z^2) - 2z + (1-z^2)}$$

$$= 2\int \frac{dz}{2 - 2z}$$

$$= \int \frac{dz}{1 - z}$$

$$= -\ln|1 - z| + C$$

$$= -\ln\left|1 - \tan \tfrac{1}{2} x\right| + C$$

Por tanto,

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x + \cos x} = -\ln\left|1 - \tan \tfrac{1}{2}x\right|\Big]_0^{\pi/4}$$

$$= -\ln\left|1 - \tan \tfrac{1}{8}\pi\right|$$

$$= 0.534800$$

lo cual confirma la respuesta. ◀

▶ **EJEMPLO 4** Considere $z = \tan \frac{1}{2}x$ para evaluar

$$\int \sec x\, dx$$

Solución Con $z = \tan \frac{1}{2}x$ y las fórmulas del teorema 7.5.1, se tiene

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$= \int \frac{2dz}{1+z^2} \cdot \frac{1+z^2}{1-z^2}$$

$$= 2\int \frac{dz}{1-z^2}$$

$$= \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + C \qquad \text{(de (3) de la sección 7.4)}$$

$$= \ln\left|\frac{1 + \tan \frac{1}{2}x}{1 - \tan \frac{1}{2}x}\right| + C$$ ◀

El valor de $\int \sec x\, dx$ del ejemplo 4 puede escribirse en otra formal considerar $1 = \tan \frac{1}{4}\pi$ y después emplear la identidad trigonométrica

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

De este modo,

$$\int \sec x\, dx = \ln\left|\frac{\tan \frac{1}{4}\pi + \tan \frac{1}{2}x}{1 - \tan \frac{1}{4}\pi \cdot \tan \frac{1}{2}x}\right| + C$$

$$\int \sec x\, dx = \ln\left|\tan(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x)\right| + C \qquad (1)$$

Esta fórmula se muestra en la tabla de integrales, al final del libro, junto con la siguiente fórmula del teorema 5.3.5:

$$\int \sec x\, dx = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C$$

la cual se obtuvo al multiplicar el numerador y el denominador del integrando por $\sec x + \tan x$. Otra fórmula más para esta integral es

$$\int \sec x\, dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}\right) + C \qquad (2)$$

Se le pedirá que deduzca esta fórmula en el ejercicio 67.

Cuando un integrando tiene una antiderivada definida explícitamente en términos de funciones elementales, se dice que la integral indefinida está expresada en **forma cerrada**. Se han estudiado algunas técnicas de integración que pueden aplicarse para obtener una integral indefinida expresada en forma cerrada. Sin embargo, en ocasiones puede ocurrir que estas técnicas no son suficientes o conducen a una integración complicada. En tales casos puede emplearse una tabla de integrales. En los manuales de matemáticas se presentan tablas de integrales bastante completas. En los libros de Cálculo pueden encontrarse tablas con las fórmulas básicas.

Debido a que en la actualidad existen ciertos programas para algunas computadoras y calculadoras que pueden determinar antiderivadas, y que las graficadoras pueden aproximar valores de integrales definidas, las tablas de integrales no son tan importantes como lo fueron en el pasado. A pesar de esto, usted debe aprender cómo se utilizan dichas tablas y puede encontrar necesario aplicar alguna de las técnicas de integración para expresar el integrando en alguna forma contenida en dichas tablas.

Las fórmulas empleadas en los ejemplos y ejercicios de esta sección se muestran en la tabla de integrales al final de este libro. Observe que en la tabla, el encabezado indica la forma del integrando. Las cinco fórmulas listadas debajo del primer encabezado, *Algunas formas elementales*, son básicas. El ejemplo siguiente utiliza una de las fórmulas listadas debajo del segundo encabezado, *Formas racionales que contienen $a + bu$.*

EJEMPLO 5 Evalúe

$$\int \frac{x\, dx}{(4 - x)^3}$$

Solución La fórmula 10 de la tabla de integrales es

$$\int \frac{u\, du}{(a + bu)^3} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{a}{2(a + bu)^2} - \frac{1}{a + bu}\right] + C$$

Al emplear esta fórmula con $u = x$, $a = 4$ y $b = -1$ se tiene

$$\int \frac{x\,dx}{(4-x)^3} = \frac{1}{(-1)^2}\left[\frac{4}{2(4-x)^2} - \frac{1}{4-x}\right] + C$$
$$= \frac{2}{(4-x)^2} - \frac{1}{4-x} + C$$

◀

▶ **EJEMPLO 6** Evalúe

$$\int \frac{e^x}{6-2e^{2x}}\,dx$$

Solución Si se considera $u = e^x$ y $du = e^x\,dx$, la integral dada se transforma en

$$\int \frac{du}{6-2u^2} \tag{3}$$

La fórmula 25 de la tabla es

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C \tag{4}$$

Esta fórmula puede aplicarse si el coeficiente de u^2 de la integral (3) es 1 en lugar de 2. Así, se escribe

$$\int \frac{du}{6-2u^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{3-u^2}$$

Para la integral del miembro derecho se aplica (4) con $a = \sqrt{3}$, obteniéndose

$$\int \frac{du}{6-2u^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{u+\sqrt{3}}{u-\sqrt{3}}\right| + C$$

Al sustituir u por e^x se tiene

$$\int \frac{e^x}{6-2e^{2x}}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{12}\ln\left|\frac{e^x+\sqrt{3}}{e^x-\sqrt{3}}\right| + C$$

◀

▶ **EJEMPLO 7** Evalúe

$$\int \frac{\sqrt{8x-3x^2}}{x}\,dx$$

Solución La fórmula 51 de la tabla es

$$\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u}\,du = \sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C \tag{5}$$

A fin de aplicar esta fórmula, primero se factoriza el numerador de la integral dada.

$$\int \frac{\sqrt{8x-3x^2}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{3}\sqrt{\frac{8}{3}x-x^2}}{x}\,dx$$
$$= \sqrt{3}\int \frac{\sqrt{2(\frac{4}{3})x-x^2}}{x}\,dx$$

De la fórmula (5) con $u = x$ y $a = \frac{4}{3}$ se obtiene

$$\int \frac{\sqrt{8x - 3x^2}}{x}\,dx = \sqrt{3}\left[\sqrt{\tfrac{8}{3}x - x^2} + \tfrac{4}{3}\cos^{-1}\left(1 - \frac{x}{\frac{4}{3}}\right)\right] + C$$

$$= \sqrt{8x - 3x^2} + \frac{4}{\sqrt{3}}\cos^{-1}\left(1 - \frac{3}{4}x\right) + C \quad ◀$$

En el ejemplo siguiente se aplica una fórmula de reducción de la tabla de integrales.

▶ **EJEMPLO 8** Evalúe

$$\int \frac{\sqrt{3 + 4x}}{x}\,dx$$

Solución La fórmula 22 de la tabla es

$$\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a + bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}}$$

De esta fórmula con $u = x$, $a = 3$ y $b = 4$ se tiene

$$\int \frac{\sqrt{3 + 4x}}{x}\,dx = 2\sqrt{3 + 4x} + 3\int \frac{dx}{x\sqrt{3 + 4x}} \qquad \textbf{(6)}$$

A fin de evaluar la integral del miembro derecho de esta ecuación se aplica la forma logarítmica de la fórmula 20 de la tabla:

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a + bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bu} + \sqrt{a}}\right| + C \qquad \text{si } a > 0$$

Con esta fórmula y (6) se obtiene

$$\int \frac{\sqrt{3 + 4x}}{x}\,dx = 2\sqrt{3 + 4x} + 3\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3 + 4x} - \sqrt{3}}{\sqrt{3 + 4x} + \sqrt{3}}\right| + C$$

$$= 2\sqrt{3 + 4x} + \sqrt{3}\ln\left|\frac{\sqrt{3 + 4x} - \sqrt{3}}{\sqrt{3 + 4x} + \sqrt{3}}\right| + C \quad ◀$$

EJERCICIOS 7.5

En los ejercicios 1 a 12, evalúe la integral indefinida. Utilice la graficadora para apoyar la respuesta numérica o gráficamente, según lo desee.

1. $\int \frac{x}{3 + \sqrt{x}}\,dx$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - x}$
3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + 4x}}$
4. $\int x(1 + x)^{2/3}\,dx$
5. $\int \frac{2x^5 + 3x^2}{\sqrt{1 + 2x^3}}\,dx$
6. $\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$
7. $\int \frac{8}{3\cos 2x + 1}\,dx$
8. $\int \frac{\cos x}{3\cos x - 5}\,dx$
9. $\int \frac{3}{8 + 7\cos x}\,dx$
10. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}$
11. $\int \frac{dx}{4\operatorname{sen} x - 3\cos x}$
12. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \tan x}$

En los ejercicios 13 a 18, utilice NINT *en la graficadora para aproximar a seis dígitos significativos el valor de la integral definida. Confirme analíticamente la respuesta.*

13. $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$
14. $\int_0^1 \frac{x^{3/2}}{x + 1}\,dx$
15. $\int_{1/2}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x}(\sqrt{2x} + 9)}$
16. $\int_{16}^{18} \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x^3}}$

17. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 \operatorname{sen} x + 3}$ **18.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \cos 2x}$

En los ejercicios 19 a 24, calcule el valor exacto de la integral definida y apoye la respuesta utilizando NINT *en la graficadora.*

19. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3\,dx}{2 \operatorname{sen} 2x + 1}$ **20.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{8\,dx}{\tan x + 1}$

21. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/2} \frac{3\,dx}{2 \cos x + 1}$ **22.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{2 + \cos x}$

23. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}\,dx$ **24.** $\displaystyle\int_2^{11} \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^2 + 4}}$

En los ejercicios 25 a 48, utilice la tabla de integrales presentada al final del libro. En los ejercicios 25 y 26, emplee una de las fórmulas 6–13, donde el integrando es una forma racional que contiene $a + bu$.

25. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(6 - x)^2}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int \frac{x}{(5 - 2x)^3}\,dx$

En los ejercicios 27 y 28, utilice una de las fórmulas 14–23, donde el integrando es una forma que contiene $\sqrt{a + bu}$.

27. $\displaystyle\int x\sqrt{1 + 2x}\,dx$ **28.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 + 2x}}$

En los ejercicios 29 y 30, use una de las fórmulas 24–26, donde el integrando es una forma racional que contiene $a^2 \pm u^2$.

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{4 - x^2}$ **30.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 25}$

En los ejercicios 31 y 32, utilice una de las fórmulas 27–38, donde el integrando es una forma que contiene $\sqrt{u^2 \pm a^2}$.

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x}}$ **32.** $\displaystyle\int \sqrt{4x^2 + 1}\,dx$

En los ejercicios 33 y 34, emplee una de las fórmulas 39–48, donde el integrando es una forma que contiene $\sqrt{a^2 - u^2}$.

33. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{x}\,dx$ **34.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25 - 9x^2}}$

En los ejercicios 35 y 36, use una de la fórmulas 49–58, donde el integrando es una forma que contiene $2au - u^2$.

35. $\displaystyle\int x\sqrt{4x + x^2}\,dx$ **36.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4x - x^2}}\,dx$

En los ejercicios 37 a 40, utilice una de las fórmulas 59–88, donde el integrando es una forma que contiene funciones trigonométricas.

37. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 \theta\,d\theta$ **38.** $\displaystyle\int \cos^6 x\,dx$

39. $\displaystyle\int t^4 \cos t\,dt$ **40.** $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3w \cos 5w\,dw$

En los ejercicios 41 y 42, emplee una de las fórmulas 89–94, donde el integrando es una forma que contiene una función trigonométrica inversa.

41. $\displaystyle\int \sec^{-1} 3x\,dx$ **42.** $\displaystyle\int \tan^{-1} 4t\,dt$

En los ejercicios 43 a 46, use una de las fórmulas 95–106, donde el integrando es una forma que contiene una función exponencial o logarítmica.

43. $\displaystyle\int x^2 e^{4x}\,dx$ **44.** $\displaystyle\int x^3 2^x\,dx$

45. $\displaystyle\int x^3 \ln(3x)\,dx$ **46.** $\displaystyle\int e^{2\theta} \operatorname{sen} 5\theta\,d\theta$

En los ejercicios 47 y 48, utilice una de las fórmulas 107–124, donde el integrando es una forma que contiene una función hiperbólica.

47. $\displaystyle\int 3y \operatorname{senh} 5y\,dy$ **48.** $\displaystyle\int e^{3x} \cosh 5x\,dx$

En los ejercicios 49 a 64, emplee la tabla de integrales que se encuentra al final del libro para evaluar la integral definida.

49. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(5 - x)^2}$ **50.** $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{(1 + x)^2}\,dx$

51. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$ **52.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(9 + 4x^2)^{3/2}}$

53. $\displaystyle\int_1^2 x^4 \ln x\,dx$ **54.** $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$

55. $\displaystyle\int_3^4 \sqrt{x^2 + 2x - 15}\,dx$ **56.** $\displaystyle\int_3^5 x^2\sqrt{x^2 - 9}\,dx$

57. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{4w - w^2}\,dw$ **58.** $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sec^5 x\,dx$

59. $\displaystyle\int_{\pi/8}^{\pi/4} \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} 5t\,dt$ **60.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^6 \theta\,d\theta$

61. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 2x \cos^3 2x\,dx$ **62.** $\displaystyle\int_5^6 \frac{dw}{w^2\sqrt{w^2 - 16}}$

63. $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{2x}\,dx$ **64.** $\displaystyle\int_0^{\pi/6} e^{2t} \operatorname{sen} 3t\,dt$

65. Evalúe $\displaystyle\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$ mediante dos métodos: **(a)** considere $x = z^2$; **(b)** escriba $x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$ y considere $u = \sqrt{x} - 1$.

66. Utilice la sustitución de esta sección, $z = \tan \frac{1}{2}x$, para demostrar que $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$.

67. Deduzca la fórmula (2):

$$\int \sec x \, dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}\right) + C$$

Sugerencia: emplee las identidades

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{y} \quad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

Considere $u = \operatorname{sen} x$ y exprese el integrando como $du/(1 - u^2)$. Justifique la eliminación de las barras de valor absoluto.

68. Utilice la sustitución $z = \tan \frac{1}{2}x$ para demostrar que

$$\int \csc x \, dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\right) + C$$

Justifique la eliminación de las barras de valor absoluto.

69. Demuestre que la fórmula del ejercicio 67 es equivalente a la fórmula $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$. *Sugerencia:* multiplique el numerador y el denominador de la fracción de la fórmula por $1 + \operatorname{sen} x$.

70. Demuestre que la fórmula del ejercicio 68 es equivalente a la fórmula $\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$. *Sugerencia:* utilice un método semejante al que se sugirió en el ejercicio 69.

71. Evalúe la integral

$$\int \frac{\tan \frac{1}{2} x}{\operatorname{sen} x} \, dx$$

mediante dos métodos: **(a)** tome $z = \tan \frac{1}{2}x$; **(b)** considere $u = \frac{1}{2}x$ y obtenga una integral que incluya funciones trigonométricas de u.

72. En esta sección se presentaron cuatro fórmulas para $\int \sec x \, dx$. ¿Cuáles de ellas están relacionadas y cómo están relacionadas?

73. En esta era de la electrónica, ¿por qué debe estudiar técnicas de integración? ¿Cómo se emplea una tabla de integrales?

7.6 INTEGRACIÓN NUMÉRICA

A continuación se resume el estudio del la integración mediante una lista de las diferentes técnicas estudiadas.

A. La regla de la cadena de antidiferenciación: sección 4.2

B. Integración mediante sustitución

1. Las sustituciones u y v presentadas en la sección 4.2
2. Integración de potencias de funciones trigonométricas mediante sustitución con identidades trigonométricas: sección 7.2
3. Integración de funciones algebraicas mediante sustitución trigonométrica: sección 7.3
4. Sustitución de $x = z^n$ si el integrando contiene potencias fraccionarias de x; tales como $x = z^6$ si el integrando contiene $\sqrt{x}$ y $\sqrt[3]{x}$: sección 7.5
5. Sustitución de $z = \tan \frac{1}{2}x$ si el integrando es una función racional de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$: sección 7.5

C. Integración por partes: sección 7.1

D. Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales: sección 7.4

Con estas técnicas y una tabla de integrales o un programa de computadora, se puede evaluar cualquier integral que pueda expresarse en forma cerrada. Sin embargo, suponga que se tiene una integral que no puede expresarse en forma cerrada. Ejemplos de tales integrales, que ocurren en estadística, son aquellos que contienen la función normal estandarizada de densidad de probabilidad tratada en la sección 5.6 y la función error definida en el ejercicio 31 de esa sección:

$$P([a, b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} \, dx \qquad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, dt$$

Otros ejemplos son

$$\int \sqrt{1 + x^4}\, dx \qquad \int \cos x^2\, dx$$

las cuales surgen en física, así como la integral elíptica

$$\int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}\, dx \qquad 0 < k < 1$$

y

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \qquad \int \frac{e^x - 1}{x}\, dx \qquad \int \frac{\ln(1 + x)}{x}\, dx \qquad \int \frac{\tan^{-1} x}{x}\, dx$$

Aún con sistemas algebraicos computarizados estas integrales no pueden expresarse en forma cerrada. Sin embargo, en el capítulo 8 se estudiarán métodos para evaluar integrales no elementales mediante series infinitas.

Por supuesto, en la actualidad se puede aproximar el valor de integrales definidas utilizando NINT en la graficadora. Antes del advenimiento de dispositivos electrónicos, se tuvo que recurrir a otros métodos para calcular un valor aproximado de una integral definida. En esta sección se tratarán dos de estos métodos, la *regla del trapecio* y la *regla de Simpson*, los cuales proporcionan una aproximación bastante buena. Estas dos reglas se presentan no sólo por su interés histórico, sino porque algunas variantes de ellas se utilizan para evaluar integrales definidas en las graficadoras, calculadoras programables y computadoras. Las reglas también proporcionan una forma de estudiar los errores introducidos por las técnicas de integración. Además, también pueden emplearse estas reglas para calcular integrales definidas a partir de valores de función contenidos en una tabla como se muestra en el ejemplo 6.

La primera regla que se estudiará será la del trapecio. Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. La integral definida de f en $[a, b]$ es el límite de una suma de Riemann; esto es,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\, \Delta_i x$$

La suma de Riemann se interpreta geométricamente como la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos que están por arriba del eje x, más los negativos de las medidas de las áreas de los rectángulos que se encuentran por debajo del eje x (vea la figura 3 de la sección 4.5).

Para aproximar la medida del área de una región se emplearán trapecios en lugar de rectángulos. También se utilizarán particiones regulares y valores de función en puntos igualmente espaciados.

Así, para la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = (b - a)/n$. Esto proporciona los siguientes puntos: $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\,\Delta x, \ldots, x_i = a + i\,\Delta x, \ldots, x_{n-1} = a + (n - 1)\,\Delta x$, $x_n = b$. Entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ puede expresarse como la suma de n integrales definidas como sigue:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{x_1} f(x)\, dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx + \ldots + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\, dx \qquad (1)$$

A fin de interpretar geométricamente (1), refiérase a la figura 1, en la cual $f(x) \geq 0$ para toda x de $[a, b]$; sin embargo, (1) se cumple para cualquier función continua en $[a, b]$.

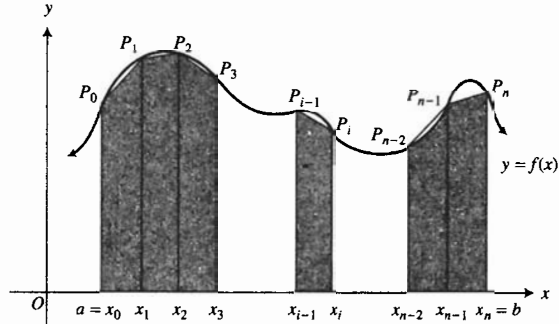


FIGURA 1

La integral definida $\int_a^{x_1} f(x)\, dx$ es la medida del área de la región limitada por el eje x, las rectas $x = a$ y $x = x_1$ y la porción de la curva de P_0 a P_1. Esta integral puede aproximarse mediante la medida del área del trapecio formado por las rectas $x = a$, $x = x_1$, el segmento P_0P_1 y el eje x. Por una fórmula de la geometría elemental, el área de este trapecio es

$$\tfrac{1}{2}[f(x_0) + f(x_1)]\,\Delta x$$

De igual manera, las otras integrales del miembro derecho de (1) pueden aproximarse por medio de la medida del área de un trapecio. Para la i-ésima integral se tiene

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx \approx \tfrac{1}{2}\,[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\,\Delta x$$

Al emplear esto para cada una de las integrales del miembro derecho de (1) se obtiene

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \tfrac{1}{2}[f(x_0) + f(x_1)]\,\Delta x + \tfrac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]\,\Delta x + \ldots$$
$$+ \tfrac{1}{2}[f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})]\,\Delta x + \tfrac{1}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]\,\Delta x$$

Así,

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \tfrac{1}{2}\Delta x[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Esta fórmula se conoce como la *regla del trapecio* y se establece en el teorema siguiente.

7.6.1 Teorema Regla del trapecio

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y los números $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ forman una partición regular de $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$



EJEMPLO 1 (**a**) Aproxime con tres cifras decimales el valor de

$$\int_0^3 \frac{dx}{16 + x^2}$$

utilizando la regla del trapecio con $n = 6$. (**b**) Compare el resultado del inciso (a) con el valor exacto de la integral definida.

Solución

(**a**) Como $[a, b] = [0, 3]$ y $n = 6$, entonces

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{3 - 0}{6} = 0.5 \qquad \frac{b - a}{2n} = \frac{3 - 0}{12} = 0.25$$

Por tanto,

$$\int_0^3 \frac{dx}{16 + x^2} \approx 0.25[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + 2f(x_5) + f(x_6)]$$

donde $f(x) = 1/(16 + x^2)$. El resultado de la suma entre corchetes se muestra anterior en la tabla 1, donde las entradas se obtuvieron con la ayuda de una calculadora. Así,

$$\int_0^3 \frac{dx}{16 + x^2} \approx (0.25)(0.6427) \approx 0.1607 \approx 0.161$$

Tabla 1

i	x_i	$f(x_i)$	k_i	$k_i \cdot f(x_i)$
0	0	0.0625	1	0.0625
1	0.5	0.0615	2	0.1230
2	1	0.0588	2	0.1176
3	1.5	0.0548	2	0.1096
4	2	0.0500	2	0.1000
5	2.5	0.0450	2	0.0900
6	3	0.0400	1	0.0400

$$\sum_{i=0}^{6} k_i f(x_i) = 0.6427$$

(**b**) Se calculará el valor exacto de la integral.

$$\int_0^3 \frac{dx}{16 + x^2} = \frac{1}{4} \tan^{-1} \frac{x}{4}\Big]_0^3 = \tfrac{1}{4} \tan^{-1} \tfrac{3}{4}$$

Este valor con tres cifras decimales es 0.161, el cual es acorde con el resultado del inciso (a). ◀

A fin de evaluar la exactitud de la aproximación de una integral definida obtenida mediante la regla del trapecio, se hará referencia a dos tipos de error. Uno de ellos es el error debido a la aproximación de la gráfica de la función por medio de segmentos de líneas rectas. Este tipo de error se conoce como **error de truncado**. La otra clase de error, el cual es inevitable, se conoce como **error de redondeo**. Este último se presenta debido a que se emplean números con una cantidad finita de dígitos para aproximar números. Conforme el valor de n (el número de subintervalos) se incrementa, la exactitud de la aproximación del área de la región mediante áreas de trapecios mejora; de este modo, el error de truncado se reduce. Sin embargo, conforme n crece, son necesarios más cálculos; en consecuencia, se tiene un incremento en el error de redondeo. Existen métodos, tratados en el *análisis numérico*,

que permiten, en ciertos problemas, determinar el valor de n que minimiza los errores combinados. Es claro que el error de redondeo depende de cómo se efectúen los cálculos. El error de truncado puede estimarse mediante un teorema. Primero se demostrará que conforme Δx se aproxima a cero y n crece sin cota, el límite de la aproximación obtenida mediante la regla del trapecio es el valor exacto de la integral definida. Sea

$$T = \tfrac{1}{2}\Delta x[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Entonces

$$T = [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]\,\Delta x + \tfrac{1}{2}\,[f(x_0) - f(x_n)]\,\Delta x$$

$$\Leftrightarrow \quad T = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \tfrac{1}{2}[f(a) - f(b)]\,\Delta x$$

Por tanto, si $n \to +\infty$ y $\Delta x \to 0$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} T &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{1}{2}[f(a) - f(b)]\,\Delta x \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + 0 \end{aligned}$$

Así, la diferencia entre T y el valor de la integral definida puede hacerse tan pequeña como se desee considerando n suficientemente grande (y en consecuencia Δx suficientemente pequeño).

El teorema siguiente, el cual se demuestra en análisis numérico, proporciona un método para estimar el error de truncado que se obtiene al emplear la regla del trapecio. El error de truncado se denota por ϵ_T.

7.6.2 Teorema

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Suponga que f' y f'' existen en $[a, b]$. Si

$$\epsilon_T = \int_a^b f(x)\,dx - T$$

donde T es el valor aproximado de $\int_a^b f(x)\,dx$ obtenido mediante la regla del trapecio, entonces existe algún número η en $[a, b]$ tal que

$$\epsilon_T = -\tfrac{1}{12}(b - a)f''(\eta)(\Delta x)^2 \qquad (2)$$

EJEMPLO 2 Determine los límites para el error de truncado del resultado del ejemplo 1.

Solución Primero se determinan los valores mínimo absoluto y máximo absoluto de $f''(x)$ en $[0, 3]$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (16 + x^2)^{-1} \\ f'(x) &= -2x(16 + x^2)^{-2} \\ f''(x) &= 8x^2(16 + x^2)^{-3} - 2(16 + x^2)^{-2} \\ &= (6x^2 - 32)(16 + x^2)^{-3} \\ f'''(x) &= -6x(6x^2 - 32)(16 + x^2)^{-4} + 12x(16 + x^2)^{-3} \\ &= 24x(16 - x^2)(16 + x^2)^{-4} \end{aligned}$$

Como $f'''(x) > 0$ para toda x del intervalo abierto (0, 3), entonces f'' es creciente en el intervalo abierto (0, 3). Por tanto, el valor mínimo absoluto de f'' en [0, 3] es $f''(0)$, y el valor máximo absoluto de f'' en [0, 3] es $f''(3)$; además

$$f''(0) = -\tfrac{1}{128} \qquad f''(3) = \tfrac{22}{15\,625}$$

Al considerar $\eta = 0$ en el miembro derecho de (2) se obtiene

$$-\tfrac{3}{12}(-\tfrac{1}{128})\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2\,048}$$

Si se toma $\eta = 3$ en el miembro derecho de (2) se tiene

$$-\tfrac{3}{12}(\tfrac{22}{15\,625})\tfrac{1}{4} = -\tfrac{11}{125\,000}$$

Por tanto, si ϵ_T es el error de truncado del resultado del ejemplo 1, entonces

$$-\tfrac{11}{125\,000} \leq \epsilon_T \leq \tfrac{1}{2\,048}$$
$$-0.0001 \leq \epsilon_T \leq 0.0005$$ ◀

Si en el teorema 7.6.2 $f(x) = mx + b$, entonces $f''(x) = 0$ para toda x. Por tanto $\epsilon_T = 0$; de modo que la regla del trapecio proporciona el valor exacto de la integral definida de una función lineal.

Otro método para aproximar el valor de una integral definida lo proporciona la *regla de Simpson* (que en ocasiones se denomina *regla parabólica*), llamada así en honor del matemático británico **Thomas Simpson** (1710-1761). Para una partición dada del intervalo cerrado $[a, b]$, la regla de Simpson por lo general proporciona una mejor aproximación que la regla del trapecio. En la regla del trapecio, los puntos sucesivos de la gráfica de $y = f(x)$ se unen mediante segmentos rectilíneos, mientras que en la regla de Simpson los puntos se unen mediante segmentos de parábolas. Antes de desarrollar la regla de Simpson, se establecerá y demostrará un teorema que se necesitará.

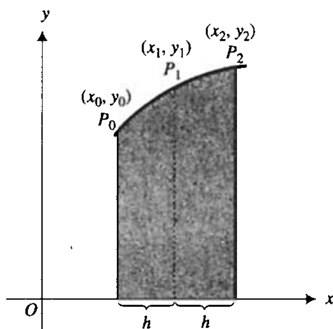


FIGURA 2

7.6.3 Teorema

Si $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, son tres puntos no colineales de la parábola cuya ecuación es $y = Ax^2 + Bx + C$, donde $y_0 \geq 0$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_0 + 2h$, entonces la medida del área de la región limitada por la parábola, el eje x y las rectas $x = x_0$ y $x = x_2$ está determinada por

$$\tfrac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Demostración La parábola cuya ecuación es $y = Ax^2 + Bx + C$ tiene eje vertical. Refiérase a la figura 2, la cual muestra la región limitada por la parábola, el eje x y las rectas $x = x_0$ y $x = x_2$.

Como P_0, P_1 y P_2 son puntos de la parábola, sus coordenadas satisfacen la ecuación de la parábola. De modo que cuando se sustituye x_1 por $x_0 + h$ y x_2 por $x_0 + 2h$, se tiene

$$\begin{aligned} y_0 &= Ax_0^2 + Bx_0 + C \\ y_1 &= A(x_0 + h)^2 + B(x_0 + h) + C \\ &= A(x_0^2 + 2hx_0 + h^2) + B(x_0 + h) + C \\ y_2 &= A(x_0 + 2h)^2 + B(x_0 + 2h) + C \\ &= A(x_0^2 + 4hx_0 + 4h^2) + B(x_0 + 2h) + C \end{aligned}$$

Por tanto,

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = A(6x_0^2 + 12hx_0 + 8h^2) + B(6x_0 + 6h) + 6C \quad \textbf{(3)}$$

Ahora bien, si K unidades cuadradas es el área de la región, entonces K puede determinarse mediante el límite de una suma de Riemann, obteniéndose

$$
\begin{aligned}
K &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (Aw_i^2 + Bw_i + C)\,\Delta x \\
&= \int_{x_0}^{x_0+2h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx \\
&= \tfrac{1}{3}Ax^3 + \tfrac{1}{2}Bx^2 + Cx\Big]_{x_0}^{x_0+2h} \\
&= \tfrac{1}{3}A(x_0 + 2h)^3 + \tfrac{1}{2}B(x_0 + 2h)^2 + C(x_0 + 2h) - (\tfrac{1}{3}Ax_0^3 + \tfrac{1}{2}Bx_0^2 + Cx_0) \\
&= \tfrac{1}{3}h[A(6x_0^2 + 12hx_0 + 8h^2) + B(6x_0 + 6h) + 6C]
\end{aligned}
$$

Al sustituir de (3) en esta expresión para K se tiene

$$K = \tfrac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2)$$ ■

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Considere una partición regular del intervalo $[a, b]$ de n subintervalos, donde n es par. La longitud de cada subintervalo está dada por $\Delta x = (b - a)/n$. Denote los puntos de la curva $y = f(x)$ que tienen como abscisa a los puntos de la partición por $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, . . . , $P_n(x_n, y_n)$; vea la figura 3, donde $f(x) \geq 0$ para toda x de $[a, b]$.

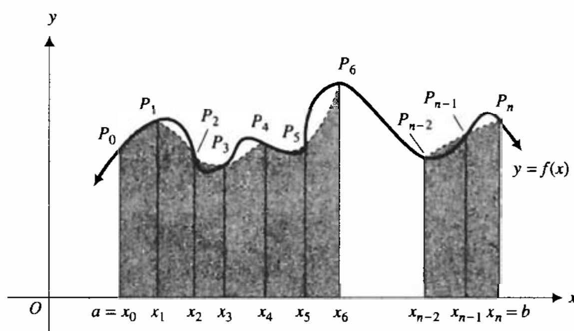


FIGURA 3

El segmento de la curva $y = f(x)$ de P_0 a P_2 se aproxima mediante el segmento de la parábola con eje vertical que pasa por P_0, P_1 y P_2. Entonces, por el teorema 7.6.3, la medida del área de la región limitada por esta parábola, el eje x y las rectas $x = x_0$ y $x = x_2$, con $h = \Delta x$, está dada por

$$\tfrac{1}{3}\Delta x(y_0 + 4y_1 + y_2) \quad \text{o} \quad \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

De manera semejante se aproxima el segmento de la curva $y = f(x)$ de P_2 a P_4 por medio del segmento de la parábola de eje vertical que pasa por los puntos P_2, P_3 y P_4. La medida de la región limitada por esta parábola, el eje x y las rectas $x = x_2$ y $x = x_4$ está dada por

$$\tfrac{1}{3}\Delta x(y_2 + 4y_3 + y_4) \quad \text{o} \quad \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

Este proceso se continúa hasta que haya $\frac{1}{2}n$ de estas regiones, y el área de la última región esté dada por

$$\tfrac{1}{3}\Delta x(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \quad \text{o} \quad \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

La suma de las medidas de las áreas de estas regiones aproxima la medida del área de la región limitada por la curva cuya ecuación $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. La medida del área de esta región está dada por la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$. Así, la expresión siguiente se tiene como una aproximación de la integral definida:

$$\tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \ldots + \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_{n-4}) + 4f(x_{n-3}) + f(x_{n-2})] + \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Por tanto,

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$.

Esta fórmula recibe el nombre de *regla de Simpson* y se expresa en el teorema siguiente.

7.6.4 Teorema Regla de Simpson

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, n es un número entero par, y los números $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ forman una partición regular de $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

EJEMPLO 3 **(a)** Aproxime con cuatro cifras decimales el valor de

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

utilizando la regla de Simpson con $n = 4$. **(b)** Compare el resultado del inciso (a) con el valor exacto de la integral.

Solución

(a) Al aplicar la regla de Simpson con $n = 4$, se tiene

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} \qquad \frac{b-a}{3n} = \frac{1-0}{3(4)} = \frac{1}{12}$$

Por tanto, si $f(x) = 1/(x + 1)$, entonces

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx \tfrac{1}{12}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

Tabla 2

i	x_i	$f(x_i)$	k_i	$k_i \cdot f(x_i)$
0	0	1.00000	1	1.00000
1	0.25	0.80000	4	3.20000
2	0.5	0.66667	2	1.33334
3	0.75	0.57143	4	2.28572
4	1	0.50000	1	0.50000

$$\sum_{i=0}^{4} k_i f(x_i) = 8.31906$$

En la tabla 2, donde las entradas se obtuvieron con una calculadora, se tiene el resultado de la suma anterior entre corchetes. En consecuencia,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx \frac{1}{12}(8.31906)$$
$$\approx 0.69325^+$$

Al redondear el resultado a cuatro cifras decimales se obtiene

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx 0.6933$$

(b) Al calcular el valor exacto de la integral se tiene

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1|\Big]_0^1$$
$$= \ln 2$$

El valor de ln 2 con cuatro cifras decimales es 0.6931, el cual es acorde con la aproximación del inciso (a) en las tres primeras cifras decimales. El error de la aproximación es -0.0002. ◀

En la regla de Simpson, cuanto más grande sea el valor de n, tanto menor será el valor de Δx. En términos geométricos, cuanto mayor sea el valor de n, tanto menor será el error de truncado de la aproximación debido a que una parábola, que contiene tres puntos de una curva cercanos entre sí, se aproxima mejor a la curva a lo largo del subintervalo de ancho Δx.

El teorema siguiente, que se demuestra en análisis numérico, proporciona un método para determinar el error de truncado, denotado por ϵ_S, en la regla de Simpson.

7.6.5 Teorema

Sea f la función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y suponga que f', f'', f''' y $f^{(4)}$ existen en $[a, b]$. Si

$$\epsilon_S = \int_a^b f(x)\,dx - S$$

donde S es el valor aproximado de $\int_a^b f(x)\,dx$ obtenido mediante la regla de Simpson, entonces existe algún número η en $[a, b]$ tal que

$$\epsilon_S = -\tfrac{1}{180}(b-a)f^{(4)}(\eta)(\Delta x)^4 \quad (4)$$

▶ ***EJEMPLO 4*** Determine los límites para el error de truncado del ejemplo 3.

Solución Al calcular las primeras cinco derivadas de f se obtiene

$$f(x) = (x+1)^{-1}$$
$$f'(x) = -1(x+1)^{-2}$$
$$f''(x) = 2(x+1)^{-3}$$
$$f'''(x) = -6(x+1)^{-4}$$

$$f^{(4)}(x) = 24(x + 1)^{-5}$$
$$f^{(5)}(x) = -120(x + 1)^{-6}$$

Como $f^{(5)}(x) < 0$ para toda x de $[0, 1]$, entonces $f^{(4)}$ es decreciente en $[0, 1]$. Por tanto, el valor mínimo absoluto de $f^{(4)}$ en $[0, 1]$ se obtiene en el extremo derecho 1, y el valor máximo absoluto de $f^{(4)}$ en $[0, 1]$ se alcanza en extremo izquierdo 0; además,

$$f^{(4)}(0) = 24 \quad \text{y} \quad f^{(4)}(1) = \tfrac{3}{4}$$

Al sustituir 0 por η en el miembro derecho de (4) se obtiene

$$-\tfrac{1}{180}(24)(\tfrac{1}{4})^4 \approx -0.00052$$

Si se sustituye 1 por η en el miembro derecho de (4) se tiene

$$-\tfrac{1}{180} \cdot \tfrac{3}{4}(\tfrac{1}{4})^4 \approx -0.00002$$

Así,

$$-0.00052 \leq \epsilon_S \leq -0.00002$$

Esta desigualdad es acorde con el análisis del ejemplo 3 referente al error en la aproximación de $\int_0^1 dx/(x + 1)$ mediante la regla de Simpson ya que $-0.00052 < -0.0002 < -0.00002$. ◀

Si $f(x)$ es un polinomio de grado tres o menor, entonces $f^{(4)}(x) \equiv 0$ y por tanto, $\epsilon_S = 0$. En otras palabras la regla de Simpson proporciona un resultado exacto para un polinomio de tercer grado o menor. Geométricamente, este enunciado es obvio si $f(x)$ es de segundo grado o de primer grado debido a que en el primer caso la gráfica de $y = f(x)$ es una parábola, y en el segundo caso la gráfica es una recta.

▶ **EJEMPLO 5** En el ejemplo 8 de la sección 5.6 se empleo NINT en la graficadora para mostrar que para la función normal estandarizada de densidad de probabilidad, $P([0, 2])$, la probabilidad de que una elección al azar de x estará en el intervalo $[0, 2]$, es 0.47725. Ahora, en lugar utilizar NINT, aproxime el valor de $P([0, 2])$ con tres cifras decimales mediante (**a**) la regla del trapecio con $n = 4$, y (**b**) la regla de Simpson con $n = 4$.

Solución De la ecuación (23) de la sección 5.6

$$P([0, 2]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^2 e^{-x^2/2}\, dx \tag{5}$$

(**a**) Se aproximará la integral de (5) mediante la regla del trapecio con $n = 4$. Como $[a, b] = [0, 2]$, $\Delta x = \frac{1}{2}$. Por tanto, con $f(x) = e^{-x^2/2}$,

$$\begin{aligned}\int_0^2 e^{-x^2/2}\, dx &\approx \tfrac{1}{4}[f(0) + 2f(\tfrac{1}{2}) + 2f(1) + 2f(\tfrac{3}{2}) + f(2)] \\ &= \tfrac{1}{4}[e^0 + 2e^{-1/8} + 2e^{-1/2} + 2e^{-9/8} + e^{-2}] \\ &\approx 1.191\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}P([0, 2]) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1.191) \\ &\approx 0.475\end{aligned}$$

(b) Si se emplea la regla de Simpson con $n = 4$ para aproximar la integral de (5), se tiene

$$\int_0^2 e^{-x^2/2}\,dx \approx \tfrac{1}{6}[f(0) + 4f(\tfrac{1}{2}) + 2f(1) + 4f(\tfrac{3}{2}) + f(2)]$$
$$= \tfrac{1}{6}[e^0 + 4e^{-1/8} + 2e^{-1/2} + 4e^{-9/8} + e^{-2}]$$
$$\approx 1.196$$

Por tanto,

$$P([0,2]) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1.196)$$
$$\approx 0.477$$

Las respuestas de los incisos (a) y (b) concuerdan con la respuesta del ejemplo 8 de la sección 5.6, la respuesta del inciso (b) obtenida mediante la regla de Simpson es mejor que la respuesta del inciso (a), la cual se obtuvo por medio de la regla del trapecio. ◀

Los métodos numéricos pueden aplicarse para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ aún cuando no se conozca una fórmula para $f(x)$ pero, por supuesto, en lugar de esto se tiene acceso a algunos valores de función. Dichos valores de función con frecuencia se obtienen experimentalmente. El ejemplo siguiente presenta una de estas situaciones.

▶ ***EJEMPLO 6*** Una partícula que se mueve a lo largo de una recta horizontal tiene una velocidad $v(t)$ metros por segundo a los t segundos. La tabla 3 muestra los valores de $v(t)$ para intervalos de tiempo de medio segundo en un periodo de 4 s. Utilice estos valores y la regla de Simpson para aproximar la distancia que recorre la partícula durante los 4 s.

Tabla 3

t	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
$v(t)$	0	0.15	0.35	0.55	0.78	1.02	1.27	1.57	1.90

Solución El número de metros que la partícula recorre durante los 4 s es $\int_0^4 v(t)\,dt$. De la regla de Simpson con $n = 8$, se tiene

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{8} = \frac{1}{2} \qquad \frac{b-a}{3n} = \frac{4-0}{24} = \frac{1}{6}$$

Por tanto,

$$\int_0^4 v(t)\,dt \approx \tfrac{1}{6}[v(0) + 4v(1) + 2v(2) + 4v(3) + 2v(4) + 4v(5) + 2v(6) + 4v(7) + v(8)]$$
$$= \tfrac{1}{6}[0 + 4(0.15) + 2(0.35) + 4(0.55) + 2(0.78) + 4(1.02) + 2(1.27) + 4(1.57) + 1.90]$$
$$\approx 3.31$$

<u>**Conclusión:**</u> La partícula recorre aproximadamente 3.31 metros durante los 4 s. ◀

EJERCICIOS 7.6

En los ejercicios 1 a 8, (a) calcule con tres cifras decimales el valor aproximado de la integral definida mediante la regla del trapecio para los valores de n indicados. (b) Compare el resultado del inciso (a) con el valor exacto de la integral definida.

1. $\int_0^2 x^3\,dx;\ n = 4$ **2.** $\int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}\,dx;\ n = 8$

3. $\int_0^\pi \cos x\,dx;\ n = 4$ **4.** $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx;\ n = 6$

5. $\int_1^2 \frac{dx}{x};\ n = 5$ **6.** $\int_2^{10} \frac{dx}{1 + x};\ n = 8$

7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}};\ n = 5$ **8.** $\int_2^3 \sqrt{1 + x^2}\,dx;\ n = 6$

En los ejercicios 9 a 12, calcule con tres cifras decimales el valor aproximado de la integral definida mediante la regla del trapecio para los valores indicados de n.

9. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx;\ n = 6$ **10.** $\int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx;\ n = 4$

11. $\int_0^2 \sqrt{1 + x^4}\,dx;\ n = 6$ **12.** $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x}\,dx;\ n = 6$

En los ejercicios 13 a 18, determine los límites para el error de truncado en la aproximación del ejercicio indicado.

13. Ejercicio 1 **14.** Ejercicio 4

15. Ejercicio 3 **16.** Ejercicio 6

17. Ejercicio 5 **18.** Ejercicio 8

19. Aproxime $\int_0^2 x^3\,dx$ con tres cifras decimales mediante la regla de Simpson con $n = 4$. Compare el resultado con el obtenido en el ejercicio 1, y observe que la regla de Simpson proporciona una mejor aproximación que la regla del trapecio con el mismo número de subintervalos.

20. Aproxime sen $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$ con tres cifras decimales mediante la regla de Simpson con $n = 6$. Compare el resultado con el obtenido en el ejercicio 4, y observe que la regla de Simpson proporciona una mejor aproximación que la regla del trapecio con el mismo número de subintervalos.

En los ejercicios 21 a 24, (a) calcule con cuatro cifras decimales el valor aproximado de la integral definida mediante la regla de Simpson para el valor indicado de n. (b) Compare el resultado del inciso (a) con el valor exacto de la integral definida.

21. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1 - x};\ n = 4$ **22.** $\int_{-0.5}^0 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}};\ n = 4$

23. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1};\ n = 4$ **24.** $\int_1^2 \frac{dx}{x + 1};\ n = 8$

En los ejercicios 25 a 28, determine los límites para el error de truncado en la aproximación del ejercicio indicado.

25. Ejercicio 19 **26.** Ejercicio 20

27. Ejercicio 21 **28.** Ejercicio 24

Cada una de las integrales definidas de los ejercicios 29 a 34 no pueden evaluarse exactamente en términos de funciones elementales. Utilice la regla de Simpson, con el valor indicado de n, para obtener un valor aproximado de la integral definida. Exprese el resultado con cuatro cifras decimales.

29. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx;\ n = 6$ **30.** $\int_0^2 \sqrt{1 + x^4}\,dx;\ n = 6$

31. $\int_1^{1.8} \sqrt{1 + x^3}\,dx;\ n = 4$ **32.** $\int_0^1 \sqrt[3]{1 - x^2}\,dx;\ n = 4$

33. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^3}};\ n = 8$ **34.** $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx;\ n = 6$

35. **(a)** Demuestre que el valor exacto de la integral $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$ es π interpretándola como la medida del área de una región. **(b)** Calcule con tres cifras decimales el valor aproximado de la integral mediante la regla del trapecio con $n = 8$, y compare el resultado con el valor exacto.

36. **(a)** Demuestre que el valor exacto de la integral $\int_0^1 4\sqrt{1 - x^2}\,dx$ es π interpretándola como la medida del área de una región. **(b)** Calcule con tres cifras decimales el valor aproximado de la integral mediante la regla del trapecio con $n = 6$, y compare el resultado con el valor exacto.

37. En el ejercicio 29 de la sección 5.6, se empleó NINT en la graficadora a fin de obtener $P([0, 1])$ para la función normal estandarizada de densidad de probabilidad. Ahora, aproxime el valor de $P([0, 1])$ con tres cifras decimales mediante **(a)** la regla del trapecio con $n = 4$, y **(b)** la regla de Simpson con $n = 4$.

38. En el ejercicio 30 de la sección 5.6, se utilizó NINT en la graficadora con objeto de determinar $P([-3, 3])$ para la función normal estandarizada de densidad de probabilidad. Ahora, aproxime el valor de $P([-3, 3])$ con tres cifras decimales mediante **(a)** la regla del trapecio con $n = 6$, y **(b)** la regla de Simpson con $n = 6$. Comente acerca de la respuesta del inciso (b).

39. En el ejercicio 27 de la sección 6.1, se empleó NINT en la graficadora a fin de determinar con cuatro dígitos significativos la longitud de arco de la curva senoidal a partir del origen hasta el punto $(\pi, 0)$. Ahora calcule esta longitud mediante la regla de Simpson con $n = 8$.

40. En el ejercicio 28 de la sección 6.1, se empleó NINT en la graficadora para determinar con cuatro dígitos significativos la longitud de arco de la curva cosenoidal a partir del punto (0, 1) hasta el punto $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$. Ahora calcule esta longitud mediante la regla de Simpson con $n = 8$.

En los ejercicios 41 y 42, los valores de función f(x) se obtuvieron experimentalmente. Con la suposición de que f es

continua en [0, 4], aproxime $\int_0^4 f(x)\,dx$ mediante (a) la regla del trapecio, y (b) la regla de Simpson.

41.

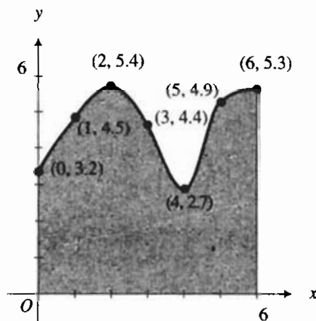
x	0	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
$f(x)$	3.25	4.17	4.60	3.84	3.59	4.23	4.01	3.96	3.75

42.

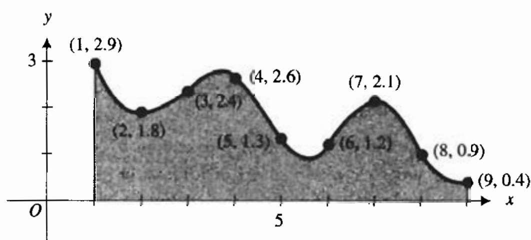
x	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
$f(x)$	8.4	8.1	7.9	7.5	7.6	7.2	6.8	6.3	6.5	6.0	5.7

En los ejercicios 43 y 44, utilice la regla de Simpson para aproximar el área de la región sombreada de la figura.

43.



44.



45. Una mujer empleó 10 min en manejar desde su casa hasta al supermercado. En cada intervalo de 1 min observó en el velocímetro los valores mostrados en la tabla adjunta, donde $v(t)$ millas por hora fue la lectura en el velocímetro a los t minutos después de que la mujer salió de su casa. Utilice la regla de Simpson para aproximar la distancia entre la casa de la mujer y el supermercado.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v(t)$	0	30	33	41	38	32	42	45	41	37	22

46. La forma de un estacionamiento es irregular y la longitud del terreno de oeste a este es 240 pie. En el lado oeste la anchura es de 150 pie y en el lado este es de 175 pie. A 40, 80, 120, 160 y 200 pie del lado oeste, las anchuras son de 154, 158, 165, 163 y 172 pie respectivamente. Utilice la regla de Simpson para aproximar el área del estacionamiento.

47. Determine el área de la región acotada por el bucle (lazo) de la curva cuya ecuación es $y^2 = 8x^2 - x^5$. Evalúe la integral mediante la regla de Simpson con $n = 8$ y exprese el resultado con tres cifras decimales.

48. El estudio de la difracción de la luz (dispersión o desviación de la luz sobre los contornos) en una abertura rectangular involucra las integrales de Fresnel

$$C(t) = \int_0^t \cos \tfrac{1}{2}\pi x^2\,dx \quad \text{y} \quad S(t) = \int_0^t \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\pi x^2\,dx$$

Complete la siguiente tabla de valores con cuatro cifras decimales mediante la regla de Simpson.

t	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$C(t)$					
$S(t)$					

49. La energía ganada por el deslizamiento en una patineta hacia abajo sobre una colina "gaussiana" sin fricción, a x metros a partir de la cima de la colina, después de t segundos, es $E(x)$ joules donde

$$E(x) = \frac{gM}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$$

con $g = 9.8$ y $M = 60$. La velocidad del patinador a los t segundos es $\sqrt{2E(x)/M}$. Utilice la regla de Simpson para determinar la velocidad del patinador a 2 m a partir de la cima de la colina.

50. Aplique la regla de Simpson para la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ donde $f(x)$ es un polinomio de tercer grado para demostrar la **fórmula prismoidal**:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) - 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

En los ejercicios 51 a 54, evalúe la integral definida mediante dos métodos: (a) utilice la fórmula prismoidal dada en el ejercicio 50; (b) utilice el segundo teorema fundamental del Cálculo.

51. $\displaystyle\int_1^3 (4x^3 - 3x^2 + 1)\,dx$

52. $\displaystyle\int_{-2}^2 (x^3 + x^2 - 4x - 2)\,dx$

53. $\displaystyle\int_{-1}^5 (x^3 + 3x^2 - 2x - 6)\,dx$

54. $\displaystyle\int_2^6 (2x^3 - 2x - 3)\,dx$

55. Suponga que f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Sea T el valor aproximado de $\int_a^b f(x)\,dx$ utilizando la regla del trapecio, y sea S el valor aproximado de $\int_a^b f(x)\,dx$ empleando la regla de Simpson, utilizando la misma partición del intervalo $[a, b]$ para las dos aproximaciones. Demuestre que

$$S = \tfrac{2}{3}[T + \Delta x(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + \ldots + f(x_{n-1}))]$$

donde n es un número par.

56. ¿Para qué grados de polinomios se obtiene un valor exacto de una integral definida mediante **(a)** la regla del trapecio, y **(b)** la regla de Simpson? Explique cómo llegó a la respuesta.

7.7 FORMA INDETERMINADA 0/0 Y TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE CAUCHY

En este texto se han presentado límites de cocientes de funciones para los cuales el límite del numerador y del denominador son cero. Por ejemplo

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

son dos de dichos límites. Para calcular estos límites, no se puede aplicar inmediatamente el teorema del límite de un cociente ya que en este teorema se requiere que el límite del denominador sea diferente de cero. Sin embargo, se siguieron otros procedimientos. Se determinó que el primero de los límites es 1, cuando se demostró el teorema 1.10.2. El segundo de estos límites se calculó al factorizar la diferencia de cuadrados del numerador y después dividir el numerador y denominador entre $x - 3$ para obtener 6 como límite. Ahora se estudiará un método más general que puede aplicarse a límites como estos.

7.7.1 Definición de la forma indeterminada 0/0

Si f y g son dos funciones tales que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

entonces $f(x)/g(x)$ tiene la **forma indeterminada 0/0** en a.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 De la definición 7.7.1, $\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ tiene la forma indeterminada 0/0 en 0, y $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ tiene la forma indeterminada 0/0 en 3. ◀

El método general para calcular el límite en un número a de una función que tiene la forma indeterminada 0/0 en a emplea un teorema conocido como la *regla de L'Hôpital*, llamada así en honor del matemático francés **Guillaume François de L'Hôpital** (1661-1707), quien escribió el primer libro de texto de Cálculo publicado en 1696.

7.7.2 Teorema Regla de L'Hôpital

Sean f y g dos funciones diferenciables en un intervalo abierto I, excepto posiblemente en el número a de I. Suponga que para toda x de I, $x \neq a$ y que $g'(x) \neq 0$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, y

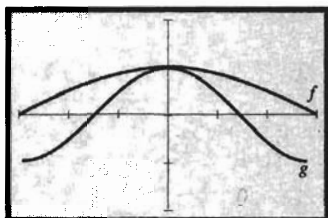
$$\text{si} \quad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \text{entonces} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

El teorema también es válido si todos los límites son límites laterales por la derecha o límites laterales por la izquierda.

Antes de demostrar la regla de L'Hôpital, se mostrarán sus aplicaciones a través de ejemplos y ejemplos ilustrativos.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Como $\lim\limits_{t\to 0} \operatorname{sen} t = 0$ y $\lim\limits_{t\to 0} t = 0$, se puede aplicar la regla de L'Hôpital para obtener

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos t}{1}$$
$$= 1$$



[−3, 3] por [−2, 2]

$f(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ y $g(t) = \cos t$

FIGURA 1

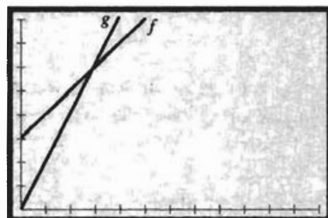
A fin de mostrar gráficamente esta aplicación de la regla de L'Hôpital, consulte la figura 1, la cual muestra las gráficas de $f(t) = \operatorname{sen} t/t$ y $g(t) = \cos t/1$ trazadas en el mismo rectángulo de inspección de [−3, 3] por [−2, 2]. La figura apoya el hecho de que las dos funciones tienen el mismo límite de 1 conforme $t \to 0$. En $t = 0$, f tiene una discontinuidad removible y g es continua. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Como

$$\lim_{x\to 3} (x^2 - 9) = 0 \text{ y } \lim_{x\to 3} (x - 3) = 0$$

se puede aplicar la regla de L'Hôpital para obtener

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{2x}{1}$$
$$= 6$$



[0, 12] por [0, 8]

$f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ y $g(x) = 2x$

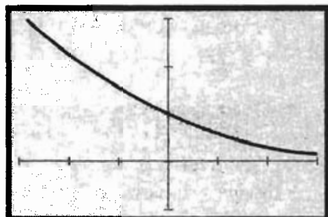
FIGURA 2

Refiérase a la figura 2 para ver una interpretación gráfica de esta aplicación de la regla de L'Hôpital. En la figura se muestran las gráficas de $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ y $g(x) = 2x/1$ trazadas en el mismo rectángulo de inspección de [0, 12] por [0, 8]. La figura apoya el hecho de que los límites de las dos funciones es 6 cuando $x \to 3$. En $x = 3$, f tiene una discontinuidad removible, mientras que g es continua en ese número. ◀

▶ ***EJEMPLO 1*** Sea

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

(a) Trace la gráfica de f. ¿A qué valor parece que se aproxima $f(x)$ cuando x tiende a 0? **(b)** Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando el $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.



[−3, 3] por [−1, 3]

$f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$

FIGURA 3

Solución

(a) La figura 3 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [−3, 3] por [−1, 3]. Como $f(0)$ no existe, la gráfica tiene un agujero (cubierto por el eje y) en $x = 0$. De la gráfica, parece que $f(x)$ se aproxima a 1 conforme x tiende a 0.

(b) Como el $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} (e^x - 1) = 0$, se puede aplicar la regla de L'Hôpital, obteniéndose

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x}$$
$$= 1$$

lo cual confirma la respuesta del inciso (a). ◀

EJEMPLO 2 Sea

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{1 - x + \ln x}$$

Evalúe $\lim_{x \to 1} f(x)$, si existe, y apoye gráficamente la respuesta.

Solución Primero se revisará si es posible aplicar la regla de L'Hôpital.

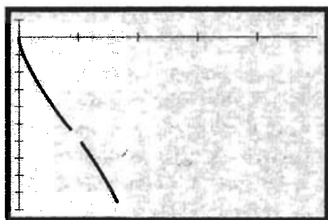
$$\lim_{x \to 1} (x^3 - 3x + 2) = 1 - 3 + 2 = 0 \qquad \lim_{x \to 1} (1 - x + \ln x) = 1 - 1 + 0 = 0$$

Por tanto, se aplica la regla:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{1 - x + \ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 3}{-1 + \frac{1}{x}}$$

Ahora, como $\lim_{x \to 1} (3x^2 - 3) = 0$ y $\lim_{x \to 1} (-1 + 1/x) = 0$, se aplica otra vez la regla de L'Hôpital, obteniéndose

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 3}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{6x}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{6}{-1} = -6$$



[0, 4.7] por [−10, 1]

$f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{1 - x + \ln x}$

FIGURA 4

La figura 4 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [0, 4.7] por [−10, 1]. La gráfica tiene un agujero en (1, −6), lo cual apoya la respuesta. ◀

A fin de demostrar el teorema 7.7.2, se necesita emplear el *teorema del valor medio de Cauchy*, atribuido al matemático francés **Agustín L. Cauchy** (1789-1857), que extiende a dos funciones el teorema del valor medio para una función. Una interpretación geométrica del teorema se pospone hasta la sección 9.1, donde se estudian derivadas asociadas con ecuaciones paramétricas.

7.7.3 Teorema del valor medio de Cauchy

Si f y g son dos funciones tales que

(i) f y g son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$;
(ii) f y g son diferenciables en el intervalo abierto (a, b);
(iii) para toda x del intervalo abierto (a, b), $g'(x) \neq 0$,

entonces existe un número z en el intervalo abierto (a, b) tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Demostración Primero se mostrará que $g(b) \neq g(a)$. Suponga que $g(b) = g(a)$. Como g satisface las dos condiciones de la hipótesis del teorema del valor medio, existe un número c en (a, b) tal que $g'(c) = [g(b) - g(a)]/(b - a)$. Pero si $g(b) = g(a)$, entonces existe un número c en (a, b) tal que $g'(c) = 0$. Pero la condición (iii) de la hipótesis de este teorema establece que para toda x de (a, b), $g'(x) \neq 0$. Por tanto se tiene un contradicción. De modo que, la suposición de que $g(b) = g(a)$ es falsa. En consecuencia, $g(b) - g(a) \neq 0$.

Ahora considere la función h definida por

$$h(x) = f(x) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right][g(x) - g(a)$$

Entonces

$$h'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right]g'(x) \tag{1}$$

Por tanto, h es diferenciable en (a, b) puesto que f y g son diferenciables en este intervalo, y h es continua en $[a, b]$ ya que f y g son continuas en dicho intervalo.

Al calcular $h(a)$ y $h(b)$ se tiene

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right][g(a) - g(a)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(b) &= f(b) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right][g(b) - g(a)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, la función h satisface las tres condiciones de la hipótesis del teorema de Rolle. Entonces existe un número z en el intervalo (a, b) tal que $h'(z) = 0$. Así, de (1),

$$f'(z) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(z) = 0$$

Como $g'(z) \neq 0$ en (a, b), de la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

donde z es algún número del intervalo (a, b). Esto demuestra el teorema. ■

Si $g(x) = x$, entonces la conclusión del teorema del valor medio de Cauchy es la conclusión del teorema del valor medio ya que $g'(z) = 1$. Así, el teorema del valor medio es un caso especial del teorema del valor medio de Cauchy.

▶ ***EJEMPLO 3*** Determine todos los valores de z en el intervalo $(0, 1)$ que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio de Cauchy para las funciones definidas por

$$f(x) = 3x^2 + 3x - 1 \quad \text{y} \quad g(x) = x^3 - 4x + 2$$

Solución Al derivar f y g se obtiene

$$f'(x) = 6x + 3 \quad \text{y} \quad g'(x) = 3x^2 - 4$$

Las funciones f y g son diferenciables y continuas en cualquier número, y para toda x en $(0, 1)$, $g'(x) \neq 0$. Por tanto, mediante el teorema del valor medio de Cauchy, existe un número z en $(0, 1)$ tal que

$$\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{6z + 3}{3z^2 - 4}$$

Si se sustituye $f(1)$ por 5, $g(1)$ por -1, $f(0)$ por -1 y $g(0)$ por 2 en la ecuación anterior, y ésta se resuelve para z, se tiene

$$\frac{5-(-1)}{-1-2} = \frac{6z+3}{3z^2-4}$$

$$6z^2 + 6z - 5 = 0$$

$$z = \frac{-6 \pm \sqrt{36+120}}{12}$$

$$= \frac{-6 \pm 2\sqrt{39}}{12}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{39}}{6}$$

En el intervalo $(0, 1)$, $z = \frac{1}{6}(-3 + \sqrt{39}) \approx 0.54083$. ◀

Ahora se tienen los elementos para demostrar el teorema 7.7.2. Se distinguirán tres casos: (i) $x \to a^+$; (ii) $x \to a^-$; (iii) $x \to a$.

Demostración del teorema 7.7.2 (i) Como en la hipótesis no se supone que f y g están definidas en a, se consideran dos nuevas funciones F y G para las cuales

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases} \quad \text{y} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases} \tag{2}$$

Sea b el extremo derecho del intervalo I dado en la hipótesis. Como f y g son diferenciables en I, excepto posiblemente en a, se concluye que F y G son diferenciables en el intervalo $(a, x]$, donde $a < x < b$. Por tanto, F y G son continuas en $(a, x]$. Las funciones también son continuas por la derecha en a porque $\lim\limits_{x\to a+} F(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = 0$, lo cual es $F(a)$; de manera semejante, $\lim\limits_{x\to a+} G(x) = G(a)$. Por tanto, F y G son continuas en el intervalo cerrado $[a, x]$. De este modo, F y G satisfacen las tres condiciones del teorema del valor medio de Cauchy. En consecuencia,

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(z)}{G'(z)}$$

donde z es algún número tal que $a < z < x$. De (2) y de la ecuación anterior se tiene

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Como $a < z < x$, se deduce que conforme $x \to a^+$, $z \to a^+$; por tanto,

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Pero por hipótesis, este límite es L. Así,

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$ ■

La demostración del caso (ii) es semejante a la demostración del caso (i) y se deja como ejercicio (refiérase al el ejercicio 44). El caso (iii) se deduce inmediatamente de los casos (i) y (ii).

La regla de L'Hôpital también se cumple si x crece sin límite o si x decrece sin límite, como se establece en el teorema siguiente.

7.7.4 Teorema Regla de L'Hôpital

Sean f y g dos funciones diferenciables para toda $x > N$, donde N es una constante positiva, y suponga que para toda $x > N$; $g'(x) \neq 0$. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, y

$$\text{si} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \text{entonces} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

El teorema también es válido si $x \to +\infty$ se sustituye por $x \to -\infty$.

Demostración Se demostrará el teorema para cuando $x \to +\infty$. La demostración para cuando $x \to -\infty$ se deja como ejercicio (vea el ejercicio 45).

Para toda $x > N$, sea $x = 1/t$; entonces $t = 1/x$. Sean F y G las funciones definidas por $F(t) = f(1/t)$ y $G(t) = g(1/t)$, si $t \neq 0$. Entonces $f(x) = F(t)$ y $g(x) = G(t)$, donde $x > N$ y $0 < t < 1/N$. De las definiciones 3.7.1 y 1.6.1 se puede mostrar que las proposiciones

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = M \quad \text{y} \quad \lim_{t \to 0^+} F(t) = M$$

tienen el mismo significado. Se le pedirá que demuestre esto en el ejercicio 42. Como por hipótesis $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, se puede concluir que

$$\lim_{t \to 0^+} F(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \to 0^+} G(t) = 0 \tag{3}$$

Al aplicar la regla de la cadena al cociente $F'(t)/G'(t)$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{F'(t)}{G'(t)} &= \frac{-\dfrac{1}{t^2} f'\left(\dfrac{1}{t}\right)}{-\dfrac{1}{t^2} g'\left(\dfrac{1}{t}\right)} \\ &= \frac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)} \\ &= \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

Como por hipótesis $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)/g'(x) = L$, se deduce de lo anterior que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = L \tag{4}$$

Puesto que para toda $x > N$, $g'(x) \neq 0$, entonces

$$G'(t) \neq 0 \quad \text{para toda} \quad 0 < t < \frac{1}{N}$$

De esta proposición, y de (3) y (4), se deduce del teorema 7.7.2 que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = L$$

Pero como $F(t)/G(t) = f(x)/g(x)$ para toda $x > N$ y $t \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

de modo que el teorema se ha demostrado. ∎

EJEMPLO 4 Evalúe el límite si existe.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\tan \frac{2}{x}}$$

Solución $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$. De modo que por la regla de L'Hôpital se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\tan \frac{2}{x}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(\sec^2 \frac{2}{x}\right)\left(-\frac{2}{x^2}\right)} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sec^2 \frac{2}{x}} \\
&= \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

◀

Los teoremas 7.7.2 y 7.7.4 también se cumplen si L se sustituye por $+\infty$ o $-\infty$. Las demostraciones de estos casos se omiten. Sin embargo, observe que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} [f'(x)/g'(x)]$ no existe y no es $+\infty$ ni $-\infty$, entonces el $\lim\limits_{x\to a} [f(x)/g(x)]$ puede existir. Vea el ejercicio 41 como un ejemplo de tal situación.

EJEMPLO 5 Demuestre que si se elimina la discontinuidad en 0 del ejemplo 1, la función que resulta será diferenciable en 0.

Solución La función del ejemplo 1 está definida por

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

y ahí se mostró que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Se elimina la discontinuidad definiendo la función de modo que sea 1 en 0. Si F es esta nueva función,

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

A fin de demostrar que F es diferenciable en 0, se calcula $F'(0)$.

$$\begin{aligned}
F'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x - e^x + 1}{xe^x - 1}
\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} (x - e^x + 1) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} (xe^x - x) = 0$, se aplica la regla de L'Hôpital y se tiene

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{e^x + xe^x - 1}$$

Como $\lim_{x \to 0} (1 - e^x) = 0$ y $\lim_{x \to 0} (e^x + xe^x - 1) = 0$, se aplica otra vez la regla de L'Hôpital y se obtiene

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{-e^x}{e^x + e^x + xe^x} = -\tfrac{1}{2}$$

Por tanto, se ha demostrado que F es diferenciable en 0. ◀

EJERCICIOS 7.7

En los ejercicios 1 a 10, haga lo siguiente: (a) trace la gráfica de f en la graficadora y determine a qué valor parece que se aproxima f(x) cuando x tiene a a; (b) confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando $\lim_{x \to a} f(x)$.

1. $f(x) = \dfrac{x}{\tan x}$, $a = 0$
2. $f(x) = \dfrac{\tan x - x}{x - \operatorname{sen} x}$, $a = 0$
3. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} \pi x}{2 - x}$, $a = 2$
4. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$, $a = 0$
5. $f(x) = \dfrac{2^x - 3^x}{x}$, $a = 0$
6. $f(x) = \dfrac{\tanh 2x}{\tanh x}$, $a = 0$
7. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x^2}$, $a = 0$
8. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 3x - 4}$, $a = 1$
9. $f(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^3 + x^2 + 4}$, $a = -2$
10. $f(x) = \dfrac{3 \cos x}{2x - \pi}$, $a = \pi/2$

En los ejercicios 11 a 16, calcule el límite, si existe, y apoye gráficamente la respuesta.

11. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{\tan 2x}$
12. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$
13. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} \frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}$
14. $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\theta - \operatorname{sen} \theta}{\tan^3 \theta}$
15. $\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\ln(\operatorname{sen} x)}{(\pi - 2x)^2}$
16. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos x}{x \operatorname{sen} x}$

En los ejercicios 17 a 28, evalúe el límite si existe.

17. $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x - 1}{x - 2\sqrt{x - 1} - 1}$
18. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x^2 - 1}}{\operatorname{sen}^2 x}$
19. $\lim_{z \to +\infty} \dfrac{1 - e^{1/z}}{-\frac{3}{z}}$
20. $\lim_{y \to 0} \dfrac{y^2}{1 - \cosh y}$
21. $\lim_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{\ln(2e^t - 1)}$
22. $\lim_{z \to 0} \dfrac{5z}{5^z - e^z}$
23. $\lim_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^{1/5} - (1 - x)^{1/5}}{(1 + x)^{1/3} - (1 - x)^{1/3}}$
24. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x^2} - 2 \tan^{-1} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$
25. $\lim_{x \to \pi} \dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \operatorname{sen} x}$
26. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 10^x}{x}$
27. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cosh x}{x^2}$
28. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$

En los ejercicios 29 a 36, determine todos los valores de z en el intervalo (a, b) que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio de Cauchy para el par de funciones indicado.

29. $f(x) = x^3, g(x) = x^2; (a, b) = (0, 2)$
30. $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}, g(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}; (a, b) = (0, 2)$
31. $f(x) = \operatorname{sen} x, g(x) = \cos x; (a, b) = (0, \pi)$
32. $f(x) = \cos 2x, g(x) = \operatorname{sen} x; (a, b) = (0, \frac{1}{2}\pi)$
33. $f(x) = \ln x, g(x) = x^2; (a, b) = (1, 3)$
34. $f(x) = \sqrt{x + 5}, g(x) = x + 3; (a, b) = (-4, -1)$
35. $f(x) = e^{2x}, g(x) = e^x; (a, b) = (0, 2)$
36. $f(x) = \ln(x + 1), g(x) = \ln x; (a, b) = (1, 2)$
37. Un circuito eléctrico tiene una resistencia de R ohms, una inductancia de L henrys y una fuerza electromotriz de E volts, donde R, L y E son positivos. Si i amperes es la corriente que fluye en el circuito t segundos después de que se cierra el interruptor, entonces

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

Si t, E y L son constantes, calcule $\lim_{R \to 0^+} i$.

38. En una progresión geométrica, si a es el primer término, r es la razón común de dos términos consecutivos y S es la suma de los primeros n términos, y si $r \neq 1$, entonces

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Calcule el $\lim_{r \to 1} S$. Si $r = 1$, ¿es consistente el resultado con la suma de los primeros n términos?

39. Considere que

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$$

Sea F la función que se obtiene de f al eliminar la discontinuidad en 0; esto es,

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que F es diferenciable en 0 calculando $F'(0)$.

40. (**a**) Demuestre que si $a > 0$, entonces

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

(**b**) A partir del resultado del inciso (a), demuestre que si $r > 0$ y $s > 0$, entonces

$$\lim_{x \to 0} \frac{(rs)^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{r^x - 1}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{s^x - 1}{x}$$

41. Sean

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad g(x) = x$$

Demuestre que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$, y que $\lim\limits_{x \to 0} [f'(x)/g'(x)]$ no existe ni es $+\infty$ ni $-\infty$. También demuestre que $\lim\limits_{x \to 0} [f(x)/g(x)]$ existe y calcule este límite.
Sugerencia: Aplique el teorema de estricción.

42. Suponga que f es una función definida para toda $x > N$, donde N es una constante positiva. Si $t = 1/x$ y $F(t) = f(1/t)$, donde $t \neq 0$, demuestre que las proposiciones $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = M$ y $\lim\limits_{t \to 0^+} F(t) = M$ tienen el mismo significado.

43. Calcule los valores para a y b tales que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x + ax + bx^3}{x^3} = 0$$

44. Demuestre el teorema 7.7.2(ii).

45. Demuestre el teorema 7.7.4 para cuando $x \to -\infty$.

46. Suponga que f y g son dos funciones tales que la función f/g tiene la forma indeterminada $0/0$ en a. Además suponga que

$$\lim_{x \to a} f'(x) = L_1 \text{ y } \lim_{x \to a} g'(x) = L_2$$

¿Qué puede concluirse acerca de $\lim\limits_{x \to a} [f(x)/g(x)]$ en cada uno de los siguientes casos: (**a**) $L_1 \neq 0$ y $L_2 \neq 0$; (**b**) $L_1 = 0$ y $L_2 \neq 0$; (**c**) $L_1 \neq 0$ y $L_2 = 0$; (**d**) $L_1 = 0$ y $L_2 = 0$?

7.8 OTRAS FORMAS INDETERMINADAS

Otra forma indeterminada de un cociente de dos funciones ocurre cuando el numerador y el denominador crecen o decrecen sin límite. Por ejemplo, suponga que desea evaluar el límite, si existe,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

No se puede aplicar el teorema que trata acerca del límite de un cociente porque $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} (1/x) = +\infty$. En este caso se dice que la función definida por

$$f(x) = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

tiene la forma indeterminada $(-\infty)/(+\infty)$ en $x = 0$. La regla de L'Hôpital también se aplica a una forma indeterminada de cste tipo así como a las formas $(+\infty)/(+\infty)$, $(-\infty)/(-\infty)$ y $(+\infty)/(-\infty)$. La regla se da en los dos teoremas siguientes, para los cuales las demostraciones se omiten debido a que están más allá del alcance de este libro.

7.8.1 Teorema Regla de L'Hôpital

Sean f y g funciones diferenciables en el intervalo abierto I, excepto posiblemente en el número a de I, y suponga que para toda $x \neq a$

en I, $g'(x) \neq 0$. Si $\lim_{x \to a} f(x)$ es igual a $+\infty$ o $-\infty$, y $\lim_{x \to a} g(x)$ es igual a $+\infty$ o $-\infty$, y

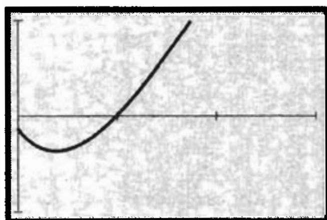
$$\text{si} \quad \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \text{entonces} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

El teorema también es válido si todos los límites son limites por la derecha o límites por la izquierda.

EJEMPLO 1 Sea

$$f(x) = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

(a) Trace la gráfica de f. ¿A qué valor parece que se aproxima $f(x)$ cuando x tiende a 0 por la derecha? **(b)** Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.



[0, 3] por [−1, 1]

$f(x) = \dfrac{\ln x}{1/x}$

FIGURA 1

Solución

(a) La figura 1 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [0, 3] por [−1, 1]. En la gráfica, parece que $f(x)$ se aproxima a 0 cuando x tiende a 0 por la derecha.

(b) Como $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ y $\lim_{x \to 0^+} (1/x) = +\infty$, se aplica la regla de L'Hôpital obteniéndose

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \to 0^+} (-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo cual confirma la respuesta del inciso (a). ◀

7.8.2 Teorema Regla de L'Hôpital

Sean f y g funciones diferenciables para toda $x > N$, donde N es una constante positiva, y suponga que para toda $x > N$, $g'(x) \neq 0$. Si $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ es igual a $+\infty$ o $-\infty$, y $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ es igual a $+\infty$ o $-\infty$, y

$$\text{si} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \text{entonces} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

El teorema también es válido si $x \to +\infty$ se sustituye por $x \to -\infty$.

Los teoremas 7.8.1 y 7.8.2 también se cumplen si L se sustituye por $+\infty$ o $-\infty$, y las demostraciones para estos casos también se omiten.

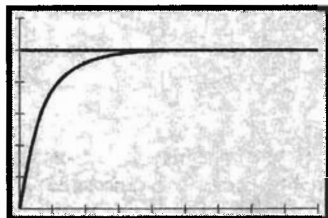
EJEMPLO 2 Evalúe, si existe,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x}{\ln(2 + e^x)}$$

y apoye gráficamente la respuesta.

Solución Como $\lim_{x\to+\infty} 5x = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} \ln(2 + e^x) = +\infty$, al aplicar la regla de L'Hôpital se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{\ln(2+e^x)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{\dfrac{1}{2+e^x}\cdot(e^x)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} (10 + 5e^x)e^{-x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} (10e^{-x} + 5) \\ &= 5\end{aligned}$$



[0, 9] por [0, 6]

$f(x) = \dfrac{5x}{\ln(2+e^x)}$ y $y = 5$

FIGURA 2

La figura 2 muestra las gráficas de la recta $y = 5$ y de la función $f(x) = 5x/\ln(2 + e^x)$ trazada en el rectángulo de inspección de [0, 9] por [0, 6]. Se ha apoyado la respuesta ya que la recta parece ser una asíntota horizontal de la gráfica de f. ◀

▶ ***EJEMPLO 3*** Evalúe, si existe,

$$\lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\sec x}{\sec 3x}$$

Solución Como $\lim_{x\to\pi/2^-} \sec x = +\infty$, y $\lim_{x\to\pi/2^-} \sec 3x = -\infty$, de la regla de L'Hôpital se tiene

$$\lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\sec x}{\sec 3x} = \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\sec x \tan x}{3\sec 3x \tan 3x}$$

Observe que $\lim_{x\to\pi/2^-} \sec x \tan x = +\infty$, y $\lim_{x\to\pi/2^-} 3\sec 3x \tan 3x = -\infty$ y que aplicar otra vez regla de L'Hôpital no será útil. Sin embargo, el cociente original puede escribirse como

$$\lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\sec x}{\sec 3x} = \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

Ahora, como $\lim_{x\to\pi/2^-} \cos 3x = 0$ y $\lim_{x\to\pi/2^-} \cos x = 0$, se puede aplicar la regla de L'Hôpital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\cos 3x}{\cos x} &= \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{-3\operatorname{sen} 3x}{-\operatorname{sen} x} \\ &= -3\end{aligned}$$ ◀

El límite del ejemplo 3 puede ser evaluado sin la regla de L'Hopital, utilizando el teorema 1.10.2. Se le pedirá que haga esto en el ejercicio 42.

Además de las formas $0/0$ y $\pm\infty/\pm\infty$, otras formas indeterminadas son $0\cdot(+\infty)$, $+\infty - (+\infty)$, 0^0, $(\pm\infty)^0$ y $1^{\pm\infty}$. Estas formas indeterminadas se definen de manera semejante a las otras dos. Por ejemplo, si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces la función definida por $f(x)^{g(x)}$ tiene la forma indeterminada $(+\infty)^0$ en a. Para calcular el límite de una función que tiene una de estas formas indeterminadas, se debe cambiar a la forma $0/0$ o $\pm\infty/\pm\infty$ antes de aplicar la regla de L'Hôpital. Los ejemplos siguientes ilustran el método.

EJEMPLO 4 Evalúe, si existe,

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}^{-1} x \csc x$$

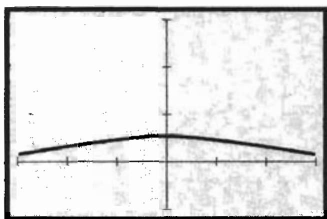
Solución Como $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}^{-1} x = 0$ y $\lim_{x\to 0^+} \csc x = +\infty$, la función definida por $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x \csc x$ tiene la forma indeterminada $0 \cdot (+\infty)$ en 0. Antes de aplicar la regla de L'Hôpital se expresa $\operatorname{sen}^{-1} x \csc x$ como $\operatorname{sen}^{-1} x/\operatorname{sen} x$, y se considera $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}^{-1} x/\operatorname{sen} x)$. Ahora $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}^{-1} x = 0$ y $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x = 0$; de modo que se tiene la forma indeterminada 0/0. Por tanto, de la regla de L'Hôpital se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x}\\ &= \frac{1}{1}\\ &= 1\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Sea

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x}$$

(a) Trace la gráfica de f. ¿A qué valor parece que se aproxima $f(x)$ cuando x tiende a 0? **(b)** Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando $\lim_{x\to 0} f(x)$.



[−3, 3] por [−1, 3]

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x}$$

FIGURA 3

Solución

(a) La figura 3 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [−3, 3] por [−1, 3]. La gráfica tiene un agujero (cubierto por el eje y) en $x = 0$ debido a que $f(0)$ no existe. En la gráfica, parece que $f(x)$ se aproxima a 0.5 cuando x tiende a 0.

(b) Como

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2 \sec x} = +\infty$$

se tiene la forma indeterminada $+\infty - (+\infty)$. Al reescribir la expresión se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right) &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x^2} \right)\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}\end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to 0} (1 - \cos x) = 0$ y $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, se aplica la regla de L'Hôpital y se obtiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x}$$

Si se aplica la regla de L'Hôpital una vez más, ya que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$ y $\lim_{x \to 0} 2x = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right) = \frac{1}{2}$$

lo cual confirma la respuesta del inciso (a). ◀

Para cualquiera de las formas indeterminadas 0^0, $(+\infty)^0$, $1^{+\infty}$, el procedimiento para evaluar el límite se presenta en el ejemplo 6.

▶ **EJEMPLO 6** Evalúe, si existe,

$$\lim_{x \to 0^+} (x + 1)^{\cot x}$$

Apoye gráficamente la respuesta.

Solución Como $\lim_{x \to 0^+} (x + 1) = 1$ y $\lim_{x \to 0^+} \cot x = +\infty$, se tiene la forma indeterminada $1^{+\infty}$. Sea

$$y = (x + 1)^{\cot x} \tag{1}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \ln y &= \cot x \ln(x + 1) \\ &= \frac{\ln(x + 1)}{\tan x} \end{aligned}$$

De modo que

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x + 1)}{\tan x} \tag{2}$$

Como $\lim_{x \to 0^+} \ln(x + 1) = 0$ y $\lim_{x \to 0^+} \tan x = 0$, puede aplicarse la regla de L'Hôpital al miembro derecho de (2) obteniéndose

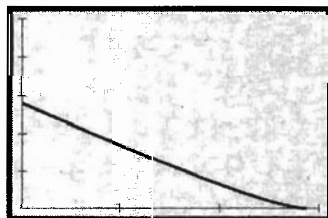
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x + 1)}{\tan x} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x + 1}}{\sec^2 x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, al sustituir 1 en el miembro derecho de (2) se tiene

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = 1 \tag{3}$$

Debido a que la función exponencial es continua en todo su dominio, el cual es el conjunto de los número reales, se puede aplicar el teorema 1.9.1; de modo que

$$\lim_{x \to 0^+} \exp(\ln y) = \exp(\lim_{x \to 0^+} \ln y)$$



[0, 3] por [0, 5]

$f(x) = (x + 1)^{\cot x}$

FIGURA 4

Entonces, se deduce de (3) y de esta ecuación que

$$\lim_{x\to 0^+} y = e^1$$

Pero de (1), $y = (x + 1)^{\cot x}$, y en consecuencia,

$$\lim_{x\to 0^+} (x + 1)^{\cot x} = e$$

La figura 4, que muestra la gráfica de $f(x) = (x + 1)^{\cot x}$ trazada en el rectángulo de inspección de [0, 3] por [0, 5], apoya la respuesta. ◀

EJERCICIOS 7.8

En los ejercicios 1 a 8, haga lo siguiente: (a) estime el límite, si existe, trazando la gráfica de la función en un rectángulo de inspección adecuado; (b) confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando el límite.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \tan x (\ln x)$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \tan^{-1} x \cot x$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + x)^{\ln x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

8. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{5}{x^2 + x - 6} - \dfrac{1}{x-2}\right)$

En los ejercicios 9 a 16, calcule el límite, si existe, y apoye gráficamente la respuesta.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x + 100)}{\ln x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \csc x$

12. $\lim\limits_{x\to 1/2^+} (2x - 1) \tan \pi x$

13. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 2})$

14. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x}\right)$

15. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + 3x)^{1/x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/\ln x}$

En los ejercicios 17 a 34, calcule el límite si existe.

17. $\lim\limits_{x\to 1/2^-} \dfrac{\ln(1 - 2x)}{\tan \pi x}$

18. $\lim\limits_{x\to \pi/2^-} \dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(\tan x)}$

19. $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + x)^{2/x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{senh} x)^{\tan x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{x^2}$

22. $\lim\limits_{x\to 0} (x + e^{2x})^{1/x}$

23. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + 2x}{e^{3x} - 1}$

24. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)^{x^2}$

25. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \operatorname{senh} x)^{2/x}$

26. $\lim\limits_{x\to 2} (x - 2) \tan \frac{1}{4}\pi x$

27. $\lim\limits_{x\to 0} [(\cos x)e^{x^2/2}]^{4/x^4}$

28. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

29. $\lim\limits_{x\to+\infty} [(x^6 + 3x^5 + 4)^{1/6} - x]$

30. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x + e^x)}{3x}$

31. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-1/x}}{x}$

32. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^x}$

33. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

34. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2 - x})$

35. Trace la gráfica de

$$f(x) = \frac{2^x}{e^x}$$

en un rectángulo de inspección conveniente, y a partir de la gráfica prediga el comportamiento de $f(x)$ cuando **(a)** $x \to -\infty$, y **(b)** $x \to +\infty$. Confirme analíticamente las respuestas de los incisos (a) y (b) determinando **(c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, y **(d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, respectivamente.

36. Realice el ejercicio 35 si

$$f(x) = \frac{e^x}{3^x}$$

37. Demuestre que e^x crece más rápido que x^p para todos los valores positivos de p, sin importar que tan grande sea p, evaluando

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^p}$$

38. Demuestre que $\ln x$ crece menos rápido que x^p para todos los valores positivos de p, sin importar que tan pequeño sea p, evaluando

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^p}$$

39. Si $f(x) = \begin{cases} (1 - e^{4x})^x & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } 0 \le x \end{cases}$, determine k de que f sea continua en $x = 0$.

40. Si $f(x) = \begin{cases} (x + 1)^{(\ln k)/x} & \text{si } x \ne 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, determine k de modo que f sea continua en $x = 0$.

41. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{nx + 1}{nx - 1}\right)^x = 9$, determine n.

42. Evalúe el límite del ejemplo 3 sin emplear la regla de L'Hôpital, sino utilizando el teorema 1.10.2 y las identidades $\cos(\frac{1}{2}\pi - t) = \operatorname{sen} t$ y $\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi - t) = \cos t$.

43. **(a)** Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} (e^{-1/x^2}/x^n) = 0$ para cualquier número entero positivo n. **(b)** Si $f(x) = e^{-1/x^2}$, utilice el resultado del inciso (a) para demostrar que los límites de f y de todas sus derivadas, cuando x tiende a 0, son 0.

44. Suponga que $f(x) = \int_1^x e^{3t}\sqrt{9t^4 + 1}\,dt$ y $g(x) = x^n e^{3x}$. Si $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right] = 1$. determine n.

45. Si la recta normal a la curva $y = x^p$, donde $p > 0$, en el punto (u, u^p) intersecta al eje x en el punto $(a, 0)$, demuestre que

$$\lim_{u \to +\infty}(a - u) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < p < 0.5 \\ 0.5 & \text{si } p = 0.5 \\ +\infty & \text{si } 0.5 < p \end{cases}$$

46. Si la recta normal a la curva $y = \ln x$ en el punto $(u, \ln u)$ intersecta al eje x en el punto $(a, 0)$, demuestre que

$$\lim_{u \to +\infty}(a - u) = 0$$

En los ejercicios 47 y 48, dibuje la gráfica de f determinando primero los extremos locales de f y las asíntotas horizontales de la gráfica, si es que existe alguna. Verifique la gráfica en la graficadora.

47. $f(x) = x^{1/x}, x > 0$

48. $f(x) = x^x, x > 0$

49. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty}\log_x(x + 10)$ y apoye gráficamente la respuesta. *Sugerencia:* primero exprese $\log_x(x + 10)$ en términos de logaritmos naturales aplicando la ecuación (3) de la sección 5.5.

50. Sea

$$f(x) = \frac{x - \cos x}{x + \operatorname{sen} x}$$

(a) Estime $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, si existe, trazando la gráfica de f en un rectángulo de inspección conveniente. **(b)** Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando el límite. **(c)** ¿Por qué no puede emplearse la regla de L'Hôpital para calcular el límite del inciso (b)?

51. Determine cada uno de los siguiente límites:

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+}(\operatorname{sen} x)^{\csc x}$ **(b)** $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)^x$

(c) ¿Es $0^{+\infty}$ una forma indeterminada? Explique cómo llegó a la respuesta.

7.9 INTEGRALES IMPROPIAS CON LÍMITES DE INTEGRACIÓN INFINITOS

Hasta aquí, en el estudio de la integral definida se ha supuesto que el integrando está definido en un intervalo cerrado. En esta sección, se extenderá la definición de la integral definida para considerar un intervalo infinito de integración. A estas integrales se les denomina **integrales impropias**. Otro tipo de integrales impropias se discutirá en la próxima sección.

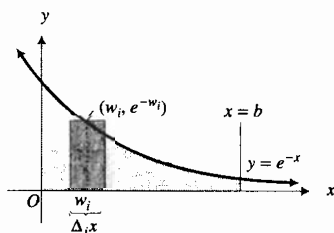


FIGURA 1

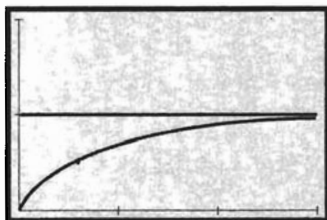
EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Considere el problema de calcular el área de la región limitada por la curva $y = e^{-x}$, el eje y, el eje x y la recta $x = b$, donde $b > 0$. Esta región se muestra en la figura 1. Si A unidades cuadradas es el área de la región, entonces

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \to 0}\sum_{i=1}^{n} e^{-w_i}\,\Delta_i x \\ &= \int_0^b e^{-x}\,dx \\ &= -e^{-x}\Big]_0^b \\ &= 1 - e^{-b} \end{aligned}$$

Si se permite que b crezca sin límite, entonces

$$\lim_{b \to +\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b \to +\infty}(1 - e^{-b})$$

$$\lim_{b \to +\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = 1 \qquad \textbf{(1)}$$



[0, 3] por [0, 2]

$y = \text{NINT}(e^{-t}, 0, x)$ y $y = 1$

FIGURA 2

Por tanto, sin importar que tan grande se tome el valor de b, el área de la región mostrada en la figura 1, siempre será menor que 1 unidad cuadrada. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Al trazar la gráfica de $y = \text{NINT}(e^{-t}, 0, x)$ y la recta $y = 1$ en el rectángulo de inspección de [0, 3] por [0, 2], como se muestra en la figura 2, se apoya la respuesta del ejemplo ilustrativo 1. La figura apoya la respuesta porque la recta parece ser una asíntota horizontal de la gráfica. ◀

La ecuación (1) establece que si $b > 0$, para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $N > 0$ tal que

$$\text{si } b > N \quad \text{entonces} \quad \left| \int_0^b e^{-x}\, dx - 1 \right| < \epsilon$$

En lugar de (1) se escribe

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$$

En general, se tiene la siguiente definición.

7.9.1 Definición de integral impropia con límite superior infinito

Si f es continua para toda $x \geq a$, entonces

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

si este límite existe.

La siguiente definición trata acerca de las integrales impropias para las cuales el límite inferior de integración es infinito.

7.9.2 Definición de integral impropia con límite inferior infinito

Si f es continua para toda $x \leq b$, entonces

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

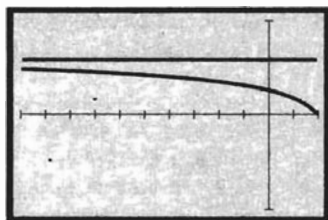
si este límite existe.

En las dos definiciones anteriores, si el límite existe, se dice que la integral impropia es **convergente**. Si los límites no existen, la integral impropia es **divergente**.

▶ ***EJEMPLO 1*** Evalúe la integral, si es convergente:

$$\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(4 - x)^2}$$

Apoye gráficamente la respuesta.



[−10, 2] por [−1, 1]

$y = \text{NINT}\left(\frac{1}{(4-t)^2}, x, 2\right)$ y $y = 0.5$

FIGURA 3

Solución

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left[\frac{1}{4-x}\right]_a^2$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4-a}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} - 0$$

$$= \tfrac{1}{2}$$

Al trazar las gráficas de $y = \text{NINT}(1/(4-t)^2, x, 2)$ y la recta $y = 0.5$ en el rectángulo de inspección de [−10, 2] por [−1, 1], como se muestra en la figura 3, donde la recta parece ser una asíntota de la gráfica. ◀

La siguiente definición trata acerca de las integrales impropias para el caso cuando los dos límites de integración son infinitos.

7.9.3 Definición de integral impropia con límite superior e inferior infinitos

Si f es continua para todos los valores de x y c es cualquier número real, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{c}^{b} f(x)\,dx \qquad \textbf{(2)}$$

si los dos límites existen.

En el ejercicio 42 se le pedirá que demuestre que cuando los límites existen, el miembro derecho de (2) es independiente de la elección de c. Cuando la definición 7.9.3 se aplica, por lo general se considera c como 0.

▶ **EJEMPLO 2** Evalúe, si existen,

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ **(b)** $\displaystyle\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} x\,dx$

Solución

(a) De la definición 7.9.3, con $c = 0$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} x\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} x\,dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_a^0 + \lim_{b \to +\infty} \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^b$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(-\tfrac{1}{2}a^2\right) + \lim_{b \to +\infty} \tfrac{1}{2}b^2$$

Como ninguno de estos dos límites existe, entonces la integral impropia diverge.

(b)
$$\begin{aligned}\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} x\,dx &= \lim_{r\to+\infty}\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{-r}^{r}\\ &= \lim_{r\to+\infty}\left(\tfrac{1}{2}r^2-\tfrac{1}{2}r^2\right)\\ &= \lim_{r\to+\infty} 0\\ &= 0\end{aligned}$$
◀

▶ ***EJEMPLO 3*** Evalúe la integral, si es convergente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}$$

Apoye gráficamente la respuesta.

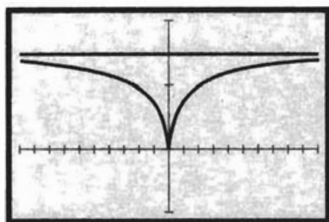
Solución

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1} &= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{x^2+1}\\ &= \lim_{a\to-\infty}\left[\tan^{-1}x\right]_a^0+\lim_{b\to+\infty}\left[\tan^{-1}x\right]_0^b\\ &= \lim_{a\to-\infty}(\tan^{-1}0-\tan^{-1}a)+\lim_{b\to+\infty}(\tan^{-1}b-\tan^{-1}0)\\ &= 0-\lim_{a\to-\infty}(\tan^{-1}a)+\lim_{b\to+\infty}(\tan^{-1}b)-0\\ &= -\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\\ &= \pi\end{aligned}$$

A fin de apoyar la respuesta se trazan las gráficas de

$$\begin{aligned}y_1 &= \text{NINT}(1/(t^2+1),\ x,\ 0) \quad (x<0)\\ y_2 &= \text{NINT}(1/(t^2+1),\ 0,\ x) \quad (x>0)\end{aligned}$$

y la recta $y = \pi/2$ en el rectángulo de inspección de $[-10, 10]$ por $[-1, 2]$, como se muestra en la figura 4. El hecho de que la recta $y = \pi/2$ parece ser la asíntota de las gráficas de y_1 y y_2 apoya la respuesta. ◀



$[-10, 10]$ por $[-1, 2]$

$y_1 = \text{NINT}(1/(t^2+1),\ x,\ 0)\quad (x<0)$

$y_2 = \text{NINT}(1/(t^2+1),\ 0,\ x)\quad (x>0)$

$y = \pi/2$

FIGURA 4

▶ ***EJEMPLO 4*** Evalúe la integral si es convergente:

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}\,dx$$

Solución

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} xe^{-x}\,dx$$

A fin de evaluar la integral se utiliza integración por partes con $u = x$ y $dv = e^{-x}\,dx$, de modo que $du = dx$ y $v = -e^{-x}$. Así,

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^b$$
$$= \lim_{b\to+\infty}(-be^{-b} - e^{-b} + 1)$$
$$= -\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b} - 0 + 1 \qquad (3)$$

Con objeto de calcular $\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b}$, se aplica la regla de L'Hôpital porque $\lim_{b\to+\infty} b = +\infty$ y $\lim_{b\to+\infty} e^b = +\infty$. De este modo se tiene

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^b}$$
$$= 0$$

Por tanto, de (3),

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = 1$$

◀

▶ ***EJEMPLO 5*** ¿Es posible asignar un número finito para representar la medida del área de la región ubicada a la derecha de la recta $x = 1$, debajo de la gráfica de $y = 1/x$ y por arriba del eje x?

Solución La región se muestra en la figura 5. Sea L el número que se desea asignar a la medida del área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = b$, donde $b > 1$. Entonces

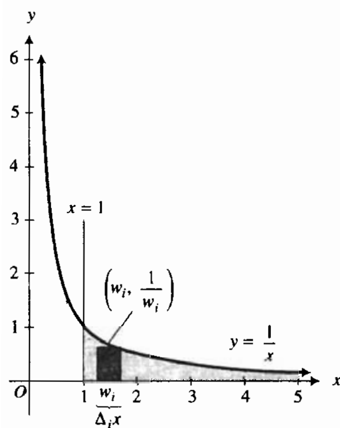


FIGURA 5

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{w_i}\Delta_i x$$
$$= \int_1^b \frac{1}{x}\,dx$$

Así, sea $L = \lim_{b\to+\infty} A$, si este límite existe. Pero

$$\lim_{b\to+\infty} A = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx$$
$$= \lim_{b\to+\infty}[\ln b - \ln 1]$$
$$= +\infty$$

Por tanto, no es posible asignar un número finito para representar la medida del área de la región. ◀

▶ ***EJEMPLO 6*** ¿Es posible asignar un número finito para representar la medida del volumen del sólido generado al girar la región del ejemplo 5 alrededor del eje x?

Solución El elemento de volumen es un disco circular que tiene un espesor de $\Delta_i x$ y un radio de $1/w_i$ en la base. Sea L el número que se desea asig-

nar a la medida del volumen, y sea V la medida del volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región limitada por las gráficas de $y = 1/x, y = 0, x = 1$ y $x = b$, donde $b > 1$. Entonces

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\left(\frac{1}{w_i}\right)^2 \Delta_i x$$

$$= \pi \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx$$

Sea $L = \lim_{b\to+\infty} V$, si el límite existe.

$$\lim_{b\to+\infty} V = \lim_{b\to+\infty} \pi \int_1^b \frac{dx}{x^2}$$

$$= \pi \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b$$

$$= \pi \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b} + 1\right)$$

Por tanto, se asigna π para representar la medida del volumen del sólido. ◀

▶ EJEMPLO 7

Determine si $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x\, dx$ es convergente o divergente.

Solución

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\Big[-\cos x\Big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} (-\cos b + 1).$$

Para cualquier número entero n, conforme b toma todos los valores de $n\pi$ a $2n\pi$, $\cos b$ toma todos los valores de -1 a 1. En consecuencia, $\lim_{b\to+\infty} \cos b$ no existe. Por tanto, la integral impropia es divergente. ◀

El ejemplo 7 ilustra el caso en el cual la integral impropia es divergente y el límite no es infinito.

Una aplicación de la integral impropia con un límite de integración infinito se refiere a la probabilidad. La probabilidad de que un evento particular ocurra es un número del intervalo cerrado [0, 1]. Si es seguro que el evento ocurra, entonces la probabilidad de su ocurrencia es 1; si el evento nunca ocurrirá, entonces la probabilidad es 0. Cuanto más seguro se esté de que un evento ocurrirá, su probabilidad estará más cercana a 1.

Suponga que el conjunto de todos los resultados posibles de una situación particular es el conjunto de todos los números x del intervalo I. Por ejemplo, x puede ser el número de minutos del tiempo de espera para una mesa en cierto restaurante, el número de horas de vida de un cinescopio, o el número de pulgadas de la estatura de una persona. En ocasiones es necesario

determinar la probabilidad de que x esté en algún subintervalo de I. Por ejemplo, se puede desear determinar la probabilidad de que una persona tendrá que esperar entre 20 y 30 min para una mesa en un restaurante, o la probabilidad de que de que el cinescopio de una televisión dure más de 2 000 horas, o la probabilidad de que alguien elegido al azar tenga una altura entre 66 pulg y 72 pulg. Estos problemas implican la evaluación de la integral de una función denominada *función de densidad de probabilidad.* En la sección 5.6 se trató la función normal estandarizada de densidad de probabilidad. Las funciones de densidad de probabilidad se obtienen a partir de experimentos estadísticos. Se dará aquí una discusión breve e informal de estas funciones con el fin de mostrar como surgen las integrales impropias.

Una **función de densidad de probabilidad** es una función f que tiene como dominio al conjunto R de los números reales y que satisface las dos siguientes condiciones:

1. $f(x) \geq 0$ para toda x en R

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Se considerará aquí la *función de densidad exponencial* definida por

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-kx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & 0\ x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

donde $k > 0$. Para verificar que esta función es una función de densidad de probabilidad se mostrará que se cumplen las dos condiciones.

1. Si $x < 0, f(x) = 0$; si $x \geq 0, f(x) = ke^{-kx}$, y como $k > 0, ke^{-kx} > 0$.

2.
$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} ke^{-kx}\,dx \\
&= 0 + \lim_{b\to+\infty}\left[-\int_{0}^{b} e^{-kx}(-k\,dx)\right] \\
&= \lim_{b\to+\infty}\Big[-e^{-kx}\Big]_{0}^{b} \\
&= \lim_{b\to+\infty}(-e^{-kb} + 1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

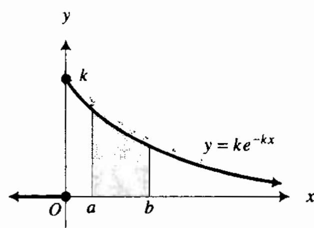


FIGURA 6

Si f es una función de densidad de probabilidad de cierto evento, entonces la **probabilidad de que el evento ocurrirá en el intervalo cerrado $[a, b]$** se denota por $P([a, b])$ y

$$P([a, b]) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

La figura 6 muestra la gráfica de la función de densidad exponencial. Como $\int_0^{+\infty} ke^{-kx}\,dx = 1$, la medida del área de la región limitada por $y = ke^{-kx}$,

el eje x y el eje y, es 1. La medida del área de la región sombreada en la figura es $P([a, b])$.

EJEMPLO 8 Para cierto tipo de baterías, la función de densidad de probabilidad de modo que x horas es la vida de una batería elegida al azar está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60} e^{-x/60} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & 0 \; x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

Calcule la probabilidad de que la vida de una batería elegida al azar **(a)** esté entre 15 y 25 horas, y **(b)** sea por lo menos 50 horas.

Solución La función definida por (5) es de la forma (4) con $k = \frac{1}{60}$. **(a)** La probabilidad de que la vida de una batería elegida al azar esté entre 15 y 25 horas es $P([15, 25])$, y **(b)** la probabilidad de que por lo menos será de 50 horas es $P([50, +\infty])$.

$$\textbf{(a)} \; P([15, 25]) = \int_{15}^{25} \frac{1}{60} e^{-x/60}\, dx$$
$$= -\int_{15}^{25} e^{-x/60} \left(-\frac{1}{60} dx\right)$$
$$= -e^{-x/60}\Big]_{15}^{25}$$
$$= -e^{-25/60} + e^{-15/60}$$
$$= 0.120$$

$$\textbf{(b)} \; P([50, +\infty]) = \lim_{b \to +\infty} \int_{50}^{b} \frac{1}{60} e^{-x/60}\, dx$$
$$= \lim_{b \to +\infty} \Big[-e^{-x/60}\Big]_{50}^{b}$$
$$= \lim_{b \to +\infty} (-e^{-b/60} + e^{-50/60})$$
$$= 0 + e^{-50/60}$$
$$= 0.435$$

◀

EJERCICIOS 7.9

En los ejercicios 1 a 18, determine si la integral impropia es convergente o divergente, y si es convergente, evalúela. Apoye gráficamente la respuesta.

1. $\int_{0}^{+\infty} e^{-x/3}\, dx$
2. $\int_{-\infty}^{1} e^{x}\, dx$
3. $\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\, dx$
4. $\int_{1}^{+\infty} 2^{-x}\, dx$
5. $\int_{0}^{+\infty} x2^{-x}\, dx$
6. $\int_{5}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$
7. $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cosh x\, dx$
8. $\int_{-\infty}^{0} x^2 e^{x}\, dx$
9. $\int_{5}^{+\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{9 - x^2}}$
10. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x\, dx}{(3x^2 + 2)^3}$
11. $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{3\, dx}{x^2 + 9}$
12. $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$
13. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\, dx$
14. $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2}\, dx$

15. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

16. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{16 + x^2}$

17. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln x\, dx$

18. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x\, dx$

19. Evalúe, si existe:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x\, dx$ **(b)** $\displaystyle\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} \operatorname{sen} x\, dx$

20. Demuestre que si $\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ es convergente, entonces $\int_{b}^{+\infty} f(-x)\, dx$ también es convergente y tiene el mismo valor.

21. Pruebe que la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} x(1 + x^2)^{-2}\, dx$ es convergente y que la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} x(1 + x^2)^{-1}\, dx$ es divergente.

22. Demuestre que la integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ es convergente si y sólo si $p > 1$.

23. Determine si es posible asignar un número finito para representar la medida del área de la región limitada por la curva cuya ecuación $y = 1/(e^x + e^{-x})$ y el eje x. Si puede asignarse un número finito, determínelo.

24. Determine si es posible asignar un número finito para representar la medida del área de la región limitada por el eje x, la recta $x = 2$ y la curva cuya ecuación es $y = 1/(x^2 - 1)$. Si se puede asignar un número finito, determínelo.

25. Determine si es posible asignar un número finito para representar la medida del volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región ubicada a la derecha de la recta $x = 1$ y limitada por la curva cuya ecuación es $y = 1/x^{3/2}$ y el eje x. Si puede asignarse un número finito, determínelo.

26. Determine si es posible asignar un número finito para representar la medida del volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región limitada por el eje x, el eje y, y la curva cuya ecuación es $y = e^{-2x}$. Si puede ser asignado un número, determínelo.

27. Para la batería del ejemplo 8, calcule la probabilidad de que la vida de una batería elegida al azar sea **(a)** no más de 50 horas, y **(b)** por lo menos 75 horas.

28. Para cierto tipo de lámparas, la función de densidad de probabilidad de que x horas sea la vida de una lámpara elegida al azar está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{40} e^{-x/40} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Determine la probabilidad de que la vida de una lámpara elegida al azar **(a)** esté entre 40 y 60 horas, y **(b)** sea por lo menos 60 horas.

29. En cierta ciudad, la función de densidad de probabilidad para que x minutos sea la duración de una llamada telefónica elegida al azar está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{-x/3} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Determine la probabilidad de que una llamada telefónica durará **(a)** entre 1 min y 2 min, y **(b)** por lo menos 5 min.

30. Para cierto aparato doméstico, la función de densidad de probabilidad de que necesite servicio después de x meses de comprado está dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0.02e^{-0.02x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Si el aparato está garantizado por un año, ¿cuál es la probabilidad de que un aparato elegido al azar no necesitará servicio durante este periodo de garantía?

31. Suponga que un cohete se lanza desde la superficie de la Tierra, sin considerar toda resistencia excepto la de gravedad. Si v millas por segundo es la velocidad necesaria para escapar del campo gravitacional de la Tierra, entonces

$$v^2 = 2gR^2 \int_R^{+\infty} x^{-2}\, dx$$

donde g es la gravedad constante medida en millas por segundo por segundo en la superficie de la Tierra y R millas es el radio de la Tierra. Con $g = 0.006094$ y $R = 3963$, aproxime la velocidad de escape con tres dígitos significativos.

32. Si f es una función de densidad de probabilidad, entonces la *media* (o *valor promedio*) de las probabilidades está dado por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

si existe. Calcule la media de las probabilidades obtenidas a partir de la función de densidad exponencial (4).

Los ejercicios 33 a 36 muestran una aplicación de las integrales impropias en el campo de la economía. Suponga un flujo de ingresos continuo para el cual el interés se compone continuamente a una tasa anual de $100i\%$ y $f(t)$ dólares es el ingreso anual en cualquier lapso de t años. Si el ingreso continúa indefinidamente, el valor presente, V dólares, de cualquier ingreso futuro está dado por

$$V = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-it}\, dt$$

33. Un flujo continuo de ingresos decrece en el tiempo, y en t años el número de dólares del ingreso anual es $1000 \cdot 2^{-t}$. Determine el valor presente de este ingreso si se continúa empleando indefinidamente una tasa de interés del 8% compuesto continuamente.

34. Suponga que el dueño de parte de una propiedad de una empresa la tiene en arrendamiento permanente, de ma-

nera que la renta se pague a perpetuidad. Si la renta anual es de \$12 000 y el valor monetario es 10% compuesto continuamente, determine el valor presente de todas las rentas futuras.

35. El British Consol es un bono sin vencimiento y proporciona al poseedor una suma global de pago al año. Determinando el valor presente de un flujo de pagos anuales de R dólares y utilizando la tasa de interés corriente de $100i\%$, compuesto continuamente, demuestre que el precio justo de venta de uno de estos bonos, es R/i dólares.

36. El flujo continuo de utilidades de una empresa crece con el tiempo, y a los t años el número de dólares de la utilidad anual es proporcional a t. Demuestre que el valor presente de la compañía es inversamente proporcional a i^2, donde $100i\%$ es la tasa de interés compuesta continuamente.

37. La distancia de un punto masa P (toda la masa está concentrada en P) desde un alambre largo de masa uniforme es b unidades. El número de unidades de fuerza gravitacional sobre P debida al alambre es F donde

$$F = 2kb\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(b^2 + x^2)^{3/2}}$$

donde k es una constante positiva. Demuestre que $F = 2k/b$; esto es, F varía inversamente a b.

38. La distancia de un punto masa P desde una superficie plana delgada de masa uniforme, es b unidades. El número de unidades de fuerza gravitacional sobre P debida a la superficie es F donde

$$F = 2kb\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + b^2}$$

donde k es una constante positiva. Demuestre que $F = 2\pi k$, lo cual indica que la fuerza gravitacional es independiente de la posición de P y de su distancia desde la superficie.

39. Determine un valor de p para el cual la siguiente integral impropia es convergente: $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$.

40. Determine un valor de n para el cual la integral impropia

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n}\right) dx$$ sea convergente, y evalúe la integral para este valor de n.

41. Determine un valor de n para el cual la integral impropia

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{nx^2}{x^3+1} - \frac{1}{3x+1}\right) dx$$ sea convergente, y evalúe la integral para este valor de n.

42. Suponga que f es continua para todos los valores de x. Demuestre que si

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx = L \quad \text{y} \quad \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)\,dx = M$$

entonces si d es cualquier número real,

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^d f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_d^b f(x)\,dx = L + M$$

Sugerencia: $\int_a^d f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$

$\int_d^b f(x)\,dx = \int_d^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

43. Una función de densidad *uniforme* de probabilidad está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c \\ \dfrac{1}{d-c} & \text{si } c \le c \le d \\ 0 & \text{si } d < x \end{cases}$$

donde $c < d$. Demuestre que esta función es una función de densidad de probabilidad.

44. Explique la diferencia entre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,dx$$

si f es continua para todos los valores de x.

7.10 OTRAS INTEGRALES IMPROPIAS

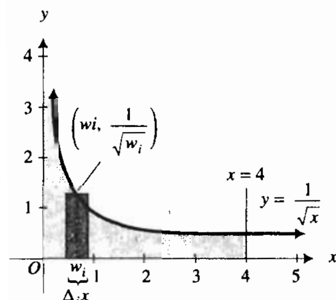


FIGURA 1

Otro tipo de integrales impropias es aquel cuyo integrando tiene una discontinuidad infinita en los límites de integración. Para llegar a la definición de integral impropia con una discontinuidad infinita en su límite inferior, se investigará lo que significa en términos geométricos.

La figura 1 muestra la región acotada por la curva cuya ecuación es $y = 1/\sqrt{x}$, el eje x, el eje y y la recta $x = 4$. Si es posible asignar un número finito a la medida del área de esta región, estaría dado por

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{w_i}} \Delta_i x$$

Si este límite existe, es la integral definida denotada por

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} \tag{1}$$

Sin embargo, el integrando es discontinuo en el límite inferior 0. Además, $\lim\limits_{x \to 0^+} 1/\sqrt{x} = +\infty$, por lo que se establece que el integrando tiene una discontinuidad infinita en el límite inferior. Esta integral es impropia, y su existencia puede determinarse a partir de la siguiente definición.

7.10.1 Definición de integral impropia con una discontinuidad infinita en su límite inferior

Si f es continua en toda x del intervalo semiabierto por la izquierda $(a, b]$, y si $\lim\limits_{x \to a^+} |f(x)| = +\infty$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\, dx$$

si este límite existe.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Se determinará si puede asignarse un número finito a la medida del área de la región de la figura 1. De la discusión anterior a la definición 7.10.1, la medida del área de la región dada será la integral impropia (1) si existe. Por la definición 7.10.1,

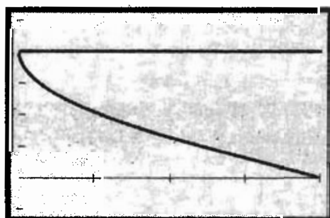
$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{t \to 0^+} \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{t \to 0^+} 2x^{1/2}\Big]_t^4 \\ &= \lim_{t \to 0^+} (4 - 2\sqrt{t}) \\ &= 4 - 0 \\ &= 4\end{aligned}$$

Por tanto, se asigna el número 4 a la medida del área de la región dada. ◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Se apoya la respuesta del ejemplo ilustrativo 1 al trazar la gráfica de

$$g(t) = \text{NINT}(1/\sqrt{x}, t, 4) \quad (0 < t \leq 4)$$

y la recta $y = 4$ en el rectángulo de inspección de [0.00001, 4] por [−1, 5], como se muestra en la figura 2. Observe que $\lim\limits_{t \to 0^+} g(t)$ parece ser 4. ◀



[0.00001, 4] por [−1, 5]

$g(t) = \text{NINT}(1/\sqrt{x}, t, 4) \quad (0 < t \leq 4)$

$y = 4$

FIGURA 2

Si el integrando tiene una discontinuidad infinita en el límite de integración superior, se aplica la siguiente definición para determinar la existencia de la integral impropia.

7.10.2 Definición de integral impropia con una discontinuidad infinita en su límite superior

Si f es continua en toda x del intervalo semiabierto por la derecha $[a, b)$, y si $\lim\limits_{x \to b^-} |f(x)| = +\infty$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

si este límite existe.

EJEMPLO 1 Evalúe la integral, si es convergente:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Apoye gráficamente la respuesta.

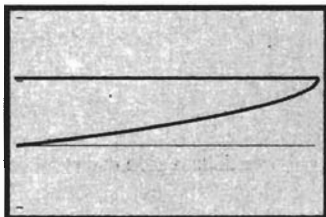
Solución El integrando tiene una discontinuidad infinita en su límite superior. De la definición 7.10.2,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} &= \lim_{t \to 2^-} \int_1^t \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} \\ &= \lim_{t \to 2^-} \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{2}\Big]_1^t \\ &= \lim_{t \to 2^-} \operatorname{sen}^{-1} \frac{t}{2} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Se traza la gráfica de

$$g(t) = \text{NINT}(1/\sqrt{4 - x^2}, 1, t) \quad (1 \le t < 2)$$

y la recta $y = \pi/3$ en el rectángulo de inspección de $[1, 1.99999]$ por $[-1, 2]$, como se muestra en la figura 3. El hecho de que $\lim\limits_{t \to 2^-} g(t)$ parece ser $\pi/3$ apoya la respuesta. ◀



$[1, 1.99999]$ por $[-1, 2]$

$g(t) = \text{NINT}(1/\sqrt{4 - x^2}, 1, t)$ $(1 \le t \le 2)$

$y = \pi/3$

FIGURA 3

Si una discontinuidad infinita ocurre en un número interior del intervalo de integración, la existencia de la integral impropia se determina a partir de la siguiente definición.

7.10.3 Definición de integral impropia con una discontinuidad infinita en un número interior

Si f es continua en toda x del intervalo $[a, b]$ excepto en c, donde $a < c < b$, y si $\lim\limits_{x \to c} |f(x)| = +\infty$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)\,dx + \lim_{s \to c^+} \int_s^b f(x)\,dx$$

si los dos límites existen.

EJEMPLO 2 Evalúe la integral, si es convergente:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

Solución El integrando tiene una discontinuidad en 1. Al aplicar la definición 7.10.3 se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{s\to 1^+}\int_s^2 \frac{dx}{(x-1)^2} \\
&= \lim_{t\to 1^-}\left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^t + \lim_{s\to 1^+}\left[-\frac{1}{x-1}\right]_s^2 \\
&= \lim_{t\to 1^-}\left[-\frac{1}{t-1} - 1\right] + \lim_{s\to 1^+}\left[-1 + \frac{1}{s-1}\right]
\end{aligned}$$

Como ninguno de estos límites existe, la integral impropia es divergente. ◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Suponga que al evaluar la integral del ejemplo 2 no se hubiese considerado la discontinuidad del integrando en 1. Entonces se habría obtenido

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{x-1}\bigg]_0^2 &= -\frac{1}{1} + \frac{1}{-1} \\
&= -2
\end{aligned}$$

Esto es claramente un resultado incorrecto. Como $1/(x-1)^2$ nunca es negativo, la integral de 0 a 2 no puede ser un número negativo. ◀

EJEMPLO 3 Evalúe la integral, si es convergente:

$$\int_0^1 x \ln x \, dx$$

Solución Como el integrando es discontinuo en el límite inferior, se procede como sigue, aplicando integración por partes:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \ln x \, dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 x \ln x \, dx \\
&= \lim_{t\to 0^+}\left[\tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}x^2\right]_t^1 \\
&= \lim_{t\to 0^+}\left[\tfrac{1}{2}\ln 1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}t^2 \ln t + \tfrac{1}{4}t^2\right]
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\int_0^1 x \ln x \, dx = 0 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\lim_{t\to 0^+} t^2 \ln t + 0 \qquad \textbf{(2)}$$

A fin de evaluar el límite

$$\lim_{t\to 0^+} t^2 \ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t^2}}$$

se aplica la regla de L'Hôpital, en vista de que $\lim_{t\to 0^+} \ln t = -\infty$ y $\lim_{t\to 0^+} 1/t^2 = +\infty$.

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{2}{t^3}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left[-\frac{t^2}{2}\right]$$

$$= 0$$

Por tanto, de (2),

$$\int_0^1 x \ln x\, dx = -\tfrac{1}{4}$$

◀

▶ **EJEMPLO 4** Evalúe la integral, si es convergente:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Solución Esta integral tiene el límite superior infinito y una discontinuidad infinita del integrando en el límite inferior. Se procede como sigue:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{t\to 1^+}\int_t^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} + \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{t\to 1^+}\left[\sec^{-1} x\right]_t^2 + \lim_{b\to+\infty}\left[\sec^{-1} x\right]_2^b$$

$$= \lim_{t\to 1^+}(\sec^{-1} 2 - \sec^{-1} t) + \lim_{b\to+\infty}(\sec^{-1} b - \sec^{-1} 2)$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi - \lim_{t\to 1^+}\sec^{-1} t + \lim_{b\to+\infty}\sec^{-1} b - \tfrac{1}{3}\pi$$

$$= -0 + \tfrac{1}{2}\pi$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi$$

◀

La integral del ejemplo 4 se denomina *integral impropia de tipo mixto.*

EJERCICIOS 7.10

En los ejercicios 1 a 26, determine si la integral es convergente o divergente. Si es convergente, evalúela y apoye gráficamente la respuesta.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

2. $\displaystyle\int_0^{16} \frac{dx}{x^{3/4}}$

3. $\displaystyle\int_{-5}^{-3} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-9}}$

4. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$

5. $\displaystyle\int_2^4 \frac{dt}{\sqrt{16-t^2}}$

6. $\displaystyle\int_{-4}^1 \frac{dz}{(z+3)^3}$

7. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sec\theta\, d\theta$

8. $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

9. $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$

10. $\int_{0}^{\pi/2} \tan\theta\, d\theta$

11. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{dy}{1 - \operatorname{sen} y}$

12. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

13. $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4}}$

14. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}$

15. $\int_{0}^{+\infty} \ln x\, dx$

16. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

17. $\int_{-2}^{0} \frac{dw}{(w+1)^{1/3}}$

18. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$

19. $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^3}$

20. $\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

21. $\int_{1/2}^{2} \frac{dz}{z(\ln z)^{1/5}}$

22. $\int_{0}^{2} \frac{x\, dx}{1 - x}$

23. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

24. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{4 - x^2}}$

25. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}$

26. $\int_{1}^{3} \frac{dy}{\sqrt[3]{y - 2}}$

En los ejercicios 27 a 29, determine el valor de n para el cual la integral impropia converge, y evalúe la integral para estos valores de n.

27. $\int_{0}^{1} x^n\, dx$

28. $\int_{0}^{1} x^n \ln x\, dx$

29. $\int_{0}^{1} x^n \ln^2 x\, dx$

30. Demuestre que es posible asignar un número finito para representar la medida del área de la región acotada por la curva cuya ecuación es $y = 1/\sqrt{x}$, la recta $x = 1$ y los ejes x y y, pero que no es posible asignar un número finito para representar la medida del volumen del sólido de revolución generado si esta región se gira alrededor del eje x.

31. Determine si es posible asignar un número finito para representar la medida del volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región limitada por la curva cuya ecuación es $y = x^{-1/3}$, la recta $x = 8$ y los ejes x y y.

32. Considere la integral impropia $\int_{a}^{b} \frac{dx}{(x-a)^n}$, donde $b > a$. Determine si la integral es convergente o divergente en cada caso: **(a)** $0 < n < 1$; **(b)** $n = 1$; **(c)** $n > 1$. Si la integral es convergente evalúela.

33. Utilice integración para verificar que la longitud de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ es $2\pi a$.

34. Explique la diferencia entre

$$\lim_{t \to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{dx}{x} + \lim_{s \to 0^+} \int_{s}^{1} \frac{dx}{x}$$

y

$$\lim_{r \to 0^+} \left[\int_{-1}^{-r} \frac{dx}{x} + \int_{r}^{1} \frac{dx}{x} \right]$$

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 7

▶ SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 7

1. ¿Qué es la *integración por partes*? En la respuesta incluya la fórmula para integración por partes.
2. Invente un ejemplo en el que se aplique integración por partes donde el integrando contenga el producto de dos funciones.
3. Invente un ejemplo en el que se aplique integración por partes donde el integrando contenga un logaritmo.
4. Invente un ejemplo en el que se aplique integración por partes donde el integrando contenga una función trigonométrica inversa.
5. Invente un ejemplo de una integral en el que se requiera la aplicación repetida de la integración por partes.
6. Describa el procedimiento para integrar una potencia con exponente positivo impar de seno o coseno. Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.
7. Responda la sugerencia 6 para una potencia con exponente positivo par de seno o coseno.
8. Responda la sugerencia 6 para una potencia con exponente entera positivo, par o impar, de la tangente o cotangente.
9. Responda la sugerencia 6 para una potencia con exponente positivo par de la secante o cosecante.
10. Responda la sugerencia 6 para una potencia con exponente positivo impar de la secante o cosecante.
11. Describa el procedimiento para integrar un producto de potencias de tangente y secante si el exponente de la secante es un entero positivo par. Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.
12. Responda la sugerencia 11 si el exponente de la tangente es un entero positivo impar.
13. ¿Qué sustitución debería efectuarse si el integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2 - u^2}$? Explique por qué funciona esto.
14. Responda la sugerencia 13 si el integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2 + u^2}$.

15. Responda la sugerencia 13 si el integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{u^2 - a^2}$.

16. ¿Cómo se descompone una fracción en *fracciones parciales* si el denominador tiene sólo factores lineales y ninguno de ellos se repite? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

17. Responda la sugerencia 16 si el denominador tiene únicamente factores lineales y algunos se repiten.

18. Responda la sugerencia 16 si los factores del denominador son lineales y cuadráticos, y además ninguno se repite.

19. Responda la sugerencia 16 si los factores del denominador son lineales y cuadráticos y algunos de los cuadráticos se repiten.

20. ¿Qué es el *crecmiento logístico*? Invente una ecuación diferencial que describa el crecimiento logístico y proporcione su solución.

21. Dibuje una *curva de crecimiento logístico.* ¿Cómo se compara esta curva con la *curva de crecimiento exponencial* y la *curva de crecimiento limitado*?

22. Si un integrando contiene potencias con exponentes racionales de una variable x, ¿qué sustitución se efectuaría para evaluar la integral? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

23. Si un integrando es una función racional de sen x y cos x, ¿qué sustitución se efectuaría de modo que el integrando sea una función racional de una variable z? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

24. ¿Qué se entiende por *expresión en forma cerrada* de una integral indefinida?

25. ¿En qué condiciones se necesita aplicar técnicas de integración antes de utilizar una tabla de integrales para evaluar una integral indefinida? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

26. ¿Qué es una *fórmula de reducción*? Invente un ejemplo que muestre el uso de una fórmula de reducción para evaluar una integral indefinida.

27. Liste los diferentes tipos de sustituciones estudiadas como técnicas de integración.

28. Establezca la *regla del trapecio* para aproximar el valor de una integral definida de una función f en el intervalo cerrado $[a, b]$. ¿Qué condición necesaria debe satisfacer la función f a fin de aplicar la regla del trapecio? Interprete geométricamente la regla del trapecio.

29. Responda la sugerencia 28 para la *regla de Simpson* en lugar de la regla del trapecio.

30. Explique la diferencia entre un *error de truncado* y un *error de redondeo* cuando se aplica la regla del trapecio o la regla de Simpson.

31. ¿Que se quiere dar a entender cuando se dice que la función f/g tiene la *forma indeterminada* $0/0$ en el número a?

32. Establezca la *regla de L'Hôpital* para $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ si f/g tiene la forma indeterminada $0/0$ en a. Invente un ejemplo que ilustre el uso de esta regla.

33. Invente un ejemplo en el que se emplee la regla de L'Hôpital para calcular el límite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ donde tanto f/g como f'/g' tienen la forma indeterminada $0/0$ en a.

34. Establezca la regla de L'Hôpital para $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ si f/g tiene una de las siguientes formas indeterminadas: $(+\infty)/(+\infty)$, $(+\infty)/(-\infty)$, $(-\infty)/(+\infty)$ y $(-\infty)/(-\infty)$. Invente un ejemplo que ilustre el uso de esta regla.

35. ¿Cómo se calcula el $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ si la función definida por $f(x)^{g(x)}$ tiene la forma indeterminada 0^0 en a? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

36. Responda la sugerencia 35 si la función definida por $f(x)^{g(x)}$ tiene la forma indeterminada $(+\infty)^0$ en a.

37. Responda la sugerencia 35 si la función definida por $f(x)^{g(x)}$ tiene la forma indeterminada $1^{+\infty}$ en a.

38. Si f es continua para toda $x \geq a$, defina la *integral impropia* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Invente un ejemplo que ilustre esta definición para el cual la integral impropia sea (i) convergente, y (ii) divergente.

39. Si f es continua para toda $x \leq b$, defina la *integral impropia* $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$. Invente un ejemplo que ilustre esta definición para el cual la integral impropia sea (i) convergente, y (ii) divergente.

40. Si f es continua para todos los valores de x, defina la *integral impropia* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Invente un ejemplo que ilustre esta definición para el cual la integral impropia sea (i) convergente, y (ii) divergente.

41. Invente un ejemplo de una integral impropia divergente donde el límite no es infinito.

42. ¿Qué es una *función de densidad de probabilidad*? Si f es una función de densidad de probabilidad para la ocurrencia de un evento particular, defina $P([a, b])$, la probabilidad de que el evento ocurrirá en el intervalo cerrado $[a, b]$. Invente un ejemplo que ilustre esta definición.

43. Si f es continua en toda x del intervalo $(a, b]$, y si $\lim\limits_{x \to a^+} |f(x)| = +\infty$, defina la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$. Invente un ejemplo que ilustre esta definición para el cual la integral impropia sea (i) convergente, y (ii) divergente.

44. Si f es continua en toda x del intervalo $[a, b)$, y si $\lim\limits_{x \to b^-} |f(x)| = +\infty$, defina la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$. Invente un ejemplo que ilustre esta definición para el cual la integral impropia sea (i) convergente, y (ii) divergente.

45. Si f es continua en toda x del intervalo $[a, b]$ excepto en c, donde $a < c < b$, y si $\lim\limits_{x \to c} |f(x)| = +\infty$, defina la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$. Invente un ejemplo que ilustre esta definición para el cual la integral impropia sea (i) convergente, y (ii) divergente.

▶ EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 7

En los ejercicios 1 a 50, evalúe la integral indefinida y utilice la graficadora para apoyar la respuesta numérica o gráficamente, según lo desee.

1. $\int \tan^2 4x \cos^4 4x\, dx$

2. $\int \frac{5x^2 - 3}{x^3 - x} dx$

3. $\int \frac{e^x}{\sqrt{4 - e^x}} dx$

4. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 + x^2}}$

5. $\int \tan^{-1} \sqrt{x}\, dx$

6. $\int \frac{dt}{2t^2 + 5t + 3}$

7. $\int \cos^2 \frac{1}{3} x\, dx$

8. $\int \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx$

9. $\int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3} dx$

10. $\int \frac{dy}{\sqrt{y} + 1}$

11. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x\, dx$

12. $\int \cos \theta \cos 2\theta\, d\theta$

13. $\int \frac{dx}{x + x^{4/3}}$

14. $\int t \sqrt{2t - t^2}\, dt$

15. $\int (\sec 3x + \csc 3x)^2\, dx$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$

17. $\int \frac{2t^3 + 11t + 8}{t^3 + 4t^2 + 4t} dx$

18. $\int x^3 e^{3x}\, dx$

19. $\int \frac{x^4 + 1}{x^4 - 1} dx$

20. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2} dx$

21. $\int \operatorname{sen}^4 3x \cos^2 3x\, dx$

22. $\int t \operatorname{sen}^2 2t\, dt$

23. $\int \frac{dr}{\sqrt{3 - 4r - r^2}}$

24. $\int \frac{4x^2 + x - 2}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx$

25. $\int x^3 \cos x^2\, dx$

26. $\int \frac{y}{9 + 16y^4} dy$

27. $\int e^{t/2} \cos 2t\, dt$

28. $\int \frac{du}{u^{5/8} - u^{1/8}}$

29. $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{4 + \operatorname{sen}^4 x} dx$

30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$

31. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx$

32. $\int \frac{dx}{x \ln x (\ln x - 1)}$

33. $\int \sqrt{4t - t^2}\, dt$

34. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x + 3x^2}}$

35. $\int \frac{dx}{x^3 + x}$

36. $\int \frac{dx}{5 + 4 \cos 2x}$

37. $\int \frac{e^x}{\sqrt{4 - 9e^{2x}}} dx$

38. $\int \frac{\sqrt{t} - 1}{\sqrt{t} + 1} dt$

39. $\int \cot^2 3x \csc^4 3x\, dx$

40. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x - 6 - x^2}}$

41. $\int x^2 \operatorname{sen}^{-1} x\, dx$

42. $\int \frac{\cot x}{3 + 2 \operatorname{sen} x} dx$

43. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - 2 \csc x}$

44. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$

45. $\int \frac{\cos 3t}{\operatorname{sen} 3t \sqrt{\operatorname{sen}^2 3t - \frac{1}{4}}} dt$

46. $\int \tan x \operatorname{sen} x\, dx$

47. $\int \frac{\operatorname{sen}^{-1} \sqrt{2t}}{\sqrt{1 - 2t}}\, dt$

48. $\int \ln(x^2 + 1)\, dx$

49. $\int \frac{dx}{5 + 4 \sec x}$

50. $\int \frac{dx}{2 + 2 \operatorname{sen} x + \cos x}$

En los ejercicios 51 a 54, evalúe la integral indefinida.

51. $\int \operatorname{sen}^5 nx\, dx$

52. $\int \tan^n x \sec^4 x\, dx;\ n > 0$

53. $\int x^n \ln x\, dx$

54. $\int \sqrt{\tan x}\, dx$

En los ejercicios 55 a 84, determine el valor exacto de la integral definida. Si lo desea, apoye la respuesta utilizando NINT *en la graficadora.*

55. $\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos x}\, dx$

56. $\int_{1/2}^{1} \sqrt{\frac{1 - x}{x}}\, dx$

57. $\int_1^2 \frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + 4x^2} dx$

58. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

59. $\int_0^2 \frac{t^3}{\sqrt{4 + t^2}} dt$

60. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 t \cos^3 t\, dt$

61. $\int_{-2}^{2\sqrt{3}} \frac{x^2}{(16 - x^2)^{3/2}} dx$

62. $\int_0^1 \frac{xe^x}{(1 + x)^2} dx$

63. $\int_0^{\pi/4} \sec^4 x\, dx$

64. $\int_0^2 \frac{1 - x}{x^2 + 3x + 2} dx$

65. $\int_{\pi/12}^{\pi/8} \cot^3 2y\, dy$

66. $\int_0^2 (2x + x^2)\, dx$

67. $\int_0^1 \sqrt{2y + y^2}\, dy$ **68.** $\int_1^2 (\ln x)^2\, dx$

69. $\int_{\sqrt{3}/3}^1 \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^3 + x}\, dx$ **70.** $\int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{x^3}{\sqrt{2 - x^2}}\, dx$

71. $\int_1^{10} \log_{10} \sqrt{ex}\, dx$ **72.** $\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x - \cos x|\, dx$

73. $\int_1^2 \frac{x + 2}{(x + 1)^2}\, dx$ **74.** $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x e^{x^2} \cos x^2\, dx$

75. $\int_0^{\pi} |\cos^3 x|\, dx$ **76.** $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\tan 5x|\, dx$

77. $\int_0^{1/2} \frac{2x\, dx}{x^3 - x^2 - x + 1}$ **78.** $\int_0^1 x^3 \sqrt{1 + x^2}\, dx$

79. $\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1 - 4x^4}}\, dx$ **80.** $\int_0^{\pi/12} \frac{dx}{\cos^4 3x}$

81. $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{12 + 13 \cos t}$ **82.** $\int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} t}{1 + \cos \frac{1}{2} t}\, dt$

83. $\int_0^{16} \sqrt{4 - \sqrt{x}}\, dx$ **84.** $\int_0^3 \frac{dr}{(r + 2)\sqrt{r + 1}}$

En los ejercicios 85 y 86, determine un valor aproximado para la integral empleando la regla del trapecio con $n = 4$. Exprese el resultado con tres cifras decimales.

85. $\int_0^2 \sqrt{1 + x^2}\, dx$ **86.** $\int_1^{9/5} \sqrt{1 + x^3}\, dx$

En los ejercicios 87 y 88, determine un valor aproximado para la integral del ejercicio indicado, empleando la regla de Simpson con $n = 4$. Exprese el resultado con tres cifras decimales.

87. Ejercicio 85 **88.** Ejercicio 86

89. Obtenga un valor aproximado de la siguiente integral mediante dos métodos y exprese el resultado con tres cifras decimales: **(a)** utilice la regla del trapecio con $n = 4$; **(b)** emplee la regla de Simpson con $n = 4$:

$$\int_{1/10}^{1/2} \frac{\cos x}{x}\, dx$$

90. Los valores de función $f(x)$ de la siguiente tabla se obtuvieron experimentalmente. Con la suposición de que f es continua en el intervalo $[1, 3]$, aproxime $\int_1^3 f(x)\, dx$ mediante **(a)** la regla del trapecio, y **(b)** la regla de Simpson.

x	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
$f(x)$	5.2	5.7	5.8	6.3	6.1	6.4	6.0	6.5	6.8	6.7	6.4

En los ejercicios 91 a 98, haga lo siguiente: (a) trace la gráfica de f en la graficadora y establezca a qué valor parece que se aproxima $f(x)$ conforme x tiende a a; (b) confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando el límite $\lim_{x \to a} f(x)$.

91. $f(x) = \frac{\tan^{-1} x}{x}$, $a = 0$ **92.** $f(x) = \frac{\tan x}{x}$, $a = 0$

93. $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}$, $a = 2$

94. $f(x) = \frac{\cos \pi x}{2x - 1}$, $a = \frac{1}{2}$ **95.** $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{x - \operatorname{sen} 5x}$, $a = 0$

96. $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 4x - 3}$, $a = 1$

97. $f(x) = \frac{\ln(x - 2)}{x - 3}$, $a = 3$ **98.** $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$, $a = 0$

En los ejercicios 99 a 106, haga lo siguiente: (a) estime el límite, si existe, trazando la gráfica de la función en un rectángulo de inspección conveniente; (b) confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando el límite.

99. $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\ln(\cot x)}$ **100.** $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$

101. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}$ **102.** $\lim_{x \to 0^+} x^{\tan x}$

103. $\lim_{x \to \pi/2} (\operatorname{sen}^2 x)^{\tan x}$ **104.** $\lim_{x \to -\infty} x e^{2x}$

105. $\lim_{x \to 0^+} \frac{\tan 2x}{\operatorname{sen}^2 x}$ **106.** $\lim_{x \to \pi/2} \left(\frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right)$

En los ejercicios 107 a 118, determine si el límite existe, y apoye gráficamente la respuesta.

107. $\lim_{x \to 0} (\csc^2 x - x^{-2})$ **108.** $\lim_{x \to 0} \frac{e - (1 + x)^{1/x}}{x}$

109. $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(1 - e^{2t}/t)}{t^{1/2}}$ **110.** $\lim_{x \to +\infty} x \ln \frac{x + 1}{x - 1}$

111. $\lim_{t \to 0^-} (1 + 4t)^{3/t}$ **112.** $\lim_{y \to +\infty} (1 + e^{2y})^{-2/y}$

113. $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln(x - \ln x)}$ **114.** $\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{4x^3}$

115. $\lim_{\theta \to \pi/2} \frac{\tan \theta + 3}{\sec \theta - 1}$ **116.** $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^{1/x}$

117. $\lim_{x \to +\infty} (e^x - x)^{1/x}$ **118.** $\lim_{x \to \pi/2} (\operatorname{sen}^2 x)^{\tan x}$

En los ejercicios 119 a 132, determine si la integral impropia es convergente o divergente. Si es convergente, evalúela y apoye gráficamente la respuesta.

119. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{2x + 3}$ **120.** $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$

121. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x - 2)^2}$ **122.** $\int_2^4 \frac{x}{\sqrt{x - 2}}\, dx$

123. $\int_0^{\pi/4} \cot^2 \theta \, d\theta$ **124.** $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + t^2}$

125. $\int_{-\infty}^{3} 4^x \, dx$ **126.** $\int_{-\infty}^{0} xe^x \, dx$

127. $\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ **128.** $\int_0^{+\infty} \frac{3^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

129. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$ **130.** $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$

131. $\int_0^1 \frac{dx}{x + x^3}$ **132.** $\int_{-3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$

133. Determine los valores de n para los cuales la integral impropia

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n} dx$$

converge, y evalúe la integral para estos valores de n.

134. Evalúe si existe:

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{senh} x \, dx$ **(b)** $\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} \operatorname{senh} x \, dx$

135. La densidad lineal de una barra de 3 m de longitud en un punto a x metros de un extremo es ke^{-3x} kilogramos por metro. Calcule la masa y el centro de masa de la barra.

136. Detemine el centro de masa de una barra de 4 m de longitud si la densidad lineal en el punto ubicado a x metros del extremo izquierdo es $\sqrt{9 + x^2}$ kilogramos por metro.

137. Calcule la longitud de arco de la parábola $y^2 = 6x$ desde $x = 6$ hasta $x = 12$.

138. Determine el área de la región acotada por la curva $y = \operatorname{sen}^{-1} 2x$, la recta $x = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ y el eje x.

139. Calcule el área de la región encerrada por un lazo de la curva $x^2 = y^4(1 - y^2)$.

140. Obtenga la longitud de arco de la curva $y = \ln x$ desde $x = 1$ hasta $x = e$.

141. Determine el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje y la región limitada por la curva $y = \ln 2x$, el eje x y la recta $x = e$.

142. La región del primer cuadrante limitada por la curva $y = \frac{5 - x}{(x + 1)^2}$, el eje x y el eje y, se gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido generado.

143. Dos sustancias A y B reaccionan para formar la sustancia C, y la tasa de variación de C es proporcional al producto de las cantidades de A y B que aún no se combinan en cualquier instante dado. Inicialmente se tienen 60 libras de la sustancia A y 60 libras de la sustancia B, y para formar 5 lb de C se requieren 3 lb de A y 2 lb de B. Después de 1 hora, se han formado 15 lb de C. **(a)** Si x libras de C se han formado a las t horas, obtenga una expresión de x en términos de t. **(b)** Calcule la cantidad de la sustancia C formada después de 3 horas.

144. Un tanque tiene la forma del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x la región limitada por la curva $y = \ln x$, el eje x y las rectas $x = e$ y $x = e^2$. Si el tanque está lleno de agua, calcule el trabajo realizado al bombear toda el agua a la parte superior del tanque. La distancia se mide en pies. Considere la parte positiva del eje x verticalmente hacia abajo.

145. Determine el centroide de la región del ejercicio 139.

146. Determine el centroide de la región acotada por el lazo (bucle) de la curva $y^2 = x^2 - x^3$.

147. Determine el centroide de la región acotada por el eje y y las curvas $y = \operatorname{sen} x - \cos x$ y $y = \operatorname{sen} x + \cos x$, desde $x = 0$ hasta $x = \frac{1}{2}\pi$.

148. Determine el centroide de la región del primer cuadrante limitada por los ejes coordenados y la curva $y = \cos x$.

149. El extremo vertical de una artesa mide 3 pie de ancho en la parte superior y 2 pie de profundidad, y tiene la forma de la región limitada por eje x y un arco de la curva $y = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi x$. Si la artesa está llena de agua, calcule la fuerza debida a la presión del agua en el extremo.

150. Un tablero tiene la forma de una región limitada por una recta y un arco de la curva senoidal. Si el tablero se sumerge verticalmente en agua de modo que la recta que es la frontera inferior esté a 2 pie bajo de la superficie del agua, calcule la fuerza debida a la presión del agua sobre el tablero.

151. En una ciudad, cuya población es de 12 000 habitantes, la tasa de crecimiento de una epidemia de gripe es conjuntamente proporcional al número de personas que tiene la gripe y el número de personas que aún no la han contraído. **(a)** Si hace 5 días 400 personas de la ciudad tuvieron la gripe y ahora 1 000 personas la tienen, obtenga un modelo matemático que describa la epidemia. **(b)** Trace la gráfica del modelo matemático en la graficadora. Estime a partir de la gráfica **(c)** cuántas personas se espera que tengan gripe mañana, y **(d)** en cuántos días la mitad de la población tendrá la gripe. **(e)** Demuestre que si la epidemia no es controlada, la población completa tendrá la gripe tres meses y medio después.

152. El ejercicio 106 de los ejercicios de repaso para el capítulo 1, y el ejercicio 78 (b) de los ejercicios de repaso para el capítulo 3, tratan la siguiente situación: un estanque puede soportar 10 000 peces de modo que la tasa de crecimiento de la población de peces es conjuntamente proporcional al número de peces presentes y a la diferencia entre 10 000 y la cantidad de peces presentes. **(a)** Si el estanque contenía inicialmente 400 peces, obtenga un modelo matemático que exprese el número de peces presentes como una función del número de semanas en que la población de peces ha estado creciendo. Determine cuántos peces se tendrán después de **(b)** 10 semanas, **(c)** 25 semanas, y **(d)** 1 año. (e) Utilice la respuesta del

ejercicio 78 (b) de los ejercicios de repaso para el capítulo 3, para determinar el número de la semana en que la tasa de crecimiento de la población de peces es máxima.

153. Determine si es posible asignar un número finito para representar la medida del área de la región ubicada a la derecha del eje y limitada por la curva $4y^2 - xy^2 - x^2 = 0$ y su asíntota. Si puede ser asignado un número, determínelo.

154. Determine si es posible asignar un número finito para representar la medida del área de la región acotada por el eje x, la recta $x = 1$ y la curva cuya ecuación es $2xy - y = 1$. Si puede ser asignado un número finito, determínelo.

155. Determine si es posible asignar un número finito para representar la medida del área de la región del primer cuadrante y debajo de la curva cuya ecuación es $y = e^{-x}$. Si puede ser asignado un número finito, determínelo.

156. En cierta universidad la función de densidad de probabilidad para que la duración de una llamada telefónica sea de x minutos está dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0.4e^{-0.4x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

¿Cuál es la probabilidad de que una llamada telefónica elegida al azar dure **(a)** entre 2 y 3 min; **(b)** no más de 3 min; **(c)** por lo menos 10 min?

157. Suponga que una empresa particular tiene un flujo continuo de ingresos y que a los t años a partir de ahora, el número de dólares del ingreso anual está dado por $1\,000t - 300$. ¿Cuál es el valor presente de todos los ingresos futuros si la tasa de interés es del 8% compuesta continuamente? *Sugerencia:* consulte el párrafo anterior al ejercicio 33 de la sección 7.9.

158. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{2x}}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Demuestre que f es continua en 0. **(b)** Demuestre que f es diferenciable en 0 calculando $f'(0)$.

159. Para la función del ejercicio 158, calcule, si existe: **(a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

160. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{2x} - e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) ¿Es f continua en 0?

(b) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, si existe.

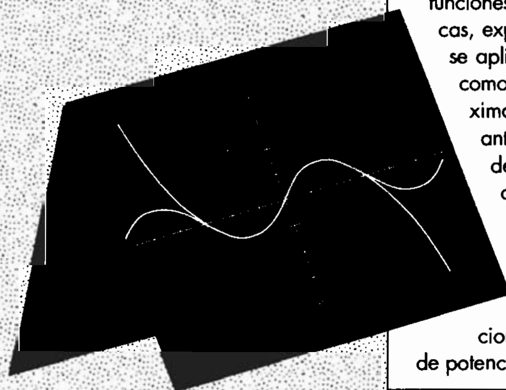
161. **(a)** Demuestre que $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^n/e^x) = 0$ para cualquier número positivo n. **(b)** Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} (e^{-1/x}/x^n)$, donde n es cualquier número positivo, considerando $x = 1/t$ y utilizando el resultado del inciso (a).

162. Considere la integral $\int_d^{d+6} (x^2 + bx + c)\, dx$, donde b, c y d son constantes. Suponga que esta integral se aproxima mediante la regla del trapecio con $n = k$. **(a)** Demuestre que el error de la aproximación es exactamente $-36/k^2$. **(b)** ¿Cúal es el menor valor de k tal que la aproximación es exacta con una cifra decimal?

Aproximaciones polinomiales, sucesiones y series infinitas

Capítulo 8

VISIÓN PRELIMINAR



El objetivo principal de este capítulo es aproximar funciones mediante *series de potencias.* Sin embargo, antes del estudio de las series de potencias se preparará el terreno. Se iniciará con el estudio de aproximaciones polinomiales en la sección 8.1, con énfasis en los polinomios de Taylor, los cuales se generalizarán después en la sección 8.9.

En la sección 8.2 se trata la *función sucesión*, la cual es una función cuyo dominio es el conjunto de números enteros positivos y cuyo contradominio consiste de los elementos de la *sucesión.* En el suplemento de la sección 8.2 encontrará la demostración de la equivalencia de *convergencia* y *sucesiones monótonas acotadas* (teoremas 8.2.10 y 8.2.13) basada en la propiedad de *completez de los números reales.* En la sección 8.3, se define la suma de una *serie infinita* como el límite de un tipo particular de sucesión. En esta sección también se tratan los teoremas acerca de series infinitas. Los *criterios de convergencia* de series infinitas se presentan en la sección 8.3 así como en la sección 8.4, donde se consideran series de términos positivos, y en la sección 8.5 en la que se estudian series cuyos términos son positivos y negativos. La sección 8.6 contiene un resumen de los criterios de convergencia y divergencia estudiados en las secciones 8.3 a 8.5.

Después de la introducción a las *series de potencias* en la sección 8.7, aprenderá en las secciones 8.8 a 8.10 a utilizar dichas series para expresar como series infinitas muchas funciones; por ejemplo: funciones racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Las series de potencias se aplican a fin de aproximar números irracionales tales como $\sqrt[3]{29}$, π, e, ln 5 y sen 0.3, así como para aproximar integrales definidas cuyo integrando no tenga antiderivada en forma cerrada. Por ejemplo, las series de potencias pueden emplearse con el objeto de calcular valores de integrales como:

$$\int_0^{0.5} e^{-t^2}\,dt \qquad \int_0^{1} \cos x^2\,dx \qquad \int_0^{0.1} \ln(1 + \operatorname{sen} x)\,dx$$

Además, las soluciones de muchas ecuaciones diferenciales pueden expresarse como series de potencias.

8.1 APROXIMACIONES POLINOMIALES MEDIANTE LA FÓRMULA DE TAYLOR

Mientras que los valores de funciones polinomiales pueden determinarse efectuando un número finito de adiciones y multiplicaciones, otras funciones, entre ellas las funciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas, no pueden evaluarse tan fácilmente. En esta sección se mostrará que muchas funciones pueden aproximarse mediante polinomios y que el polinomio, en lugar de la función original, puede emplearse para realizar cálculos cuando la diferencia entre el valor real de la función y la aproximación polinomial es suficientemente pequeña.

Varios métodos pueden emplearse para aproximar una función dada mediante polinomios. Uno de los más ampliamente utilizados hace uso de la fórmula de Taylor, llamada así en honor del matemático inglés **Brook Taylor** (1685-1731). El teorema siguiente, el cual puede considerarse como una generalización del teorema del valor medio, proporciona la fórmula de Taylor.

8.1.1 Teorema

Sea f una función tal que f y sus primeras n derivadas son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Además, considere que $f^{(n+1)}(x)$ existe para toda x del intervalo abierto (a, b). Entonces existe un número z en el intervalo abierto (a, b) tal que

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \qquad (1)$$

La ecuación (1) también se cumple si $b < a$; en tal caso $[a, b]$ se reemplaza por $[b, a]$, y (a, b) se sustituye por (b, a).

Observe que cuando $n = 0$, (1) se convierte en

$$f(b) = f(a) + f'(z)(b-a)$$

donde z está entre a y b. Esta es la conclusión del teorema del valor medio.

La demostración del teorema 8.1.1 se presentará posteriormente en esta sección. Si en (1) se reemplaza b por x, se obtiene la **fórmula de Taylor**:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (2)$$

donde z está entre a y x.

La condición en la que se cumple (2) es que f y sus primeras n derivadas sean continuas en un intervalo cerrado que contenga a a y x, y la $(n+1)$-ésima derivada de f exista en todos los puntos del intervalo abierto correspondiente. La fórmula (2) puede escribirse como

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \qquad (3)$$

donde

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (4)$$

y

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{donde } z \text{ está entre } a \text{ y } x \quad (5)$$

$P_n(x)$ se denomina **polinomio de Taylor de n-ésimo grado** de la función f en el número a, y $R_n(x)$ se llama **residuo**. El término $R_n(x)$, dado en (5), se denomina **forma de Lagrange** del residuo, llamada así en honor al matemático francés **Joseph L. Lagrange** (1736-1813).

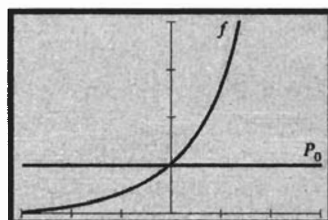
El caso especial de la fórmula de Taylor que se obtiene al considerar $a = 0$ en (2) es

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)}x^{n+1}$$

donde z está entre 0 y x. Esta fórmula recibe el nombre de **fórmula de Maclaurin**, en honor al matemático escocés **Colin Maclaurin** (1698-1746). Sin embargo, la fórmula fue obtenida por Taylor y por otro matemático inglés, **James Stirling** (1692-1770). El **polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado** para una función f, obtenido a partir de (4) con $a = 0$, es

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (6)$$

De este modo, una función puede aproximarse por medio de un polinomio de Taylor en un número a o por un polinomio de Maclaurin.



[−3, 3] por [0, 4]

$f(x) = e^x$

$P_0(x) = 1$

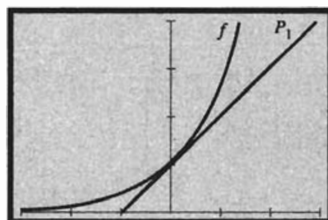
FIGURA 1

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Se calculará el polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado para la función exponencial natural. Si $f(x) = e^x$, entonces todas las derivadas de f en x son iguales a e^x y las derivadas evaluadas en cero son 1. Por tanto, de (6),

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \quad (7)$$

Así, los primeros cuatro polinomios de Maclaurin de la función exponencial natural son

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = 1 + x$$
$$P_2(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2$$
$$P_3(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3$$



[−3, 3] por [0, 4]

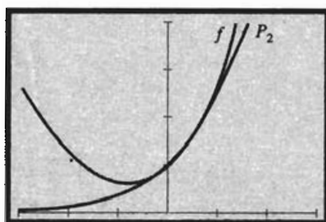
$f(x) = e^x$

$P_1(x) = 1 + x$

FIGURA 2

Las figuras 1 a 4 muestran la gráfica de $f(x) = e^x$ junto con las gráficas de $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$, respectivamente, trazadas en el rectángulo de inspección de [−3, 3] por [0, 4]. En la figura 5 se muestran las gráficas de los cuatro polinomios de Maclaurin y la gráfica de $f(x) = e^x$ en el mismo sistema coordenado. Observe cómo los polinomios aproximan e^x para

valores de x cercanos a cero, y note que conforme n se incrementa, la aproximación mejora. Las tablas 1 y 2 proporcionan los valores de e^x, $P_n(x)$ (cuando n es igual a 0, 1, 2 y 3) y $e^x - P_n(x)$ para $x = 0.4$ y $x = 0.2$, respectivamente. Observe que con estos dos valores de x, a medida que x está más cerca de 0, es mejor la aproximación para un $P_n(x)$ específico. ◀



[−3, 3] por [0, 4]

$f(x) = e^x$

$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

FIGURA 3

Tabla 1

n	$e^{0.4}$	$P_n(0.4)$	$e^{0.4} - P_n(0.4)$
0	1.4918	1	0.4918
1	1.4918	1.4	0.0918
2	1.4918	1.48	0.0118
3	1.4918	1.4907	0.0011

Tabla 2

n	$e^{0.2}$	$P_n(0.2)$	$e^{0.2} - P_n(0.2)$
0	1.2214	1	0.2214
1	1.2214	1.2	0.0214
2	1.2214	1.22	0.0014
3	1.2214	1.2213	0.0001

De (5), la forma de Lagrange del residuo, cuando $P_n(x)$ es el polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado para la función exponencial natural, es

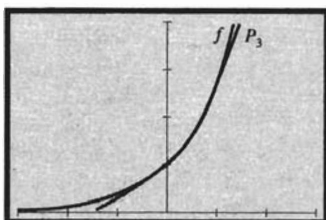
$$R_n(x) = \frac{e^z}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \text{donde } z \text{ está entre 0 y } x \tag{8}$$

En particular, si $P_3(x)$ se emplea para aproximar e^x, entonces

$$R_3(x) = \frac{e^z}{4!}x^4 \qquad \text{donde } z \text{ está entre 0 y } x$$

y

$$e^x = P_3(x) + R_3(x)$$



[−3, 3] por [0, 4]

$f(x) = e^x$

$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

FIGURA 4

▶ ***EJEMPLO 1*** Utilice un polinomio de Maclaurin para determinar el valor de $\sqrt{e}$ con una exactitud de cuatro cifras decimales.

Solución Si $f(x) = e^x$, entonces el polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado de f está dado por (7) y la forma de Lagrange del residuo está dada por (8). Si se considera $x = \frac{1}{2}$ en (8), entonces

$$R_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^z}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \qquad \text{donde } 0 < z < \tfrac{1}{2}$$

Así,

$$\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{e^{1/2}}{2^{n+1}(n+1)!}$$

Como $e < 4$, entonces $e^{1/2} < 2$, de modo que

$$\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{2}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{1}{2^n(n+1)!}$$

Debido a que el valor de $\sqrt{e}$ se aproximará con cuatro cifras decimales, se desea que $|R_n(\frac{1}{2})|$ sea menor que 0.00005; $|R_n(\frac{1}{2})|$ será menor que 0.00005 si $1/2^n(n+1)! < 0.00005$. Cuando $n = 5$,

$$\frac{1}{2^n(n+1)!} = \frac{1}{(32)(720)}$$
$$= 0.00004$$

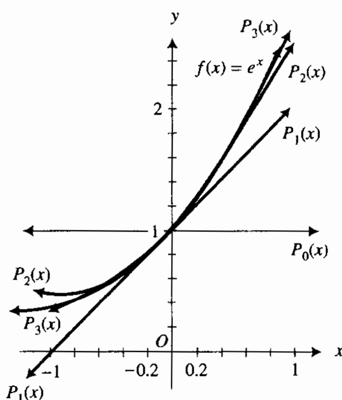
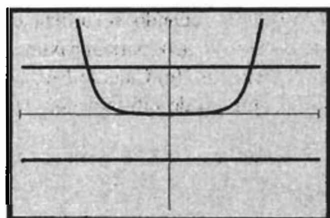


FIGURA 5

Como 0.00004 < 0.00005, se considera $P_5(\frac{1}{2})$ como la aproximación de $\sqrt{e}$ con una exactitud de cuatro cifras decimales. De (7),

$$P_5(\tfrac{1}{2}) = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{48} - \tfrac{1}{384} - \tfrac{1}{3\,840}$$

de donde se obtiene $\sqrt{e} \approx 1.6487$. ◀



[−1, 1] por [−0.0001, 0.0001]

$y = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right)$

$y = 0.00005$ y $y = -0.00005$

FIGURA 6

▶ **EJEMPLO 2** Estime en la graficadora los valores de x para los cuales $P_5(x)$ aproxima e^x con una exactitud de cuatro cifras decimales.

Solución Si $P_5(x)$ aproxima a e^x con una exactitud de cuatro cifras decimales, entonces

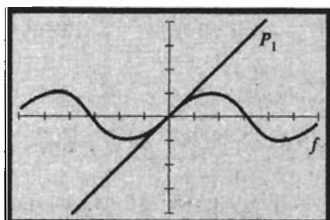
$$|e^x - P_5(x)| < 0.00005$$

La figura 6 muestra la gráfica de $y = e^x - P_5(x)$, es decir,

$$y = e^x - (1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + x^5/5!)$$

y las rectas $y = \pm 0.00005$ trazadas en el rectángulo de inspección de [−1, 1] por [−0.0001, 0.0001]. Al emplear el procedimiento de intersección (*intersect*), o los de rastreo y aumento (*trace* y *zoom-in*), de la graficadora, se determina que la curva y la recta $y = 0.00005$ se intersectan cuando $x = -0.5824$ y $x = 0.5667$. De esta forma, se concluye que cuando $-0.5824 < x < 0.5667$, $P_5(x)$ aproxima e^x con una exactitud de cuatro cifras decimales.

Esta respuesta apoya la conclusión del ejemplo 1 de que $P_5(\frac{1}{2})$ aproxima a $\sqrt{e}$ con una exactitud de cuatro cifras decimales. ◀



[−6, 6] por [−4, 4]

$f(x) = \text{sen}\, x$

$P_1(x) = x$

FIGURA 7

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Ahora se determinará el polinonio de Maclaurin de n-ésimo grado para la función seno. Si $f(x) = \text{sen}\, x$, entonces

$$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\text{sen}\, x \qquad f'''(x) = -\cos x$$
$$f^{(4)}(x) = \text{sen}\, x \qquad f^{(5)}(x) = \cos x \qquad f^{(6)}(x) = -\text{sen}\, x$$

y así sucesivamente. De esta forma, $f(0) = 0$,

$$f'(0) = 1 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = -1 \quad f^{(4)}(0) = 0 \quad f^{(5)}(0) = 1$$

etcétera. De (6),

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

De esta forma, $P_0(x) = 0$,

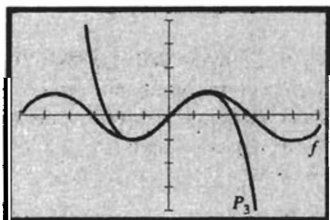
$$P_1(x) = x \qquad P_2(x) = x$$

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6} \qquad P_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \qquad P_6(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$P_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5\,040} \qquad P_8(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5\,040}$$

y así sucesivamente.

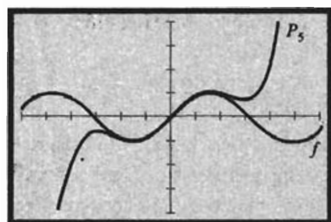


[−6, 6] por [−4, 4]

$f(x) = \text{sen}\, x$

$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$

FIGURA 8

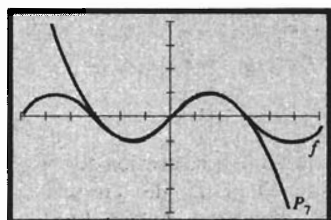


[−6, 6] por [−4, 4]

$f(x) = \text{sen } x$

$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

FIGURA 9



[−6, 6] por [−4, 4]

$f(x) = \text{sen } x$

$P_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5\,040}$

FIGURA 10

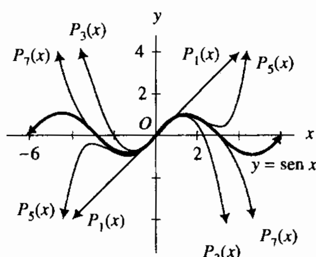
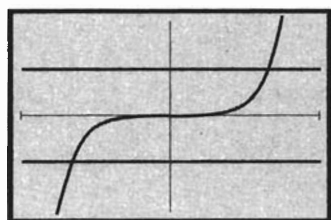


FIGURA 11



[−1, 1] por [−0.0000002, 0.0000002]

$y = \text{sen } x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5\,040}\right)$

$y = 0.0000001$ y $y = -0.0000001$

FIGURA 12

Las figuras 7 a 10 muestran la gráfica de la función seno junto con las gráficas de sus polinomios de Maclaurin de grados 1, 3, 5 y 7, respectivamente, trazadas en el rectángulo de inspección de [−6, 6] por [−4, 4]. La figura 11 muestra las gráficas de estos cuatro polinomios de Maclaurin y la gráfica de $f(x) = \text{sen } x$ dibujados en el mismo sistema coordenado. Observe que las aproximaciones polinomiales mejoran conforme n se incrementa. ◀

▶ ***EJEMPLO 3*** **(a)** Determine la exactitud cuando se utiliza el polinomio de Maclaurin de grado 7 de la función seno, $P_7(x)$, para aproximar sen 0.5. **(b)** Apoye gráficamente la respuesta del inciso (a). **(c)** Calcule $P_7(0.5)$ para aproximar sen 0.5 con una exactitud en el número de cifras decimales considerado en la respuesta del inciso (a).

Solución

(a) De (3) con $f(x) = \text{sen } x$ y $n = 7$, se tiene

$$\text{sen } x = P_7(x) + R_7(x)$$

Así,

$$\text{sen } 0.5 = P_7(0.5) + R_7(0.5)$$

donde, de (5) con $x = 0.5$ y $a = 0$,

$$R_7(0.5) = \frac{f^{(8)}(z)}{8!}(0.5)^8 \qquad \text{donde } z \text{ está entre 0 y 0.5}$$
$$= 0.0000001 \text{ sen } z$$

Como $|\text{sen } z| < 1$, entonces

$$|R_7(0.5)| < 0.0000001$$

Por tanto, se concluye que cuando $P_7(0.5)$ se emplea para aproximar sen 0.5, el valor es aproximado a seis cifras decimales.

(b) A fin de apoyar la respuesta del inciso (a), debe mostrarse que cuando $x = 0.5$, $|R_7(x)| < 0.0000001$. Como $R_7(x) = \text{sen } x - P_7(x)$, y del cálculo del ejemplo ilustrativo 2, para la función seno,

$$P_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5\,040}$$

se trazan las gráficas de

$$y = \text{sen } x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5\,040}\right) \quad \text{y} \quad y = \pm 0.0000001$$

en el rectángulo de inspección de [−1, 1] por [−0.0000002, 0.0000002], como se muestra en la figura 12. Si se utiliza el procedimiento de intersección (*intersect*), o los de rastreo y aumento (*trace* y *zoom-in*), de la graficadora, se determina que la curva y las rectas se intersectan en los puntos donde $x = \pm 0.6921$. Como $-0.6921 < 0.5 < 0.6921$, se ha apoyado la respuesta del inciso (a).

(c) Al sustituir 0.5 por x en la expresión para $P_7(x)$, se tiene

$$P_7(0.5) = 0.5 - \frac{(0.5)^3}{6} + \frac{(0.5)^5}{120} - \frac{(0.5)^7}{5\,040}$$
$$= 0.47942553$$

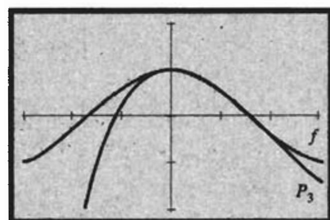
Del inciso (a), este cálculo es preciso con seis cifras decimales. Por tanto,

$$\text{sen } 0.5 = 0.479426$$ ◀

EJEMPLO 4 Determine el polinomio de Taylor de tercer grado de la función coseno en $\frac{1}{4}\pi$ y la forma de Lagrange del residuo. Trace las gráficas del polinomio y de la función coseno en el mismo rectángulo de inspección.

Solución Sea $f(x) = \cos x$. Entonces de (4),

$$P_3(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''(\frac{1}{4}\pi)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{f'''(\frac{1}{4}\pi)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$$



$[-\pi, \pi]$ por $[-2, 2]$

$f(x) = \cos x$

$P_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}(x - \frac{1}{4}\pi) - \frac{1}{4}\sqrt{2}(x - \frac{1}{4}\pi)^2 + \frac{1}{12}\sqrt{2}(x - \frac{1}{4}\pi)^3$

FIGURA 13

Como $f(x) = \cos x, f'(x) = -\text{sen } x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \text{sen } x$,

$$f(\tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad f'(\tfrac{1}{4}\pi) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad f''(\tfrac{1}{4}\pi) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad f'''(\tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

Por tanto,

$$P_3(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(x - \tfrac{1}{4}\pi) - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}(x - \tfrac{1}{4}\pi)^2 + \tfrac{1}{12}\sqrt{2}(x - \tfrac{1}{4}\pi)^3$$

Como $f^{(4)}(x) = \cos x$, de (5) se obtiene

$$R_3(x) = \tfrac{1}{24}(\cos z)(x - \tfrac{1}{4}\pi)^4 \qquad \text{donde } z \text{ está entre } \tfrac{1}{4}\pi \text{ y } x$$

Debido a que $|\cos z| \leq 1$, se concluye que $|R_3(x)| \leq \frac{1}{24}(x - \frac{1}{4}\pi)^4$ para toda x.

La figura 13 muestra las gráficas de $P_3(x)$ y de $f(x) = \cos x$ trazadas en el rectángulo de inspección de $[-\pi, \pi]$ por $[-2, 2]$. Observe cómo la gráfica del polinomio aproxima la gráfica de la función coseno cerca de $x = \frac{1}{4}\pi$. ◀

EJEMPLO 5 Utilice el polinomio de Taylor de tercer grado de la función coseno en $\frac{1}{4}\pi$, determinado en el ejemplo 4, para calcular un valor aproximado de cos 47°, y determine la exactitud del resultado.

Solución $47° \sim \frac{47}{180}\pi$ rad. Por tanto en la solución del ejemplo 4 se considera $x = \frac{47}{180}\pi$ y $x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{90}\pi$, y

$$\cos 47° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left[1 - \tfrac{1}{90}\pi - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{90}\pi)^2 + \tfrac{1}{6}(\tfrac{1}{90}\pi)^3\right] + R_3(\tfrac{47}{180}\pi) \quad \textbf{(9)}$$

donde

$$R_3(\tfrac{47}{180}\pi) = \tfrac{1}{24}\cos z(\tfrac{1}{90}\pi)^4 \qquad \text{donde } \tfrac{1}{4}\pi < z < \tfrac{47}{180}\pi$$

Como $0 < \cos z < 1$,

$$0 < R_3(\tfrac{47}{180}\pi) < \tfrac{1}{24}(\tfrac{1}{90}\pi)^4 < 0.00000007 \quad \textbf{(10)}$$

Si se considera $\frac{1}{90}\pi \approx 0.0349066$, de (9) se obtiene

$$\cos 47° \approx 0.681998$$

lo cual tiene una exactitud de seis cifras decimales debido a la desigualdad (10). ◀

Ahora se demostrará el teorema 8.1.1. Se conocen varias demostraciones de este teorema, aunque ninguna está bien motivada. La siguiente demostración utiliza el teorema de del valor medio de Cauchy (7.7.3).

Demostración del teorema 8.1.1 Sean F y G dos funciones definidas por

$$F(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n \tag{11}$$

y

$$G(x) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{12}$$

Entonces se deduce que $F(b) = 0$ y $G(b) = 0$. Al diferenciar (11) se obtiene

$$F'(x) = -f'(x) + f'(x) - f''(x)(b-x) + \frac{2f''(x)(b-x)}{2!} - \frac{f'''(x)(b-x)^2}{2!} + \frac{3f'''(x)(b-x)^2}{3!} - \frac{f^{(4)}(x)(b-x)}{3!} + \ldots + \frac{(n-1)f^{(n-1)}(x)(b-x)^{n-2}}{(n-1)!} - \frac{f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{nf^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}}{n!} - \frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^n}{n!}$$

Al reducir términos semejantes se observa que la suma de cada término impar y el siguiente término par es igual a cero; de modo que sólo queda el último término. Por tanto,

$$F'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n \tag{13}$$

Si se deriva en (12) se obtiene

$$G'(x) = -\frac{1}{n!}(b-x)^n \tag{14}$$

Al verificar la hipótesis del teorema del valor medio de Cauchy se observa que

(i) F y G son continuas en $[a, b]$;
(ii) F y G son diferenciables en (a, b);
(iii) para toda x en (a, b), $G'(x) \neq 0$.

De modo que, por la conclusión del teorema,

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(z)}{G'(z)}$$

donde z está en (a, b). Pero $F(b) = 0$ y $G(b) = 0$. Por lo que

$$F(a) = \frac{F'(z)}{G'(z)}G(a) \tag{15}$$

para alguna z en (a, b).

Si se considera $x = a$ en (12), $x = z$ en (13) y $x = z$ en (14), y si se sustituyen en (15) se obtiene

$$F(a) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(b-z)^n\left[-\frac{n!}{(b-z)^n}\right]\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$F(a) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \tag{16}$$

Si $x = a$ en (11), resulta

$$F(a) = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$$

Al sustituir de (16) en la ecuación anterior, se tiene

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(b - a)^{n+1}$$

lo cual es el resultado deseado. El teorema se cumple si $b < a$ debido a que la conclusión del teorema del valor medio de Cauchy no se afecta si a y b se intercambian. ■

Existen otras formas del residuo de la fórmula de Taylor. Dependiendo de la función, puede convenir emplear una forma del residuo más que otra. El teorema siguiente, llamado *fórmula de Taylor con forma integral del residuo*, expresa el residuo como una integral.

8.1.2 Teorema Fórmula de Taylor con forma integral del residuo

Si f es una función cuyas primeras $n + 1$ derivadas son continuas en un intervalo cerrado que contiene a a y x, entonces $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, donde $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de n-énesimo grado de f en a y $R_n(x)$ es el residuo dado por

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

La demostración de este teorema se deja como ejercicio (vea el ejercicio 40).

Se ha visto cómo una función puede aproximarse mediante una sucesión de polinomios de Taylor. Los valores de estos polinomios para una valor dado de x puede considerarse como una sucesión de números, tema de la siguiente sección. El polinomio de Taylor de n-ésimo grado es la suma de $n + 1$ términos, y conforme n crece sin límite, la suma puede o no aproximarse a un límite. Tales consideraciones forman las bases de las *series infinitas*, definidas en la sección 8.3 y es el tema principal de este capítulo.

EJERCICIOS 8.1

En los ejercicios 1 a 10, determine el polinomio de Maclaurin del grado indicado para la función f con el residuo en la forma de Lagrange. Trace las gráficas de f y del polinomio en el mismo rectángulo de inspección y observe cómo la gráfica del polinomio aproxima la gráfica de f cerca del punto donde $x = 0$.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$; grado 4

2. $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$; grado 5

3. $f(x) = e^{-x}$; grado 5

4. $f(x) = \tan x$; grado 3

5. $f(x) = \cos x$; grado 6

6. $f(x) = \cosh x$; grado 4.

7. $f(x) = \operatorname{senh} x$; grado 4

8. $f(x) = e^{-x^2}$; grado 3

9. $f(x) = (1 + x)^{3/2}$; grado 3

10. $f(x) = (1 - x)^{-1/2}$; grado 4

En los ejercicios 11 a 18, determine el polinomio de Taylor del grado indicado en el número a para la función f con el residuo en la forma de Lagrange. Trace las gráficas de f y del polinomio en el mismo rectángulo de inspección y observe cómo la gráfica del polinomio aproxima la gráfica de f cerca del punto donde $x = a$.

11. $f(x) = x^{3/2}$; $a = 4$; grado 3

12. $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 4$; grado 4

13. $f(x) = \operatorname{sen} x$; $a = \frac{1}{6}\pi$; grado 3

14. $f(x) = \cos x$; $a = \frac{1}{3}\pi$; grado 4

15. $f(x) = \ln x$; $a = 1$; grado 5

16. $f(x) = \ln(x + 2)$; $a = -1$; grado 3

17. $f(x) = \ln \cos x$; $a = \frac{1}{3}\pi$; grado 3

18. $f(x) = x \operatorname{sen} x$; $a = \frac{1}{6}\pi$; grado 5

19. Calcule el valor de e con una exactitud de cinco cifras decimales, y demuestre que la respuesta tiene la exactitud requerida. Apoye gráficamente la respuesta.

20. Realice el ejercicio 19 para el valor de $e^{-1/2}$.

21. Calcule sen 31° con una exactitud de tres cifras decimales empleando un polinomio de Taylor y demuestre que la respuesta tiene la exactitud requerida. Apoye gráficamente la respuesta.

22. Calcule cos 59° con una exactitud de tres cifras decimales empleando un polinomio de Taylor y demuestre que la respuesta tiene la exactitud requerida. Apoye gráficamente la respuesta.

23. Estime el error que resulta cuando cos x se sustituye por $1 - \frac{1}{2}x^2$ si $|x| < 0.1$.

24. Estime el error que resulta cuando sen x se sustituye por $x - \frac{1}{6}x^3$ si $|x| < 0.05$.

25. Estime el error que resulta cuando $\sqrt{1+x}$ se sustituye por $1 + \frac{1}{2}x$ si $0 < x < 0.01$.

26. Estime el error que resulta cuando $1/\sqrt{x}$ se sustituye por $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$ si $0.99 < x < 1.01$. *Sugerencia:* sea $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x = 1 - \frac{1}{2}(x - 1)$.

27. Estime el error que resulta cuando e^x se sustituye por $1 + x + \frac{1}{2}x^2$ si $|x| < 0.01$.

28. Utilice el polinomio de Maclaurin para la función definida por $f(x) = \ln(1 + x)$ para calcular el valor de ln 1.2 con una exactitud de cuatro cifras decimales.

29. Emplee el polinomio de Maclaurin para la función definida por

$$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$$

para calcular el valor de ln 1.2 con una exactitud de cuatro cifras decimales. Compare el cálculo con el del ejercicio 28.

30. Demuestre que si $0 \le x \le \frac{1}{2}$, entonces

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + R(x)$$

donde $|R(x)| < \frac{1}{3\,840}$.

31. Utilice el resultado del ejercicio 30 para determinar un valor aproximado de $\int_0^{1/\sqrt{2}} \operatorname{sen} x^2\, dx$, y estime el error.

32. Demuestre que la fórmula $(1 + x)^{3/2} \approx 1 + \frac{3}{2}x$ es exacta con tres cifras decimales si $-0.03 \le x \le 0$.

33. Demuestre que la fórmula $(1 + x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ es exacta con dos cifras decimales si $-0.1 \le x \le 0$.

34. Dibuje la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = mx$ en el mismo sistema de ejes. Observe que si m es positivo y cercano a cero, entonces las gráficas se intersectan en un punto cuya abscisa está cerca de π. Determinando el polinomio de Taylor de segundo grado en π para la función f definida por $f(x) = \operatorname{sen} x - mx$, muestre que una solución aproximada de la ecuación $\operatorname{sen} x = mx$, donde m es positivo y está cerca de cero, está dada por $x \approx \pi/(1 + m)$.

35. Emplee el método descrito en el ejercicio 34 para determinar una solución aproximada de la ecuación $\cot x = mx$ cuando m es positivo y está cerca de cero.

36. **(a)** Utilice el polinomio de Maclaurin de primer grado para aproximar e^k si $0 < k < 0.01$. **(b)** Estime el error en términos de k.

37. Aplique la fórmula de Taylor para expresar el polinomio

$$P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

como un polinomio en potencias de $x - 1$.

38. **(a)** Derive término a término el polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado para e^x y compare el nuevo polinomio con el polinomio para e^x. **(b)** Integre término a término el polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado para e^x, determine la constante de integración y compare el nuevo polinomio con el polinomio para e^x.

39. **(a)** Derive término a término el polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado para sen x y compare el nuevo polinomio con el polinomio para cos x. **(b)** Integre término a término el polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado para sen x, determine la constante de integración y compare el nuevo polinomio con el polinomio para $-\cos x$.

40. Demuestre el teorema 8.1.2. *Sugerencia:* del teorema 4.7.2 $\int_a^x f'(t)\, dt = f(x) - f(a)$. Resuelva para $f(x)$ e integre $\int_a^x f'(t)\, dt$ por partes considerando $u = f'(t)$ y $dv = dt$. Repita este proceso, y el resultado deseado se deduce mediante inducción matemática.

41. **(a)** Demuestre que los términos del polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado de una función impar contienen sólo potencias impares de x. **(b)** Demuestre que los términos del polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado de una función par contienen sólo potencias pares de x.

42. Cuando se emplea un polinomio de Taylor en potencias de $x - a$ para aproximar un valor de función en un número particular x_1, ¿qué hechos influyen en la elección de a? Ilustre la respuesta para las funciones definidas por $f(x) = e^x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$.

8.2 SUCESIONES

Sin duda, ha encontrado *sucesiones* de números en sus estudios anteriores de matemáticas. Por ejemplo, los números

$$2, 4, 6, 8, 10$$

forman una sucesión. Esta sucesión se denomina **finita** porque tiene un último número. Si un conjunto de números que forman una suceción no tiene último número, se dice que la sucesión es **infinita**. Por ejemplo,

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots \qquad (1)$$

es una sucesión infinita; los tres últimos puntos indican que no hay último número en la sucesión. Como el Cálculo trata con sucesiones infinitas, la palabra "sucesión" en este texto significará "sucesión infinita". Se iniciará el estudio de esta sección con la definición de *función sucesión*.

8.2.1 Definición de función sucesión

Una **función sucesión** es una función cuyo dominio es el conjunto

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$$

de todos los números enteros positivos.

Los números del contradominio de una función sucesión se denominan **elementos**. Una **sucesión** consiste de los elementos de una función sucesión listados en orden.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Sea f la función definida por

$$f(n) = \frac{n}{2n + 1} \qquad n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Entonces f es una función sucesión, y

$$f(1) = \tfrac{1}{3} \qquad f(2) = \tfrac{2}{5} \qquad f(3) = \tfrac{3}{7} \qquad f(4) = \tfrac{4}{9} \qquad f(5) = \tfrac{5}{11}$$

y así sucesivamente. Los elementos de la sucesión definida por f son $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{11}$, etcétera; y la sucesión es la (1). Algunos de los pares ordenados de la función sucesión f son $(1, \frac{1}{3})$, $(2, \frac{2}{5})$, $(3, \frac{3}{7})$, $(4, \frac{4}{9})$, y $(5, \frac{5}{11})$. ◀

Por lo general, cuando los elementos se listan en orden se indica el n-ésimo elemento $f(n)$ de la sucesión. De este modo, los elementos de la sucesión (1) pueden escribirse como

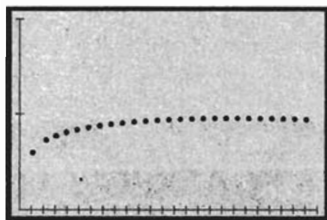
$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots, \frac{n}{2n + 1}, \ldots$$

Puesto que el dominio de cada función sucesión es el mismo, puede emplearse la notación $\{f(n)\}$ para denotar una sucesión. Así, la sucesión (1) puede denotarse por $\{n/(2n + 1)\}$. También se utiliza la *notación de subíndice* $\{a_n\}$ para expresar una sucesión para la cual $f(n) = a_n$.

La gráfica de una función sucesión puede trazarse de varias maneras en la graficadora (consulte el manual del usuario). Si la graficadora carece de ese procedimiento, una alternativa para graficar la sucesión $\{f(n)\}$ consiste en trazar la gráfica de la función $f(x)$ correspondiente, donde x es un número real y $x \geq 1$; entonces las coordenadas y de la gráfica para valores enteros positivos de x son los elementos de la sucesión. En el ejemplo siguiente se muestra otro procedimiento para graficar una función sucesión, el cual emplea el modo paramétrico-punto.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 A fin de trazar la gráfica de la función sucesión del ejemplo ilustrativo 1, primero asegúrese de activar la graficadora en modo paramétrico-punto. Después considere

$$x = t \quad \text{y} \quad y = \frac{t}{2t + 1}$$



[0, 25] por [0, 1]

$x = t$ y $y = \frac{t}{2t+1}$

FIGURA 1

y asigne los siguientes valores a los parámetros para el rectángulo de inspección: $t_{\text{mín}} = 1$, $t_{\text{máx}} = 25$, $t_{\text{step}} = 1$, $x_{\text{mín}} = 0$, $x_{\text{máx}} = 25$, $x_{\text{scl}} = 1$, $y_{\text{mín}} = 0$, $y_{\text{máx}} = 1$ y $y_{\text{scl}} = 0.5$. La gráfica que se obtiene se muestra en la figura 1. Recuerde que las coordenadas y de los puntos son los elementos de la sucesión. ◀

Se dice que la sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

es **igual** a la sucesión

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

si y sólo si $a_i = b_i$ para todo número entero positivo i. Recuerde que una sucesión consiste de un ordenamiento de elementos. Por tanto, es posible que dos sucesiones tengan los mismos elementos y que sean diferentes. Esta situación se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

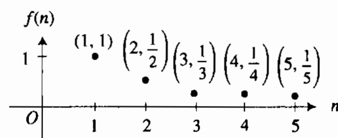


FIGURA 2

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** La sucesión $\{1/n\}$ tiene como elementos los recíprocos de los números enteros positivos

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \qquad \textbf{(2)}$$

La sucesión para la cual

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{2}{n+2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

tiene como elementos

$$1, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{3}, 1, \tfrac{1}{4}, \ldots \qquad \textbf{(3)}$$

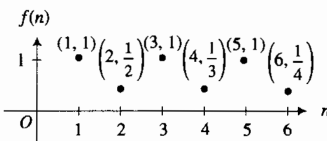
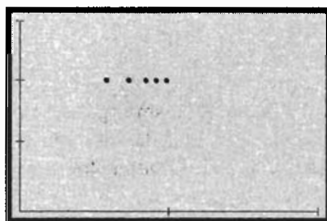


FIGURA 3

Los elementos de las sucesiones (2) y (3) son los mismos, sin embargo, las sucesiones no son iguales. Las gráficas de las funciones sucesiones para las sucesiones (2) y (3) se muestran en las figuras 2 y 3, respectivamente. ◀



[0, 1] por [0, 3]

$x = \frac{t}{2t+1}$ y $y = 2$

FIGURA 4

Los puntos correspondientes a los elementos sucesivos de una sucesión pueden trazarse sobre una recta numérica. Esto se muestra en la figura 4 para la sucesión (1), sobre la recta horizontal $y = 2$. Para obtener esta figura se activó la graficadora en modo paramétrico-punto y se consideró

$$x = \frac{t}{2t+1} \quad \text{y} \quad y = 2$$

con los siguientes valores para los parámetros del rectángulo de inspección: $t_{\text{mín}} = 1$, $t_{\text{máx}} = 10$, $t_{\text{step}} = 1$, $x_{\text{mín}} = 0$, $x_{\text{máx}} = 1$, $x_{\text{scl}} = 0.5$, $y_{\text{mín}} = 0$, $y_{\text{máx}} = 3$ y $y_{\text{scl}} = 1$. En figura 5, se han ubicado en una recta numérica los cinco puntos que representan los primeros cinco elementos de la sucesión. Observe en las figuras 4 y 5 que los elementos consecutivos de la sucesión están cada vez más cerca de $\frac{1}{2}$, aunque ningún elemento de la sucesión tiene el valor de $\frac{1}{2}$. Intuitivamente se observa que un elemento estará tan cerca a $\frac{1}{2}$ como se desee al considerar el número del elemento lo suficientemente grande. O dicho de otra manera, se puede hacer $\left| n/(2n+1) - \frac{1}{2} \right|$ menor que cualquier número positivo ϵ dado considerando n suficientemente grande. Debido a esto, se dice que el límite de la sucesión $\{n/(2n+1)\}$ es $\frac{1}{2}$.

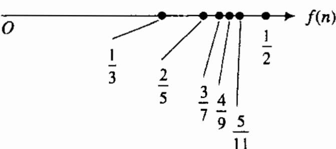


FIGURA 5

En general, si existe un número L tal que $|a_n - L|$ es arbitrariamente pequeño para una n suficientemente grande, se dice que la sucesión $\{a_n\}$ tiene el límite L.

8.2.2 Definición del límite de una sucesión

Una sucesión $\{a_n\}$ tiene el límite L si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que si n es un número entero y

$$\text{si } n > N \text{ entonces } |a_n - L| < \epsilon$$

y se escribe

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

Compare esta definición con la definición 3.7.1 del límite de $f(x)$ conforme x crece sin límite. Las dos definiciones son muy idénticas; sin embargo, cuando se dice que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, la función f está definida para todos los números reales mayores que algún número real r, mientras que cuando se considera $\lim_{n \to +\infty} a_n$, se restringe n a los números enteros positivos. El teorema siguiente se deduce inmediatamente de la definición 3.7.1. En el ejercicio 56 se le pedirá que escriba la demostración formal.

8.2.3 Teorema

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, y f está definida para todo número entero positivo, entonces también $\lim_{n \to +\infty} f(n) = L$, cuando n se restringe a los números enteros positivos.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** Se aplica el teorema 8.2.3 a la sucesión (1) donde $f(n) = n/(2n + 1)$, de modo que $f(x) = x/(2x + 1)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2x + 1} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{x}} \\ &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Así, del teorema 8.2.3, $\lim_{n \to +\infty} f(n) = \frac{1}{2}$ cuando n se restringe a los números enteros positivos. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** Considere la sucesión $\{(-1)^{n+1}/n\}$. Observe que el n-ésimo elemento de esta sucesión es $(-1)^{n+1}/n$, y que $(-1)^{n+1}$ es igual a $+1$ cuando n es impar, y es igual a -1 cuando n es par. En consecuencia, los elementos de la sucesión pueden ser escritos como

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots$$

La figura 6 muestra los puntos correspondientes a los elementos sucesivos de la sucesión ubicados en una recta numérica. En la figura, $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = -\frac{1}{4}$, $a_5 = \frac{1}{5}$, $a_6 = -\frac{1}{6}$, $a_7 = \frac{1}{7}$, $a_8 = -\frac{1}{8}$, $a_9 = \frac{1}{9}$, $a_{10} = -\frac{1}{10}$. El límite de la sucesión es 0, y los elementos oscilan alrededor de 0. ◀

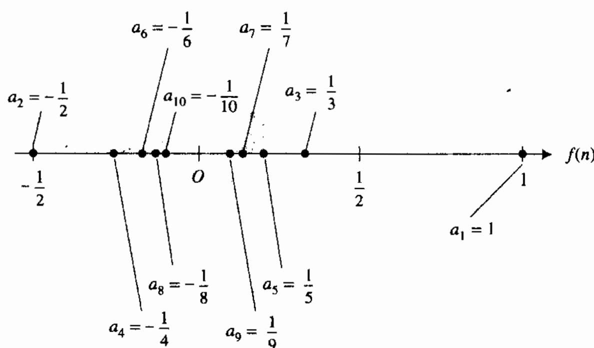
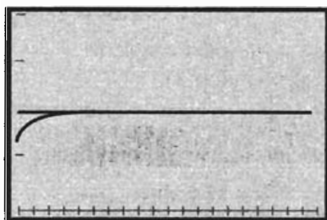


FIGURA 6

Si una sucesión $\{a_n\}$ tiene un límite, se dice que la sucesión es **convergente**, y a_n converge a ese límite. Si la sucesión no es convergente, es **divergente**.



[1, 20] por [0, 4]

$f(x) = \dfrac{4x^2}{2x^2+1}$ y $y = 2$

FIGURA 7

EJEMPLO 1 Determine si la sucesión es convergente o divergente y apoye gráficamente la respuesta:

$$\left\{\frac{4n^2}{2n^2+1}\right\}$$

Solución Se desea determinar si $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2/(2n^2+1)$ existe. Se considera $f(x) = 4x^2/(2x^2+1)$, y se investiga $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{2x^2+1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{2+\frac{1}{x^2}}\\ &= 2\end{aligned}$$

Por tanto, por el teorema 8.2.3, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 2$. De este modo, la sucesión dada es convergente y $4n^2/(2n^2+1)$ converge a 2.

La figura 7 muestra la gráfica de f y la recta $y = 2$ trazadas en el rectángulo de inspección de [1, 20] por [0, 4] apoya la respuesta debido a que la recta parece ser una asíntota horizontal de la gráfica de f.

También se puede apoyar la respuesta trazando la gráfica de la función sucesión correspondiente y observando que las coordenadas y de puntos sucesivos están cada vez más cerca de 2. ◀

EJEMPLO 2 Determine si la sucesión es convergente o divergente:

$$\left\{n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}\right\}$$

Solución Se desea determinar si $\lim\limits_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}(\pi/n)$ existe. Se considera $f(x) = x \operatorname{sen}(\pi/x)$ y se investiga $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Como $f(x)$ puede escribirse como $[\operatorname{sen}(\pi/x)]/(1/x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen}(\pi/x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} (1/x) = 0$, puede aplicarse la regla de L'Hôpital a fin de obtener

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\dfrac{\pi}{x^2}\cos\dfrac{\pi}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \pi \cos\frac{\pi}{x} \\ &= \pi\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \pi$. Así, la sucesión es convergente y n sen(π/n) converge a π. ◀

▶ **EJEMPLO 3** Demuestre que si $|r| < 1$, entonces la sucesión $\{r^n\}$ es convergente y r^n converge a cero.

Solución Primero se considera $r = 0$. Entonces la sucesión es $\{0\}$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$. De este modo, la sucesión es convergente y el n-ésimo elemento converge a cero.

Si $0 < |r| < 1$, se debe demostrar que se cumple la definición 8.2.2 con $L = 0$. Por tanto, debe probarse que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que si n es un número entero y

$$\begin{aligned} &\text{si } n > N \quad \text{entonces} \quad |r^n - 0| < \epsilon \qquad (4)\\ \Leftrightarrow\ &\text{si } n > N \quad \text{entonces} \quad |r|^n < \epsilon \\ \Leftrightarrow\ &\text{si } n > N \quad \text{entonces} \quad \ln|r|^n < \ln\epsilon \\ \Leftrightarrow\ &\text{si } n > N \quad \text{entonces} \quad n\ln|r| < \ln\epsilon \end{aligned}$$

Como $0 < |r| < 1$, $\ln|r| < 0$. La proposición anterior es equivalente a

$$\text{si } n > N \quad \text{entonces} \quad n > \frac{\ln\epsilon}{\ln|r|}$$

Por tanto, si $N = \ln\epsilon/\ln|r|$, se cumple (4). En consecuencia, $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$. De modo que la sucesión $\{r^n\}$ es convergente y r^n converge a cero. ◀

El teorema siguiente incorpora los teoremas de límites para sucesiones que son análogos a los teoremas de límites para funciones. Las demostraciones se omiten debido a que son semejantes a las demostraciones de los teoremas correspondientes para límites de funciones.

8.2.4 Teorema

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones convergentes y c es una constante, entonces

(i) La sucesión constante $\{c\}$ tiene a c como su límite

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} ca_n = c \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$;

(iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$;

(iv) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\right)\left(\lim\limits_{n\to+\infty} b_n\right)$;

(v) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \neq 0$, y cada $b_n \neq 0$.

▶ **EJEMPLO 4** Aplique el teorema 8.2.4 para demostrar que la sucesión

$$\left\{\frac{4n^3}{2n^2+1}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{n}\right\}$$

es convergente, y determine su límite.

Solución El n-ésimo elemento de la sucesión puede escribirse como

$$\frac{4n^3}{2n^2+1}\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} = \frac{4n^2}{2n^2+1}\cdot n\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$$

En el ejemplo 1 se mostró que la sucesión $\{4n^2/(2n^2+1)\}$ es convergente y que $\lim\limits_{n\to+\infty}[4n^2/(2n^2+1)] = 2$. En el ejemplo 2 se mostró que la sucesión $\{n \operatorname{sen}(\pi/n)\}$ es convergente y que $\lim\limits_{n\to+\infty}[n\operatorname{sen}(\pi/n)] = \pi$. En consecuencia, por el teorema 8.2.4(iv),

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{4n^2}{2n^2+1}\cdot n\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\right] &= \lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2}{2n^2+1}\cdot\lim_{n\to+\infty} n\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\\ &= 2\cdot\pi\end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión es convergente y su límite es 2π. ◀

Cierto tipo de sucesiones reciben nombres especiales.

8.2.5 Definición de sucesiones creciente y decreciente

Una sucesión $\{a_n\}$ es

(i) **creciente** si $a_n \leq a_{n+1}$ para toda n;

(ii) **decreciente** si $a_n \geq a_{n+1}$ para toda n.

Una sucesión es **monótona** si es creciente o decreciente.

Si $a_n < a_{n+1}$ (un caso especial de $a_n \leq a_{n+1}$), la sucesión es **estrictamente creciente**; y si $a_n > a_{n+1}$, la sucesión es **estrictamente decreciente**.

▶ ***EJEMPLO 5*** Aplique la definición 8.2.5 para determinar si la sucesión es creciente, decreciente o no es monótona:

(a) $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$ **(b)** $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ **(c)** $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$

Solución

(a) Los elementos de la sucesión son

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots, \frac{n}{2n+1}, \frac{n+1}{2n+3}, \ldots$$

Note que a_{n+1} se obtiene de a_n reemplazando n por $n+1$.

Vea los cuatro primeros elementos de la sucesión y observe que los elementos se incrementan conforme n crece. De esta manera, se sospecha que, en general,

$$\frac{n}{2n+1} \leq \frac{n+1}{2n+3} \tag{5}$$

La desigualdad (5) puede verificarse si es posible encontrar una desigualdad de la cual se sepa que es válida. Al multiplicar cada miembro de (5) por $(2n+1)(2n+3)$ se obtienen las siguientes desigualdades:

$$n(2n+3) \leq (n+1)(2n+1)$$

$$2n^2+3n \leq 2n^2+3n+1 \tag{6}$$

La desigualdad (6) claramente se cumple ya que el miembro derecho excede en 1 al miembro izquierdo. Por tanto, se cumple la desigualdad (5); así, la sucesión dada es creciente.

(b) Los elementos de la sucesión son

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots$$

Como

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

para toda n, la sucesión es decreciente.

(c) Los elementos de la sucesión pueden escribirse como:

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}, \ldots$$

Debido a que $a_1 = 1$ y $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 > a_2$. Pero $a_3 = \frac{1}{3}$; de modo que $a_2 < a_3$. De manera más general, considere los tres elementos consecutivos

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \qquad a_{n+2} = \frac{(-1)^{n+3}}{n+2}$$

Si n es impar, entonces $a_n > a_{n+1}$ y $a_{n+1} < a_{n+2}$; por ejemplo, $a_1 > a_2$ y $a_2 < a_3$. Si n es par, entonces $a_n < a_{n+1}$ y $a_{n+1} > a_{n+2}$; por ejemplo, $a_2 < a_3$ y $a_3 > a_4$. En consecuencia, la sucesión no es creciente ni decreciente; de modo que no es monótona. ◀

Las respuestas del ejemplo 5 pueden apoyarse gráficamente al trazar la gráfica de la función sucesión correspondiente. La figura 1 apoya la respuesta del inciso (a) de que la sucesión es creciente, y la figura 2 apoya la respuesta del inicio (b) de que la sucesión es decreciente.

Para muchas sucesiones $\{f(n)\}$ se puede determinar si la sucesión es monótona calculando $f'(x)$ y aplicando el teorema 3.4.3, como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

(a) Para la sucesión $\{n/(2n + 1)\}$ del ejemplo 5(a) considere

$$f(x) = \frac{x}{2x+1} \qquad \text{y} \qquad f'(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$$

Como $f'(x) > 0$ para toda $x \geq 1$, entonces la sucesión es creciente.

(b) Para la sucesión $\{1/n\}$ del ejemplo 5(b) considere

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Debido a que $f'(x) < 0$ para toda $x \geq 1$, entonces la sucesión es decreciente. ◀

8.2.6 Definición de cotas inferior y superior de una sucesión

El número C es una **cota inferior** de la sucesión $\{a_n\}$ si $C \leq a_n$ para todos los números enteros positivos n; el número D es una **cota superior** de la sucesión $\{a_n\}$ si $a_n \leq D$ para todos los números enteros positivos n.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7 El número cero es una cota inferior de la sucesión $\{n/(2n+1)\}$ cuyos elementos son

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots, \frac{n}{2n+1}, \ldots$$

Otra cota inferior de esta sucesión es $\frac{1}{3}$. En realidad, cualquier número que sea menor que o igual a $\frac{1}{3}$ es una cota inferior de esta sucesión. ◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 8 Para la sucesión $\{1/n\}$ cuyos elementos son

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

el número 1 es una cota superior; también 26 es una cota superior. Cualquier número que sea mayor que o igual a 1 es una cota superior de esta sucesión, y cualquier número no positivo servirá como cota inferior. ◀

Observe en los ejemplos ilustrativos 7 y 8 que una sucesión puede tener muchas cotas superiores e inferiores.

8.2.7 Definición de máxima cota inferior y mínima cota superior de una sucesión

Si A es una cota inferior de una sucesión $\{a_n\}$ y si A tiene la propiedad de que para cada cota inferior C de $\{a_n\}$, $C \leq A$, entonces A es la **máxima cota inferior** de la sucesión. De manera semejante, si B es una cota superior de una sucesión $\{a_n\}$ y si B tiene la propiedad de que para cada cota superior D de $\{a_n\}$, $B \leq D$, entonces B es la **mínima cota superior** de la sucesión.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 9 Para la sucesión $\{n/(2n+1)\}$ del ejemplo ilustrativo 7, $\frac{1}{3}$ es la máxima cota inferior debido a que cada cota inferior de la sucesión es menor que o igual a $\frac{1}{3}$. Además, $\frac{1}{2}$ es una cota superior de la sucesión porque

$$\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}} < \frac{1}{2}$$

para toda n, y como cada cota superior de la sucesión es mayor que o igual a $\frac{1}{2}$, este número es la mínima cota superior de la sucesión. ◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 10 La mínima cota superior de la sucesión $\{1/n\}$ del ejemplo ilustrativo 8 es 1 ya que cada cota superior de la sucesión es mayor que o igual a 1. La máxima cota inferior de esta sucesión es 0. ◀

8.2.8 Definición de una sucesión acotada

Una sucesión es **acotada** si y sólo si tiene una cota superior y una cota inferior.

Como la sucesión $\{1/n\}$ del ejemplo ilustrativo 10 tiene una cota superior y una cota inferior, es acotada. Esta sucesión también es decreciente y en consecuencia es una sucesión monótona acotada. Además, como $\lim_{n \to +\infty} (1/n) = 0$, está sucesión es convergente. El teorema 8.2.10, el cual se deduce rápidamente, garantiza que una sucesión monótona acotada es convergente. En contraste, la sucesión $\{n\}$ es monótona porque es creciente, pero no es acotada ya que $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$.

La siguiente propiedad es una de las más importantes del sistema de los números reales y se empleará en la demostración del teorema 8.2.10.

8.2.9 Axioma de completez*

Todo conjunto no vacío de números reales que tiene una cota inferior tiene una máxima cota inferior. También, todo conjunto de números reales que tiene una cota superior tiene una mínima cota superior.

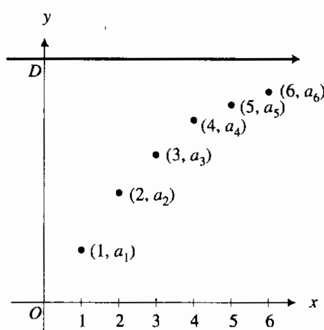


FIGURA 8

La segunda oración del enunciado del axioma de completez no es necesaria porque puede demostrarse a partir de la primera oración. Aquí, se incluyó en el axioma con el fin de agilizar la discusión.

Suponga que $\{a_n\}$ es una sucesión creciente acotada, y sea D una cota superior de la sucesión. Si los puntos (n, a_n) se ubican en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, estos puntos estarán debajo de la recta $y = D$. Además, como la sucesión es creciente, los puntos estarán cada vez más cerca de D a medida que n aumenta. Vea la figura 8. Por tanto los elementos crecen hacia D conforme n crece. Entonces, intuitivamente parece que la sucesión $\{a_n\}$ tiene un límite que es D o un número menor que D. En realidad esto es lo que ocurre y se garantiza en el teorema siguiente, el cual se demuestra en el suplemento de esta sección.

8.2.10 Teorema

Una sucesión monótona acotada es convergente.

Este teorema establece que si $\{a_n\}$ es una sucesión monótona acotada, entonces existe un número L tal que $\lim_{n \to +\infty} a_n = L$, pero no indica como determinarlo. Por esta razón, el teorema 8.2.10 se llama *teorema de existencia*. Muchos conceptos importantes en matemáticas están basados sobre teoremas de existencia. En particular, para muchas sucesiones el límite no puede determinarse mediante el uso directo de la definición o por medio de teoremas de límites, sin embargo, el conocimiento de que tal límite existe es importante para los matemáticos.

Si lee la demostración del teorema 8.2.10, aprenderá que el límite de una sucesión creciente acotada es la mínima cota superior B de la sucesión. Por tanto, si D es una cota superior de la sucesión, $\lim_{n \to +\infty} a_n = B \leq D$. Se tiene, entonces, el teorema siguiente.

8.2.11 Teorema

Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente, y suponga que D es una cota superior de esta sucesión, entonces $\{a_n\}$ es convergente y

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \leq D$$

* **N. de T.** Otros nombres empleados para este axioma son: *de continuidad, de completitud, de plenitud* y *del supremo*. La importancia consiste en que, geométricamente, el enunciado del axioma garantiza que la recta numérica real (o eje numérico) no tiene agujeros, es decir, es continua. Este hecho, aunque no se hace explícito, es la base para el desarrollo de la geometría analítica.

En la demostración del teorema 8.2.10, para el caso cuando la sucesión monótona acotada es decreciente, el límite es la máxima cota inferior. El siguiente teorema se deduce en forma similar a la del teorema 8.2.11.

8.2.12 Teorema

Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente, y suponga que C es una cota inferior de esta sucesión, entonces $\{a_n\}$ es convergente y

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \geq C$$

EJEMPLO 6 Aplique el teorema 8.2.10 para demostrar que la sucesión es convergente:

$$\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$$

Solución Los elementos de la sucesión son

$$\frac{2^1}{1!}, \frac{2^2}{2!}, \frac{2^3}{3!}, \frac{2^4}{4!}, \ldots, \frac{2^n}{n!}, \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, \ldots$$

donde $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$. En consecuencia, los elementos de la sucesión pueden escribirse como

$$2, 2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{2^n}{n!}, \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, \ldots$$

Entonces $a_1 = a_2 > a_3 > a_4$; de modo que la sucesión puede ser decreciente. Debe verificarse si $a_n \geq a_{n+1}$; esto es, se debe determinar si

$$\frac{2^n}{n!} \geq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^n(n+1)! \geq 2^{n+1}n!$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^n n!(n+1) \geq 2 \cdot 2^n n!$$

$$\Leftrightarrow \quad n + 1 \geq 2 \tag{8}$$

Cuando $n = 1$, la desigualdad (8) se convierte en $2 = 2$, y se cumple obviamente (8) cuando $n > 2$. Como la desigualdad (7) es equivalente a (8), se infiere que la sucesión dada es decreciente y por tanto monótona. Una cota superior para la sucesión es 2, y una cota inferior es 0. Por tanto, la sucesión es acotada.

En consecuencia, la sucesión $\{2^n/n!\}$ es una sucesión monótona acotada, y por el teorema 8.2.10 es convergente. ◀

El teorema 8.2.10 establece que una condición suficiente para que una sucesión monótona sea convergente ésta debe ser acotada. Esta condición también es necesaria y se establece en el siguiente teorema, cuya demostración se presenta en el suplemento de esta sección.

8.2.13 Teorema

Una sucesión monótona convergente es acotada.

Los teoremas 8.2.10 y 8.2.13 son recíprocos uno del otro y juntos establecen que: para una sucesión monótona, las propiedades de convergencia y de acotamiento son equivalentes. Este hecho será muy útil al estudiar series infinitas al final de este capítulo.

EJERCICIOS 8.2

En los ejercicios 1 a 20, escriba los primeros cuatro elementos de la sucesión y determine si es convergente o divergente. Si la sucesión converge, calcule su límite y apoye gráficamente la respuesta.

1. $\left\{\frac{n+1}{2n-1}\right\}$ **2.** $\left\{\frac{2n^2+1}{3n^2-n}\right\}$ **3.** $\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}$

4. $\left\{\frac{3n^3+1}{2n^2+n}\right\}$ **5.** $\left\{\frac{3-2n^2}{n^2+1}\right\}$ **6.** $\left\{\frac{e^n}{n}\right\}$

7. $\left\{\frac{\ln n}{n^2}\right\}$ **8.** $\left\{\frac{\log_b n}{n}\right\}, b > 1$ **9.** $\{\tanh n\}$

10. $\{\operatorname{senh} n\}$ **11.** $\left\{\frac{n}{n+1}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right\}$ **12.** $\left\{\frac{\operatorname{senh} n}{\operatorname{sen} n}\right\}$

13. $\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}\right\}$ **14.** $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$

15. $\left\{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n\right\}$ *Sugerencia:* $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

16. $\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right\}$ Ver sugerencia de ejercicio 15.

17. $\{2^{1/n}\}$ **18.** $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}\right\}$ **19.** $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$ **20.** $\{\cos n\pi\}$

En los ejercicios 21 a 24, estime en una graficadora el límite de la sucesión convergente. Confirme analíticamente la estimación.

21. **(a)** $\left\{\frac{3}{n+1}\right\}$ **(b)** $\left\{\frac{8n}{2n+3}\right\}$

22. **(a)** $\left\{\frac{4}{2n-1}\right\}$ **(b)** $\left\{\frac{1-7n}{2n+5}\right\}$

23. **(a)** $\left\{\frac{3n^2}{6n^2+1}\right\}$ **(b)** $\left\{\frac{n^2-1}{2+n^2}\right\}$

24. **(a)** $\left\{\frac{9-2n}{3+n}\right\}$ **(b)** $\left\{\frac{6n}{n^2+4}\right\}$

25. Demuestre que las sucesiones

$$\left\{\frac{n^2}{n+3}\right\} \text{ y } \left\{\frac{n^2}{n+4}\right\}$$

son divergentes, pero que la sucesión

$$\left\{\frac{n^2}{n+3} - \frac{n^2}{n+4}\right\}$$

es convergente.

26. Demuestre que la sucesión $\{n/c^n\}$ es convergente si $|c| > 1$ y divergente si $0 < |c| \leq 1$.

En los ejercicios 27 a 42, determine si la sucesión es creciente, decreciente o no es monótona.

27. $\left\{\frac{3n-1}{4n+5}\right\}$ **28.** $\left\{\frac{2n-1}{4n-1}\right\}$ **29.** $\left\{\frac{1-2n^2}{n^2}\right\}$

30. $\{\operatorname{sen} n\pi\}$ **31.** $\left\{\cos\frac{1}{3}n\pi\right\}$ **32.** $\left\{\frac{n^3-1}{n}\right\}$

33. $\left\{\frac{1}{n+\operatorname{sen} n^2}\right\}$ **34.** $\left\{\frac{2^n}{1+2^n}\right\}$ **35.** $\left\{\frac{5^n}{1+5^{2n}}\right\}$

36. $\left\{\frac{(2n)!}{5^n}\right\}$ **37.** $\left\{\frac{n!}{3^n}\right\}$ **38.** $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$

39. $\left\{\frac{n^n}{n!}\right\}$ **40.** $\{n^2+(-1)^n n\}$

41. $\left\{\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}\right\}$

42. $\left\{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}\right\}$

En los ejercicios 43 y 44, determine si la sucesión es acotada.

43. $\left\{\frac{n^2+3}{n+1}\right\}$ **44.** $\{3-(-1)^{n-1}\}$

En los ejercicios 45 a 54, demuestre que la sucesión es convergente empleando el teorema 8.2.10.

45. La sucesión del ejercicio 27.

46. $\left\{\frac{n}{3^{n+1}}\right\}$ **47.** $\left\{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot(2n)}\right\}$

48. La sucesión del ejercicio 34.

49. La sucesión del ejercicio 35.

50. La sucesión del ejercicio 38.

51. La sucesión del ejercicio 41.

52. La sucesión del ejercicio 42.

53. $\left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$ **54.** $\{k^{1/n}\}, k > 1$

55. Invente un ejemplo de una sucesión que sea acotada y convergente pero no monótona.

56. Demuestre el teorema 8.2.3.

57. Considere la sucesión

$$\left\{\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^a}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^b}\right\} \quad a \text{ y } b \text{ son constantes y } b \neq 0$$

Determine si la sucesión es convergente o divergente. Si la sucesión es convergente calcule su límite.

58. Demuestre que si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente, entonces $\lim_{n\to+\infty} a_n$ es único. *Sugerencia:* suponga que $\lim_{n\to+\infty} a_n$ tiene dos valores diferentes, L y M, y muestre que esto es imposible si se toma $\epsilon = \frac{1}{2}|L-M|$ en la definición 8.2.2.

59. Demuestre que si $|r| < 1$, entonces la sucesión $\{nr^n\}$ es convergente y nr^n converge a cero.

60. Demuestre que si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$, entonces la sucesión $\{|a_n|\}$ es convergente y $\lim_{n\to+\infty}|a_n| = |L|$.

61. Demuestre que si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to+\infty} = L$, entonces la sucesión $\{a_n{}^2\}$ también es convergente y $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n{}^2 = L^2$.

62. Demuestre que la sucesión $\{a_n\}$ es convergente, donde $a_n > 0$ para toda n y $a_{n+1} < ka_n$ con $0 < k < 1$.

63. Explique que significa cuando se dice: "Para una función monótona, las propiedades de convergencia y de acotamiento son equivalentes".

64. Si la sucesión $\{a_n\}$ es divergente, ¿puede concluirse que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$? Justifique la respuesta e ilústrela mediante un ejemplo.

8.3 SERIES INFINITAS DE TÉRMINOS CONSTANTES

Una parte importante del estudio del Cálculo trata sobre la representación de funciones como "sumas infinitas". Realizar esto requiere extender la operación familiar de adición de un conjunto finito de números a la adición de una infinidad de números. Para llevar a cabo esto, se estudiará un proceso de límite en el que se consideran sucesiones.

Suponga que asociada a la sucesión

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

se tiene una "suma infinita" denotada por

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

Pero ¿qué es lo que significa esta expresión? Esto es, ¿qué debe entenderse por la "suma" de un número infinito de términos, y en qué circunstancias dicha suma existe? Para tener una idea intuitiva del concepto de tal suma, suponga que un trozo de cuerda de 2 pie de longitud se corta a la mitad. Una de estas mitades de 1 pie de longitud se aparta y el otro se corta a la mitad otra vez. Uno de los trozos resultantes de $\frac{1}{2}$ pie de longitud se aparta y el otro se corta a la mitad, de modo que se obtienen dos trozos, cada uno de $\frac{1}{4}$ pie de longitud. Uno de los trozos de $\frac{1}{4}$ pie de longitud se aparta y el otro se corta a la mitad obteniéndose dos trozos, cada uno de $\frac{1}{8}$ pie de longitud. Otra vez, uno de los trozos se aparta y el otro se corta a la mitad. Si se continúa este procedimiento en forma indefinida, el número de pies de la suma de las longitudes de los trozos apartados puede considerarse como la suma infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots \qquad (1)$$

Como se inició con un trozo de cuerda de 2 pie de longitud, nuestra intuición nos indica que la suma infinita (1) debe ser 2. En el ejemplo ilustrativo 2 se demuestra que en realidad esto es así. Sin embargo, se necesitan algunas definiciones preliminares.

A partir de la sucesión

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

se forma una nueva sucesión $\{s_n\}$ sumando sucesivamente elementos de $\{u_n\}$:

$$\begin{aligned}
s_1 &= u_1 \\
s_2 &= u_1 + u_2 \\
s_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\
s_4 &= u_1 + u_2 + u_3 + u \\
&\vdots \\
s_n &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n
\end{aligned}$$

La sucesión $\{a_n\}$ obtenida de esta manera a partir de la sucesión $\{s_n\}$ es una *sucesión de sumas parciales* llamada *serie infinita*.

8.3.1 Definición de serie infinita

Si $\{u_n\}$ es una sucesión y

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

entonces $\{s_n\}$ es una **sucesión de sumas parciales** denominada **serie infinita** y se denota por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

Los números $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ son los **términos** de la serie infinita.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Considere la sucesión $\{1/2^{n-1}\}$:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$$

A partir de esta sucesión se forma la sucesión de sumas parciales:

$$s_1 = 1 \qquad\qquad s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad s_2 = \frac{3}{2}$$

$$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad s_3 = \frac{7}{4}$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad s_4 = \frac{15}{8}$$

$$s_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \quad \Leftrightarrow \quad s_5 = \frac{31}{16}$$

$$\vdots$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Esta sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es la serie infinita denotada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$$

Observe que esta es la suma infinita (1) obtenida al principio de esta sección en la discusión de la cuerda de 2 pie de longitud cortada repetidamente. Esta serie es un ejemplo de una *serie geométrica*, la cual se discutirá posteriormente en esta sección. ◀

Cuando $\{s_n\}$ es una sucesión de sumas parciales, entonces

$$s_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}$$

De modo que

$$s_n = s_{n-1} + u_n$$

Esta fórmula se utiliza en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 Sea la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

(a) obtenga los primeros cuatro elementos de la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$, y

(b) determine una fórmula para s_n en términos de n.

Solución

(a) Como $s_n = s_{n-1} + u_n$

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1 & s_2 &= s_1 + u_2 & s_3 &= s_2 + u_3 & s_4 &= s_3 + u_4 \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2} & &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} & &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} & &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \cdot 5} \\ &= \tfrac{1}{2} & &= \tfrac{2}{3} & &= \tfrac{3}{4} & &= \tfrac{4}{5} \end{aligned}$$

(b) Como $u_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$, se tiene, mediante fracciones parciales.

$$u_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Por tanto,

$$u_1 = 1 - \tfrac{1}{2} \qquad u_2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} \qquad u_3 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$u_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \qquad u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

De esta forma, como $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n$,

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Al eliminar los paréntesis y reducir los términos semejantes se obtiene

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Si se considera n como 1, 2, 3, y 4 en esta ecuación, se verá que los resultados anteriores son correctos. ◀

El método empleado en la solución del ejemplo anterior se aplica a sólo un caso especial. En general, no es posible obtener una expresión de este tipo para s_n.

8.3.2 Definición de la suma de una serie infinita

Considere que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ denota una serie infinita dada para la cual $\{s_n\}$ es la sucesión de sumas parciales. Si $\lim_{n \to +\infty} s_n$ existe y es igual a S, entonces la serie **convergente** y S es la **suma** de la serie. Si $\lim_{n \to +\infty} s_n$ no existe, entonces la serie es **divergente**, y la serie no tiene suma.

En esencia, esta definición establece que una serie infinita es convergente si y sólo si la sucesión de sumas parciales correspondiente es convergente. Si una serie infinita tiene una suma S, también se dice que la serie converge a S.

Observe que la suma de una serie convergente es el límite de una sucesión de sumas parciales y no se obtiene mediante adición ordinaria. Para una serie convergente, se utiliza el símbolo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

con el propósito de denotar tanto la serie como la suma de la serie. El uso del mismo símbolo no debe crear confusiones porque la interpretación correcta será evidente en el contexto en el que se emplea.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 La serie infinita del ejemplo ilustrativo 1 es

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots \quad (2)$$

y la sucesión de sumas parciales es $\{s_n\}$, donde

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad (3)$$

Para determinar si la serie (2) tiene una suma, debe calcularse $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$. A fin de determinar una fórmula para s_n se utiliza la identidad algebraica

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Si se aplica esta identidad con $a = 1$ y $b = \frac{1}{2}$ se tiene

$$1 - \frac{1}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}$$

Al comparar esta ecuación y (3) se obtiene

$$s_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Como $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, se tiene

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = 2$$

Por tanto, la serie infinita (2) tiene la suma 2. ◀

EJEMPLO 2 Determine si la serie infinita del ejemplo 1 tiene una suma.

Solución En la solución del ejemplo 1 se mostró que la sucesión de sumas parciales para la serie dada es $\{s_n\} = \{1 - 1/(n + 1)\}$. Por tanto,

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n + 1}\right)$$
$$= 1$$

Por lo que la serie infinita tiene una suma igual a 1, y se escribe

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n + 1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots + \frac{1}{n(n + 1)} + \ldots$$
$$= 1$$

◀

EJEMPLO 3 Exprese con notación sigma la serie infinita denotada por la sucesión de sumas parciales siguiente:

$$\{s_n\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$$

También determine si la serie infinita es convergente o divergente; si es convergente, obtenga su suma.

Solución Como $s_1 = \frac{1}{2}$, entonces $u_1 = \frac{1}{2}$. Si $n > 1$, entonces

$$\begin{aligned} u_n &= s_n - s_{n-1} \\ &= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= -\frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Por tanto, la serie infinita es

$$\frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

Como

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} s_n &= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

la serie es convergente y su suma es 0. ◀

Como se mencionó anteriormente, en la mayoría de los casos no es posible obtener una expresión para s_n en términos de n; por lo que se tienen otros métodos para determinar si una serie infinita dada tiene una suma o no, o, equivalentemente, si una serie infinita dada es convergente o divergente.

8.3.3 Teorema

Si la serie infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es convergente, entonces $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Demostración Sea $\{s_n\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie dada y denote la suma por S. De la definición 8.3.2, $\lim_{n \to +\infty} s_n = S$ y $\lim_{n \to +\infty} s_{n-1} = S$. Como $u_n = s_n - s_{n-1}$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} u_n &= \lim_{n \to +\infty} (s_n - s_{n-1}) \\ &= \lim_{n \to +\infty} s_n - \lim_{n \to +\infty} s_{n-1} \\ &= S - S \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

El teorema 8.3.3 proporciona un criterio simple para la divergencia de una serie: si $\lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0$, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es divergente.

EJEMPLO 4 Demuestre que las dos series siguientes son divergentes:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 2 + \frac{5}{4} + \frac{10}{9} + \frac{17}{16} + \ldots$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}3 = 3 - 3 + 3 - 3 + \ldots$

Solución

(a)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1}\\ &= 1\\ &\neq 0\end{aligned}$$

Por tanto, por el teorema 8.3.3, la serie es divergente.

(b) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1}3$, el cual no existe. Por tanto, por el teorema 8.3.3, la serie es divergente. ◀

El recíproco del teorema 8.3.3 es falso. Esto es, si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, no se infiere que la serie sea necesariamente convergente. En otras palabras, es posible tener una serie divergente para la cual $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Un ejemplo de tal serie es

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

denominada **serie armónica**. Claramente, $\lim_{n\to+\infty} (1/n) = 0$, pero esta serie diverge, lo cual se demostrará a continuación como un teorema.

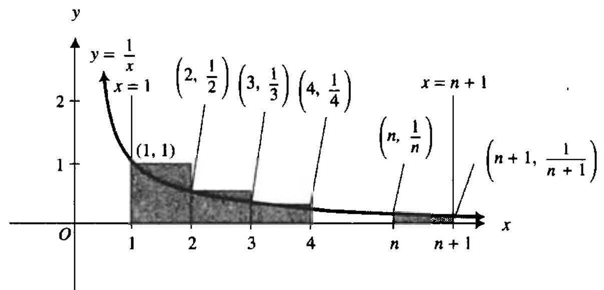


FIGURA 1

8.3.4 Teorema

La serie armónica es divergente.

Demostración El n-ésimo término, $1/n$, de la serie armónica puede interpretarse geométricamente como el número de unidades cuadradas del área de un rectángulo que tiene ancho de 1 unidad y una altura de $1/n$ unidad. Vea la

figura 1, la cual muestra n rectángulos que circunscriben la región limitada superiormente por la gráfica de $y = 1/x$, inferiormente por el eje x y lateralmente por las rectas $x = 1$ y $x = n + 1$. La suma de las áreas de los n rectángulos es

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

la cual es s_n, la n-ésima suma parcial de la serie armónica. El área de la región es

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(n + 1)$$

Por tanto,

$$s_n > \ln(n + 1)$$

De modo que la sucesión $\{s_n\}$ no está acotada. Pero como $\{s_n\}$ es una sucesión creciente, y de la sección 8.2 se sabe que convergencia y acotamiento son propiedades equivalentes de una sucesión monótona, se deduce que la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es divergente. Por tanto, como su sucesión de sumas parciales diverge, la serie armónica diverge. ■

Una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots \qquad (4)$$

se denomina **serie geométrica**. La serie infinita (2), discutida en los ejemplos ilustrativos 1 y 2, es una serie geométrica con $a = 1$ y $r = \frac{1}{2}$.

8.3.5 Teorema

La serie geométrica converge a la suma $a/(1 - r)$ si $|r| < 1$, y diverge si $|r| \geq 1$.

Demostración La n-ésima suma parcial de la serie geométrica (4) está dada por.

$$s_n = a(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}) \qquad (5)$$

De la identidad

$$1 - r^n = (1 - r)(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1})$$

(5) se puede escribir como

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad \text{si } r \neq 1 \qquad (6)$$

En el ejemplo 3 de la sección 8.2, se mostró que $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$ si $|r| < 1$. Por tanto, de (6), si $|r| < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{a}{1 - r}$$

Así, si $|r| < 1$, la serie geométrica converge y su suma es $a/(1 - r)$.

Si $r = \pm 1$, el límite del n-ésimo término no es cero. En consecuencia, la serie geométrica diverge cuando $|r| = 1$.

Si $|r| > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} ar^{n-1} = a \lim\limits_{n\to+\infty} r^{n-1}$. Es claro que $\lim\limits_{n\to+\infty} r^{n-1} \neq 0$ porque $|r^{n-1}|$ puede hacerse tan grande como se desee tomando n suficientemente grande. Por tanto, por el teorema 8.3.3, la serie es divergente. Esto completa la demostración. ■

El ejemplo siguiente ilustra cómo puede aplicarse el teorema 8.3.5 para expresar un número decimal infinito periódico como una fracción común.

EJEMPLO 5 Exprese 0.3333 . . . como una fracción común.

Solución

$$0.3333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \frac{3}{10\,000} + \ldots + \frac{3}{10^n} + \ldots$$

Esta es una serie geométrica en la cual $a = \frac{3}{10}$ y $r = \frac{1}{10}$. Como $|r| < 1$, se deduce del teorema 8.3.5 que la serie converge y su suma es $a/(1 - r)$. Por tanto,

$$0.3333\ldots = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}}$$
$$= \frac{1}{3}$$

Se concluye esta sección con cuatro teoremas que extienden ciertas propiedades de las sumas infinitas a series infinitas convergentes. El primero de estos teoremas establece que si una serie infinita se multiplica término a término por una constante diferente de cero, la convergencia o divergencia no se afecta.

8.3.6 Teorema

Sea c cualquier constante diferente de cero.

(i) Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es convergente y su suma es S, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$ también es convergente y su suma es $c \cdot S$.

(ii) Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es divergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$ también es divergente.

Demostración Sea s_n la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Por tanto, $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. La n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$ es $c(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = cs_n$.

Demostración de (i) Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to+\infty} s_n$ existe y es S. Por tanto,

$$\lim_{n\to+\infty} cs_n = c \lim_{n\to+\infty} s_n$$
$$= c \cdot S$$

En consecuencia, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$ es convergente y su suma es $c \cdot S$.

Demostración de (ii) Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es divergente, entonces $\lim_{n\to+\infty} s_n$ no existe. Ahora suponga que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$ es convergente. Entonces $\lim_{n\to+\infty} cs_n$ existe. Pero $s_n = cs_n/c$; de modo que

$$\begin{aligned}\lim_{n \to +\infty} s_n &= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{c}(cs_n) \\ &= \frac{1}{c} \lim_{n \to +\infty} (cs_n)\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_{n \to +\infty} s_n$ existe, lo cual es una contradicción. En consecuencia, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$ es divergente. ■

▶ **EJEMPLO 6** Determine si la serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n}$$

Solución

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{4n} + \ldots$$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ es la serie armónica y es divergente, entonces por el teorema 8.3.6(ii) con $c = \frac{1}{4}$, la serie dada es divergente. ◀

Otra propiedad de las sumas finitas es

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$$

y su extensión a series infinitas convergentes está dada por el teorema siguiente.

8.3.7 Teorema

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ son series infinitas convergentes cuyas sumas son S y T, respectivamente, entonces

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ es una serie convergente y su suma es $S + T$;

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n)$ es una serie convergente y su suma es $S - T$.

La demostración de este teorema se deja como ejercicio (vea el ejercicio 60).

El teorema siguiente es un corolario del teorema anterior y en ocasiones se utiliza para demostrar la divergencia de una serie.

8.3.8 Teorema

Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente y la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ es divergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ es divergente.

Demostración Suponga que $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ es convergente y su suma es S. Sea T la suma de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Entonces, como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} [(a_n + b_n) - a_n]$$

se concluye del teorema 8.3.7(ii) que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ es convergente y su suma es $S - T$. Pero esto es una contradicción a la hipótesis de que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ es divergente. En consecuencia, $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ es divergente. ■

EJEMPLO 7 Determine si la serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{4^n} \right)$$

Solución En el ejemplo 6, se demostró que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n}$ es divergente. Como la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}$ es una serie geométrica con $|r| = \frac{1}{4} < 1$, es convergente. En consecuencia, por el teorema 8.3.8, la serie dada es divergente. ◀

Si las dos series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ son divergentes, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ puede ser convergente o divergente. Por ejemplo, si $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = \frac{1}{n}$, entonces $a_n + b_n = \frac{2}{n}$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}$ es divergente. En cambio, si $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = -\frac{1}{n}$, entonces $a_n + b_n = 0$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} 0$ es convergente.

El teorema final de esta sección establece que la convergencia o divergencia de una serie infinita no se afecta al cambiar un número finito de términos.

8.3.9 Teorema

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ son dos series infinitas, que difieren únicamente en sus primeros m términos (es decir, $a_k = b_k$ si $k > m$), entonces las dos series son convergentes o ambas son divergentes.

Demostración Sean $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ las sucesiones de sumas parciales de las series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, respectivamente. Entonces

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$$

y

$$t_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_m + b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots + b_n$$

Como $a_k = b_k$ si $k > m$, entonces si $n \geq m$,

$$s_n - t_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_m)$$

De modo que

$$\text{si } n \geq m \quad \text{entonces} \quad s_n - t_n = s_m - t_m \tag{7}$$

Se desea demostrar que los dos límites $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$ y $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n$ existen o no existen.

Suponga que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n$ existe. De (7),

$$\text{si } n \geq m \quad \text{entonces} \quad s_n = t_n + (s_m - t_m)$$

Así,

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} t_n + (s_m - t_m)$$

En consecuencia, cuando $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n$ existe, $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$ existe y las dos series convergen.

Ahora, suponga que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n$ no existe y que $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$ existe. De (7),

$$\text{si } n \geq m \quad \text{entonces} \quad t_n = s_n + (t_m - s_m)$$

Como $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$ existe, se infiere que

$$\lim_{n \to +\infty} t_n = \lim_{n \to +\infty} s_n + (t_m - s_m)$$

de modo que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n$ debe existir, lo cual es una contradicción. En consecuencia, si $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n$ no existe, entonces $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$ tampoco existe, y las dos series divergen. ■

▶ ***EJEMPLO 8*** Determine si la serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+4}$$

Solución La serie dada es

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{n+4} + \ldots$$

la cual puede escribirse como

$$0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{8}$$

Ahora la serie armónica, la cual se sabe que diverge, es

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

La serie (8) difiere de la serie armónica sólo en los primeros cuatro términos. En consecuencia, por el teorema 8.3.9, la serie (8) también es divergente. ◀

▶ ***EJEMPLO 9*** Determine si la serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left[\!\left[\cos \frac{3}{n}\pi + 2 \right]\!\right]}{3^n}$$

Solución La serie dada puede escribirse como

$$\frac{[\![\cos 3\pi + 2]\!]}{3} + \frac{[\![\cos \frac{3}{2}\pi + 2]\!]}{3^2} + \frac{[\![\cos \pi + 2]\!]}{3^3} + \frac{[\![\cos \frac{3}{4}\pi + 2]\!]}{3^4} +$$

$$\frac{[\![\cos \frac{3}{5}\pi + 2]\!]}{3^5} + \frac{[\![\cos \frac{1}{2}\pi + 2]\!]}{3^6} + \frac{[\![\cos \frac{3}{7}\pi + 2]\!]}{3^7} + \ldots$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^7} + \frac{2}{3^8} + \ldots \qquad \textbf{(9)}$$

Considere la serie geométrica con $a = \frac{2}{3}$ y $r = \frac{1}{3}$:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^7} + \frac{2}{3^8} + \ldots \qquad \textbf{(10)}$$

la cual es convergente. Como la serie (9) difere de la serie (10) únicamente en los primeros cinco términos, entonces, por el teorema 8.3.9, la serie (9) también es convergente. ◀

Como consecuencia del teorema 8.3.9, en una serie infinita dada se puede sumar o restar un número finito de términos sin afectar su convergencia o divergencia. Por ejemplo, en el ejemplo 8 puede considerarse que la serie dada se obtuvo de la serie armónica al restársele los primeros cuatro términos. Puesto que la serie armónica es divergente, entonces la serie dada es divergente. En el ejemplo 9 se puede considerar la serie geométrica convergente

$$\frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^7} + \frac{2}{3^8} + \ldots \qquad \textbf{(11)}$$

y obtener la serie dada (9) al sumarle cinco términos. Como la serie (11) es convergente, entonces la serie (9) es convergente.

EJERCICIOS 8.3

En los ejercicios 1 a 8, determine los primeros cuatro elementos de la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$, y obtenga una fórmula para s_n en términos de n. También determine si la serie infinita es convergente o divergente; si es convergente, calcule su suma.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ **2.** $\sum_{n=1}^{+\infty} n$

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{(3n+1)(3n-2)}$ **4.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(4n-3)(4n+1)}$

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n}{n+1}$ **6.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{5^{n-1}}$ **8.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$

En los ejercicios 9 a 13, exprese con la notación sigma la serie infinita que es la sucesión de sumas parciales. También determine si la serie es convergente o divergente; si es convergente, obtenga su suma.

9. $\{s_n\} = \left\{\frac{2n}{3n+1}\right\}$ **10.** $\{s_n\} = \left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}$

11. $\{s_n\} = \left\{\frac{1}{3^n}\right\}$ **12.** $\{s_n\} = \{3^n\}$

13. $\{s_n\} = \{\ln(2n+1)\}$

En los ejercicios 14 a 24, escriba los primeros cuatro términos de la serie infinita y determine si la serie es convergente o divergente. Si la serie es convergente, calcule su suma.

14. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ **15.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$

16. $\sum_{n=1}^{+\infty} [1 + (-1)^n]$ **17.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ **18.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2}{n^2+1}$

19. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{1}{n}$ **20.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$ **21.** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{2^n}$

22. $\sum_{n=1}^{+\infty} \tan^n \frac{\pi}{6}$ **23.** $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n}$ **24.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{senh} n}{n}$

En los ejercicios 25 a 44, determine si la serie es convergente o divergente. Si la serie es convergente, obtenga su suma.

25. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2}$ **26.** $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n-1}$ **27.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2n}$

28. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3n}$ 29. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^n}$ 30. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$

31. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3}\left(\frac{5}{7}\right)^n$ 32. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

33. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left[\!\left[\operatorname{sen} \frac{4}{n}\pi + 3 \right]\!\right]}{4^n}$ 34. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left[\!\left[\cos \frac{1}{n}\pi + 1 \right]\!\right]}{2^n}$

35. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2^n}\right)$ 36. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{3n}\right)$

37. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$ 38. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n}\right)$

39. $\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-n} + e^n)$ 40. $\sum_{n=1}^{+\infty} (2^{-n} + 3^n)$

41. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n}\right)$ 42. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2n} - \frac{2}{3n}\right)$

43. $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} - \frac{2}{3^n}\right)$ 44. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{4^n} - \frac{4}{5^n}\right)$

En los ejercicios 45 a 48, exprese el número decimal infinito periódico como una fracción común.

45. 0.27 27 27 ... 46. 2.045 45 45 ...

47. 1.234 234 234 ... 48. 0.4653 4653 4653 ...

49. La trayectoria de cada oscilación, después de la primera, del disco de un péndulo es 0.93 de la trayectoria de la oscilación anterior (de un lado al otro lado). Si la trayectoria de la primera oscilación fuere de 56 cm y la resistencia del aire lleva eventualmente al péndulo al reposo, ¿qué distancia recorre el disco del péndulo antes de alcanzar el reposo?

50. Despúes de que una mujer que viaja en bicicleta retira sus pies de los pedales, la rueda delantera gira 200 veces durante los primeros 10 s. Posteriormente, en cada periodo de 10 s, la rueda gira cuatro quintas partes de las veces que giró en el periodo anterior. Determine el número de giros de la rueda antes de que la bicicleta se detenga.

51. Se deja caer una pelota desde una altura de 12 pie, y cada vez que toca el suelo rebota hasta una altura de tres cuartos de la distancia desde la cual cae. Determine la distancia total recorrida por la pelota antes de que alcance el estado de reposo.

52. ¿Cuál es la distancia total recorrida por una pelota de tenis antes de que alcance el estado de reposo si se deja caer desde una altura de 199 pie y si, después de cada caída rebota hasta una altura de 11/20 de la distancia desde la que cae.

53. **(a)** Demuestre que una pelota llegará al suelo en $\sqrt{h}/4$ segundos si se deja caer desde una altura de h pies. **(b)** Utilice el resultado del inciso (a) para determinar cuánto tiempo empleará la pelota del ejercicio 51 para dejar de rebotar.

54. Utilice el resultado del inciso (a) del ejercicio 53 para determinar cuánto tiempo empleará la pelota de tenis del ejercicio 52 para dejar de rebotar.

55. Los lados de un triángulo equilátero miden 4 unidades. Se construye otro triángulo equilátero dibujando segmentos de recta que unen los puntos medios de los lados del primer triángulo. Si este proceso puede repetirse un número ilimitado de veces, ¿cuál es el perímetro total de todos los triángulos que se forman?

56. Determine una serie geométrica infinita cuya suma sea 6 y tal que cada término sea cuatro veces la suma de los términos subsecuentes.

57. Trace en la graficadora la sucesión de las primeras 100 sumas parciales de la serie armónica. A partir de la gráfica estime

(a) $\sum_{n=1}^{25} \frac{1}{n}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{50} \frac{1}{n}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{75} \frac{1}{n}$ **(d)** $\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n}$

58. Trace en la graficadora la sucesión de las primeras 1000 sumas parciales de la serie armónica. A partir de la gráfica estime

(a) $\sum_{n=1}^{250} \frac{1}{n}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{500} \frac{1}{n}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{750} \frac{1}{n}$ **(d)** $\sum_{n=1}^{1\,000} \frac{1}{n}$

59. Utilice la graficadora, en cualquier forma que desee, para determinar el primer elemento de la sucesión de sumas parciales de la serie armónica el cual es menor que 10.

60. Demuestre el teorema 8.3.7.

61. **(a)** Si una serie infinita es divergente, ¿puede concluirse que su n-ésimo término no se aproxima a 0 conforme n crece sin límite? **(b)** Si el n-ésimo término de una serie infinita no se aproxima a 0 conforme n crece sin límite, ¿puede concluirse que la serie es divergente? Justifique las respuestas de los incisos (a) y (b) indicando un teorema o dando un ejemplo.

8.4 SERIES INFINITAS DE TÉRMINOS POSITIVOS

Las series infinitas, cuyos términos son positivos, tienen propiedades especiales. En particular, la sucesión de sumas parciales de dichas series es creciente y tiene una cota inferior 0. Si la sucesión de sumas parciales también tiene una cota superior, entonces la sucesión es monótona y acotada. Como el acotamiento y la convergencia de una sucesión monótona son propiedades equivalentes, entonces, la serie es convergente. De este modo, se tiene el teorema siguiente.

8.4.1 Teorema

Una serie infinita de términos positivos es convergente si y sólo si su sucesión de sumas parciales tiene una cota superior.

EJEMPLO 1 Demuestre que la serie es convergente aplicando el teorema 8.4.1:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

Solución Se debe obtener una cota superior para la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

$$s_1 = 1 \qquad s_2 = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \qquad s_3 = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\vdots$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \tag{1}$$

Ahora se consideran los primeros n términos de la serie geométrica con $a = 1$ y $r = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \tag{2}$$

Por el teorema 8.3.5, la serie geométrica con $a = 1$ y $r = \frac{1}{2}$ tiene la suma $a/(1 - r) = 2$. En consecuencia, la suma (2) es menor que 2. Observe que cada término de la suma (1) es menor que o igual al término correspondiente de la suma (2); esto es,

$$\frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}$$

Esto es cierto porque $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$, que, además del factor 1, contiene $k - 1$ factores cada uno mayor que o igual a 2. En consecuencia,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < 2$$

De lo anterior, $\{s_n\}$ tiene la cota superior 2. Por tanto, por el teorema 8.4.1, la serie dada es convergente. ◀

En el ejemplo 1, se compararon los términos de la serie dada con los de una serie convergente. Este peocedimiento es un caso particular del siguiente teorema conocido como *criterio de comparación*.

8.4.2 Teorema Criterio de comparación

Sea la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ una serie de términos positivos.

(i) Si $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ es una serie de términos positivos que es convergente, y $u_n \le v_n$ para todos los números enteros positivos n, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es convergente.

(ii) Si $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ es una serie de términos positivos que es divergente, y $u_n \geq w_n$ para todos los números enteros positivos n, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es divergente.

Demostración de (i) Sean $\{s_n\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ y $\{t_n\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$. Puesto que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ es una serie de términos positivos que es convergente, del teorema 8.4.1 se infiere que la sucesión $\{t_n\}$ tiene una cota superior; sea B esta cota. Como $u_n \leq v_n$ para todos los números enteros positivos n, se puede concluir que $s_n \leq t_n \leq B$ para todos los números enteros positivos n. Por tanto, B es una cota superior de la sucesión $\{s_n\}$. Debido a que los términos de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ son positivos, se deduce del teorema 8.4.1 que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es convergente.

Demostración de (ii) Suponga que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es convergente. Entonces, como $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ son series infinitas de términos positivos, y $w_n \leq u_n$ para todos los números enteros positivos n, se deduce del inciso (i) que $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ es convergente. Sin embargo, esto contradice la hipótesis; de modo que la suposición es falsa. Por tanto $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es divergente. ∎

Como se indicó en la sección 8.3, la convergencia o divergencia de una serie infinita no se afecta al descartar un número finito de términos. Por tanto, cuando se aplica el criterio de comparación, si $u_i \leq w_i$ o $u_i \geq w_i$ cuando $i > m$, entonces el criterio es válido independientemente de cómo se comparan los primeros m términos de las dos series.

▶ ***EJEMPLO 2*** Determine si la serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n + 1}$$

Solución La serie dada es

$$\frac{4}{4} + \frac{4}{10} + \frac{4}{28} + \frac{4}{82} + \ldots + \frac{4}{3^n + 1} + \ldots$$

Al comparar el n-ésimo término de esta serie con el n-ésimo término de la serie geométrica convergente

$$\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + \ldots + \frac{4}{3^n} + \ldots \qquad r = \tfrac{1}{3} < 1$$

se tiene

$$\frac{4}{3^n + 1} < \frac{4}{3^n}$$

para cada número entero positivo n. Por tanto, por el inciso (i) del criterio de comparación, la serie dada es convergente. ◀

▶ ***EJEMPLO 3*** Determine si la serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Solución La serie dada es

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

Si se compara el n-ésimo término de esta serie con el n-ésimo término de la serie armónica divergente se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \quad \text{para cada número entero positivo } n$$

Así, por el inciso (ii) del criterio de comparación, la serie dada es divergente. ◀

El teorema siguiente, conocido como *criterio de comparación por paso al límite*, es una consecuencia del criterio de comparación y a menudo es más fácil de aplicar.

8.4.3 Teorema Criterio de comparación por paso al límite

Sean $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ dos series de términos positivos.

(i) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = c > 0$, entonces las dos series son convergentes o ambas series son divergentes.

(ii) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, y si $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.

(iii) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$, y si $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge.

Demostración de (i) Como $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n/v_n) = c$, existe $N > 0$ tal que

$$\text{si } n > N \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{u_n}{v_n} - c \right| < \frac{c}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } n > N \quad \text{entonces} \quad -\frac{c}{2} < \frac{u_n}{v_n} - c < \frac{c}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } n > N \quad \text{entonces} \quad \frac{c}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3c}{2} \qquad \textbf{(3)}$$

De la desigualdad derecha de (3),

$$u_n < \tfrac{3}{2} c v_n \qquad \textbf{(4)}$$

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ es convergente, también lo es $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2} c v_n$. De la desigualdad (4) y del criterio de comparación se infiere que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es convergente.

De la desigualdad izquierda de (3),

$$v_n < \frac{2}{c} u_n \qquad (5)$$

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es convergente, también lo es $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{c} u_n$. De la desigualdad (5) y del criterio de comparación se deduce que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ es convergente.

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ es divergente, se puede demostrar que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es divergente al suponer que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es convergente y obtener una contradicción al aplicar la desigualdad (5) y el criterio de comparación.

De manera semejante, si $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es divergente, se deduce que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ es divergente ya que se puede obtener una contradicción de la igualdad (4) y el criterio de comparación si se supone que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ es convergente.

Por tanto, se ha demostrado el inciso (i). Las demostraciones de los incisos (ii) y (iii) se dejan como ejercicio (vea los ejercicios 57 y 58). ■

CUIDADO: Asegúrese de aplicar el inciso (ii) del criterio de comparación por paso al límite correctamente. Cuando $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ implica la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, pero la divergencia de la serie en v no implica que la serie en u diverja.

▶ ***EJEMPLO 4*** Resuelva el ejemplo 2 mediante el criterio de comparación por paso al límite.

Solución Sean u_n el n-énesimo término de la serie dada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n + 1}$ y v_n el n-ésimo término de la serie geométrica convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{4}{3^n + 1}}{\frac{4}{3^n}} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{3^n}{3^n + 1} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 + 3^{-n}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

En consecuencia, por el inciso (i) del criterio de comparación por paso al límite, la serie dada es convergente. ◀

▶ ***EJEMPLO 5*** Resuelva el ejemplo 3 por medio del criterio de comparación por paso al límite.

Solución Sean u_n el n-énesimo término de la serie dada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ y v_n el n-ésimo término de la serie armónica divergente. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

Por tanto, por el inciso (iii) del criterio de comparación por límite, la serie dada es divergente. ◀

▶ **EJEMPLO 6** Determine si la serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{n!}$$

Solución En el ejemplo 1 se demostró que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ es convergente. Por el criterio de comparación por paso al límite con $u_n = \frac{n^3}{n!}$ y $v_n = \frac{1}{n!}$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^3}{n!}}{\frac{1}{n!}}\\ &= \lim_{n\to+\infty} n^3\\ &= +\infty\end{aligned}$$

El inciso (iii) del criterio de comparación por paso al límite no es aplicable en este caso porque $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge. Sin embargo, existe una forma en que el criterio de comparación por paso al límite puede emplearse. La serie dada puede escribirse como

$$\frac{1^3}{1!}+\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{4^3}{4!}+\frac{5^3}{5!}+\ldots+\frac{n^3}{n!}+\ldots$$

Debido a que el teorema 8.3.9 permite restar un número finito de términos sin afectar el comportamiento (convergencia o divergencia) de una serie, se descartan los primeros tres términos y se obtiene

$$\frac{4^3}{4!}+\frac{5^3}{5!}+\frac{6^3}{6!}+\ldots+\frac{(n+3)^3}{(n+3)!}+\ldots$$

Ahora sea $u_n = \frac{(n+3)^3}{(n+3)!}$ y, como antes, sea $v_n = \frac{1}{n!}$. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+3)^3}{(n+3)!}}{\frac{1}{n!}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+3)^3 n!}{(n+3)!}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+3)^3 n!}{n!\,(n+1)(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+3)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 + 6n + 9}{n^2 + 3n + 2}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1 + \frac{6}{n} + \frac{9}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}$$

$$= 1$$

Del inciso (i) del criterio de comparación por paso al límite, la serie dada es convergente. ◀

Antes de establecer el siguiente teorema, se presenta un ejemplo ilustrativo de un caso particular.

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Considere la serie geométrica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots \qquad (6)$$

la cual converge a 2, como se demostró en el ejemplo ilustrativo 2 de la sección 8.3. Una forma de reagrupar los términos de esta serie es

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}\right) + \ldots$$

la cual es la serie

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{32} + \ldots + \frac{3}{2 \cdot 4^{n-1}} + \ldots \qquad (7)$$

Como la serie (7) es una serie geométrica con $a = \frac{3}{2}$ y $r = \frac{1}{4}$, es convergente y su suma es

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= 2$$

Se ha mostrado que la serie (7), la cual se obtiene de la serie convergente (6) al reagrupar los términos, también es convergente, y su suma es igual a la de la serie (6). ◀

8.4.4 Teorema

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es una serie convergente de términos positivos, entonces sus términos pueden reagruparse en cualquier manera, de modo que la serie resultante también será convergente y tendrá la misma suma de la serie original.

Demostración Sea $\{s_n\}$ la sucesión de sumas parciales para la serie convergente de términos positivos dada. Entonces $\lim_{n \to +\infty} s_n$ existe; sea S este límite. Considere una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ cuyos términos se obtienen al reagrupar los términos de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ en alguna forma. Por ejemplo, $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ puede ser la serie

$$u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + u_5 + u_6) + (u_7 + u_8 + u_9 + u_{10}) + \ldots$$

o bien la serie

$$(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + (u_5 + u_6) + (u_7 + u_8) + \ldots$$

etcétera. Sea $\{t_m\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$. Cada suma parcial de la sucesión $\{t_m\}$ es también una suma parcial de la sucesión $\{s_n\}$. Por tanto, conforme m crece sin límite, también lo hará n. Como $\lim_{n \to +\infty} s_n = S$, se concluye que $\lim_{n \to +\infty} t_m = S$. Esto demuestra el teorema. ∎

El teorema 8.4.4 y el siguiente establecen propiedades de la suma de series de términos positivos, similares a las propiedades que se cumplen para la suma de un número finito de términos.

8.4.5 Definición de función

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es una serie convergente de términos positivos, entonces el orden de los términos puede ser modificado, y la serie resultante también será convergente y tendrá la misma suma de la serie original.

Demostración Sea $\{s_n\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie convergente de términos positivos dada, y sea $\lim_{n \to +\infty} s_n = S$. Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ una serie formada al reordenar los términos de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Por ejemplo, $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ puede ser la serie

$$u_4 + u_3 + u_7 + u_1 + u_9 + u_5 + \ldots$$

Sea $\{t_n\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$. Cada suma parcial de la sucesión $\{t_n\}$ será menor que S porque es la suma de n términos de la serie infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Por tanto, S es una cota superior de la sucesión $\{t_n\}$. Además, como todos los términos de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ son positivos, $\{t_n\}$ es una sucesión monótona creciente. En consecuencia, por el teorema 8.2.11, la sucesión $\{t_n\}$ es convergente, y $\lim_{n \to +\infty} t_n = T \leq S$. Ahora, como la serie dada $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ puede obtenerse a partir de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ mediante una reordenación de los términos, se puede emplear el mismo argumento y concluir que $S \leq T$. Como las dos desigualdades $T \leq S$ y $S \leq T$ se cumplen, se concluye que $S = T$. Esto demuestra el teorema. ∎

La siguiente serie, conocida como **serie *p*** o **serie hiperarmónica**, se emplea con frecuencia en el criterio de comparación:

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots \qquad \text{donde } p \text{ es una constante} \qquad \textbf{(8)}$$

En el ejemplo ilustrativo siguiente se demuestra que la serie p diverge si $p \leq 1$ y converge si $p > 1$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Si $p = 1$, la serie p es la serie armónica, la cual diverge. Si $p < 1$, entonces $n^p \leq n$; de modo que

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n} \qquad \text{para cada número entero positivo } n$$

Por tanto, por el criterio de comparación, la serie p diverge si $p < 1$.

Si $p > 1$, se agrupan los términos como sigue:

$$\frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \ldots + \frac{1}{15^p}\right) + \ldots \qquad (9)$$

Considere la serie

$$\frac{1}{1^p} + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p} + \ldots \qquad (10)$$

Esta es una serie geométrica cuya razón es $2/2^p = 1/2^{p-1}$, el cual es un número positivo menor que 1. En consecuencia, la serie (10) es convergente. Ahora se reescriben los términos de la serie (10) para obtener

$$\frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \ldots + \frac{1}{8^p}\right) + \ldots \qquad (11)$$

Al comparar la serie (9) y la serie (11) se observa que la suma de cada grupo de términos en cada conjunto de paréntesis después del primero, es menor en (9) que en (11). Por tanto, por el criterio de comparación, la serie (9) es convergente. Como (9) es sólo un reagrupamiento de los términos de la serie p cuando $p > 1$, se infiere del teorema 8.4.4 que la serie p es convergente si $p > 1$. ◀

Observe que la serie del ejemplo 3 es la serie p donde $p = \frac{1}{2} < 1$, por tanto es divergente.

EJEMPLO 7 Determine si la serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 + 2)^{1/3}}$$

Solución Debido a que para valores grandes de n el número $n^2 + 2$ está cercano al número n^2, entonces el número $1/(n^2 + 2)^{1/3}$ estará cerca del número $1/n^{2/3}$. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ es divergente ya que es la serie p con $p = \frac{2}{3} < 1$. Del criterio de comparación por paso al límite con $u_n = \frac{1}{(n^2 + 2)^{1/3}}$ y $v_n = \frac{1}{n^{2/3}}$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{(n^2 + 2)^{1/3}}}{\frac{1}{n^{2/3}}} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{2/3}}{(n^2 + 2)^{1/3}} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2}{n^2 + 2}\right)^{1/3}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{n^2}} \right)^{1/3}$$
$$= 1$$

Por tanto, la serie es divergente. ◀

En ocasiones se emplea otro teorema, conocido como *criterio de la integral*, para determinar la convergencia de una serie infinita de términos positivos, dicho teorema utiliza la teoría de las integrales impropias.

8.4.6 Teorema Criterio de la integral

Sea f una función continua, decreciente, y de valores positivos para toda $x \geq 1$. Entonces la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) + \ldots$$

es convergente si la integral $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ existe, y es divergente si $\lim_{b \to +\infty} \int_1^b f(x)\, dx = +\infty$.

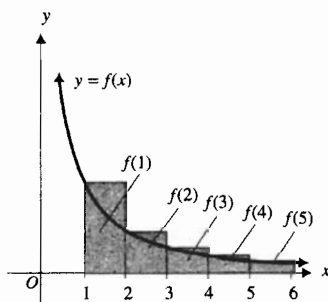


FIGURA 1

Demostración Si i es un número entero positivo e $i \geq 2$, entonces, por el teorema del valor medio para integrales (4.6.3), existe un número c tal que $i - 1 \leq c \leq i$ y

$$\int_{i-1}^{i} f(x)\, dx = f(c) \cdot 1 \tag{12}$$

Puesto que f es una función decreciente,

$$f(i - 1) \geq f(c) \geq f(i)$$

y de (12),

$$f(i - 1) \geq \int_{i-1}^{i} f(x)\, dx \geq f(i)$$

Por tanto, si n es un número entero positivo y $n \geq 2$, entonces

$$\sum_{i=2}^{n} f(i - 1) \geq \sum_{i=2}^{n} \int_{i-1}^{i} f(x)\, dx \geq \sum_{i=2}^{n} f(i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n-1} f(i) \geq \int_1^n f(x)\, dx \geq \sum_{i=1}^{n} f(i) - f(1) \tag{13}$$

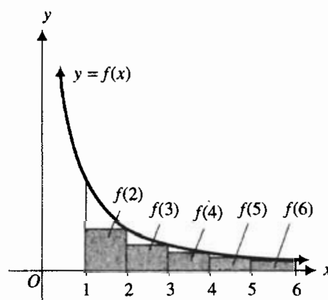


FIGURA 2

Las figuras 1 y 2 muestran la interpretación geométrica de la discusión anterior para $n = 6$. La figura 1 muestra la gráfica de una función f que satisface la hipótesis. La suma de las medidas de las áreas de los rectángulos es $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$, la cual es el miembro izquierdo de la desigualdad (13) cuando $n = 6$. Es claro que la suma de las áreas de estos rectángulos es mayor que la medida del área proporcionada por la integral

definida cuando $n = 6$. En la figura 2, la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos sombreados es $f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6)$, la cual es el miembro derecho de la desigualdad (13) cuando $n = 6$. Esta suma es menor que el valor de la integral definida cuando $n = 6$.

Si la integral impropia existe, sea L su valor. Entonces

$$\int_1^n f(x)\,dx \leq L \tag{14}$$

Del segundo y tercer miembro de la desigualdad (13) y de (14) se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,dx \leq f(1) + L \tag{15}$$

Considere ahora la serie infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$. Sea $\{s_n\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie, donde $s_n = \sum_{i=1}^{n} f(i)$. De (15), $\{s_n\}$ tiene la cota superior $f(1) + L$. En consecuencia, por el teorema, 8.4.1, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ es convergente.

Suponga que $\lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\,dx = +\infty$. De (13),

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \geq \int_1^n f(x)\,dx$$

para todos los números enteros positivos n. Por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} s_n &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(i) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

En consecuencia, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ es divergente. ■

EJEMPLO 8 Determine si la serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$$

Solución Sea $f(x) = xe^{-x}$. Entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - xe^{-x} \\ &= e^{-x}(1 - x) \end{aligned}$$

Como $f'(x) < 0$ si $x > 1$, se deduce del teorema 3.4.3 que f es decreciente si $x \geq 1$. Además, f es continua y de valores positivos para toda $x \geq 1$. Así, se satisface la hipótesis del criterio de la integral. Al aplicar integración por partes se tiene

$$\int xe^{-x}\,dx = -e^{-x}(x + 1) + C$$

En consecuencia,

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\Big[-e^{-x}(x+1)\Big]_1^b$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{b+1}{e^b}+\frac{2}{e}\right]$$

Como $\lim\limits_{b\to+\infty}(b+1) = +\infty$ y $\lim\limits_{b\to+\infty} e^b = +\infty$, se puede emplear la regla de L'Hôpital para obtener

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{b+1}{e^b} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^b}$$
$$= 0$$

Por tanto,

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \frac{2}{e}$$

De este modo, la serie dada es convergente. ◀

Si el índice de la suma para una serie inicia con $n = k$ en lugar de $n = 1$, el criterio de la integral se modifica como sigue:

Si f es una función continua, decreciente y de valores positivos para toda $x \geq k$, entonces la serie infinita $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} f(n)$ es convergente si la integral impropia $\int_k^{+\infty} f(x)\,dx$ existe, y es divergente si $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_k^b f(x)\,dx = +\infty$.

La demostración es idéntica a la del teorema 8.4.6.

▶ **EJEMPLO 9** Determine si la serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

Solución La función f definida por

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$$

es continua y de valores positivos para toda $x \geq 2$. También, si $2 \leq x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$; de modo que f es decreciente para toda $x \geq 2$. Por tanto, se puede aplicar el criterio de la integral.

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b (\ln x)^{-1/2}\frac{dx}{x}$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\Big[2\sqrt{\ln x}\,\Big]_2^b$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\Big[2\sqrt{\ln b} - 2\sqrt{\ln 2}\,\Big]$$
$$= +\infty$$

Así, la serie dada es divergente. ◀

EJERCICIOS 8.4

En los ejercicios 1 a 24, determine si la serie es convergente o divergente aplicando el criterio de comparación o el criterio de comparación por paso al límite.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{4n^3+1}$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{2n^2+5}$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{n^3+n}}$
7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n}$
8. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$
9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4n}}$
10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2}$
11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$
12. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$
13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5n^2+3}$
14. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)!}$
15. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!}$
16. $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$
17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\csc n|}{n}$
18. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$
19. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$
20. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$
21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2n-\sqrt{n}}$
22. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$
23. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2+2}$
24. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n - \cos n}$

En los ejercicios 25 a 32, aplique el criterio de la integral para determinar si la serie es convergente o divergente.

25. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$
26. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(3n+5)^2}$
27. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{3/2}}$
28. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-2}$
29. $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{4}{n^2-4}$
30. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{(n^2+3n)^2}$
31. $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-5n}$
32. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n^4+1}$

En los ejercicios 33 a 48, utilice cualquier método para determinar si la serie es convergente o divergente.

33. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$
34. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$
35. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^2+1}$
36. $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n^2}$
37. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n}$
38. $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$
39. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3}$
40. $\sum_{n=1}^{+\infty} \cot^{-1} n$
41. $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{csch} n$
42. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\tan^{-1} n}}{n^2+1}$
43. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$
44. $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sech}^2 n$
45. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+3}{n}\right)$
46. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$
47. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$
48. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)}$

49. Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ son dos series convergentes de términos positivos, emplee el criterio de comparación por paso al límite para demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ también es convergente.
50. Utilice el criterio de la integral para demostrar que la serie p diverge si $p \leq 1$ y converge si $p > 1$.
51. Demuestre que la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ es convergente si y sólo si $p > 1$.
52. Demuestre que la serie $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)[\ln(\ln n)]^p}$ es convergente si y sólo si $p > 1$.
53. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ es convergente si y sólo si $p > 1$.
54. Si s_k es la k-ésima suma parcial de la serie armónica, demuestre que $\ln(k+1) < s_k < 1 + \ln k$. *Sugerencia:* $\frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{m}$ si $0 < m \leq x \leq m+1$. Integre cada miembro de la desigualdad de m a $m+1$; considere que m toma sucesivamente los valores $1, 2, \ldots, n-1$, y sume los resultados.
55. Utilice el método del ejercicio 54 para estimar la suma
$$\sum_{m=50}^{100} \frac{1}{m} = \frac{1}{50} + \frac{1}{51} + \ldots + \frac{1}{100}$$
56. Suponga que f es una función tal que $f(n) > 0$ para cualquier número entero positivo n. Además suponga que si p es algún número positivo, entonces $\lim_{n\to+\infty} n^p f(n)$ existe y es positivo. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ es convergente si $p > 1$, y divergente si $0 < p \leq 1$.
57. Demuestre el teorema 8.4.3(ii).
58. Demuestre el teorema 8.4.3(iii).
59. Explique por qué el teorema 8.4.1 no se cumple para una serie infinita de términos positivos y negativos. *Sugerencia:* considere la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}$.

8.5 SERIES INFINITAS DE TÉRMINOS POSITIVOS Y NEGATIVOS

Un tipo de series infinitas que constan de términos positivos y negativos es el de las *series alternantes*, cuyos términos son, alternadamente, positivos y negativos.

8.5.1 Definición de serie alternante

Si $a_n > 0$ para todos los números enteros positivos n, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots \quad (1)$$

y la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots + (-1)^{n}a_n + \ldots \quad (2)$$

se denominan **series alternantes**.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Un ejemplo de serie alternante de la forma (1), donde el primer término es positivo, es

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Una serie alternante de la forma (2), donde el primer término es negativo, es

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n!} = -1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^{n}\frac{1}{n!} + \ldots$$ ◀

El teorema siguiente, denominado *criterio de las series alternantes*, establece que una serie alternante es convergente si los valores absolutos de sus términos decrecen y el límite del n-ésimo término es cero. El criterio también se conoce como el *criterio de Leibniz* para series alternantes debido a que Leibniz lo formuló en 1705.

8.5.2 Teorema Criterio de las series alternantes

Suponga que se tiene la serie alternante $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n \left[\text{o } \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}a_n\right]$, donde $a_n > 0$ y $a_{n+1} < a_n$ para todos los números enteros positivos n. Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, entonces la serie alternante es convergente.

Demostración Suponga que el primer término de la serie es positivo. Esta suposición no hace que se pierda generalidad ya que si este no es el caso, entonces se descarta el primer término, lo cual no afecta la convergencia de la serie. De este modo se tiene la serie alternante $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$. Considere la suma parcial

$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

Como por hipótesis $a_{n+1} < a_n$, cada cantidad dentro de los paréntesis es positiva. Por tanto,

$$0 < s_2 < s_4 < s_6 < \ldots < s_{2n} < \ldots \tag{3}$$

También se puede escribir s_{2n} como

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

Como $a_{n+1} < a_n$, otra vez cada cantidad dentro de los paréntesis es positiva. Por tanto

$$s_{2n} < a_1 \text{ para cada número entero positivo } n \tag{4}$$

De (3) y (4),

$$0 < s_{2n} < a_1 \qquad \text{para cada número entero positivo } n$$

De modo que la sucesión $\{s_{2n}\}$ es acotada. Además, de (3), la sucesión $\{s_{2n}\}$ es creciente. Como $\{s_{2n}\}$ es una sucesión monótona acotada, entonces es convergente. Suponga que S es el límite de esta sucesión; esto es $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n} = S$. Entonces, por el teorema 8.2.11, $S \leq a_1$. Como $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} s_{2n} + \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1}$$

Pero, por hipótesis, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$; de modo que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n}$. Por tanto, la sucesión de sumas parciales de los términos pares y la sucesión de sumas parciales de los términos impares tienen el mismo límite S.

Ahora se mostrará que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = S$. Como $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n} = S$, entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número entero $N_1 > 0$ tal que

$$\text{si } 2n \geq N_1 \quad \text{entonces} \quad |s_{2n} - S| < \epsilon$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n+1} = S$, entonces existe un número entero $N_2 > 0$ tal que

$$\text{si } 2n + 1 \geq N_2 \quad \text{entonces} \quad |s_{2n+1} - S| < \epsilon$$

Si N es el mayor de los dos números enteros N_1 y N_2, entonces se infiere que si n es cualquier número entero, par o impar, y

$$\text{si } n \geq N \quad \text{entonces} \quad |s_n - S| < \epsilon$$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = S$; de modo que la serie alternante es convergente. ■


EJEMPLO 1 Demuestre que la siguiente serie alternante es convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Solución La serie dada es

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + (-1)^{n+2} \frac{1}{n+1} + \ldots$$

Como $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ para todos los números enteros positivos n, y $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, entonces, por el criterio de las series alternantes, la serie dada es convergente. ◀



EJEMPLO 2 Determine si la serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$$

Solución La serie dada es una serie alternante.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} a_n &= \lim_{n \to +\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} \\
&= 1 \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Antes de que se pueda aplicar el criterio de las series alternantes, también debe mostrarse que $a_{n+1} < a_n$ o, equivalentemente, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{n+3}{(n+1)(n+2)}}{\frac{n+2}{n(n+1)}} \\
&= \frac{n(n+3)}{(n+2)^2} \\
&= \frac{n^2+3n}{n^2+4n+4} \\
&< 1
\end{aligned}$$

Por el criterio de las series alternantes, la serie dada es convergente. ◀

8.5.3 Definición del residuo después de *k* términos

Si una serie infinita es convergente y su suma es S, entonces el **residuo después de *k* términos,** se obtiene al aproximar la suma de la serie mediante la k-ésima suma parcial s_k, denotado por R_k, es

$$R_k = S - s_k$$

Esta definición se emplea en el enunciado del siguiente teorema, el cual proporciona un método para determinar una cota superior para el error cometido cuando la suma de una serie convergente se aproxima mediante la suma de un número finito de términos de la serie.

8.5.4 Teorema

Considere la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n \left[\text{o} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \right]$$

donde $a_n > 0$ y $a_{n+1} < a_n$ para todos los números enteros positivos n, y $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$. Si R_k es el residuo obtenido al aproximar la suma de la serie mediante la suma de los primeros k términos, entonces $|R_k| < a_{k+1}$.

La demostración de este teorema se presenta en el suplemento de esta sección. A fin de mostrar el contenido del teorema, éste se aplica en el siguiente ejemplo ilustrativo a una serie alternante cuya suma exacta se puede calcular.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Considere la serie geométrica con $a = 1$ y $r = -\frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots$$

Por el teorema 8.3.5, la suma de esta serie es

$$\frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$$
$$= 0.66667$$

con cinco dígitos significativos. Suponga que se aproxima la suma de la serie mediante los primeros diez términos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \frac{1}{256} - \frac{1}{512} = 0.66602$$

El error es $0.66667 - 0.66602 = 0.00065$. El teorema 8.5.4 establece que el error es menor que el valor absoluto del onceavo término, el cual es

$$\frac{1}{1024} = 0.00098$$

y $0.00065 < 0.00098$. ◀

▶ EJEMPLO 3 Una serie para calcular $\ln(1 + x)$ si x está en el intervalo $(-1, 1]$ es

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Obtenga una cota superior para el error cuando se utilizan los tres primeros términos de esta serie para aproximar el valor de ln 1.1.

Solución Se emplea la serie dada con $x = 0.1$ para obtener

$$\ln 1.1 = 0.1 - \frac{(0.1)^2}{2} + \frac{(0.1)^3}{3} - \frac{(0.1)^4}{4} + \ldots$$

Esta serie satisface las condiciones del teorema 8.5.4; de modo que si R_3 es la diferencia entre el valor real de ln 1.1 y la suma de los tres primeros términos, entonces

$$|R_3| < 0.000025$$

De esta forma, la suma de los tres primeros términos dará un valor de ln 1.1 con una exactitud de al menos cuatro cifras decimales. De los tres primeros términos se obtiene

$$\ln 1.1 \approx 0.0953$$ ◀

Si todos los términos de una serie se sustituyen por sus valores absolutos y la serie resultante es convergente, entonces se dice que la serie original es *absolutamente convergente.*

8.5.5 Definición de convergencia absoluta

La serie infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ es convergente.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Considere la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} - \frac{2}{3^4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n} + \ldots \qquad (5)$$

Esta serie será absolutamente convergente si la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \ldots + \frac{2}{3^n} + \ldots$$

es convergente. Como ésta es la serie geométrica con $r = \frac{1}{3} < 1$, entonces es convergente. Por tanto, la serie (5) es absolutamente convergente. ◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 En el ejemplo 1 se demostró que la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

es convergente. Esta serie no es absolutamente convergente debido a que la serie de valores absolutos es la serie armónica, la cual es divergente. ◀

La serie del ejemplo ilustrativo 4, en ocasiones llamada **serie armónica alternante**, es un ejemplo de una serie *condicionalmente convergente*.

8.5.6 Definición de convergencia condicional

Una serie que es convergente, pero no absolutamente convergente, se denomina **condicionalmente convergente**.

La importancia de la convergencia condicional se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 Considere la serie armónica alternante:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \ldots \qquad (6)$$

la cual es condicionalmente convergente. Se reordenarán y agruparán los términos de esta serie como sigue:

$$(1 - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}) - \tfrac{1}{8} + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10}) - \tfrac{1}{12} + \ldots$$
$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} + \ldots$$
$$= \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \ldots) \qquad (7)$$

Observe que la serie entre paréntesis anterior es la misma que la serie (6). Debido a que la serie (6) es convergente, tiene una suma igual a ln 2, según el ejemplo 3 donde $x = 1$. La serie (7) también tiene una suma, pero evidente

mente la suma de la serie (7) es un medio de la suma de la serie (6). Esta situación se presenta debido a que la serie (6) es sólo condicionalmente convergente en vez de ser absolutamente convergente. ◀

Del ejemplo ilustrativo 5, parece que no se puede cambiar el orden de los términos de una serie condicionalmente convergente y preservar la suma. Sin embargo, recuerde del teorema 8.4.5 que para una serie convergente de términos positivos, se *puede* cambiar el orden de los términos sin afectar la suma de la serie.

El teorema siguiente permite demostrar que una serie infinita de términos positivos y negativos es convergente, mostrando que es absolutamente convergente.

8.5.7 Teorema

Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es convergente.

Demostración Si a cada miembro de la desigualdad

$$-|u_n| \le u_n \le |u_n|$$

se le suma $|u_n|$, se obtiene

$$0 \le u_n + |u_n| \le 2|u_n| \tag{8}$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ es convergente, también lo es la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 2|u_n|$. Entonces, mediante la desigualdad (8) y el criterio de comparación, se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + |u_n|)$ es convergente. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ puede escribirse como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + |u_n| - |u_n|)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + |u_n|) - \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$$

El miembro derecho de la igualdad anterior es la diferencia de dos series convergentes. Por tanto, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es convergente. ■

EJEMPLO 4 Determine si la serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \frac{1}{3} n\pi}{n^2}$$

Solución Al denotar la serie dada por $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, se tiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\frac{1}{2}}{1^2} - \frac{\frac{1}{2}}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{\frac{1}{2}}{4^2} + \frac{\frac{1}{2}}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{\frac{1}{2}}{7^2} - \ldots + \frac{\cos \frac{1}{3} n\pi}{n^2} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{32} + \frac{1}{50} + \frac{1}{36} + \frac{1}{98} - \ldots$$

Esta es una serie de términos positivos y negativos. Se puede demostrar que esta serie es convergente si se prueba que es absolutamente convergente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\cos \frac{1}{3} n\pi|}{n^2}$$

Como $|\cos \frac{1}{3} n\pi| \leq 1$ para toda n, entonces

$$\frac{|\cos \frac{1}{3} n\pi|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \text{ para todos los números enteros positivos } n$$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ es la serie p, con $p = 2$, y es convergente. De modo que, por el criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ es convergente. Por tanto, la serie dada es absolutamente convergente; en consecuencia, por el teorema 8.5.7, es convergente.

Observe que los términos de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ ni crecen ni decrecen monótonamente. Por ejemplo, $|u_4| = \frac{1}{32}$, $|u_5| = \frac{1}{50}$, $|u_6| = \frac{1}{36}$; de modo que $|u_5| < |u_4|$, pero $|u_6| > |u_5|$. ◀

El *criterio de la razón*, presentado en el siguiente teorema, se emplea regularmente para determinar si una serie dada es absolutamente convergente.

8.5.8 Teorema Criterio de la razón

Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ una serie infinita para la cual cada u_n es diferente de cero:

(i) si $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L < 1$, entonces la serie es absolutamente convergente;

(ii) si $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L > 1$ o si $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = +\infty$, la serie es divergente;

(iii) si $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$, no se puede concluir nada acerca de la convergencia a partir de este criterio.

Demostración de (i) Se tiene por hipótesis que $L < 1$. Sea R un número tal que $L < R < 1$. Sea $R - L = \epsilon < 1$. Como $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L$, existe un número entero $N > 0$ tal que

$$\text{si } n \geq N \quad \text{entonces} \quad \left| \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| - L \right| < \epsilon$$

Por tanto,

$$\text{si } n \geq N \text{ entonces } 0 < \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < L + \epsilon = R \tag{9}$$

Considere que n toma los valores sucesivos N, $N + 1$, $N + 2$, . . . , etcétera. De (9) se obtiene

$$|u_{N+1}| < R|u_N|$$
$$|u_{N+2}| < R|u_{N+1}| < R^2|u_N|$$
$$|u_{N+3}| < R|u_{N+2}| < R^3|u_N|$$
$$\cdots$$

En general,

$$|u_{N+K}| < R^K |u_N| \text{ para cada número entero positivo } k \tag{10}$$

La serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |u_N| R^k = |u_N| R + |u_N| R^2 + \ldots + |u_N| R^n + \ldots$$

es convergente porque es una serie geométrica cuya razón es menor que 1. De modo que, de (10) y del criterio de comparación se infiere que la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} |u_{N+k}|$ es convergente. La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} |u_{N+k}|$ difiere de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ únicamente en los primeros N términos. Por tanto, $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ es convergente; por lo que la serie dada es absolutamente convergente.

Demostración de (ii) Si $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L > 1$ o $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = +\infty$, entonces en cualquier caso existe un número entero $N > 0$ tal que si $n \geq N$, entonces $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$. Si n toma los valores $N, N+1, N+2, \ldots,$ y así sucesivamente, se obtiene

$$|u_{N+1}| > |u_N|$$
$$|u_{N+2}| > |u_{N+1}| > |u_N|$$
$$|u_{N+3}| > |u_{N+2}| > |u_N|$$
$$\ldots$$

De esta manera, si $n > N$, entonces $|u_n| > |u_N|$. En consecuencia, $\lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0$; por lo que la serie dada es divergente.

Demostración de (iii) Si se aplica el criterio de la razón a la serie p, se tiene

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} \right|$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \left| \left(\frac{n}{n+1} \right)^p \right|$$
$$= 1$$

■

Puesto que la serie p diverge si $p \leq 1$ y converge si $p > 1$, se ha mostrado que es posible tener series tanto convergentes como divergentes para las cuales $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$. Esto demuestra el inciso (iii).

▶ EJEMPLO 5 Determine si la serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$$

Solución $u_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$ y $u_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{n+1}{2^{n+1}}$. Por tanto,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n}$$
$$= \frac{n+1}{2n}$$

De modo que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}$$
$$= \frac{1}{2}$$
$$< 1$$

Por tanto, por el criterio de la razón, la serie dada es absolutamente convergente y en consecuencia, por el teorema 8.5.7, es convergente. ◀

▶ EJEMPLO 6 En el ejemplo 2 se mostró que la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n(n+1)}$$

es convergente. ¿Es esta serie absolutamente convergente o condicionalmente convergente?

Solución A fin de verificar la convergencia absoluta se aplicará el criterio de la razón. En la solución del ejemplo 2, se mostró que

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n^2+3n}{n^2+4n+4}$$

En consecuencia,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}$$
$$= 1$$

De modo que el criterio de la razón falla. Como

$$|u_n| = \frac{n+2}{n(n+1)}$$
$$= \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{n}$$
$$> \frac{1}{n}$$

puede aplicarse el criterio de comparación. Puesto que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ es la serie armónica, la cual diverge, se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ es divergente, y en consecuencia, $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ no es absolutamente convergente. Por tanto, la serie es condicionalmente convergente. ◀

Observe que el criterio de la razón no incluye todas las posibilidades para $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ porque es posible que el límite no exista y no sea $+\infty$. La discusión de tales casos está más allá del alcance de este libro.

La demostración del criterio de la razón se basó en el uso del criterio de comparación con series geométricas. Otro criterio cuya demostración es similar es el *criterio de la raíz.*

8.5.9 Teorema Criterio de la raíz

Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ una serie infinita para la cual cada u_n es diferente de cero:

(i) si $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L < 1$, entonces la serie es absolutamente convergente;

(ii) si $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L > 1$, o si $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = +\infty$, la serie es divergente;

(iii) si $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$, no se puede concluir nada acerca de la convergencia a partir de este criterio.

Debido a la semejanza de la demostración del criterio de la raíz con la demostración del criterio de la razón, se deja la primera como ejercicio (vea los ejercicios 50 a 52).

▶ ***EJEMPLO 7*** Aplique el criterio de la raíz para determinar si la serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$$

Solución Al aplicar el criterio de la raíz se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} &= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}} \right)^{1/n} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{3^{2+(1/n)}}{n^2} \\
&= 0 \\
&< 1
\end{aligned}$$

Por tanto, por el criterio de la raíz, la serie dada es absolutamente convergente. En consecuencia, por el teorema 8.5.7, la serie es convergente. ◀

Los criterios de la razón y de la raíz están íntimamente relacionados. Sin embargo, el criterio de la razón generalmente es más fácil de aplicar; si los términos de la serie contiene factoriales, este es ciertamente el caso. En el ejercicio 49 se presenta una serie para la cual el criterio de la razón falla pero se puede aplicar el criterio de la raíz para mostrar su convergencia. Si los términos de una serie contienen potencias, como en el ejemplo 7, aplicar el criterio de la raíz puede ser más ventajoso que aplicar el criterio de la razón. El ejemplo siguiente proporciona otra serie para la cual conviene más aplicar el criterio de la raíz.

▶ ***EJEMPLO 8*** Determine si la serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$$

Solución Todos los términos de la serie son positivos, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}\right|}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{\ln(n+1)}\right|\\ &= 0\\ &< 1\end{aligned}$$

Por el criterio de la raíz, la serie dada es convergente. ◀

EJERCICIOS 8.5

En los ejercicios 1 a 14, determine si la serie alternante es convergente o divergente.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n^2}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{3}{n^2+1}$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{3n-2}$
5. $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{1}{\ln n}$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$
7. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+2}$
8. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$
9. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n^2}$
10. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{e^n}{n}$
11. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{3^n}{n^2}$
12. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{\sqrt{n}}{3n-1}$
13. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{n}{2^n}$
14. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{1+3^{2n}}$

En los ejercicios 15 a 22, obtenga una cota superior para el error si la suma de los primeros cuatro términos se emplea como una aproximación de la suma de la serie infinita.

15. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$
16. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{2}{n^2}$
17. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2}$
18. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)^2}$
19. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n^2}$
20. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^n}$
21. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$
22. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n!}$

En los ejercicios 23 a 28, calcule la suma de la serie infinita, con una exactitud de tres cifras decimales.

23. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n}$
24. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^4}$
25. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$
26. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n}$
27. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)^3}$
28. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{1}{(2n+1)^3}$

En los ejercicios 29 a 48, determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente. Justifique la respuesta.

29. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$
30. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{2^n}{n^3}$
31. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$
32. $\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n$
33. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$
34. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!}$
35. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{n!}{2^{n+1}}$
36. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+2)}$
37. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-2\operatorname{sen} n}{n^3}$
38. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{1}{(n+1)^3}$
39. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n!}$
40. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{n^2+1}{n^3}$
41. $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(\ln n)^2}$
42. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$
43. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \pi n}{n}$
44. $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{\ln n}$
45. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$
46. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}$
47. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$
48. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}$

49. Considere la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1+(-1)^n}}$. **(a)** Muestre que el criterio de la razón falla para esta serie. **(b)** Utilice el criterio de la raíz para determinar si la serie es convergente o divergente.

50. Demuestre el inciso (i) del criterio de la raíz (teorema 8.5.9). *Sugerencia:* como $L < 1$, sea R un número tal que $L < R < 1$, y sea $R - L = \epsilon < 1$. Muestre que existe un número entero N tal que si $n > N$, entonces $|u_n| < R^n$. Después utilice el criterio de comparación.

51. Demuestre el inciso (ii) del criterio de la raíz. Considere la sugerencia para el ejercicio 50.

52. Demuestre el inciso (iii) del criterio de la raíz aplicándolo a las dos series $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. *Sugerencia:* determine $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$ considerando $\sqrt[n]{n} = e^{(\ln n)/n}$ y empleando la regla de L'Hôpital para calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n}$.

53. Demuestre que si $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n{}^2$ es convergente.

54. ¿Sospecha que el recíproco del ejercicio 53 es verdadero o falso? Justifique la respuesta demostrándola si el recíproco es verdadero o dando un contraejemplo si es falso.

8.6 RESUMEN DE CRITERIOS SOBRE CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA DE SERIES INFINITAS

En las secciones 8.3 a 8.5 se presentó una variedad de criterios para determinar la convergencia o divergencia de una serie infinita de términos constantes. A fin de adquirir destreza en el reconocimiento y aplicación del criterio apropiado, se requiere de práctica considerable, la cual se obtendrá realizando los ejercicios de esta sección. Como ayuda, se listan a continuación los criterios y se aconseja que sean aplicados en el orden indicado. Si un paso particular no es aplicable o no puede inferirse ninguna conclusión, continúe con el siguiente. Por supuesto, en ocasiones pueden aplicarse más de un criterio, sin embargo, debe elegirse el más eficaz.

1. Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, entonces la serie diverge. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, no puede inferirse ninguna conclusión.

2. Examine la serie a fin de determinar si corresponde a uno de los siguientes tipos especiales:

(i) Una serie geométrica: $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$. Converge a la suma $\frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$; diverge si $|r| \geq 1$.

(ii) Una serie p: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ (donde p es una constante). Converge si $p > 1$; diverge si $p \leq 1$.

(iii) Una serie alternante: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ o $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$. Aplique el criterio de las series alternantes (teorema 8.5.2): si $a_n > 0$, y $a_{n+1} < a_n$ para todos los números enteros positivos n, y si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, entonces la serie alternante es convergente.

3. Aplique el criterio de la razón (teorema 8.5.8): Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ una serie infinita para la cual cada u_n es diferente de cero:

(i) si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L < 1$, la serie es absolutamente convergente;

(ii) si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L > 1$ o si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = +\infty$, la serie es divergente;

(iii) si $\lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$, nada se puede inferir acerca de la convergencia a partir de este criterio.

4. Aplique el criterio de la raíz (teorema 8.5.9): Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ una serie infinita para la cual cada u_n es diferente de cero:

(i) si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L < 1$, la serie es absolutamente convergente;

(ii) si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L > 1$, o si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = +\infty$ la serie es divergente;

(iii) si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$, nada se puede inferir acerca de la convergencia a partir de este criterio.

5. Aplique el criterio de la integral (teorema 8.4.6): Sea f una función que es continua, decreciente y de valores positivos para toda $x \geq 1$. Entonces la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) + \ldots$$

es convergente si la integral impropia $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ existe, y es divergente si

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\,dx = +\infty.$$

6. Aplique el criterio de comparación (teorema 8.4.2): Sea la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ una serie de términos positivos.

(i) Si $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ es una serie de términos positivos de la cual se sabe que converge, y si $u_n \leq v_n$ para todo número entero positivo n, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es convergente.

(ii) Si $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ es una serie de términos positivos de la cual se sabe que diverge, y si $u_n \geq w_n$ para todo número entero positivo n, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es divergente.

o aplique el criterio de comparación por paso al límite (teorema 8.4.3): Sean $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ dos series de términos positivos.

(i) Si $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = c > 0$, entonces las dos series son convergentes o ambas series son divergentes.

(ii) Si $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$ y si $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.

(iii) Si $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$ y si $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge.

EJERCICIOS 8.6

Los ejercicios siguientes proporcionan una revisión de las secciones 8.3 a 8.5.

En los ejercicios 1 y 2, muestre los primeros cuatro elementos de la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$*, y obtenga una fórmula para* s_n *en términos de n. También determine si la serie infinita es convergente o divergente; si es convergente calcule su suma.*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4^{n+1}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)$

En los ejercicios 3 a 12, determine si la serie es convergente o divergente. Si la serie es convergente obtenga su suma.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2n}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n+1}$

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}]$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sen}^n \tfrac{1}{3}\pi$

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n \tfrac{1}{3}\pi$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$. *Sugerencia:* calcule la suma, primero determine la sucesión de sumas parciales.

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left[\!\left[\operatorname{sen} \frac{3}{n}\pi + 2 \right]\!\right]}{3^n}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{1}{3^n}\right)$

En los ejercicios 13 a 30, determine si la serie es convergente o divergente.

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2+6n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right)$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+\operatorname{sen} n}{n^2}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{3n+2}}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\frac{1}{n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+\sqrt{n}}$

21. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{5n} - \frac{3}{2n}\right)$

24. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{10^n}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+2\ln n}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sec n|}{n^{3/4}}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^3}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n3^{-n^2}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n+\operatorname{sen} n}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)^2}{(n+3)!}$

En los ejercicios 31 a 40, determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente. Justifique la respuesta.

31. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3^n}$

32. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)^{3/4}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{6^n}{5^{n+1}}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{10n}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{2n-1}}{n}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{3n}}{n^n}$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{[\ln(n+2)]^n}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$, donde $c_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ es un cuadrado perfecto} \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ no es un cuadrado perfecto} \end{cases}$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$, donde $c_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{4}n \text{ es un número entero} \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{si } \frac{1}{4}n \text{ no es un número entero} \end{cases}$

41. Exprese el número decimal infinito periódico 1.324 24 24 . . . como una fracción común.

42. Una pelota se deja caer desde una altura de 18 pie, y cada vez que toca el suelo rebota hasta una altura de dos tercios de la altura del rebote anterior. Calcule la distancia total recorrida por la pelota antes de alcanzar el reposo.

43. Utilice el resultado del inciso (a) del ejercicio 55 de la sección 8.3 para determinar cuánto tiempo empleará la pelota del ejercicio 42 en alcanzar el reposo.

44. La trayectoria de cada oscilación del disco de un péndulo, después de la primera, es 80% de la trayectoria de la oscilación anterior, de un lado al otro. Si la trayectoria de la primera oscilación es de 18 pulg y la resistencia del aire hace que eventualmente al péndulo alcance el estado de reposo, ¿qué distancia recorre el disco del péndulo antes de que alcance el reposo?

8.7 SERIES DE POTENCIAS

Las series infinitas que se han estudiado hasta este momento han consistido sólo de términos constantes. Ahora se tratará un tipo importante de series de términos variables denominadas *series de potencias*, las cuales pueden considerarse como una generalización de una función polinomial. En las secciones restantes de este capítulo se estudiará cómo pueden emplearse las series de potencias para calcular valores de función tales como sen x, e^x, $\ln x$ y $\sqrt{x}$, las cuales no se pueden evaluar mediante las operaciones aritméticas conocidas y empleadas para determinar valores de funciones racionales.

8.7.1 Definición de una serie de potencias

Una **serie de potencias** en $x - a$ es una serie de la forma

$$c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \ldots + c_n(x - a)^n + \ldots \quad \textbf{(1)}$$

Se utiliza la notación $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - a)^n$ para representar la serie (1). (Observe que por conveniencia, al escribir el término general se considera $(x - a)^0 = 1$, aún cuando $x = a$. Si x es un número particular, la serie de potencias (1) se convierte en una serie infinita de términos constantes. Un caso especial de (1) se obtiene cuando $a = 0$, de modo que la serie se transforma en una serie de potencias en x, la cual es

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots \quad \textbf{(2)}$$

Además de la serie de potencias en $x - a$ y x, se tienen series de potencias de la forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n [\phi(x)]^n = c_0 + c_1 \phi(x) + c_2[\phi(x)]^2 + \ldots + c_n[\phi(x)]^n + \ldots$$

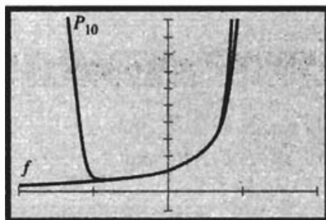
donde ϕ es una función de x. Tales series se denominan series de potencias en $\phi(x)$. En este libro se tratarán exclusivamente series de potencias de la forma (1) y (2), y cuando se emplee el término "serie de potencias" se entenderá alguna de estas dos formas. El estudio de la teoría de series de potencias se limitará a las series del tipo (2). La serie de potencias más general (1) puede obtenerse de (2) mediante la traslación $x = \bar{x} - a$; por tanto, los resultados pueden aplicarse a la serie (1).

En el estudio de series infinitas de términos constantes se trató la cuestión de convergencia o divergencia de las series. Al estudiar series de potencias se tratará la cuestión: ¿qué valores de x hacen que la serie de potencias converja? Para cada valor de x en el que la serie de potencias converge, la serie representa el número que es la suma de la serie. Por tanto, una serie de potencias en x define una función que tiene como dominio todos los valores de x para los cuales la serie de potencias converge.

Se utiliza la notación $P_n(x)$ a fin de representar la suma parcial de la serie de potencias cuya potencia mayor es n. Esta notación es consistente con el uso de $P_n(x)$ en la sección 8.1 para representar el polinomio de Taylor de grado n.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Considere la serie geométrica en la que $a = 1$ y $r = x$, la cual es $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Por el teorema 8.3.5 esta serie converge a la suma $1/(1 - x)$ si $|x| < 1$. Por tanto, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ define la función f para la cual $f(x) = 1/(1 - x)$ y cuyo dominio es el intervalo abierto $(-1, 1)$. De esta manera se escribe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1 - x} \quad \text{si } |x| < 1 \qquad (3)$$



$[-2, 2]$ por $[-1, 10]$

$f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$

$P_{10}(x) = \sum_{n=0}^{10} x^n$

FIGURA 1

La figura 1 muestra las gráficas de

$$f(x) = \frac{1}{1 - x} \quad \text{y} \quad P_{10}(x) = \sum_{n=0}^{10} x^n$$

trazadas en el rectángulo de inspección de $[-2, 2]$ por $[-1, 10]$. Observe que la gráfica de $P_{10}(x)$ aproxima la gráfica de f cuando $|x| < 1$, lo cual apoya el hecho de que la serie de potencias converge a $1/(1 - x)$ si $|x| < 1$. ◀

La serie de potencias (3) puede emplearse para formar otra serie de potencias cuyas sumas pueden determinarse.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Si en (3) se sustituye x por $-x$, se tiene

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \frac{1}{1 + x} \quad \text{si } |x| < 1 \qquad (4)$$

Al reemplazar x por x^2 en (3) se obtiene

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2n} + \ldots = \frac{1}{1 - x^2} \quad \text{si } |x| < 1 \qquad (5)$$

Si se sustituye x por $-x^2$ en (3) resulta

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{si } |x| < 1 \qquad (6)$$

◀

En los ejercicios 1 a 3 se le pedirá que apoye gráficamente el hecho de que las series de potencias (4) a (6) convergen a la función racional correspondiente si $|x| < 1$.

Ahora se mostrará, por medio de tres ejemplos, cómo el criterio de la razón puede emplearse para determinar los valores de x para los cuales una serie de potencias es convergente. Algunas series, como la del ejemplo 2, convergen para cada valor de x. Por supuesto, toda serie de potencias (2) es convergente para $x = 0$, pero, como se verá en el ejemplo 3, algunas series no convergen para ningún otro valor de x.

EJEMPLO 1 Determine los valores de x para los cuales la serie de potencias es convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n 3^n}$$

Solución Para la serie dada,

$$u_n = (-1)^{n+1}\frac{2^n x^n}{n3^n} \quad \text{y} \quad u_{n+1} = (-1)^{n+2}\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}$$

De modo que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}\cdot\frac{n3^n}{2^n x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3}|x|\frac{n}{n+1} \\
&= \tfrac{2}{3}|x|
\end{aligned}$$

Por tanto, la serie de potencias es absolutamente convergente cuando $\frac{2}{3}|x| < 1$ o, equivalentemente, cuando $|x| < \frac{3}{2}$. La serie es divergente cuando $\frac{2}{3}|x| > 1$ o, equivalentemente, cuando $|x| > \frac{3}{2}$. Cuando $\frac{2}{3}|x| = 1$ (es decir, cuando $x = \pm\frac{3}{2}$), el criterio de la razón falla. Cuando $x = \frac{3}{2}$, la serie de potencias dada se convierte en la serie armónica alternante

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$$

la cual es convergente, como se mostró en el ejemplo 1 de la sección 8.5. Cuando $x = -\frac{3}{2}$ se tiene

$$-\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{n} - \ldots$$

la cual es la negativa de la serie armónica, que es divergente. Por tanto, se concluye que la serie de potencias dada es absolutamente convergente cuando $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$ y es condicionalmente convergente cuando $x = \frac{3}{2}$. Si $x \leq -\frac{3}{2}$ o $x > \frac{3}{2}$, la serie es divergente. ◀

Cuando se emplea $n!$ en la representación del n-ésimo término de una serie de potencias, como en el ejemplo siguiente, se considera $0! = 1$, de modo que la expresión para el n-ésimo término estará definida cuando $n = 0$.

▶ ***EJEMPLO 2*** Determine los valores de x para los cuales la serie de potencias es convergente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Solución Para la serie dada,

$$u_n = \frac{x^n}{n!} \quad \text{y} \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

de modo que al aplicar el criterio de la razón se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| \\
&= |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} \\
&= 0 \\
&< 1
\end{aligned}$$

Por tanto, la serie de potencias dada es absolutamente convergente para toda x. ◀

EJEMPLO 3 Determine los valores de x para los cuales la serie de potencia es convergente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n!\, x^n$$

Solución Para la serie dada, $u_n = n!x^n$ y $u_{n+1} = (n + 1)!x^{n+1}$. Al aplicar el criterio de la razón se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty} |(n+1)x| \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Se deduce que la serie de potencias es divergente para todos los valores de x excepto 0. ◀

EJEMPLO 4 Utilice el criterio de la raíz a fin de determinar los valores de x para los cuales la serie de potencias es convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 x^n$$

Solución A fin de aplicar el criterio de la raíz se calcula $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|n^3 x^n|} = \lim_{n\to+\infty} n^{3/n}|x| \tag{7}$$

Para determinar $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3/n}$, sea $y = n^{3/n}$. Entonces $\ln y = \dfrac{3}{n} \ln n$. Así,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln y = \lim_{n\to+\infty} \frac{3 \ln n}{n} \tag{8}$$

A fin de calcular el límite lateral derecho de (8) primero se obtiene $\lim\limits_{z\to+\infty} \dfrac{3 \ln z}{z}$, donde los valores de z son números reales. Como $\lim\limits_{z\to+\infty} \ln z = +\infty$ y $\lim\limits_{z\to+\infty} z = +\infty$, se aplica la regla de L'Hôpital obteniéndose

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to+\infty} \frac{3 \ln z}{z} &= \lim_{z\to+\infty} \frac{3}{z} \\
&= 0
\end{aligned}$$

De este modo, por el teorema 8.2.3, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3 \ln n}{n} = 0$; en consecuencia, de (8) se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \ln y &= 0 \\
\lim_{n\to+\infty} y &= 1
\end{aligned}$$

Al sustituir este resultado en (7) se obtiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|n^3 x^n|} = |x|$$

En consecuencia, la serie de potencias es absolutamente convergente cuando $|x| < 1$. La serie es divergente cuando $|x| > 1$. Cuando $x = 1$, la serie de potencias dada se convierte en $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3$, la cual es divergente porque $\lim_{n \to +\infty} n^3 \neq 0$. De manera similar, la serie de potencias es divergente para el valor $x = -1$. ◀

Refiérase al ejemplo 1, el cual proporciona una ilustración del teorema siguiente. La serie de potencias en ese ejemplo es convergente para $x = \frac{3}{2}$ y es absolutamente convergente para todos los valores de x para los cuales $|x| < \frac{3}{2}$.

8.7.2 Teorema

Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ es convergente para $x = x_1$ $(x_1 \neq 0)$, entonces es absolutamente convergente para todos los valores de x para los cuales $|x| < |x_1|$.

Demostración Si $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_1{}^n$ es convergente, entonces $\lim_{n \to +\infty} c_n x_1{}^n = 0$. Por tanto, si se toma $\epsilon = 1$ en la definición 3.7.1, entonces existe un número entero $N > 0$ tal que

$$\text{si } n \geq N \quad \text{entonces} \quad |c_n x_1{}^n| < 1$$

Ahora, si x es cualquier número tal que $|x| < |x_1|$, y si $n \geq N$, entonces

$$|c_n x^n| = \left| c_n x_1{}^n \frac{x^n}{x_1{}^n} \right|$$

$$|c_n x^n| = |c_n x_1{}^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

$$|c_n x^n| < \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \tag{9}$$

La serie

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \tag{10}$$

es convergente porque es una serie geométrica con $r = |x/x_1| < 1$ (ya que $|x| < |x_1|$). Compare la serie $\sum_{n=N}^{+\infty} |c_n x^n|$, donde $|x| < |x_1|$, con la serie (10). De (9) y el criterio de comparación, $\sum_{n=N}^{+\infty} |c_n x^n|$ es convergente para $|x| < |x_1|$. Por tanto, la serie de potencias dada es absolutamente convergente para todos los valores de x para los que $|x| < |x_1|$. ■

El teorema siguiente es un corolario del teorema 8.7.2. La serie de potencias del ejemplo 1, otra vez proporciona una ilustración del contenido del

teorema debido a que la serie es divergente para $x = -\frac{3}{2}$ así como para los valores de x para los que $|x| > |-\frac{3}{2}|$.

8.7.3 Teorema

Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ es divergente para $x = x_2$, entonces es divergente para todos los valores de x para los que $|x| > |x_2|$.

Demostración Suponga que la serie de potencias dada es convergente para algunos números x para los cuales $|x| > |x_2|$. Entonces, por el teorema 8.7.2, la serie debe converger cuando $x = x_2$. Sin embargo, esto contradice la hipótesis. Por tanto, la serie de potencias dada es divergente para todos los valores de x para los que $|x| > |x_2|$. ■

A partir de los teoremas 8.7.2 y 8.7.3, se demuestra el siguiente teorema importante de la sección.

8.7.4 Teorema

Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ una serie de potencias. Entonces sólo una de las siguientes condiciones se cumple:

(i) la serie converge sólo cuando $x = 0$;
(ii) la serie es absolutamente convergente para todos los valores de x;
(iii) existe un número $R > 0$ tal que la serie es absolutamente convergente para todos los valores de x tales que $|x| < R$ y es divergente para todos los valores de x tales que $|x| > R$.

Demostración Si x se sustituye por cero en la serie de potencias dada, se tiene $c_0 + 0 + 0 + \ldots$, la cual obviamente es convergente. Por tanto, toda serie de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ es convergente cuando $x = 0$. Si este es el único valor de x para el cual la serie converge, entonces se cumple la condición (i).

Suponga que la serie dada es convergente para $x = x_1$, donde $x_1 \neq 0$. Entonces, por el teorema 8.7.2, la serie es absolutamente convergente para todos los valores de x tales que $|x| < |x_1|$. Ahora, si además no existe ningún valor de x para el cual la serie sea divergente, entonces la serie es absolutamente convergente para todos los valores de x. Esta es la condición (ii).

Si la serie dada es convergente para $x = x_1$, donde $x_1 \neq 0$ y es divergente para $x = x_2$, donde $|x_2| > |x_1|$, por el teorema 8.7.3 la serie es divergente para todos los valores de x tales que $|x| > |x_2|$. En consecuencia, $|x_2|$ es una cota superior del conjunto de valores de $|x|$ para los cuales la serie es absolutamente convergente. Por tanto, por el axioma de completez (8.2.9), este conjunto de números tiene una mínima cota superior, la cual es el número R de la condición (iii). Esto demuestra que sólo se cumple una de las tres condiciones. ■

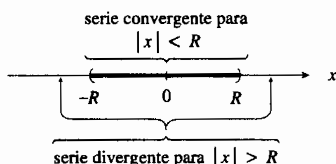


FIGURA 2

La figura 2 ilustra en la recta numérica el inciso (iii) del teorema 8.7.4.

Si en lugar de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$ se tiene la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - a)^n$, entonces en las condiciones (i) y (iii) del teorema 8.7.4 debe sustituirse x por $x - a$. Así las condiciones se transforman en

(i) la serie converge sólo cuando $x = a$;

(iii) existe un número $R > 0$ tal que la serie es absolutamente convergente para todos los valores de x tales que $|x - a| < R$ y es divergente para todos los valores de x tales que $|x - a| > R$. (Vea la figura 3 en la que se muestra una ilustración de esto en la recta numérica).

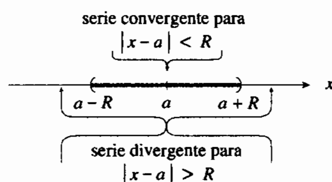


FIGURA 3

El número R de la condición (iii) del teorema 8.7.4 se denomina **radio de convergencia** de la serie. Si se cumple la condición (i), $R = 0$; si se cumple la condición (ii), se escribe $R = +\infty$. Si $R > 0$, el conjunto de todos los valores de x para los que una serie de potencias es convergente se llama **intervalo de convergencia** de la serie de potencias.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Para la serie de potencias del ejemplo 1, $R = \frac{3}{2}$, y el intervalo de convergencia es $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$. En el ejemplo 2, $R = +\infty$, y el intervalo de convergencia se escribe como $(-\infty, +\infty)$. ◀

Si el radio de convergencia de una serie de potencias en x es R, donde $R > 0$, el intervalo de convergencia es $(-R, R)$, $[-R, R]$, $(-R, R]$ o $[-R, R)$, mientras que para una serie de potencias en $x - a$, el intervalo de convergencia es $(a - R, a + R)$, $[a - R, a + R]$, $(a - R, a + R]$ o $[a - R, a + R)$.

Una serie de potencias dada define una función que tiene el intervalo de convergencia como su dominio. A continuación se resume el procedimiento para determinar el intervalo de convergencia.

Procedimiento para determinar el intervalo de convergencia de una serie de potencias en x a

1. Aplique el criterio de la razón (o en ocasiones el criterio de la raíz) para determinar el radio de convergencia R de la serie. Algunas series convergen absolutamente para todos los valores de x, como en el ejemplo 2, donde $R = +\infty$, y algunas otras convergen sólo en un número, como en el ejemplo 3, donde $R = 0$.
2. Si $R > 0$, la serie converge absolutamente para toda x en el intervalo $(a - R, a + R)$ y diverge para $|x - a| > R$. Verifique la convergencia en los extremos del intervalo $(a - R, a + R)$ mediante los métodos resumidos en la sección 8.6; por supuesto, ninguna conclusión acerca de la convergencia en los extremos puede inferirse del criterio de la razón o del criterio de la raíz.

▶ ***EJEMPLO 5*** Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(x - 2)^n$$

Solución La serie de potencias dada es

$$(x - 2) + 2(x - 2)^2 + \ldots + n(x - 2)^n + (n + 1)(x - 2)^{n+1} + \ldots$$

Al aplicar el criterio de la razón se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)(x-2)^{n+1}}{n(x-2)^n}\right| \\ &= |x-2| \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n} \\ &= |x-2|\end{aligned}$$

La serie dada será absolutamente convergente si $|x-2| < 1$ o, equivalentemente, $-1 < x-2 < 1$, o bien, $1 < x < 3$.

Cuando $x = 1$, la serie es $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n$, la cual es divergente debido a que $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$. Cuando $x = 3$, la serie es $\sum_{n=1}^{+\infty} n$, la cual es también divergente ya que $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$. Por tanto, el intervalo de convergencia es $(1, 3)$. Así, la serie de potencias dada define una función que tiene el intervalo $(1, 3)$ como su dominio. ◀

▶ **EJEMPLO 6** Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2+n^2}$$

Solución La serie de potencias dada es

$$\frac{x}{2+1^2} + \frac{x^2}{2+2^2} + \frac{x^3}{2+3^2} + \ldots + \frac{x^n}{2+n^2} + \frac{x^{n+1}}{2+(n+1)^2} + \ldots$$

Si se aplica el criterio de la razón se obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{2+(n+1)^2}\cdot\frac{2+n^2}{x^n}\right| \\ &= |x| \lim_{n\to+\infty}\frac{2+n^2}{2+n^2+2n+1} \\ &= |x|\end{aligned}$$

De esta manera, la serie dada será absolutamente convergente si $|x| < 1$ o, equivalentemente, $-1 < x < 1$. Cuando $x = 1$, la serie es

$$\frac{1}{2+1^2} + \frac{1}{2+2^2} + \frac{1}{2+3^2} + \ldots + \frac{1}{2+n^2} + \ldots$$

Como $\frac{1}{2+n^2} < \frac{1}{n^2}$ para todos los números enteros n, y puesto que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ es una serie p convergente, entonces, por el criterio de comparación, la serie de potencias dada es convergente cuando $x = 1$. Si $x = -1$, la serie es $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2+n^2}$, la cual es convergente debido a que se ha mostrado que es absolutamente convergente. En consecuencia, el intervalo de convergencia de la serie de potencias dada es $[-1, 1]$. ◀

Se ha mostrado que el criterio de la razón no revelará nada acerca de la convergencia o divergencia de una serie de potencias en los extremos del

intervalo de convergencia, además en un extremo puede ser absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente. Si una serie de potencias converge absolutamente en un extremo, se puede demostrar que la serie es absolutamente en cada extremo (vea el ejercicio 37). También se puede demostrar que si una serie de potencias converge en un extremo y diverge en el otro, la serie es condicionalmente convergente en el extremo en que converge (vea el ejercicio 38). Para algunas series de potencias, la convergencia o divergencia en los extremos no puede determinarse mediante métodos de Cálculo elemental.

EJERCICIOS 8.7

1. **(a)** Apoye gráficamente en la graficadora el hecho de que la serie de potencias (4) converge a $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, si $|x| < 1$, trazando las gráficas de f y $P_{10}(x)$ en el mismo rectángulo de inspección. **(b)** Utilice la serie (4) para determinar una representación en serie de potencias para $\dfrac{1}{1+2x}$ y apoye gráficamente la respuesta.
2. **(a)** Apoye gráficamente en la graficadora el hecho de que la serie de potencias (5) converge a $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, si $|x| < 1$, trazando las gráficas de f y $P_{10}(x)$ en el mismo rectángulo de inspección. **(b)** Utilice la serie (5) para determinar una representación en serie de potencias para $\dfrac{1}{1-4x^2}$ y apoye gráficamente la respuesta.
3. **(a)** Apoye gráficamente en la graficadora el hecho de que la serie de potencias de (6) converge a $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, si $|x| < 1$, trazando las gráficas de f y $P_{10}(x)$ en el mismo rectángulo de inspección. **(b)** Utilice la serie (6) para determinar una representación en serie de potencias para $\dfrac{1}{1+9x^2}$ y apoye gráficamente la respuesta.
4. **(a)** Utilice la serie (4) para determinar una representación en serie de potencias para $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$. Apoye gráficamente en la graficadora el hecho de que la serie de potencias del inciso (a) converge a $f(x)$, si $|x| < 1$, trazando las gráficas de f y $P_{10}(x)$ en el mismo rectángulo de inspección.

En los ejercicios 5 a 32, determine el intervalo de convergencia de la serie de potencias.

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$
6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$
7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-3}$
8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2x^n}{2^n}$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n^2}$
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n\sqrt{n}}$
11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{3^n}$
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^{2n}} x^n$
15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$
16. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)5^n}$
17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n-1)3^{2n-1}}$
18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)x^n}{n!}$
19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$
20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)2^n}$
21. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{senh} 2n)x^n$
22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$
23. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}$
24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+5)^{n-1}}{n^2}$
25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{5^n}(x-1)^n$
26. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{n+1}x^{2n}}{n+3}$
27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n(x-5)^n}{n+1}$
28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}$
29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} x^{2n+1}$
30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^n(x-3)^n$
31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\,x^n}{n^n}$
32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} x^n$
33. La descripción del estado de vapor de un gas ideal, útil en la ingeniería de refrigeración, se determina en termodinámica mediante las ecuaciones viriales de estado:

$$Z = 1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} + \frac{D}{V^3} + \ldots$$
$$Z = 1 + \bar{B}P + \bar{C}P^2 + \bar{D}P^3 + \ldots$$

donde $B, C, D, \ldots \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \ldots$ son constantes, y donde Z es el factor de compresibilidad, V y P son, respectivamente, las medidas del volumen y de la presión del gas. Además, $Z = PV/RT$, donde T es la medida de la temperatura del gas y R es la constante universal de los gases. A través de la comparación de las dos series de potencias, demuestre que

$$\bar{B} = \frac{B}{RT} \qquad \bar{C} = \frac{C - B^2}{R^2T^2} \qquad \bar{D} = \frac{D + 2B^3 - 3BC}{R^3T^3}$$

34. Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es una serie absolutamente convergente, demuestre que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ es absolutamente convergente cuando $|x| \leq 1$.

35. Si a y b son números enteros positivos, determine el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+a)!}{n!\,(n+b)!} x^n$$

36. Demuestre que si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L$ $(L \neq 0)$, entonces el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ es $1/L$.

37. Demuestre que si una serie de potencias es absolutamente convergente en un extremo de su intervalo de convergencia, entonces la serie es absolutamente convergente en cada extremo.

38. Demuestre que si una serie de potencias converge en un extremo de su intervalo de convergencia y diverge en el otro extremo, entonces la serie es condicionalmente convergente en el extremo en que converge.

39. Demuestre que si el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ es r, entonces el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^{2n}$ es $\sqrt{r}$.

40. **(a)** Suponga que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ es convergente para $x = 2$. Explique por qué se puede concluir que la serie es convergente para $x = 1$, pero no necesariamente converge para $x = 3$. **(b)** Suponga que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n (x-4)^n$ es convergente para $x = 2$. Explique por qué se puede concluir que la serie es convergente para $x = 3$ pero no necesariamente converge para $x = 1$

8.8 DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN DE SERIES DE POTENCIAS

A partir de series de potencias se pueden obtener otras series de potencias mediante la diferenciación e integración. En esta sección aprenderá que si R (donde $R \neq 0$) es el radio de convergencia de una serie de potencias que define una función f, entonces f es diferenciable en el intervalo abierto $(-R, R)$ y la derivada de f puede obtenerse al diferenciar la serie de potencias término a término. Además, se mostrará que f es integrable en todo subintervalo cerrado de $(-R, R)$, y la integral de f se obtiene al integrar la serie de potencias término a término. Primero, se establecerán dos teoremas preliminares.

8.8.1 Teorema

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ es una serie de potencias cuyo radio de convergencia es $R > 0$, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}$ también tiene a R como su radio de convergencia.

Este teorema, cuya demostración se presenta en el suplemento de esta sección, establece que la serie, obtenida al diferenciar cada término de una serie de potencias término a término, tendrá el mismo radio de convergencia que la serie dada. En el ejemplo ilustrativo siguiente se verifica el teorema para una serie de potencias particular.



EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Considere la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2} + \ldots$$

El radio de convergencia se determina aplicando el criterio de la razón.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^2x^{n+2}}{(n+2)^2x^{n+1}}\right|\\ &= |x|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2+2n+1}{n^2+4n+4}\right|\\ &= |x|\end{aligned}$$

En consecuencia, la serie de potencias es convergente cuando $|x| < 1$; de modo que su radio de convergencia es $R = 1$.

La serie que se obtiene al diferenciar término a término la serie anterior es

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)x^n}{(n+1)^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}\\ &= 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\ldots+\frac{x^n}{n+1}+\frac{x^{n+1}}{n+2}+\ldots\end{aligned}$$

Si se aplica el criterio de la razón a esta serie de potencias se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{(n+2)x^n}\right|\\ &= |x|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right|\\ &= |x|\end{aligned}$$

Esta serie es convergente cuando $|x| < 1$; así, su radio de convergencia es $R' = 1$. Como $R = R'$, se ha verificado el teorema 8.8.1 para esta serie. ◀

8.8.2 Teorema

Si el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ es $R > 0$, entonces R también es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$.

Demostración El resultado deseado se deduce cuando el teorema 8.8.1 se aplica a la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n x^{n-1}$. ∎

Ahora se establecerá el teorema importante acerca de la *diferenciación término a término de una serie de potencias*. Los teoremas 8.8.1 y 8.8.2 desempeñan un papel crucial en la demostración de este teorema, la cual se proporciona en el suplemento de esta sección.

8.8.3 Teorema

Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ una serie de potencias cuyo radio de convergencia es $R > 0$. Si f es la función definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

entonces $f'(x)$ existe para cada x del intervalo abierto $(-R, R)$ y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n x^{n-1}$$

En el teorema 8.8.3, si la serie para $f'(x)$ converge en R (o $-R$), entonces R (o $-R$) está en el dominio de f'. La demostración de este hecho está más allá del alcance de este libro.

El ejemplo siguiente es una aplicación del teorema 8.8.3.

▶ **EJEMPLO 1** Sea f la función definida por la serie de potencias del ejemplo ilustrativo 1. **(a)** Determine el dominio de f; **(b)** escriba la serie de potencias que define a f' y obtenga su dominio.

Solución

(a) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$

El dominio de f es el intervalo de convergencia de la serie de potencias. En el ejemplo ilustrativo 1 se mostró que el radio de convergencia de la serie de potencias es 1; esto es, la serie converge cuando $|x| < 1$. Considere ahora la serie de potencias cuando $|x| = 1$. Si $x = 1$, la serie es

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots$$

la cual es convergente debido a que es la serie p con $p = 2$. Cuando $x = -1$, se tiene la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$, la cual es convergente debido a a que es absolutamente convergente. En consecuencia, el dominio de f es el intervalo $[-1, 1]$.

(b) Del teorema 8.8.3, f' está definida por

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \tag{1}$$

y $f'(x)$ existe para todo x del intervalo abierto $(-1, 1)$. En el ejemplo ilustrativo 1 se mostró que el radio de convergencia de la serie de potencias de (1) es 1. Ahora considere la serie de potencias de (1) cuando $x = \pm 1$. Si $x = 1$, la serie es

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+1} + \ldots$$

la cual es la serie armónica, y por tanto es divergente. Cuando $x = -1$, la serie es

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \ldots$$

que es la serie armónica alternante convergente. Por tanto, el dominio de f' es el intervalo $[-1, 1)$. ◀

El ejemplo 1 ilustra el hecho de que si una función f está definida mediante una serie de potencias, y esta serie de potencias se deriva término a

término, la serie que resulta, la cual define a f', tiene el mismo radio de convergencia pero no necesariamente el mismo intervalo de convergencia.

EJEMPLO 2 Obtenga una representación en serie de potencias de

$$\frac{1}{(1-x)^2}$$

Solución Se aplicará el teorema 8.8.3. De (3) de la sección 8.7 se tiene

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \qquad \text{si } |x| < 1$$

Al diferenciar ambos extremos de la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots \quad \text{si } |x| < 1$$ ◀

EJEMPLO 3 Demuestre que para todos los valores reales de x

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Solución En el ejemplo 2 de la sección 8.7 se mostró que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ es absolutamente convergente para todos los valores de x. Por tanto, si f es la función definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{2}$$

el dominio de f es el conjunto de todos los números reales; es decir, es el intervalo de convergencia es $(-\infty, +\infty)$. Del teorema 8.8.3, para todos los valores reales de x,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!}$$

Debido a que $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$, la ecuación anterior puede escribirse como

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

De esta igualdad y (2), $f'(x) = f(x)$ para todos los valores reales de x. Por tanto, la función f satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y$$

para la cual, como se mostró en la sección 5.6, la solución general es $y = Ce^x$. En consecuencia, para alguna constante C, $f(x) = Ce^x$. De (2),

$f(0) = 1$. (Recuerde que se consideró $x^0 = 1$ aún cuando $x = 0$ por conveniencia al escribir el término general). Por tanto, $C = 1$; de modo que $f(x) = e^x$, por tanto, se tiene el resultado deseado. ◀

Observe que $P_n(x)$ de la serie de potencias para e^x en el ejemplo anterior, es el polinomio de Maclaurin de grado n para e^x obtenido, en el ejemplo ilustrativo 1 de la sección 8.1. En la sección 8.9 se verá que esta serie se denomina *serie de Maclaurin* para e^x.

▶ ***EJEMPLO 4*** **(a)** Del resultado del ejemplo 3, obtenga una representación en serie de potencias de e^{-x}. **(b)** Utilice la serie del inciso (a) para determinar el valor de e^{-1} exacto con cinco cifras decimales. Compare el resultado con el valor obtenido en una calculadora.

Solución

(a) Si x se sustituye por $-x$ en la serie para e^x, se obtiene

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

para todos los valores reales de x.

(b) Si $x = 1$ en la serie para e^{-x}, se tiene

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} - \ldots$$

$$\approx 1 - 1 + 0.5 - 0.166667 + 0.041667 - 0.008333 + 0.001389 - 0.000198 + 0.000025 - 0.000003 + 0.0000003 - \ldots$$

Esta es una serie alternante convergente para la cual $|u_{n+1}| < |u_n|$. De modo que si los primeros diez términos se emplean para aproximar la suma, por el teorema 8.5.4, el error es menor que el valor absoluto del onceavo término. Al sumar los diez primeros términos se obtiene 0.367880. Si se redondea a cinco cifras decimales resulta

$$e^{-1} \approx 0.36788$$

En la calculadora se obtiene el mismo valor con cinco cifras decimales. ◀

En el cálculo con series infinitas se presentan dos tipos de error. Uno es el error proporcionado por los términos restantes después de los primeros n. El otro es el *error de redondeo* que ocurre cuando cada término de la serie se aproxima mediante un decimal con un número finito de cifras. En particular, en el ejemplo 4 se pidió el resultado con una exactitud de cinco cifras decimales; de modo que cada término se redondeó a seis cifras decimales. Después de calcular la suma, se redondeó este resultado a cinco cifras decimales. Por supuesto, el error debido al residuo puede reducirse al considerar términos adicionales de la serie, mientras que el error de redondeo puede reducirse utilizando más cifras decimales.

Si toma un curso de ecuaciones diferenciales, aprenderá que es posible expresar las soluciones de muchas ecuaciones diferenciales como series de potencias. En el ejemplo siguiente se tiene esta situación.

EJEMPLO 5 Demuestre que

$$y = x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{3}$$

es una solución de la ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y + x = 0.$

Solución La serie de potencias de (3) es convergente para todos los valores de x. Por tanto, por el teorema 8.8.3, para toda x

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} - y + x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \left(x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) + x \\ &= 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, la ecuación diferencial es satisfecha; de modo que (3) es una solución. ◀

El teorema siguiente, que trata la *integración término a término de una serie de potencias*, es una consecuencia del teorema 8.8.3.

8.8.4 Teorema

Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ una serie de potencias cuyo radio de convergencia es $R > 0$. Si f es la función definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

entonces f es integrable en cada subintervalo cerrado de $(-R, R)$, y la integral de f se evalúa integrando término a término la serie de potencias dada; es decir, si x está en $(-R, R)$, entonces

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

Además, R es el radio de convergencia de la serie resultante.

Demostración Sea g la función definida por

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

Como los términos de la representación en serie de potencias de $f(x)$ son las derivadas de los términos de la representación en serie de potencias de

$g(x)$, las dos series tienen, por el teorema 8.8.1, el mismo radio de convergencia. Por el teorema 8.8.3

$$g'(x) = f(x) \quad \text{para cada } x \text{ en } (-R, R)$$

Por el teorema 8.8.2, $f'(x) = g''(x)$ para cada x en $(-R, R)$. Debido a que f es diferenciable en $(-R, R)$, f es continua en ese intervalo; en consecuencia, f es continua en cada subintervalo cerrado de $(-R, R)$. Del segundo teorema fundamental del Cálculo, se concluye que si x está en $(-R, R)$, entonces

$$\int_0^x f(t)\,dt = g(x) - g(0)$$

$$= g(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$ ■

El teorema 8.8.4 se emplea con frecuencia para calcular una integral definida que no puede evaluarse directamente obteniendo una antiderivada del integrando. Los ejemplo 6 y 7, que a continuación se presentan, ilustran esta técnica. La integral definida que aparece en estos dos ejemplos es similar a la que representa la medida del área de una región bajo la "curva normal de probabilidad".



EJEMPLO 6 (**a**) Obtenga una representación en serie de potencias de $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ y determine su radio de convergencia. (**b**) Trace en el el mismo rectángulo de inspección las gráficas de NINT(e^{-t^2}, 0, x) y el polinomio que consiste de los primeros diez términos diferentes de cero de la serie del inciso (a).

Solución

(**a**) Del ejemplo 4,

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

para todos los valores de x. Si x se sustituye por t^2, se tiene

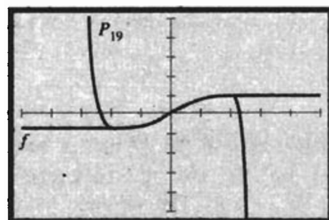
$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} + \ldots \qquad \text{para todos los valores de } t$$

Al aplicar el teorema 8.8.4, se integra término a término la ecuación anterior obteniéndose

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}\,dt$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} + \ldots$$

La serie de potencias representa la integral para todos los valores de x; por tanto, el radio de convergencia R es $+\infty$.



[-5, 5] por [-5, 5]

$f(x) = \text{NINT}(e^{-t^2}, 0, x)$

$P_{19}(x) = \sum_{n=0}^{9} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}$

FIGURA 1

(b) Puesto que el desarrollo en serie de potencias de $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ contiene sólo potencias impares de x, la suma de los primeros diez términos distintos de cero está dada por $P_{19}(x)$.

La figura 1 muestra las gráficas de

$$\text{NINT}(e^{-t^2}, 0, x) \quad \text{y} \quad P_{19}(x) = \sum_{n=0}^{9} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}$$

trazadas en el rectángulo de inspección de [-5, 5] por [-5, 5]. Observe cómo la gráfica del polinomio aproxima la gráfica de la integral. ◀

▶ ***EJEMPLO 7*** **(a)** Utilice el resultado del ejemplo 6 para calcular con una exactitud de tres cifras decimales el valor de $\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt$.

(b) Apoye la respuesta del inciso (a) empleando NINT en la graficadora.

Solución

(a) Se sustituye x por $\frac{1}{2}$ en la serie de potencias obtenida en el ejemplo 6 a fin de obtener

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{320} - \tfrac{1}{5\,376} + \dots \\ &\approx 0.5 - 0.0417 + 0.0031 - 0.0002 + \dots\end{aligned}$$

Esta es una serie alternante convergente con $|u_{n+1}| < |u_n|$. Así, si se emplean los primeros tres términos para aproximar la suma, por el teorema 8.5.4, el error es menor que el valor absoluto del cuarto término. De los primeros tres términos se tiene

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt \approx 0.461$$

(b) En la graficadora se obtiene

$$\text{NINT}(e^{-t^2}, 0, 0.5) = 0.461$$

con tres cifras decimales, lo cual apoya la respuesta del inciso (a). ◀

▶ ***EJEMPLO 8*** Obtenga una representación en serie de potencias de $\tan^{-1} x$.

Solución De la serie (6) de la sección 8.7, se tiene

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots \quad \text{si } |x| < 1$$

Al aplicar el teorema 8.8.4 e integrando término a término se obtiene

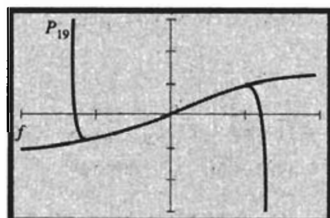
$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Por tanto,

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{si } |x| < 1 \qquad (4)$$ ◀

Aunque el teorema 8.8.4 permite concluir que la serie de potencias (4) representa a $\tan^{-1} x$ sólo para valores de x tales que $|x| < 1$, el intervalo de convergencia de la serie de potencias es $[-1, 1]$ y la serie de potencias representa a $\tan^{-1} x$ para toda x en su intervalo de convergencia. Se le pedirá que demuestre esto en el ejercicio 82 de los ejercicios de repaso para este capítulo. Por tanto,

$$\begin{aligned}\tan^{-1} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \quad \text{si } |x| \leq 1\end{aligned} \tag{5}$$



$[-2, 2]$ por $[-3, 3]$

$f(x) = \tan^{-1} x$

$P_{19}(x) = \sum_{n=0}^{9} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$

FIGURA 2

La figura 2 muestra las gráficas de

$$f(x) = \tan^{-1} x \quad \text{y} \quad P_{19}(x) = \sum_{n=0}^{9} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

trazadas en el rectángulo de inspección de $[-2, 2]$ por $[-3, 3]$. Observe que la gráfica del polinomio aproxima a la gráfica de $\tan^{-1} x$ cuando $|x| \leq 1$, lo cual apoya (5).

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Si $x = 1$ en (5), entonces

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots$$ ◀

La serie del ejemplo ilustrativo 2 no es adecuada para calcular π debido a que converge muy lentamente. El ejemplo siguiente proporciona un mejor método.

▶ *EJEMPLO 9* Demuestre que

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \tfrac{1}{2} + \tan^{-1} \tfrac{1}{3}$$

Aplique esta fórmula y la serie de potencias para $\tan^{-1} x$ del ejemplo (8) para calcular el valor de π, con una exactitud de cinco dígitos significativos..

Solución Sean $\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{2}$ y $\beta = \tan^{-1} \frac{1}{3}$. Entonces

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \\ &= \frac{3 + 2}{6 - 1} \\ &= 1 \\ &= \tan \tfrac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Por tanto, como $0 < \alpha + \beta < \frac{1}{2}\pi$,

$$\begin{aligned}\tfrac{\pi}{4} &= \alpha + \beta \\ \tfrac{\pi}{4} &= \tan^{-1} \tfrac{1}{2} + \tan^{-1} \tfrac{1}{3}\end{aligned} \tag{6}$$

De la fórmula (5) con $x = \frac{1}{2}$,

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9 - \frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{13} - \frac{1}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^{15} + \dots$$

$$\approx 0.500000 - 0.041667 + 0.006250 - 0.001116 + 0.000217 - 0.000044 + 0.000009 - 0.000002 + \dots$$

Como la serie es alternante y $|u_{n+1}| < |u_n|$, entonces, por el teorema 8.5.4, si los primeros siete términos se emplean para aproximar la suma de la serie, el error será menor que el valor absoluto del octavo término. Por tanto,

$$\tan^{-1}\tfrac{1}{2} \approx 0.463648$$

De la fórmula (5) con $x = \frac{1}{3}$,

$$\tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9 - \frac{1}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{11} + \dots$$

$$\approx 0.333333 - 0.012346 + 0.000823 - 0.000065 + 0.000006 - 0.0000005 + \dots$$

Si se utilizan los primeros cinco términos para aproximar la suma,

$$\tan^{-1}\tfrac{1}{3} \approx 0.321751$$

Al sustituir los valores de $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ y $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ en (6) se tiene

$$\frac{\pi}{4} \approx 0.463648 + 0.321751$$
$$\approx 0.78540$$

Si se multiplica por 4 se obtiene, con cinco dígitos significativos, $\pi \approx 3.1416$. ◀

EJERCICIOS 8.8

En los ejercicios 1 a 10, haga lo siguiente: (a) obtenga el radio de convergencia de la serie de potencias y el dominio de f; (b) verifique el teorema 8.8.1 para la función f escribiendo la serie de potencias que define a la función f' y calculando su radio de convergencia; (c) determine el dominio de f'.

1. $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ **2.** $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

3. $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ **4.** $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n-1}}$

5. $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ **6.** $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$

7. $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)(3x-1)^n$ **8.** $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$

9. $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n3^n}$ **10.** $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n(n-1)}$

11. Utilice el resultado del ejemplo 2 para obtener una representación en serie de potencias de $\frac{1}{(1-x)^3}$.

12. Utilice el resultado del ejemplo 3 para obtener una representación en serie de $e^{\sqrt{x}}$.

13. Obtenga una representación en serie de potencias de $\frac{1}{(1+x)^2}$ si $|x| < 1$, diferenciando término a término la serie (4) de la sección 8.7.

14. Obtenga una representación en serie de potencias de $\frac{x}{(1+x^2)^2}$ si $|x| < 1$, diferenciando término a término la serie (6) de la sección 8.7.

15. Sea $\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ para toda x. Obtenga una representación en serie de potencias para senh x integrando término a término la serie dada de 0 a x.

16. Obtenga una representación en serie de potencias para $\tanh^{-1} x$ integrando término a término de 0 a x la representación en serie de potencias para $(1 - t^2)^{-1}$.

17. **(a)** Utilice el resultado del ejemplo 3 para obtener una representación en serie de potencias para e^{x^2}. **(b)** Derive término a término la serie obtenida en el inciso (a) para determinar una representación en serie de potencias para xe^{x^2}.

18. Sea f definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^n(n+2)}$. **(a)** Determine el dominio de f. **(b)** Obtenga $f'(x)$ y determine el dominio de f'.

19. Utilice el resultado del ejemplo 4(a) para obtener el valor de $1/\sqrt{e}$ con una exactitud de cinco cifras decimales y compare el resultado con el valor obtenido en una calculadora.

20. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{3^n}$, calcule $f'(\frac{1}{2})$ con una exactitud de cuatro cifras decimales.

21. Utilice los resultados de los ejemplo 3 y 4(a) para obtener una representación en serie de potencias de **(a)** senh x y **(b)** cosh x.

22. Demuestre que cada serie de potencias de los incisos (a) y (b) del ejercicio 21 pueden obtenerse una a partir de la otra mediante diferenciación término a término.

En los ejercicios 23 a 27, demuestre que la serie de potencias es una solución de la ecuación diferencial.

23. $y = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n}{n!} x^n; \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

24. $y = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n n!} x^{2n}; \dfrac{dy}{dx} - xy = 0$

25. $y = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}; \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

26. $y = x + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}; \dfrac{d^2y}{dx^2} + y - x = 0$

27. $y = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}; \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

28. Utilice el resultado del ejemplo 2 para obtener la suma de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{2^n}$

En los ejercicios 29 a 32, obtenga una representación en serie de potencias de la integral y determine su radio de convergencia. Apoye gráficamente la respuesta.

29. $\int_0^x e^t\, dt$ **30.** $\int_0^x \dfrac{dt}{t^2+4}$

31. $\int_2^x \dfrac{dt}{4-t}$ **32.** $\int_0^x \tan^{-1} t\, dt$

En los ejercicios 33 a 36, calcule con una exactitud de tres cifras decimales el valor de la integral mediante dos métodos: (a) utilice el segundo teorema fundamental del Cálculo; (b) emplee el resultado de ejercicio indicado.

33. $\int_0^1 e^t\, dt$; ejercicio 29 **34.** $\int_0^1 \dfrac{dt}{t^2+4}$; ejercicio 30

35. $\int_2^3 \dfrac{dt}{4-t}$; ejercicio 31

36. $\int_0^{1/3} \tan^{-1} t\, dt$; ejercicio 32

37. Sea

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

(a) Demuestre que f es continua en 0. **(b)** Obtenga una representación en serie de potencias de $\int_0^x f(t)\, dt$ y determine su radio de convergencia. **(c)** Trace en el mismo rectángulo de inspección las gráficas de NINT($f(t)$, 0, x) y el polinomio que consiste de los primeros diez términos diferentes de cero de la serie del inciso (b).

38. Realice el ejercicio 37 si

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\tan^{-1} t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

39. Para la función del ejercicio 37, utilice la serie del inciso (b) de ese ejercicio para calcular $\int_0^1 f(t)\, dt$ con una exactitud de tres cifras decimales y apoye la respuesta empleando NINT en la graficadora.

40. Para la función del ejercicio 38, utilice la serie del inciso (b) de ese ejercicio para calcular $\int_0^{1/4} f(t)\, dt$ con una exactitud de tres cifras decimales y apoye la respuesta empleando NINT en la graficadora.

En los ejercicios 41 a 46, calcule con una exactitud de tres cifras decimales el valor de la integral definida empleando series, y apoye la respuesta empleando NINT *en la graficadora.*

41. $\int_0^{1/2} \dfrac{dx}{1+x^3}$ **42.** $\int_0^{1/3} \dfrac{dx}{1+x^4}$

43. $\int_0^{1/2} \tan^{-1} x^2\, dx$ **44.** $\int_0^{1/2} e^{-x^3}\, dx$

45. $\int_0^1 x \operatorname{senh} \sqrt{x}\, dx$ **46.** $\int_0^{1/2} \cosh x^2\, dx$

47. Utilice la serie de potencias de (4) para calcular $\tan^{-1} \frac{1}{4}$ con una exactitud de cuatro cifras decimales, y compare el resultado con el valor obtenido en una calculadora.

48. Si $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{(x-1)^n}{n!}$ y $f(1) = 0$, calcule $f(\frac{5}{4})$ con una exactitud de tres cifras decimales.

49. Si $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n^2+3}$ y $g(0) = 0$, obtenga $g(1)$ con una exactitud de dos cifras decimales.

50. Obtenga una serie de potencias para xe^x al multiplicar la serie para e^x por x; después integre, término a término de 0 a 1, la serie resultante para demostrar que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n!(n+2)} = \dfrac{1}{2}$.

51. **(a)** Obtenga una representación en serie de potencias para $x^2 e^{-x}$. **(b)** Al diferenciar término a término la serie del inciso (a), demuestre que $\sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^{n+1} \dfrac{n+2}{n!} = 4$.

52. **(a)** Obtenga una representación en serie de potencias para $\dfrac{e^x - 1}{x}$. **(b)** Al diferenciar término a término la serie del inciso (a), demuestre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{(n+1)!} = 1$.

53. Al integrar, término a término de 0 a x, la representación en serie de potencias para $t \tan^{-1} t$, demuestre que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)} = \tfrac{1}{2}[(x^2+1)\tan^{-1}x - x]$$

54. **(a)** Obtenga una representación en serie de potencias para e^{-x^2}. **(b)** Al diferenciar término a término dos veces la serie de potencias del inciso (a), demuestre que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2^n n!} = 1$$

55. Suponga que la función f tiene la representación en serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, donde el radio de convergencia es $R > 0$. Si $f'(x) = f(x)$ y $f(0) = 1$, obtenga la serie de potencias empleando sólo propiedades de series de potencias. No utilice nada acerca de la función exponencial.

56. **(a)** Utilice únicamente propiedades de las series de potencias para obtener una representación en serie de potencias de la función f si $f(x) > 0$ y $f'(x) = 2xf(x)$ para toda x, y $f(0) = 1$. **(b)** Verifique el resultado del inciso (a) resolviendo la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2xy$ condición inicial $y = 1$ cuando $x = 0$.

57. Suponga que una función f tiene la representación en serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$. Si f es una función par, demuestre que $c_n = 0$ cuando n es impar.

58. Determine la serie de potencias en x de $f(x)$ si $f''(x) = -f(x)$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. También, determine el radio de convergencia de la serie resultante.

59. Suponga que la constante 0 tiene una representación en serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, donde el radio de convergencia es $R > 0$. Demuestre que $c_n = 0$ para toda n.

60. Discuta la importancia de la diferenciación e integración de series de potencias. Incluya en la discusión un ejemplo de cómo se aplica cada operación.

8.9 SERIES DE TAYLOR

Se ha visto cómo ciertas funciones racionales así como algunas funciones trascendentes, tales como e^x y $\tan^{-1} x$, pueden expresarse como series de potencias. Ahora se mostrará cómo obtener representaciones en series de potencias de funciones que tienen derivadas de todos los órdenes, es decir, funciones que son *infinitamente diferenciables*.

Suponga que f es una función definida mediante una serie de potencias; esto es,

$$f(x) = c_o + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots + c_nx^n + \ldots \quad \textbf{(1)}$$

cuyo radio de convergencia es $R > 0$. De las aplicaciones sucesivas del teorema 8.8.3, f es infinitamente diferenciable en $(-R, R)$. Las derivadas consecutivas de f son

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots + nc_nx^{n-1} + \ldots \quad \textbf{(2)}$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3x + 3 \cdot 4c_4x^2 + \ldots + (n-1)nc_nx^{n-2} + \ldots \quad \textbf{(3)}$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4x + \ldots + (n-2)(n-1)nc_nx^{n-3} + \ldots \quad \textbf{(4)}$$

$$f^{(4)}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4c_4 + \ldots + (n-3)(n-2)(n-1)nc_nx^{n-4} + \ldots \quad \textbf{(5)}$$

etc. Si $x = 0$ en (1) – (5),

$$f(0) = c_0 \quad f'(0) = c_1 \quad f''(0) = 2!c_2 \quad f'''(0) = 3!c_3 \quad f^{(4)}(0) = 4!c_4$$

De modo que

$$c_0 = f(0) \quad c_1 = f'(0) \quad c_2 = \frac{f''(0)}{2!} \quad c_3 = \frac{f'''(0)}{3!} \quad c_4 = \frac{f^4(0)}{4!}$$

En general

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \text{ para todo número entero positivo } n$$

Esta fórmula también se cumple cuando $n = 0$ si se considera $f^{(0)}(0)$ como $f(0)$ y $0! = 1$. Por lo que de esta fórmula y de (1), la serie de potencias de f en x se puede escribir como

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (6)$$

En un sentido más general, considere la función f como una serie de potencias en $x - a$; es decir,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - a)^n$$

$$= c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \ldots + c_n(x - a)^n + \ldots \qquad (7)$$

Si el radio de esta serie es R, entonces f es infinitamente diferenciable en $(a - R, a + R)$. Las derivadas sucesivas de la función (7) son

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + 4c_4(x - a)^3 + \ldots + nc_n(x - a)^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - a) + 3 \cdot 4c_4(x - a)^2 + \ldots + (n - 1)nc_n(x - a)^{n-2} + \ldots$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x - a) + \ldots + (n - 2)(n - 1)nc_n(x - a)^{n-3} + \ldots$$

etc. Si se considera $x = a$ en la representaciones de series de potencias de f y en sus derivadas, se tiene

$$c_0 = f(a) \qquad c_1 = f'(a) \qquad c_2 = \frac{f''(a)}{2!} \qquad c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

y en general

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (8)$$

De esta fórmula y (7), la serie de potencias de f en $x - a$ puede escribirse como

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \ldots \qquad (9)$$

La serie (9) se denomina **serie de Taylor** de f en a. El caso especial de (9), cuando $a = 0$, es (6), y se llama **serie de Maclaurin**.

Observe que la n-ésima suma parcial de la serie infinita (9) es el polinomio de Taylor de grado n de la función f en el número a, estudiado en la sección 8.1.

EJEMPLO 1 Calcule la serie de Maclaurin para e^x.

Solución Si $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$ para toda x; por tanto, $f^{(n)}(0) = 1$ para toda n. Así, de (6) se tiene la serie de Maclaurin:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (10)$$

◀

Observe que la serie para e^x del ejemplo anterior es la misma que la del ejemplo 3 de la sección 8.8.

EJEMPLO 2 (**a**) Obtenga la serie de Taylor para sen x en a. (**b**) Utilice la respuesta del inciso (a) para escribir la serie de Taylor de sen x en $\frac{1}{4}\pi$.

Solución

(**a**) Si $f(x) = \text{sen } x$, entonces $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\text{sen } x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \text{sen } x$, y así sucesivamente. De este modo, de la fórmula (8), $c_0 = \text{sen } a$, $c_1 = \cos a$, $c_2 = (-\text{sen } a)/2!$, $c_3 = (-\cos a)/3!$, $c_4 = (\text{sen } a)/4!$, etc. La serie de Taylor requerida se obtiene de (9), y es

$$\text{sen } x = \text{sen } a + (\cos a)(x - a) - (\text{sen } a)\frac{(x-a)^2}{2!} - (\cos a)\frac{(x-a)^3}{3!} + (\text{sen } a)\frac{(x-a)^4}{4!} + \ldots$$

(**b**) Con $a = \frac{1}{4}\pi$ en la serie anterior, se tiene

$$\begin{aligned}\text{sen } x &= \text{sen } \tfrac{1}{4}\pi + (\cos \tfrac{1}{4}\pi)(x - \tfrac{1}{4}\pi) - (\text{sen } \tfrac{1}{4}\pi)\frac{(x - \frac{1}{4}\pi)^2}{2!} - (\cos \tfrac{1}{4}\pi)\frac{(x - \frac{1}{4}\pi)^3}{3!} + (\text{sen } \tfrac{1}{4}\pi)\frac{(x - \frac{1}{4}\pi)^4}{4!} + \ldots \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x - \tfrac{1}{4}\pi) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{(x - \frac{1}{4}\pi)^2}{2!} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{(x - \frac{1}{4}\pi)^3}{3!} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{(x - \frac{1}{4}\pi)^4}{4!} + \ldots \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + (x - \tfrac{1}{4}\pi) - \frac{(x - \frac{1}{4}\pi)^2}{2!} - \frac{(x - \frac{1}{4}\pi)^3}{3!} + \frac{(x - \frac{1}{4}\pi)^4}{4!} + \ldots\right] \end{aligned} \qquad \textbf{(11)}$$

◀

Se puede deducir que una representación en serie de potencias de una función es única. Esto es, si dos funciones tienen los mismos valores de función en algún intervalo que contiene a a, y si las dos funciones tienen una representación en serie de potencias en $x - a$, entonces estas series deben ser la misma debido a que los coeficientes en la series se obtienen a partir de los valores de las funciones y sus derivadas en a. Por tanto, si una función tiene una representación en serie de potencias en $x - a$, esta serie debe ser su serie de Taylor en a. En consecuencia, la serie de Taylor para una función dada no se obtiene empleando la fórmula (9). Cualquier método que proporcione una serie de potencias en $x - a$ que representa la función, será la serie de Taylor de la función en a.

EJEMPLO 3 Utilice la serie (10) a fin de obtener la serie de Taylor para e^x en a.

Solución Primero se escribe $e^x = e^a e^{x-a}$ y después se utiliza la serie (10) donde x se reemplaza por $x - a$. Por tanto,

$$e^x = e^a\left[1 + (x - a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} + \ldots\right]$$ ◀

Una cuestión natural que surge es: Si una función tiene una serie de Taylor en $x - a$ cuyo radio de convergencia es $R > 0$, ¿esta serie representará la función para todos los valores de x del intervalo $(a - R, a + R)$? Para la mayoría de las funciones elementales la respuesta es sí. Sin embargo, existen funciones para las cuales la respuesta es no. El ejemplo siguiente muestra este hecho.

EJEMPLO 4 Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Obtenga la serie de Maclaurin para f, y demuestre que converge para todos los valores de x, y que sólo representa a $f(x)$ cuando $x = 0$.

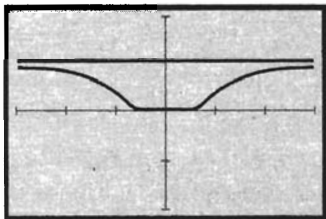
Solución Observe que f es continua en $x = 0$ porque $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0$ y $f(0) = 0$. A fin de obtener $f'(0)$, se aplica la definición de derivada.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x^2}} \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} (1/x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0} e^{1/x^2} = +\infty$, puede emplearse la regla de L'Hôpital. Por tanto,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{1/x^2}\left(-\frac{2}{x^3}\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{2e^{1/x^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por medio de un método semejante, empleando la definición de derivada y la regla de L'Hôpital, se obtiene 0 para cada derivada. Así, $f^{(n)}(0) = 0$ para toda n. Por tanto, la serie de Maclaurin para la función dada es $0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$. Esta serie converge a 0 para toda x; pero, si $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$. ◀



[−3, 3] por [−2, 2]

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$y = 1$

FIGURA 1

La figura 1 muestra la gráfica de la función del ejemplo 4 y su asíntota horizontal $y = 1$ trazadas en el rectángulo de inspección de [−3, 3] por [−2, 2]. Observe que la gráfica es tangente al eje x el origen, lo cual apoya el hecho de que $f'(0) = 0$. Lo "plano" de la gráfica en el origen es consistente con el hecho de que las derivadas de orden superior también son cero cuando $x = 0$.

El teorema siguiente proporciona un criterio para determinar si una función está representada por su serie de Taylor.

8.9.1 Teorema

Sea f una función tal que f y todas sus derivadas existen en algún intervalo $(a - r, a + r)$. Entonces la función está representada por su serie de Taylor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

para toda x tal que $|x - a| < r$ si y sólo si

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} R_n(x) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{f^{(n+1)}(z_n)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde cada z_n está entre x y a.

Demostración En el intervalo $(a - r, a + r)$, la función f satisface la hipótesis del teorema 8.1.1, entonces

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{12}$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f en a y $R_n(x)$ es el residuo, expresado como

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z_n)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1} \tag{13}$$

donde cada z_n está entre x y a.

Ahora bien, $P_n(x)$ es la n-ésima suma parcial de la serie de Taylor de f en a. De modo que si se demuestra que $\lim_{n \to +\infty} P_n(x)$ existe y es igual a $f(x)$ si y sólo si $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$, el teorema se habrá demostrado. De (12),

$$P_n(x) = f(x) - R_n(x)$$

Si $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$, se deduce de esta ecuación que

$$\begin{aligned}\lim_{n \to +\infty} Pn(x) &= f(x) - \lim_{n \to +\infty} R_n(x)\\ &= f(x) - 0\\ &= f(x)\end{aligned}$$

Ahora, dada la hipótesis de que $\lim_{n \to +\infty} P_n(x) = f(x)$ se desea demostrar que $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$. De (12),

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Así,

$$\begin{aligned}\lim_{n \to +\infty} R_n(x) &= f(x) - \lim_{n \to +\infty} P_n(x)\\ &= f(x) - f(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

Esto demuestra el teorema. ■

El teorema 8.9.1 también se cumple para otras formas del residuo $R_n(x)$ además de la forma de Lagrange.

A menudo es difícil aplicar el teorema 8.9.1 debido a que los z_n son arbitrarios. Sin embargo, en ocasiones puede obtenerse una cota superior para $R_n(x)$, y puede ser posible demostrar que el límite de la cota superior es cero conforme $n \to +\infty$. El límite siguiente es útil en algunos casos:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{para toda } x \tag{14}$$

Esto se deduce del ejemplo 2 de la sección 8.7, donde se demostró que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ es convergente para todos los valores de x, y en consecuencia, el límite de su n-ésimo término debe ser cero. De manera similar, como $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$ es convergente para todos los valores de x, entonces

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} = 0 \qquad \text{para toda } x \tag{15}$$

EJEMPLO 5 Aplique el teorema 8.9.1 a fin de demostrar que la serie de Maclaurin de e^x, obtenida en el ejemplo 1, representa la función para todos los valores de x.

Solución La serie de Maclaurin de e^x es la serie (10) y

$$R_n(x) = \frac{e^{z_n}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

donde cada z_n está entre 0 y x.

Se debe demostrar que $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 0$ para toda x. Se tienen tres casos: $x > 0, x < 0$ y $x = 0$.

Si $x > 0$, entonces $0 < z_n < x$; en consecuencia, $e^{z_n} < e^x$, por lo que

$$0 < \frac{e^{z_n}}{(n+1)!} x^{n+1} < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \textbf{(16)}$$

De (14), $\lim\limits_{n \to -\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, y así,

$$\lim_{n \to +\infty} e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Por tanto, de (16) y del teorema de estricción se infiere que $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$

Si $x < 0$, entonces $x < z_n < 0$ y $0 < e^{z_n} < 1$. Por tanto, si $x^{n+1} > 0$,

$$0 < \frac{e^{z_n}}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

y si $x^{n+1} < 0$, entonces

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e^{z_n}}{(n+1)!} x^{n+1} < 0$$

En cualquier caso, como $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, se concluye que $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 0$.

Por último, si $x = 0$, la serie tiene la suma de 1, la cual es e^0. En consecuencia, la serie (10) representa e^x para todos los valores de x. ◀

Del ejemplo anterior se puede escribir

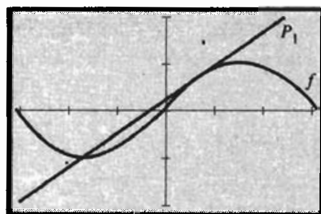
$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad \text{para toda } x \end{aligned}$$

y esto concuerda con el ejemplo 3 de la sección 8.8.

EJEMPLO 6 Demuestre que la serie de Taylor para sen x en a, obtenida en el ejemplo 2(a), representa la función para todos los valores de x.

Solución Se aplicará el teorema 8.9.1; esto es, se demostrará que

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} R_n(x) &= \lim_{n \to +\infty} \frac{f^{(n+1)}(z_n)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$



$[-\pi, \pi]$ por $[-2, 2]$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$P_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + (x - \frac{1}{4}\pi)\right]$

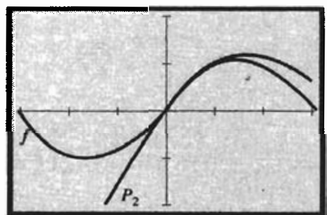
FIGURA 2

Como $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f^{(n+1)}(z_n)$ será uno de los números: $\cos z_n$, $\operatorname{sen} z_n$, $-\cos z_n$ o $-\operatorname{sen} z_n$. En cualquier caso, $|f^{(n+1)}(z_n)| \leq 1$. Por tanto,

$$0 < |R_n(x)| \leq \frac{|x - a|^{n+1}}{(n + 1)!} \tag{17}$$

De (15), $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{|x - a|^{n+1}}{(n + 1)!} = 0$. Así, por el teorema de estricción y (17) se deduce que $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$. ◀

En el ejemplo 2(b), se obtuvo la serie de Taylor (11) para sen x en $\frac{1}{4}\pi$; del ejemplo 6 se sabe que esta serie representa sen x para todos los valores de x. La gráfica de la función seno y de los polinomios de Taylor $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ y $P_5(x)$ en $\frac{1}{4}\pi$ están trazados en las figuras 2 a 6, respectivamente. Observe cómo aproximan las gráficas de los polinomios la gráfica de la función seno en $\frac{1}{4}\pi$, y cómo las aproximaciones mejoran conforme n se incrementa.



$[-\pi, \pi]$ por $[-2, 2]$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$P_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + \left(x - \frac{1}{4}\pi\right) - \frac{\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^2}{2!}\right]$

FIGURA 3

▶ ***EJEMPLO 7*** Utilice la serie de Taylor para sen x en $\frac{1}{4}\pi$ para calcular el valor de sen 47° con una exactitud de cuatro cifras decimales. Compare el resultado con el valor de sen 47° obtenido en una calculadora.

Solución Primero se expresa sen 47° en radianes: 47° equivale a $\frac{47}{180}\pi$ rad. De la serie (11), con $x = \frac{47}{180}\pi$ y $x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{90}\pi$, se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \tfrac{47}{180}\pi &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{90}\pi - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{90}\pi)^2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{6}(\tfrac{1}{90}\pi)^3 + \ldots \\ &\approx \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1 + 0.03490 - 0.00061 - 0.000002 + \ldots)\end{aligned}$$

Si se considera $\sqrt{2} \approx 1.41421$ y se emplean los tres primeros términos de la serie, se obtiene

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \tfrac{47}{180}\pi &\approx (0.70711)(1.03429) \\ &\approx 0.73136\end{aligned}$$

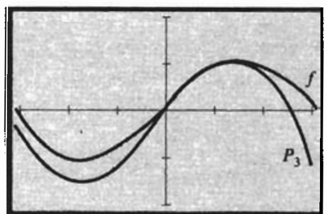
Al redondear a cuatro cifras decimales se tiene sen 47° ≈ 0.7314. El error cometido al utilizar los tres primeros términos es $R_2(\frac{47}{180}\pi)$ y de (17),

$$\left|R_2\left(\frac{47}{180}\pi\right)\right| \leq \frac{(\frac{1}{90}\pi)^3}{3!} \approx 0.00001$$

Entonces, el resultado está entre 0.73136 − 0.00001 y 0.73136 + 0.00001; esto es, el resultado está entre 0.73135 y 0.73137. Así, con una exactitud de cuatro cifras decimales, se tiene

$$\operatorname{sen} \tfrac{47}{180}\pi \approx 0.7314$$

En la calculadora se obtiene sen 47° = 0.731354, lo que, con cuatro cifras decimales, concuerda con el resultado anterior. ◀



$[-\pi, \pi]$ por $[-2, 2]$

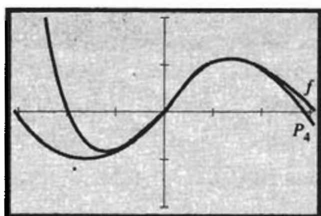
$f(x) = \operatorname{sen} x$

$P_3(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + \left(x - \frac{1}{4}\pi\right) - \frac{\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^2}{2!} - \frac{\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^3}{3!}\right]$

FIGURA 4

Si se considera $a = 0$ en la serie de Taylor para sen x, obtenida en el ejemplo 2(a), se tiene la serie de Maclaurin:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n + 1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad \text{para toda } x\end{aligned}$$

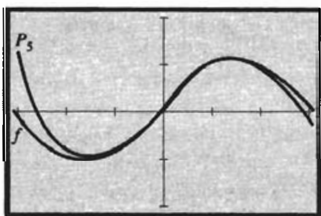


$[-\pi, \pi]$ por $[-2, 2]$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$$P_4(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + \left(x - \frac{1}{4}\pi\right) - \frac{\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^2}{2!} - \frac{\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^4}{4!}\right]$$

FIGURA 5



$[-\pi, \pi]$ por $[-2, 2]$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$$P_5(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + (x - \tfrac{1}{4}\pi) - \frac{(x - \frac{1}{4}\pi)^2}{2!} - \frac{(x - \frac{1}{4}\pi)^3}{3!} + \frac{(x - \frac{1}{4}\pi)^4}{4!} + \frac{(x - \frac{1}{4}\pi)^5}{5!}\right]$$

FIGURA 6

Al diferenciar término a término esta serie (vea el ejercicio 1), se obtiene la serie de Maclaurin para cos x:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad \text{para toda } x$$

EJEMPLO 8 Utilice series para evaluar con cinco cifras decimales

$$\int_{0.5}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

Apoye la respuesta empleando NINT en la graficadora.

Solución No puede obtenerse una antiderivada de la integral en términos de funciones elementales. Sin embargo, de la serie de Maclaurin para sen x se tiene

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x$$
$$= \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots\right)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \ldots$$

lo cual es cierto para toda $x \neq 0$. Al emplear la integración término a término resulta

$$\int_{0.5}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \frac{x^9}{9 \cdot 9!} - \ldots \Big]_{0.5}^{1}$$
$$\approx (1 - 0.0555555 + 0.0016667 - 0.0000283 + 0.0000003 - \ldots)$$
$$- (0.5 - 0.0069444 + 0.0000521 - 0.0000002 + \ldots)$$

Cada conjunto de paréntesis contiene una serie alternante convergente con $|u_{n+1}| < |u_n|$. En el primer grupo de paréntesis se emplean los primeros cuatro términos debido a que el error obtenido es menor que 0.0000003, y en el segundo conjunto, se utilizan los tres primeros términos, donde el error obtenido es menor que 0.0000002. Al realizar los cálculos y redondear a cinco cifras decimales resulta

$$\int_{0.5}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \approx 0.45298$$

En la graficadora se obtiene

NINT((sen x)/x, 0.5, 1) = 0.45298

lo cual apoya la respuesta. ◀

EJERCICIOS 8.9

1. Obtenga la serie de Maclaurin para $\cos x$ diferenciando término a término la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$.
2. Obtenga la serie de Maclaurin para $\operatorname{senh} x$ aplicando la fórmula (6), y demostrando que la serie representa a $\operatorname{senh} x$ para todos los valores de x.
3. Obtenga la serie de Maclaurin para $\cosh x$ aplicando la fórmula (6), y demostrando que la serie representa a $\cosh x$ para todos los valores de x.
4. Obtenga la serie de Maclaurin para $\cosh x$ efectuando operaciones sobre las series de Maclaurin para e^x y e^{-x}.
5. Obtenga la serie de Maclaurin para $\operatorname{senh} x$ realizando operaciones sobre las series de Maclaurin para e^x y e^{-x}.
6. Obtenga la serie de Maclaurin para $\operatorname{senh} x$ diferenciando término a término la serie de Maclaurin para $\cosh x$. También diferencie la serie de Maclaurin para $\operatorname{senh} x$ a fin de obtener $\cosh x$.
7. Obtenga la serie de Taylor para e^x en 3 utilizando la serie de Maclaurin para e^x.
8. Obtenga la serie de Taylor para e^{-x} en 2 utilizando la serie de Maclaurin para e^x.

En los ejercicios 9 a 14, obtenga una representación en serie de potencias para la función en el número a, y determine su radio de convergencia. Apoye la respuesta en la graficadora.

9. $f(x) = \ln x;\ a = 1$
10. $f(x) = \sqrt[4]{x};\ a = 1$
11. $f(x) = \sqrt[3]{x};\ a = 8$
12. $f(x) = \operatorname{sen} x;\ a = \frac{1}{6}\pi$
13. $f(x) = \cos x;\ a = \frac{1}{3}\pi$
14. $f(x) = 2^x;\ a = 0$
15. Obtenga la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen}^2 x$.
Sugerencia: $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.
16. Obtenga la serie de Maclaurin para $\cos^2 x$.
Sugerencia: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.
17. Determine los tres primeros términos diferentes de cero de la serie de Maclaurin para $\tan x$.
18. Determine los tres primeros términos diferentes de cero de la serie de Taylor para $\cot x$ en $\frac{1}{2}\pi$.
19. Utilice la respuesta del ejercicio 17 y la diferenciación término a término para obtener los tres primeros términos diferentes de cero de la serie de Maclaurin para $\sec^2 x$.
20. Emplee la respuesta del ejercicio 18 y la diferenciación término a término para obtener los tres primeros términos diferentes de cero de la serie de Taylor para $\csc^2 x$ en $\frac{1}{2}\pi$.
21. Utilice la respuesta del ejercicio 17 y la integración término a término para obtener los tres primeros términos diferentes de cero de la serie de Maclaurin para $\ln \sec x$.
22. Utilice la respuesta del ejercicio 18 y la integración término a término para obtener los tres primeros términos diferentes de cero de la serie de Taylor para $\ln \operatorname{sen} x$ en $\frac{1}{2}\pi$.

En los ejercicios 23 a 28, utilice una serie de potencias para calcular con la exactitud indicada el valor de la cantidad y compare el resultado con el obtenido en una calculadora.

23. $\cos 58°$; cuatro cifras decimales.
24. $\sqrt[5]{e}$; cuatro cifras decimales.
25. $\sqrt[5]{30}$; cinco cifras decimales.
26. $\operatorname{senh} \frac{1}{2}$; cinco cifras decimales.
27. $\ln(0.9)$; cuatro cifras decimales.
28. $\sqrt[3]{29}$; tres cifras decimales.
29. Emplee la serie de Maclaurin para e^x a fin de calcular el valor de e con una exactitud de siete cifras decimales, y demuestre que la respuesta tiene la exactitud requerida.

En los ejercicios 30 a 33, utilice series para evaluar con una exactitud de tres cifras decimales la integral definida. Apoye la respuesta empleando NINT *en la graficadora.*

30. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\, e^{-x^2}\, dx$
31. $\displaystyle\int_0^{1/2} \operatorname{sen} x^2\, dx$
32. $\displaystyle\int_0^1 \cos \sqrt{x}\, dx$
33. $\displaystyle\int_0^{0.1} \ln(1 + \operatorname{sen} x)\, dx$
34. (a) Obtenga la serie de Maclaurin para $\int_0^x f(t)\, dt$, donde

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Observe que f es continua en 0 debido a que $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = f(0)$. (b) Trace en el mismo rectángulo de inspección las gráficas de NINT($f(t)$, 0, x) y del polinomio de Maclaurin que consiste de los diez primeros términos diferentes de cero de la serie del inciso (a). (c) Aplique la serie del inciso (a) para calcular $\int_0^{1/3} f(t)\, dt$ con una exactitud de tres cifras decimales y apoye la respuesta empleando NINT en la graficadora.

35. (a) Obtenga la serie de Maclaurin para $\int_0^x g(t)\, dt$, donde

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Observe que g es continua en 0 debido a que $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = g(0)$. (b) Trace en el mismo rectángulo de inspección las gráficas de NINT($g(t)$, 0, x) y del polinomio de Maclaurin que consiste de los diez primeros términos diferentes de cero de la serie del inciso (a). (c) Aplique la serie del inciso (a) para calcular $\int_0^1 g(t)\, dt$ con una exactitud de tres cifras decimales y apoye la respuesta empleando NINT en la graficadora.

36. La función E definida por

$$E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

se denomina *función error*, y es importante en estadística matemática. Obtenga la serie de Maclaurin para la función error.

37. Determine a_n $(n = 0, 1, 2, 3, 4)$ de modo que el polinomio

$$f(x) = 3x^4 - 17x^3 + 35x^2 - 32x + 17$$

se escriba en la forma

$$f(x) = a_4(x - 1)^4 + a_3(x - 1)^3 + a_2(x - 1)^2 + a_1(x - 1) + a_0$$

38. Determine a_n $(n = 0, 1, 2, 3)$ de modo que el polinomio

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 3$$

se escriba en la forma

$$f(x) = a_3(x + 2)^3 + a_2(x + 2)^2 + a_1(x + 2) + a_0$$

39. Cuando se utiliza una serie de Taylor de una función f en a para calcular un valor de función particular, ¿qué es lo que determina la elección de a? Invente un ejemplo para ilustrar la respuesta.

8.10 SERIES DE POTENCIAS PARA LOGARITMOS NATURALES Y SERIE BINOMIAL

Se concluye el estudio de series infinitas en esta sección al considerar y aplicar dos series básicas: (i) la serie para calcular logaritmos naturales y (ii) la serie binomial.

A fin de obtener la serie para calcular logaritmos naturales, primero se determinará una representación en serie de potencias de $\ln(1 + x)$, en el ejemplo ilustrativo siguiente

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Considere la función f definida por

$$f(t) = \frac{1}{1 + t}$$

Una representación en serie de potencias para esta función está dada por la serie (4) de la sección 8.7, la cual es

$$\frac{1}{1 + t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots \qquad \text{si } |t| < 1$$

Al integrar término a término se obtiene

$$\int_0^x \frac{dx}{1 + t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^n \, dt \qquad \text{si } |x| < 1$$

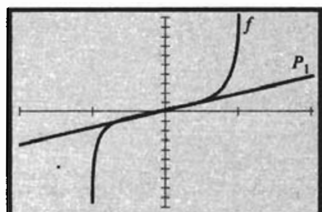
Por tanto,

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n + 1} + \ldots \qquad \text{si } |x| < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad \text{si } |x| < 1 \qquad \textbf{(1)}$$

Como $|x| < 1$, $|1 + x| = 1 + x$. Por esta razón no son necesarias las barras de valor absoluto al escribir $\ln(1 + x)$. ◀

En el ejemplo ilustrativo 1, el teorema 8.8.4 permite concluir que la serie de potencias (1) representa la función sólo para valores de x en el intervalo abierto $(-1, 1)$. Sin embargo, la serie de potencias es convergente en el extremo derecho 1, como se mostró en el ejemplo 1 de la sección 8.5. Cuando $x = -1$, la serie de potencias se transforma en la negativa de la serie armó-

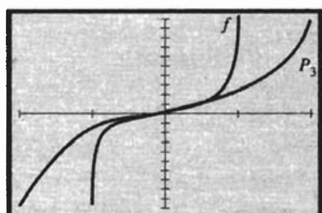


[−2, 2] por [−10, 10]

$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

$P_1(x) = 2x$

FIGURA 1

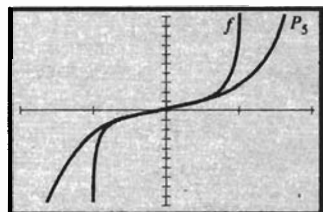


[−2, 2] por [−10, 10]

$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

$P_3(x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$

FIGURA 2



[−2, 2] por [−10, 10]

$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

$P_5(x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)$

FIGURA 3

nica y es divergente. En consecuencia, el intervalo de convergencia de la serie de potencias (1) es (−1, 1].

En el ejemplo ilustrativo siguiente se muestra que la serie de potencias (1) representa $\ln(1 + x)$ en $x = 1$ al probar que la suma de la serie

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ es ln 2.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Para la serie infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ la n-énesima suma parcial es

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} \qquad \textbf{(2)}$$

De la definición 8.3.2 se deduce que si se muestra que $\lim_{n\to+\infty} s_n = \ln 2$, se habrá probado que la suma de la serie es ln 2.

De álgebra, se tiene la siguiente fórmula para la suma de una serie geométrica finita:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

De esta fórmula, con $a = 1$ y $r = -t$, se obtiene

$$1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-t)^{n-1} = \frac{1 - (-t)^n}{1 + t}$$

lo que puede escribirse como

$$1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \frac{1}{1+t} + (-1)^{n+1}\frac{t^n}{1+t}$$

Al integrar de 0 a 1 resulta

$$\int_0^1 [1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1}]\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$$

de donde,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \ln 2 + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt \qquad \textbf{(3)}$$

Con respecto a (2), se observa que el miembro izquierdo de (3) es s_n. Si se considera

$$R_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$$

se puede escribir (3) como

$$S_n = \ln 2 + R_n \qquad \textbf{(4)}$$

Como $\frac{t^n}{1+t} \le t^n$ para toda t en [0, 1], entonces, por el teorema 4.6.1, se obtiene

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt \le \int_0^1 t^n\,dt$$

En consecuencia,

$$0 \leq |R_n| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, de la desigualdad anterior y del teorema de estricción se infiere que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$. Por tanto, de (4),

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} s_n &= \ln 2 + \lim_{n\to+\infty} R_n \\ &= \ln 2\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \\ &= \ln 2\end{aligned} \tag{5}$$

◀

De los ejemplos ilustrativos 1 y 2 se puede concluir que la serie de potencias (1) representa $\ln(1 + x)$ para toda x en su intervalo de convergencia $(-1, 1]$.

Aunque la suma de la serie (5) es ln 2, esta serie converge muy lentamente para aplicarla en el cálculo de ln 2. Se necesita otra serie para el cálculo de logaritmos naturales, y ahora se procederá a obtenerla.

De (1)

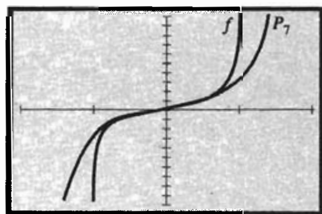
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots \quad \text{para } x \text{ en } (-1, 1] \tag{6}$$

Si x se sustituye por $-x$ en esta serie, resulta

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \quad \text{para } x \text{ en } [-1, 1) \tag{7}$$

Al restar término a término (7) de (6) se obtiene

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots\right) \quad \text{si } |x| < 1 \tag{8}$$



[−2, 2] por [−10, 10]

$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$

$P_7(x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7}\right)$

FIGURA 4

Las gráficas de $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ y de los polinomios $P_1(x)$, $P_3(x)$, $P_5(x)$ y $P_7(x)$ de la serie (8) se han trazado en las figuras 1 a 4, respectivamente, mostrando cómo las gráficas de los polinomios aproximan la gráfica de f cuando $|x| < 1$.

La serie (8) puede emplearse para calcular el logaritmo natural de cualquier número positivo. Para aplicar la serie al cálculo de ln y se considera

$$y = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{y entonces} \quad x = \frac{y-1}{y+1} \quad \text{y} \quad |x| < 1 \tag{9}$$

▶ **EJEMPLO 1** Calcule ln 2 con una exactitud de cinco cifras decimales y compare el resultado con el obtenido en una calculadora.

Solución De (9), si $y = 2$, entonces $x = \frac{1}{3}$. Por tanto, de (8),

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \frac{1}{11 \cdot 3^{11}} + \ldots\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1\,215} + \frac{1}{15\,309} + \frac{1}{177\,147} + \frac{1}{1\,948\,617} + \ldots\right)$$

$$\approx 2(0.333333 + 0.012346 + 0.000823 + 0.000065 + 0.000006 + 0.000001 + \ldots)$$

Al utilizar los primeros seis términos del paréntesis, multiplicar por 2, y redondear a cinco cifras decimales se obtiene

$$\ln 2 \approx 0.69315$$

lo que concuerda con el valor obtenido en la calculadora. ◀

A fin de obtener la *serie binominal*, primero se considera el teorema del binomio estudiado en álgebra. El teorema del binomio expresa $(a + b)^m$, donde m es un número entero positivo, como la suma de potencias de a y b como sigue:

$$(a + b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}b^2 + \ldots + \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)}{k!}a^{m-k}b^k + \ldots + b^m$$

Al considerar $a = 1$ y $b = x$, y aplicar el teorema del binomio a la expresión $(1 + x)^m$, donde m no es un número entero positivo, se obtiene la serie de potencias

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \qquad \textbf{(10)}$$

Esta es la serie de Maclaurin para $(1 + x)^m$ denominada **serie binomial**. Para determinar el radio de convergencia se aplica el criterio de la razón y se obtiene

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{u_n + 1}{u_n}\right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\dfrac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}}{\dfrac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!}x^n} \right|$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{m-n}{n+1}\right| |x|$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{\dfrac{m}{n} - 1}{1 + \dfrac{1}{n}}\right| |x|$$

$$= |x|$$

Por lo que la serie es convergente si $|x| < 1$. A continuación se demostrará que la serie representa $(1 + x)^m$ para todos los números reales m si x está en el intervalo abierto $(-1, 1)$. Esto no se hará calculando $R_n(x)$ y mostrando que su límite es cero porque eso resulta bastante difícil, como pronto lo verá si lo intenta. En lugar de esto, se empleará el siguiente método. Sea

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!}x^n \qquad |x| < 1 \qquad \textbf{(11)}$$

Se desea demostrar que $f(x) = (1 + x)^m$, donde $|x| < 1$. Por el teorema 8.8.3,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} \qquad |x| < 1 \tag{12}$$

Al multiplicar ambos miembros de (12) por x, por el teorema 8.3.6, se obtiene

$$xf'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{(n-1)!} x^{n} \tag{13}$$

Si se reescribe el miembro derecho de (12), resulta

$$f'(x) = m + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1}$$

Al expresar esta suma con el límite inferior disminuido en 1, y sustituyendo n por $n + 1$, se tiene

$$f'(x) = m + \sum_{n=1}^{+\infty} (m-n) \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} x^{n}$$

En (13) se multiplica el numerador y el denominador por n para obtener

$$xf'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} x^{n}$$

La serie para $f'(x)$ y $xf'(x)$ son absolutamente convergentes para $|x| < 1$. Así, por el teorema 8.3.7, se pueden sumar término a término y la serie resultante también será absolutamente convergente para $|x| < 1$. De la adición,

$$(1 + x)f'(x) = m\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} x^{n}\right]$$

Debido a (11), la expresión entre corchetes es $f(x)$, entonces

$$(1 + x)f'(x) = mf(x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{1 + x}$$

El miembro izquierdo de la ecuación anterior es $D_x[\ln f(x)]$; así,

$$\frac{d}{dx}[\ln f(x)] = \frac{m}{1 + x}$$

Sin embargo, también se sabe que

$$\frac{d}{dx}[\ln (1 + x)^m] = \frac{m}{1 + x}$$

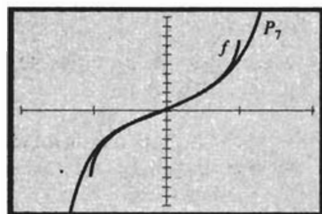
Como $\ln f(x)$ y $\ln(1 + x)^m$ tienen la misma derivada, entonces difieren por una constante. En consecuencia,

$$\ln f(x) = \ln(1 + x)^m + C$$

De (11), $f(0) = 1$. Por tanto, $C = 0$; de modo que

$$f(x) = (1 + x)^m$$

Así, se ha demostrado la siguiente forma general del teorema del binomio.



[−2, 2] por [−2, 2]

$f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$

$P_7(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$

FIGURA 5

8.10.1 Teorema del binomio

Si m es cualquier número real, entonces

$$(1 + x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!}x^n$$

para todos los valores de x tales que $|x| < 1$.

Si m es un número entero positivo, la serie binomial termina después de un número finito de términos.

EJEMPLO 2 Exprese como una serie de potencias en x:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

Solución Del teorema del binomio, cuando $|x| < 1$

$$(1 + x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdot \ldots \cdot(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3 + \ldots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2^n n!}x^n + \ldots$$ ◀

EJEMPLO 3 Del resultado del ejemplo 2, obtenga una serie binomial para $(1 - x^2)^{-1/2}$, y utilícela para determinar una serie de potencias para $\operatorname{sen}^{-1} x$. Apoye gráficamente la respuesta.

Solución Se sustituye x por $-x^2$ en la serie para $(1 + x)^{-1/2}$ y se obtiene, para $|x| < 1$,

$$(1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2^n n!}x^{2n} + \ldots$$

Al integrar término a término resulta

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2^n n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen}^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2^n n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{para } |x| < 1$$

La figura 5 muestra las gráficas de

$$f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x \quad \text{y} \quad P_7(x) = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \tfrac{5}{112}x^7$$

en el rectángulo de inspección de [−2, 2] por [−2, 2]. El hecho de que la gráfica de $P_7(x)$ aproxima la gráfica de f para $|x| < 1$ apoya la respuesta. ◀

EJEMPLO 4 Aplique la serie de potencias obtenida en el ejemplo 3 para calcular $\operatorname{sen}^{-1} 0.35$ con una exactitud de cuatro cifras decimales, y compare el resultado con el obtenido en una calculadora.

Solución Con $x = 0.35$ en $P_7(x)$, considerando los primeros cuatro términos diferentes de cero de la serie para $\operatorname{sen}^{-1} x$, se tiene

$$\begin{aligned} P_7(0.35) &= 0.35 + \tfrac{1}{6}(0.35)^3 + \tfrac{3}{40}(0.35)^5 + \tfrac{5}{112}(0.35)^7 \\ &\approx 0.35 + 0.00715 + 0.00039 + 0.00003 \\ &\approx 0.3576 \end{aligned}$$

En la calculadora se obtiene el mismo valor con cuatro cifras decimales.

EJEMPLO 5 (a) Exprese $(1 - \sqrt{x})^{2/3}$ como una serie en x. (b) Del resultado del inciso (a), calcule con una exactitud de tres cifras decimales el valor de

$$\int_0^{1/4} (1 - \sqrt{x})^{2/3}\, dx$$

Apoye la respuesta empleando NINT en la graficadora.

Solución

(a) Se aplica el teorema del binomio con $m = \frac{2}{3}$ obteniéndose

$$\begin{aligned} (1 + x)^{2/3} &= 1 + \frac{\frac{2}{3}}{1!}x + \frac{\frac{2}{3}(-\frac{1}{3})}{2!}x^2 + \frac{\frac{2}{3}(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})}{3!}x^3 + \frac{\frac{2}{3}(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})(-\frac{7}{3})}{4!}x^4 + \dots \quad \text{si } |x| < 1 \\ &= 1 + \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2 + \tfrac{4}{81}x^3 - \tfrac{7}{243}x^4 + \dots \quad \text{si } |x| < 1 \end{aligned}$$

Si se sustituye x por $-\sqrt{x}$, resulta

$$(1 - \sqrt{x})^{2/3} = 1 - \tfrac{2}{3}x^{1/2} - \tfrac{1}{9}x - \tfrac{4}{81}x^{3/2} - \tfrac{7}{243}x^2 + \dots \quad \text{si } 0 \le x < 1$$

(b) Si se integra término a término la serie anterior se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^{1/4} (1 - \sqrt{x})^{2/3}\, dx &= x - \tfrac{4}{9}x^{3/2} - \tfrac{1}{18}x^2 - \tfrac{8}{405}x^{5/2} - \tfrac{7}{729}x^3 - \dots \Big]_0^{1/4} \\ &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{18}\cdot\tfrac{1}{16} - \tfrac{8}{405}\cdot\tfrac{1}{32} - \tfrac{7}{729}\cdot\tfrac{1}{64} - \dots \\ &\approx 0.2500 - 0.0555 - 0.0035 - 0.0006 - 0.00002 - \dots \\ &\approx 0.190 \end{aligned}$$

En la graficadora se obtiene, con tres cifras decimales,

$$\text{NINT}((1 - \sqrt{x})^{2/3}, 0, 0.25) = 0.190$$

lo cual apoya la respuesta.

EJERCICIOS 8.10

En los ejercicios 1 a 4, utilice la serie de potencias (8) para calcular el logaritmo natural con una exactitud de cuatro cifras decimales y compare el resultado con el obtenido en una calculadora.

1. $\ln 3$
2. $\ln 0.8$
3. $\ln 1.4$
4. $\ln 2.5$
5. (a) Demuestre que $\ln x = \ln a + \ln\left(1 + \dfrac{x - a}{a}\right)$, donde $a > 0$. (b) Utilice la ecuación del inciso (a) y la se-

rie (1) de $\ln(1 + x)$ a fin de obtener la serie de Taylor para $\ln x$ en a, donde $a > 0$.

6. Emplee el resultado del inciso (b) del ejercicio 5 a fin de obtener la serie de Taylor de $\ln x$ en 1. (**b**) Utilice la serie obtenida en el inciso (a) para calcular ln 0.8 con cuatro cifras decimales. Compare el cálculo con el del ejercicio 2.

7. (**a**) Use el resultado del inciso (b) del ejercicio 5 a fin de obtener la serie de Taylor de $\ln x$ en 2. (**b**) Dado $\ln 2 = 0.6931$, utilice la serie obtenida en el inciso (a) para calcular ln 3 con una exactitud de cuatro cifras decimales. Compare el cálculo con el del ejercicio 1.

8. Obtenga una serie de potencias para $\ln(1 + ax)$ integrando término a término de 0 a x una representación en serie de potencias de $\dfrac{1}{1 + at}$.

En los ejercicios 9 a 18, utilice una serie binomial para obtener la serie de Maclaurin de la función y determine su radio de convergencia. Apoye la respuesta en la graficadora.

9. $f(x) = \sqrt{1 + x}$

10. $f(x) = (3 - x)^{-2}$

11. $f(x) = (4 + x)^{-1/2}$

12. $f(x) = \sqrt[3]{8 + x}$

13. $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

14. $f(x) = (4 + x^2)^{-1}$

15. $f(x) = (9 + x^4)^{-1/2}$

16. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x}}$

17. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x}}$

18. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1 + x^2}}$

19. (**a**) Exprese $\sqrt[4]{1 + x^2}$ como una serie de potencias en x, obteniendo primero una serie de potencias para $\sqrt[4]{1 + x}$, y reemplazando después x por x^2. (**b**) Utilice el resultado del inciso (a) para calcular con una exactitud de tres cifras decimales el valor de $\int_0^{1/2} \sqrt[4]{1 + x^2}\, dx$. Apoye la respuesta empleando NINT en la graficadora.

20. (**a**) Exprese $(1 - x^3)^{-1/2}$ como una serie de potencias en x, obteniendo primero una serie de potencias para $(1 - x)^{-1/2}$, y sustituyendo después x por x^3. (**b**) Utilice el resultado del inciso (a) para calcular con una exactitud de tres cifras decimales el valor de $\int_0^{1/2} (1 - x^3)^{-1/2}\, dx$. Apoye la respuesta empleando NINT en la graficadora.

En los ejercicios 21 a 26, utilice series para calcular con una exactitud de tres cifras decimales el valor de la integral definida. Apoye la respuesta empleando NINT *en la graficadora.*

21. $\displaystyle\int_0^{1/3} \sqrt{1 + x^3}\, dx$

22. $\displaystyle\int_0^{2/5} \sqrt[3]{1 + x^4}\, dx$

23. $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt[3]{8 + x^2}\, dx$

24. $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{1 - x^3}\, dx$

25. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$

26. $\displaystyle\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}$

27. Sea

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

(**a**) Demuestre que f es continua en 0. (**b**) Obtenga una representación en serie de potencias de $\int_0^x f(t)\, dt$ y determine su radio de convergencia. (**c**) Trace en el mismo rectángulo de inspección las gráficas de NINT($f(t)$, 0, x) y el polinomio que consiste de los primeros diez términos diferentes de cero de la serie del inciso (b).

28. Haga el ejercicio 27 si

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}^{-1}\, t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

29. Para la función del ejercicio 27, utilice la serie del inciso (b) de ese ejercicio para calcular $\int_0^{1/3} f(t)\, dt$ y apoye la respuesta empleando NINT en la graficadora.

30. Para la función del ejercicio 28, utilice la serie del inciso (b) de ese ejercicio para calcular $\int_0^{1/2} f(t)\, dt$ y apoye la respuesta empleando NINT en la graficadora.

31. Obtenga la serie de Maclaurin de $\text{senh}^{-1} x$ integrando término a término la serie binomial para $(1 + t^2)^{-1/2}$ y determine su radio de convergencia.

32. Obtenga la serie de Maclaurin de $\tanh^{-1} x$ integrando término a término la serie binomial para $(1 - t^2)^{-1}$ y calcule su radio de convergencia.

En los ejercicios 33 a 36, utilice una serie de Maclaurin para calcular un valor aproximado de la cantidad con una exactitud de cuatro cifras decimales y compare el resultado con el valor que se obtiene en la calculadora. En el ejercicio 35 emplee la serie determinada en el ejercicio 31, y en el ejercicio 36 utilice la serie obtenida en el ejercicio 32.

33. $\text{sen}^{-1} 0.24$

34. $\text{sen}^{-1} (-0.62)$

35. $\text{senh}^{-1} (-0.15)$

36. $\tanh^{-1} 0.27$

37. Al integrar término a término de 0 a x una representación en serie de potencias para $\ln(1 - t)$, demuestre que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n - 1)n} = x + (1 - x)\ln(1 - x)$$

38. Al integrar término a término de 0 a x una representación en serie de potencias para $\ln(1 + t)$, demuestre que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n + 1)(n + 2)} = 2 \ln 2 - 1$$

39. La expresión relativista para E_c, la medida de la energía cinética de una partícula, obtenida al restar la medida de la energía en reposo de la medida de la energía total es

$$E_c = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 \qquad \textbf{(14)}$$

donde m_0 es la medida de la masa de la partícula en reposo, c es la medida de la velocidad de la luz en el vacío, y v es la medida de la velocidad de la partícula. Para valores pequeños de v, comparados con c, la medida de la energía cinética newtoniana está dada por

$$E_c = \tfrac{1}{2} m_0 v^2$$

Deduzca este hecho desarrollando $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ mediante el teorema del binomio y sustituyendo en (14) para obtener

$$E_c = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \frac{5}{16} m_0 \frac{v^6}{c^4} + \ldots$$

40. Obtenga la serie de Maclaurin para $\displaystyle\int_0^x \frac{t^p}{\sqrt{1 - t^2}} dt$ si p es un número entero no negativo. Determine el radio de convergencia de la serie.

41. Explique cómo puede emplearse la respuesta del ejercicio 32 a fin de obtener la serie (8) para $\dfrac{1 + x}{1 - x}$.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 8

▶ SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 8

1. Qué es la *fórmula de Taylor* y en qué condiciones se cumple esta fórmula? ¿Qué es la *fórmula de Maclaurin*?

2. ¿Qué es el *polinomio de Taylor de grado n* y la *forma de Lagrange del residuo* para una función f?

3. Invente un ejemplo en el que se calcule el polinomio de Taylor de grado tres y el residuo en forma de Lagrange para una función racional, donde la elección de a es diferente de cero. Explique cómo se estima el error cuando el polinomio se emplea para calcular un valor de función.

4. Responda la sugerencia 3 para una función exponencial.

5. Responda la sugerencia 3 para una función trigonométrica.

6. ¿Qué es una *función sucesión*? ¿Qué es una *sucesión*?

7. Defina el *límite de una sucesión*. ¿Qué significa *sucesión convergente* y *sucesión divergente*? Proporcione un ejemplo de una sucesión convergente y muestre por qué es convergente; haga lo mismo para una sucesión divergente.

8. Defina una *sucesión creciente*, y dé un ejemplo; haga lo mismo para una *sucesión decreciente*. Proporcione un ejemplo de una sucesión que no sea *monótona*.

9. ¿Qué es una *cota inferior* de una sucesión? Proporcione un ejemplo de una sucesión que tenga una cota inferior, e indique su *máxima cota inferior*.

10. ¿Qué es una *cota superior* de una sucesión? Proporcione un ejemplo de una sucesión que tenga una cota superior, e indique su *mínima cota superior*.

11. ¿Cuáles dos propiedades para sucesiones monótonas son equivalentes? Dé un ejemplo de una sucesión creciente y establezca esas propiedades para su ejemplo; haga lo mismo para una sucesión decreciente.

12. ¿Qué es una *sucesión de sumas parciales* de una serie infinita? ¿Por qué es importante esta sucesión?

13. ¿Qué significa *serie infinita convergente* y *serie infinita divergente*? Dé un ejemplo de una serie infinita convergente y muestre por qué es convergente; haga lo mismo para una serie infinita divergente.

14. ¿Qué es la *serie armónica*? ¿Es convergente o divergente esta serie, y por qué?

15. ¿Qué es una *serie geométrica*? ¿Cuáles series geométricas son convergentes y cuales son divergentes? Dé un ejemplo de una serie geométrica convergente y dé otro de una serie geométrica divergente. ¿Cuál es la suma de una serie geométrica convergente? Ilustre mediante un ejemplo.

16. Establezca algunas propiedades de las sumas finitas que puedan extenderse a las series infinitas. Muestre cada una de estas propiedades para series infinitas proporcionando un ejemplo.

17. Establezca el *criterio de comparación*. Proporcione un ejemplo que muestre cómo se aplica el criterio de comparación para probar que una serie infinita es convergente; dé otro ejemplo en el que se pruebe que una serie infinita es divergente.

18. Responda la sugerencia 17 para el *criterio de comparación por paso al límite*.

19. ¿Qué es una *serie p*? ¿Cuáles series p son convergentes y cuales son divergentes? Dé un ejemplo de una serie p convergente y otro de una serie p divergente.

20. Establezca el *criterio de la integral*. Proporcione un ejemplo que muestre cómo se aplica el criterio de la integral para probar que una serie infinita es convergente; dé otro ejemplo en el que se pruebe que una serie infinita es divergente.

21. ¿Qué es una *serie alternante*? Dé un ejemplo de una serie alternante convergente y un ejemplo de una serie alternante que sea divergente.

22. ¿Qué es el *criterio de las series alternantes*? Proporcione un ejemplo que muestre cómo se aplica el criterio de las series alternantes para probar convergencia.

23. ¿Cómo se estima el error introducido cuando la suma de una serie alternante convergente se aproxima mediante un número finito de términos de la serie? Dé un ejemplo que ilustre la respuesta.

24. Defina *convergencia absoluta* y *convergencia condicional* de una serie infinita. Dé un ejemplo de una serie infinita de términos positivos y negativos, y muestre como se aplica la convergencia absoluta. Proporcione un ejemplo de una serie infinita de términos positivos y negativos que sea condicionalmente convergente.

25. ¿Qué es el *criterio de la razón*? Dé un ejemplo que muestre cómo se aplica el criterio de la razón para demostrar que una serie infinita es (i) absolutamente convergente, y (ii) divergente. Proporcione un ejemplo de una serie infinita para la cual no se puede hacer ninguna conclusión acerca de la convergencia al aplicar el criterio de la razón.

26. Responda la sugerencia 25 para el *criterio de la raíz.*

27. Liste y describa todos los criterio que conoce para determinar la convergencia o divergencia de una serie infinita de términos constantes.

28. Defina una *serie de potencias en x.* Defina una *serie de potencias en* $x - a$.

29. ¿Cómo se determinan los valores de x para los cuales una serie de potencias converge? Proporcione un ejemplo que ilustre la respuesta.

30. Suponga que R es el radio de convergencia de una serie de potencias en x. ¿Para qué valores de x se está seguro de que la serie de potencias es absolutamente convergente? ¿Para qué valores de x se está seguro de que la serie es divergente? ¿Para que valores de x es cuestionable la convergencia o divergencia de la serie de potencias, y cómo se determina la convergencia o divergencia en esos valores de x?

31. Responda la sugerencia 30 si R es el radio de convergencia de una serie de potencias en $x - a$.

32. Establezca el teorema que permite diferenciar término a término una serie de potencias. ¿Los intervalos de convergencia de las dos series son necesariamente el mismo? ¿Los radios de convergencia de las dos series son necesariamente el mismo? Dé un ejemplo que ilustre las respuestas.

33. Establezca el teorema que permite integrar término a término una serie de potencias. ¿Los intervalos de convergencia de las dos series son necesariamente el mismo? ¿Los radios de convergencia de las dos series son necesariamente el mismo? Proporcione un ejemplo que ilustre las respuestas.

34. Dé un ejemplo en el que se obtenga una representación en serie de potencias de una función racional mediante la integración termino a término de una serie de potencias.

35. Proporcione dos ejemplos en los que se calcule el valor de un número irracional (que no contenga radicales) mediante una serie de potencias.

36. ¿Qué es la *serie de Taylor* de una función f en un número a? Dé un ejemplo de una función y su serie de Taylor en un número diferente de cero.

37. ¿Qué es la *serie de Maclaurin* de una función f? Dé un ejemplo de una función y su serie de Maclaurin?

38. Establezca dos razones para estudiar series de Taylor. Proporcione un ejemplo de cada razón.

39. ¿Cómo se puede determinar si una función es representada por su serie de Taylor? Proporcione un ejemplo que ilustre la respuesta.

40. ¿Por qué una representación en serie de potencias de $\ln(1 + x)$ no es conveniente para calcular el logaritmo natural de un número? ¿Cuál es una mejor serie para efectuar tal cálculo? Dé un ejemplo que ilustre la respuesta.

41. Establezca la *serie binomial.* ¿Cómo es esta serie en relación al desarrollo binomial estudiando en los cursos de álgebra? Proporcione un ejemplo particular.

42. Dé un ejemplo que muestre la aplicación de una serie binomial a un problema diferente al del cálculo de un radical.

▶ EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 8

Vea los ejercicios de la sección 8.6 para los ejercicios de repaso de las secciones 8.3. a 8.5. Los siguientes son ejercicios de repaso para las secciones 8.1, 8.2 y 8.7.a 8.10.

En los ejercicios 1 a 6, obtenga el polinomio de Taylor o de Maclaurin del grado indicado en el número a dado para la función f con el residuo en la forma de Lagrange. Trace las gráficas de f y del polinomio en el mismo rectángulo de inspección y observe cómo la gráfica del polinomio aproxima la gráfica de f cerca del punto donde x = a.

1. $f(x) = \text{sen}^2 x$; $a = 0$; grado 5
2. $f(x) = e^{x^2}$; $a = 0$; grado 4
3. $f(x) = x^{-1/2}$; $a = 9$; grado 4
4. $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$; $a = 1$;grado 3
5. $f(x) = xe^x$; $a = 0$; grado 6
6. $f(x) = x\cos x$; $a = \frac{1}{4}\pi$, grado 5
7. Calcule $\text{sen}^2\, 0.3$ con una exactitud de cuatro cifras decimales empleando un polinomio de Maclaurin, y demuestre que la respuesta tiene la exactitud requerida. Apoye gráficamente la respuesta.
8. Calcule $\sqrt[3]{e}$ con una exactitud de cinco cifras decimales utilizando un polinomio de Taylor, y demuestre que la respuesta tiene la exactitud requerida. Apoye gráficamente la respuesta.
9. Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^4}$ en dos formas: **(a)** aplique la regla de L'Hôpital; **(b)** exprese $e^{-x^2/2}$ y $\cos x$ como un polinomio de Maclaurin de grado 4.
10. Aplique la fórmula de Taylor para expresar el polinomio

$$P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1$$

como un polinomio de potencias de $x + 2$.

En los ejercicios 11 a 18, escriba los primeros cuatro elementos de la sucesión y determine si es convergente o divergente. Si la sucesión converge, calcule su límite y apoye gráficamente la respuesta.

11. $\left\{\dfrac{3n}{n+2}\right\}$ 12. $\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2}\right\}$ 13. $\left\{\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right\}$

14. $\left\{\dfrac{n^2}{\ln(n+1)}\right\}$ 15. $\{2 + (-1)^n\}$

16. $\left\{\dfrac{n+3n^2}{4+2n^3}\right\}$ 17. $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}\right\}$

18. $\left\{\dfrac{(n+2)^2}{n+4} - \dfrac{(n+2)^2}{n}\right\}$

En los ejercicios 19 a 22, estime en la graficadora el límite de la sucesión convergente. Confirme analíticamente la estimación.

19. $\left\{\dfrac{5}{n^2+4}\right\}$ **20.** $\left\{\dfrac{6n}{2n-1}\right\}$

21. $\left\{\dfrac{3-4n}{1+2n}\right\}$ **22.** $\left\{\dfrac{3}{n+1}\right\}$

En los ejercicios 23 y 24, demuestre, aplicando el teorema 8.2.10, que la sucesión es convergente.

23. $\left\{\dfrac{3n}{2^{n-1}}\right\}$ **24.** $\left\{\dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot (3n)}\right\}$

En los ejercicios 25 a 36, calcule el intervalo de convergencia de la serie de potencias.

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ **26.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n(n^2+n)}$ **28.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$

29. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{2^n}(x-3)^n$ **30.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{6^n}(x+1)^n$ **32.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(2x-1)^n$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n2^n}$ **34.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n$

35. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{sen} 2n)x^n$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{(n+1)\ln(n+1)}$

En los ejercicios 37 a 40, haga lo siguiente: (a) calcule el radio de convergencia de la serie de potencias y el dominio de f; (b) escriba la serie de potencias que define la función f' y establezca su radio de convergencia; (c) obtenga el dominio de f'.

37. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$ **38.** $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3}$

39. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ **40.** $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$

En los ejercicios 41 y 42, obtenga una representación en serie de potencias de la integral y determine su radio de convergencia. Apoye gráficamente la respuesta.

41. $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t^2+16}$ **42.** $\displaystyle\int_3^x \frac{dt}{t-1}$

En los ejercicios 43 y 44, calcule con una exactitud de tres cifras decimales el valor de la integral definida mediante dos métodos: (a) utilice el segundo teorema fundamental del Cálculo; (b) emplee la serie obtenida en el ejercicio indicado.

43. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dt}{t^2+16}$; ejercicio 41 **44.** $\displaystyle\int_3^4 \frac{dt}{t-1}$; ejercicio 42

Para los ejercicios 45 y 46, use la serie respectiva obtenida en los ejercicios 34 y 35 de la sección 8.9 para calcular, con una exactitud de tres cifras decimales, el valor de la integral definida. Apoye la respuesta empleando NINT *en la graficadora.*

45. $\displaystyle\int_0^{0.5} f(t)\,dt$, donde $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

46. $\displaystyle\int_0^{0.25} g(t)\,dt$, donde $g(t) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

47. **(a)** Obtenga una serie de Maclaurin para $\int_0^x f(t)\,dt$ donde

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\cosh t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

(b) Demuestre que f es continua en 0. **(c)** Trace en el mismo rectángulo de inspección las gráficas de NINT($f(t)$, 0, x) y del polinomio de Maclaurin que consiste de los primeros diez términos diferentes de cero de la serie del inciso (a). **(d)** Utilice la serie del inciso (a) para calcular $\int_0^1 f(t)\,dt$ con una exactitud de tres cifras decimales y apoye la respuesta empleando NINT en la graficadora.

En los ejercicios 48 a 50, utilice series para evaluar con una exactitud de tres cifras decimales la integral definida, y apoye la respuesta utilizando NINT *en la graficadora.*

48. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^5}$ **49.** $\displaystyle\int_0^{1/4} \sqrt{x}\operatorname{sen} x\,dx$

50. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

En los ejercicios 51 a 58, emplee una serie de potencias para calcular con una exactitud de cuatro cifras decimales el valor de la cantidad y compárelo con el valor obtenido en una calculadora.

51. $\sqrt[4]{e}$ **52.** $\operatorname{sen}^{-1} 0.1$ **53.** $\tan^{-1}\frac{1}{5}$ **54.** $\sqrt[3]{130}$

55. $\cos 3°$ **56.** sen 0.3 **57.** ln 5 **58.** senh 0.3

En los ejercicios 59 a 62, utilice dos series infinitas diferentes para aproximar el valor del número irracional con cuatro dígitos significativos.

59. π **60.** e **61.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **62.** ln 1.3

En los ejercicios 63 a 66, obtenga la serie de Maclaurin para la función, y determine su intervalo de convergencia. Apoye gráficamente la respuesta.

63. $f(x) = \sqrt{x+1}$ **64.** $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$

65. $f(x) = a^x, a > 0$ **66.** $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$

En los ejercicios 67 a 70, obtenga la serie de Taylor de la función en el número indicado , y determine su intervalo de convergencia. Apoye gráficamente la respuesta.

67. $f(x) = \text{sen } 3x; -\frac{1}{3}$

68. $f(x) = \frac{1}{x}; 2$

69. $f(x) = \ln|x|; -1$

70. $f(x) = e^{x-2}; 2$

71. Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx.$

72. Obtenga la serie de Maclaurin para $(1 + x)^n$ donde n es un número entero positivo, y demuestre que la serie es la misma que el desarrollo de esta expresión, la cual se deduce en los cursos de álgebra, mediante el teorema del binomio.

73. Obtenga la serie de Maclaurin para $\cos^2 x$ a partir de la serie de Maclaurin para $\cos 2x$.
Sugerencia: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

74. Obtenga los primeros tres términos diferentes de cero de la serie de Maclaurin para sen $2x$ a partir de la serie de Maclaurin para sen x y cos x.
Sugerencia: sen $2x = 2$ sen x cos x.

Los ejercicios 75 a 79 tratan acerca de las funciones J_0 y J_1 definidas mediante series de potencias como sigue:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!\, n!\, 2^{2n}}$$

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!\,(n+1)!\, 2^{2n+1}}$$

Las funciones J_0 y J_1 se denominan **funciones de Bessel** *del primer tipo de órdenes cero y uno, respectivamente.*

75. Demuestre que J_0 y J_1 convergen para todos los valores reales de x.

76. Demuestre que $y = J_0(x)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

77. Demuestre que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

78. Demuestre que $D_x(xJ_1(x)) = xJ_0(x)$.

79. Demuestre que $y = J_1(x)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - 1)y = 0$$

80. En mecánica cuántica, la medida E de la energía promedio por oscilador está dada por

$$E = \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} N_0 nhFe^{-nhF/kT}}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} N_0 e^{-nhF/kT}}$$

donde T es la medida de la temperatura, h es la constante de Plank, k es la constante universal de los gases, F es la frecuencia constante y N_0 es el número de osciladores en la energía mínima.
(a) Sea $x = e^{-hF/kT}$, demuestre que

$$E = hFx\left(\frac{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots}{1 + x + x^2 + x^3 + \dots}\right)$$

(b) Utilice el resultado del inciso (a) y la serie de potencias para $(1 - x)^{-1}$ y $(1 - x)^{-2}$ para demostrar que

$$E = \frac{hF}{e^{hF/kT} - 1}$$

81. Demuestre que si $x = e^{-\alpha hF}$y $\alpha = 1/kT$, entonces E, definida en el ejercicio 80, satisface las ecuaciones:

$$E = -\frac{d}{d\alpha} \ln \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{y} \quad E = -\frac{d}{d\alpha}\ln(1 - x)^{-1}$$

82. En el ejemplo 8 de la sección 8.8 se obtuvo $\tan^{-1} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ si $|x| < 1$. Demuestre que el intervalo de convergencia de esta serie de potencias es $[-1, 1]$ y que la serie de potencias representa a $\tan^{-1} x$ para toda x de su intervalo de convergencia.

Capítulo

9

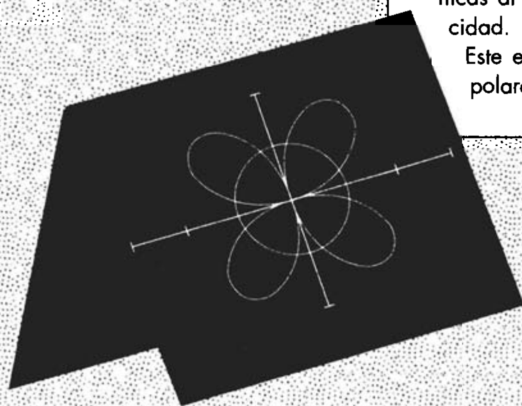
Ecuaciones paramétricas, curvas planas y gráficas polares

VISIÓN PRELIMINAR

Hasta este momento se han tratado curvas que son gráficas de funciones consideradas en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares. En este capítulo se estudiarán otras curvas planas. La sección 9.1 se dedica a las curvas definidas mediante *ecuaciones paramétricas*, y en la sección 9.3 las curvas son *gráficas polares* definidas en términos de *coordenadas polares*.

En el capítulo 6 se estudió como aplicar la integral definida para determinar la longitud de arco de la gráfica de una función. En la sección 9.2 se aplicará la integración a fin de obtener la longitud de arco de una curva definida mediante ecuaciones paramétricas, y en la sección 9.4 para calcular la longitud de arco de una gráfica polar. El cálculo del área de una región plana limitada por gráficas polares es otra aplicación de la integración presentada en la sección 9.4. En la sección final del capítulo se presenta un tratamiento unificado de las secciones cónicas al definir una cónica en términos de su excentricidad.

Este estudio conduce naturalmente a las ecuaciones polares de las cónicas.



9.1 ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y CURVAS PLANAS

Suponga que una partícula se mueve en un plano de modo que las coordenadas (x, y), de su posición en cualquier tiempo t, están dadas por las ecuaciones

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = g(t) \tag{1}$$

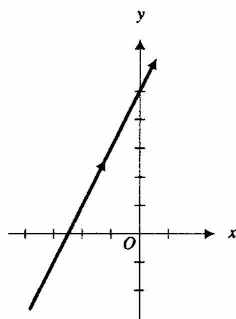
Entonces, para cada número t del dominio común de f y g la partícula se encuentra en el punto $(f(t), g(t))$ y estos puntos describen una **curva plana** C recorrida por la partícula. Las ecuaciones (1) se denominan **ecuaciones paramétricas** de C y la variable t se llama **parámetro**. La curva C también recibe el nombre de **gráfica**; esto es, el conjunto de todos los puntos (x, y) que satisfacen (1) es la gráfica de las ecuaciones paramétricas.

Si se elimina el parámetro t del par de ecuaciones (1), se obtiene una ecuación en x y y, denominada **ecuación cartesiana** de C. La eliminación del parámetro puede conducir a una ecuación cartesiana cuya gráfica contiene más puntos que la gráfica definida por las ecuaciones paramétricas. Esta situación se presenta en el ejemplo 3.

EJEMPLO 1 Obtenga una ecuación cartesiana de la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = 2t - 3 \quad \text{y} \quad y = 4t - 1$$

y dibuje la curva.



$y = 2x + 5$

FIGURA 1

Solución El parámetro t se elimina de las dos ecuaciones al resolver la primera ecuación para t, obteniéndose

$$t = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}$$

y sustituirlo en la segunda ecuación:

$$y = 4(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}) - 1$$
$$y = 2x + 5$$

La gráfica de esta ecuación es una recta con pendiente 2 e intercepción y igual a 5. Esta recta se muestra en la figura 1. Observe en las ecuaciones paramétricas que conforme t crece también lo hacen x y y. Por tanto, una partícula que se mueve sobre esta recta va hacia arriba y a la derecha, indicado en la figura mediante la flecha. ◀

En general, la gráfica de cualquier par de ecuaciones paramétricas de la forma

$$x = at + b \quad \text{y} \quad y = ct + d$$

donde $a \neq 0$ o $c \neq 0$, es una recta.

EJEMPLO 2 Obtenga una ecuación cartesiana de la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = 2\cos t \qquad \text{y} \qquad y = 2\,\text{sen}\, t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

y dibuje la gráfica.

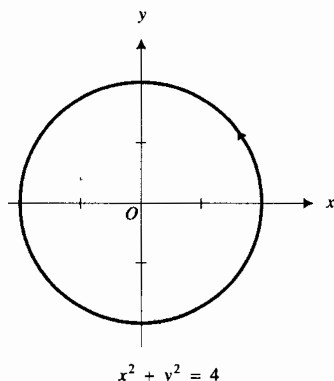


FIGURA 2

Solución A fin de eliminar t de las dos ecuaciones paramétricas, se elevan al cuadrado los dos miembros de cada una de las ecuaciones y se suman, obteniéndose

$$x^2 + y^2 = 4\cos^2 t + 4\,\text{sen}^2 t$$
$$x^2 + y^2 = 4(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

La gráfica de esta ecuación es una circunferencia con centro en el origen y radio 2. Si se permite que t tome todos los valores del intervalo cerrado $[0, 2\pi]$, se obtiene la circunferencia completa iniciando en el punto (2, 0) y se recorre en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj, como se indica en la figura 2. ◀

Si bien el parámetro de un par de ecuaciones paramétricas representa regularmente el tiempo, esto no siempre es así. En el ejemplo 2, el parámetro t puede representar la medida en radianes del ángulo medido a partir del semieje x positivo hasta el segmento de recta que une el origen con el punto (x, y) de la circunferencia, como se muestra en la figura 3.

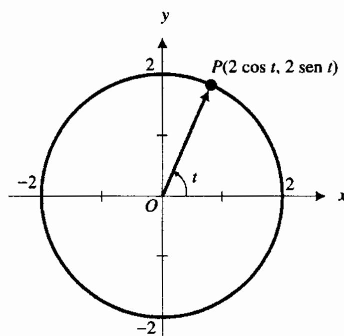


FIGURA 3

▶ EJEMPLO 3

Considere las ecuaciones paramétricas

$$x = \cosh t \quad \text{y} \quad y = \text{senh}\, t$$

(a) Dibuje la gráfica definida por estas ecuaciones, y **(b)** obtenga la ecuación cartesiana de la gráfica.

Solución

(a) Al elevar al cuadrado ambos miembros de las ecuaciones paramétricas y restando se tiene

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \text{senh}^2 t$$

De la identidad $\cosh^2 t - \text{senh}^2 t = 1$, esta ecuación se transforma en

$$x^2 - y^2 = 1$$

cuya gráfica es la hipérbola unitaria. Sin embargo, observe que para cualquier número real t, $\cosh t$ nunca es menor que 1. Por tanto, la curva definida por las ecuaciones paramétricas consiste de sólo los puntos de la rama derecha de la hipérbola. Esta curva se muestra en la figura 4. La curva “punteada” de la figura es la rama izquierda de hipérbola unitaria.

(b) Una ecuación cartesiana de la gráfica es

$$x^2 - y^2 = 1 \qquad x \geq 1$$ ◀

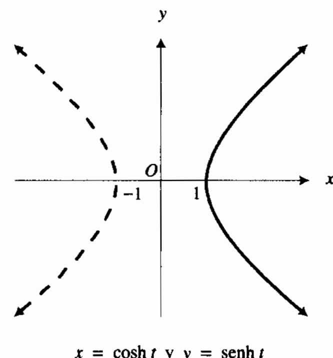


FIGURA 4

Si una curva plana C está definida mediante una ecuación de la forma $y = f(x)$, donde f es continua, entonces se pueden obtener las ecuaciones paramétricas para C considerando

$$x = t \quad \text{y} \quad y = f(t)$$

donde t está en el dominio de f. Otras sustituciones para x también pueden proporcionar ecuaciones paramétricas para C estipulando que x toma todos los valores del dominio de f.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La parábola que tiene la ecuación $y = x^2$ también está definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = t \quad \text{y} \quad y = t^2$$

así como por las ecuaciones paramétricas

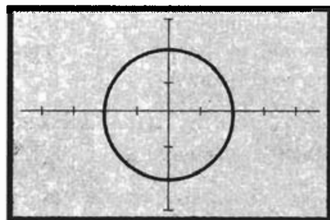
$$x = t^3 \quad \text{y} \quad y = t^6$$

Sin embargo, las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 \quad \text{y} \quad y = t^4$$

definen sólo la porción derecha de la parábola donde $x \geq 0$. ◀

Con el fin de trazar la gráfica de un par de ecuaciones paramétricas, consulte el manual del usuario para su graficadora particular. Algunas graficadoras requieren que se active el modo paramétrico, mientras que otras graficadoras pueden emplear un formato de trazado paramétrico. En cualquier caso, se necesitará introducir a la graficadora las ecuaciones que definen a x y y como funciones de t. Además, debe indicar los valores mínimo y máximo de t a considerar. Estos valores se denotarán por $t_{\text{mín}}$ y $t_{\text{máx}}$.



[−4.5, 4.5] por [−3, 3]

$x = 2\cos t$ y $y = 2\,\text{sen}\,t$

FIGURA 5

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** A fin de trazar la gráfica de las ecuaciones paramétricas del ejemplo 2, se introduce

$$x = 2\cos t \quad \text{y} \quad y = 2\,\text{sen}\,t$$

y se considera $t_{\text{mín}} = 0$ y $t_{\text{máx}} = 2\pi$. En el rectángulo de inspección de [−4.5, 4.5] por [−3, 3], se obtiene la circunferencia mostrada en la figura 5. ◀

Las ecuaciones paramétricas pueden emplearse para definir una curva descrita por un movimiento físico. Como ejemplo, se considera una **cicloide**, la curva descrita por un punto de una circunferencia conforme esta rueda a lo largo de una recta. Sea a el radio de la circunferencia y sea el eje x la recta fija sobre la cual rueda la circunferencia. Considere al origen como uno de los puntos donde el punto dado P hace contacto con el eje x, después de lo cual la circunferencia ha rodado un ángulo de t radianes, como se muestra en la figura 6. La circunferencia ha rodado una distancia de $|\overline{OT}|$ unidades, la cual también es la longitud del arco PT de la circunferencia. Así, $|\overline{OT}| = at$. Las coordenadas de C, el centro de la circunferencia, son entonces (at, a). Del triángulo rectángulo PAC, $|\overline{PA}| = a\,\text{sen}\,t$ y $|\overline{AC}| = a\cos t$. Así,

$$x = |\overline{OT}| - |\overline{PA}| \quad \text{y} \quad y = |\overline{TC}| - |\overline{AC}|$$

$$x = at - a\,\text{sen}\,t \quad \text{y} \quad y = a - a\cos t$$

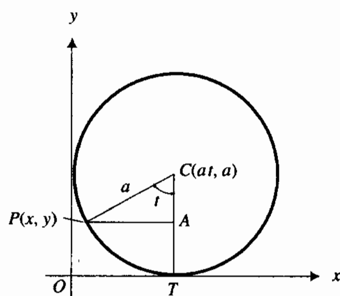
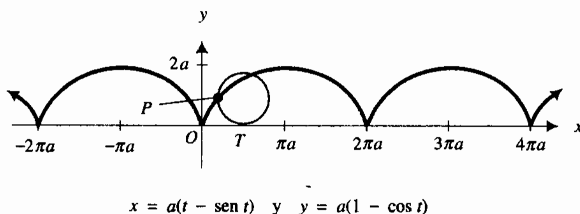


FIGURA 6

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

$$x = a(t - \text{sen}\,t) \quad \text{y} \quad y = a(1 - \cos t) \tag{2}$$

donde t es cualquier número real. En la figura 7 se muestra una porción de la cicloide.



$x = a(t - \text{sen}\,t)$ y $y = a(1 - \cos t)$

FIGURA 7

A continuación se definirán algunos términos relacionados con las curvas planas, los cuales se emplearán posteriormente.

9.1.1 Definición de curva lisa

Una curva plana C definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = g(t) \qquad a \leq t \leq b$$

se dice que es **lisa** (o **suave**) en el intervalo cerrado $[a, b]$ si f' y g' son continuas en $[a, b]$, y $f'(t)$ y $g'(t)$ no son cero simultáneamente en cada número del intervalo abierto (a, b).

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Para la circunferencia del ejemplo 2 mostrado en la figura 2

$$f(t) = 2\cos t \qquad g(t) = 2\,\text{sen}\, t$$
$$f'(t) = -2\,\text{sen}\, t \qquad g'(t) = 2\cos t$$

Como f' y g' son continuas para todo t y $f'(t)$ y $g'(t)$ no son cero a la vez en cualquier número, entonces la circunferencia es una curva lisa. ◀

Si un intervalo I puede partirse en un número finito de subintervalos en los que la curva C es suave, entonces se dice que C es **lisa a trozos** en I.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 Para la cicloide definida por las ecuaciones paramétricas (2) y mostrada en la figura 7

$$f(t) = a(t - \text{sen}\, t) \qquad g(t) = a(1 - \cos t)$$
$$f'(t) = a(1 - \cos t) \qquad g'(t) = a\,\text{sen}\, t$$

Las funciones f' y g' son continuas para todo t, pero $f'(t)$ y $g'(t)$ son iguales a cero si $t = 2\pi n$, donde n es cualquier número entero. Por tanto, la cicloide no es una curva lisa. Sin embargo, la cicloide es lisa a trozos porque es lisa en cada subintervalo $[2\pi n, 2\pi(n + 1)]$, donde n es cualquier número entero. ◀

9.1.2 Definición de curva cerrada

Una curva plana C definida por las ecuaciones

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = g(t) \qquad a \leq t \leq b$$

se dice que es **cerrada** si el punto inicial $A(f(a), g(a))$ y el punto terminal $B(f(b), g(b))$ coinciden.

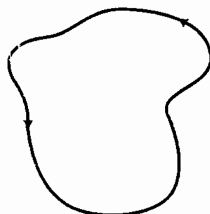


FIGURA 8

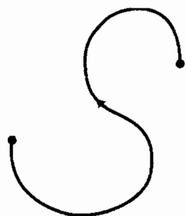
La figura 8 muestra una curva cerrada y lisa donde los puntos A y B coinciden. Una curva que no se cruza a sí misma se denomina *curva simple*.

9.1.3 Definición de curva simple

Una curva plana C definida por las ecuaciones

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = g(t) \qquad a \leq t \leq b$$

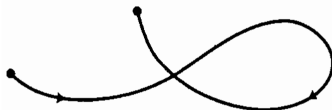
se dice que es **simple** entre los puntos $A(f(a), g(a))$ y $B(f(b), g(b))$ si $(f(t_1), g(t_1))$ es diferente del punto $(f(t_2), g(t_2))$ para todo t_1 y t_2 diferentes del intervalo abierto (a, b).



(a) Simple pero no cerrada



(b) Cerrada pero no simple



(c) Ni simple ni cerrada

FIGURA 9

Las circunferencias y las elipses son ejemplos de curvas cerradas simples lisas. La curva de la figura 8 es otro ejemplo de curva cerrada simple lisa. La figura 9 presenta ejemplos de curvas lisas que pueden ser simples o cerradas, o no. En (a) la curva es simple pero no cerrada; en (b) la curva es cerrada pero no simple, y en (c) la curva ni es simple ni es cerrada.

Suponga que una curva lisa C esta definida paramétricamente por

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = g(t) \tag{3}$$

y que este par de ecuaciones define al menos una función diferenciable h para la cual $y = h(x)$. Entonces la derivada de cada función h, denotada por dy/dx, está relacionada con dx/dt y dy/dt mediante la siguiente ecuación dada por la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Si $dx/dt \neq 0$, se pueden dividir ambos miembros de esta ecuación entre dx/dt y obtener

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \tag{4}$$

Observe que esta ecuación expresa la derivada de y con respecto a x en términos del parámetro t para toda función diferenciable h, tal que $y = h(x)$, con $x = f(t)$ y $y = g(t)$.

Como $= \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$, entonces $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d(y')}{dx}$. Así, de (4)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d(y')}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \tag{5}$$

EJEMPLO 4 Dadas las ecuaciones paramétricas

$$x = 4 - t^2 \quad \text{y} \quad y = t^2 + 4t$$

determine $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ sin eliminar t.

Solución Como $\dfrac{dy}{dt} = 2t + 4$ y $\dfrac{dx}{dt} = -2t$, se tiene, de (4),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{2t+4}{-2t} \\ &= -1 - \frac{2}{t}\end{aligned}$$

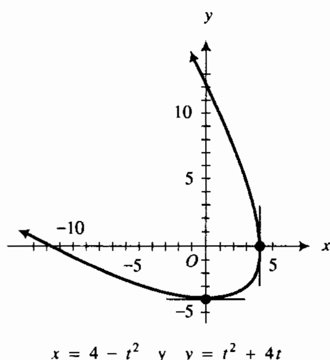
Puesto que $y' = -1 - 2/t$, $d(y')/dt = 2/t^2$. Entonces de (5)

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d(y')/dt}{dx/dt} \\ &= \frac{2/t^2}{-2t} \\ &= -\frac{1}{t^3}\end{aligned}$$

◀

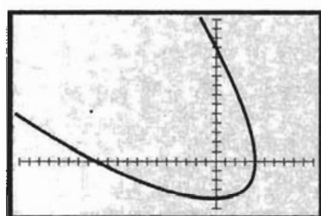
Tabla 1

t	x	y
−4	−12	0
−3	−5	−3
−2	0	−4
−1	3	−3
0	4	0
1	3	5
2	0	12
3	−5	21



$x = 4 - t^2$ y $y = t^2 + 4t$

FIGURA 10



[−20, 10] por [−5, 15]

$x = 4 - t^2$ y $y = t^2 + 4t$

FIGURA 11

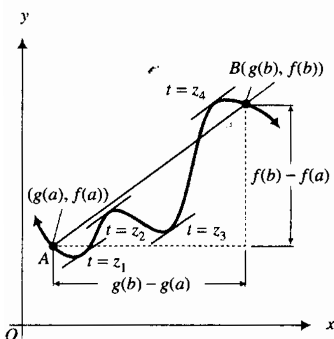


FIGURA 12

De (4), la pendiente de la recta tangente en un punto de la curva C definida por las ecuaciones paramétricas (3) es $(dy/dt)/(dx/dt)$. Por tanto, la gráfica tiene una recta tangente horizontal en un punto donde $dy/dt = 0$ y $dx/dt \neq 0$. La gráfica tiene una recta tangente vertical en un punto donde $dx/dt = 0$ y $dy/dt \neq 0$.

▶ ***EJEMPLO 5*** Para la gráfica de las ecuaciones paramétricas del ejemplo 4 (**a**), obtenga las rectas tangentes horizontales y verticales, y (**b**) determine la concavidad. (**c**) Dibuje la gráfica. (**d**) Apoye la gráfica en la graficadora.

Solución

(**a**) Del ejemplo 4,

$$x = 4 - t^2 \quad \text{y} \quad y = t^2 + 4t$$

$$\frac{dx}{dt} = -2t \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = 2t + 4$$

Cuando $t = -2$, $dy/dt = 0$ y $dx/dt \neq 0$. Así, la gráfica tiene una recta tangente horizontal en $(0, -4)$. Cuando $t = 0$, $dx/dt = 0$ y $dy/dt \neq 0$. Por tanto, la gráfica tiene una recta tangente vertical en $(4, 0)$.

(**b**) También de la solución del ejemplo 4,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{t^3}$$

Como $d^2y/dx^2 > 0$ cuando $t < 0$, entonces la gráfica es cóncava hacia arriba para estos valores de t. De manera semejante, la gráfica es cóncava hacia abajo cuando $t > 0$, debido a que $d^2y/dx^2 < 0$.

(**c**) La tabla 1 presenta valores de x y y para valores particulares de t. Con los puntos obtenidos a partir de estos valores, y el conocimiento de las rectas tangentes horizontal y vertical así como de la concavidad, se obtiene la gráfica mostrada en la figura 10.

(**d**) La figura 11, que muestra la gráfica trazada en el rectángulo de inspección de [−20, 10] por [−5, 15], apoya la gráfica dibujada de la figura 10. ◀

Como se indicó en la sección 7.7, donde se estableció y demostró el teorema del valor medio de Cauchy, ahora se dará una interpretación geométrica de este teorema. Recuerde que el teorema establece que si f y g son dos funciones tales que (i) f y g son continuas en $[a, b]$ (ii), f y g son diferenciables en (a, b), y (iii) para toda x en (a, b), $g'(x) \neq 0$, entonces existe un número z en el intervalo abierto (a, b) tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

La figura 12 muestra una curva que tiene las ecuaciones paramétricas $x = g(t)$ y $y = f(t)$, donde $a \leq t \leq b$. La pendiente de la curva de la figura en un punto particular está determinada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

y la pendiente del segmento de recta que pasa por los puntos $A(g(a), f(a))$ y $B(g(b), f(b))$ está dada por

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

El teorema de valor medio de Cauchy establece que las pendientes son iguales para al menos un valor de t entre a y b. Para la curva mostrada en la figura 12, cuatro valores de t satisfacen la conclusión del teorema: $t = z_1$, $t = z_2$, $t = z_3$ y $t = z_4$.

EJERCICIOS 9.1

En los ejercicios 1 a 10, dibuje la gráfica de las ecuaciones paramétricas y obtenga una ecuación cartesiana de la gráfica.

1. $x = 4 \cos t, y = 4 \operatorname{sen} t; t \in [0, 2\pi]$

2. $x = 4 \cos t, y = 4 \operatorname{sen} t; t \in [0, \pi]$

3. $x = 4 \cos t, y = 4 \operatorname{sen} t; t \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

4. $x = 9 \cos t, y = 4 \operatorname{sen} t; t \in [0, 2\pi]$

5. $x = 4 \cos t, y = 25 \operatorname{sen} t; t \in [0, 2\pi]$

6. $x = 4 \cos t, y = 25 \operatorname{sen} t; t \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

7. $x = 4 \sec t, y = 9 \tan t; t \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

8. $x = 4 \tan t, y = 9 \sec t; t \in [0, \frac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$

9. $x = 3 - 2t, y = 4 + t$

10. $x = 2t - 5, y = t + 1$

En los ejercicios 11 a 16, calcule $\frac{dy}{dx}$ *y* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *sin eliminar el parámetro.*

11. $x = 3t, y = 2t^2$

12. $x = 1 - t^2, y = 1 + t$

13. $x = t^2e^t, y = t \ln t$

14. $x = e^{2t}, y = 1 + \cos t$

15. $x = a \cos t, y = b \operatorname{sen} t$

16. $x = a \cosh t, y = b \operatorname{senh} t$

En los ejercicios 17 a 21, para la gráfica de las ecuaciones paramétricas (a), obtenga las rectas tangentes horizontales y verticales, y (b) determine la concavidad. (c) Dibuje la gráfica. (d) Apoye la gráfica en la graficadora.

17. $x = 4t^2 - 4t, y = 1 - 4t^2$

18. $x = t^2 + t, y = t^2 - t$

19. $x = 2t^3, y = 4t^2$

20. $x = 2t^2, y = 3t^3$

21. $x = \frac{3t}{1 + t^3}, y = \frac{3t^2}{1 + t^3}; t \neq -1$

(la hoja de Descartes)

22. Trace la hoja de Descartes del ejercicio 21 en la graficadora y determine la porción de la hoja generada cuando **(a)** $t < -1$; **(b)** $-1 < t \leq 0$; **(c)** $t > 0$.

23. Obtenga una ecuación cartesiana de la hoja de Descartes del ejercicio 21. *Sugerencia:* elimine t evaluando $x^3 + y^3$.

24. Un proyectil se desplaza de modo que las coordenadas de su posición en cualquier instante t están dadas por las ecuaciones paramétricas $x = 60t$ y $y = 80t - 16t^2$. Dibuje la trayectoria del proyectil y verifique la gráfica en la graficadora.

25. Obtenga una ecuación de la recta tangente en el punto de la curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = 2 \operatorname{sen} t$ y $y = 5 \cos t$, para el cual $t = \frac{1}{3}\pi$.

26. Obtenga una ecuación de la recta tangente en el punto de la curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = 1 + 3 \operatorname{sen} t$ y $y = 2 - 5 \cos t$, para el cual $t = \frac{1}{6}\pi$.

27. Calcule $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ y $\frac{d^3y}{dx^3}$ en el punto de la cicloide que tiene ecuaciones (2) para el cual y alcanza su valor máximo cuando x está en el intervalo cerrado $[0, 2\pi a]$.

28. Demuestre que la pendiente de la recta tangente a la cicloide que tiene ecuaciones (2) en $t = t_1$ es $\cot \frac{1}{2}t_1$. Después, deduzca que la recta tangente es vertical cuando $t = 2n\pi$, donde n es cualquier número entero.

29. Calcule el área de la región limitada por el eje x y un arco de la cicloide que tiene las ecuaciones (2).

30. Determine el centroide de la región del ejercicio 29.

31. Las ecuaciones paramétricas para la *trocoide* son

$$x = at - b \operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad y = a - b \cos t$$

(a) Si $a > b > 0$, demuestre que la trocoide no tiene ninguna recta tangente vertical. Trace la trocoide en la graficadora para $t \in [-\pi, \pi]$ si **(b)** $a = 3$ y $b = 1$, y **(c)** $a = 1$ y $b = 3$. Dibuje lo que muestra la pantalla de la graficadora. Verifique que para el dibujo del inciso (b), donde $a > b$, la trocoide no tiene ninguna recta tangente vertical, mientras que en el inciso (c), donde $a < b$, la trocoide tiene dos rectas tangentes verticales.

32. Una **hipocicloide** es la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio b que rueda dentro de una circunferencia fija de radio a, $a > b$. Si el origen está en el centro de la circunferencia fija, $A(a, 0)$ es uno de los puntos en los que el punto P hace contacto con la circunferencia fija, B es el punto móvil de tangencia de las dos circunferencias, y el parámetro t es el número de radianes del ángulo AOB, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide son

$$x = (a - b) \cos t + b \cos \frac{a - b}{b} t$$

y

$$y = (a - b) \operatorname{sen} t - b \operatorname{sen} \frac{a - b}{b} t$$

33. Trace en la graficadora la hipocicloide del ejercicio 32 si **(a)** $a = 6$ y $b = 2$ para $t \in [-\pi, \pi]$; **(b)** $a = 12$ y $b = 2$ para $t \in [-\pi, \pi]$.
Dibuje lo que muestra la pantalla de la graficadora. ¿Cuántas cúspides tiene la hipocicloide en cada caso?

34. Trace en la graficadora la hipocicloide del ejercicio 32 si **(a)** $a = 8$ y $b = 7$ para $t \in [-8\pi, 8\pi]$; **(b)** $a = 8$ y $b = 3$ para $t \in [-4\pi, 4\pi]$. Dibuje lo que muestra la pantalla de la graficadora. ¿Cuántas cúspides tiene la hipocicloide en cada caso?

35. Si $a = 4b$ en el ejercicio 32, se tiene una *hipocicloide de cuatro cúspides*. **(a)** Demuestre que las ecuaciones paramétricas de esta curva son $x = a \cos^3 t$ y $y = a \operatorname{sen}^3 t$. Trace en la graficadora la hipocicloide de cuatro cúspides si **(b)** $a = 4$ para $t \in [-\pi, \pi]$, y **(c)** $a = 8$ para $t \in [-\pi, \pi]$. Dibuje lo que muestra la pantalla de la graficadora.

36. **(a)** A partir de las ecuaciones paramétricas del ejercicio 35, obtenga una ecuación cartesiana de la hipocicloide de cuatro cúspides. **(b)** Utilice la ecuación cartesiana del inciso (a) para dibujar la gráfica de esta hipocicloide.

37. En el ejercicio 44 de la sección 7.3, se definió la tractriz como la curva tal que la longitud del segmento de toda recta tangente desde el punto de tangencia al punto de intersección con el eje x es una constante positiva a. En ese ejercicio se obtuvo la ecuación cartesiana de la tractriz:

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

(a) Demuestre que las ecuaciones paramétricas de la tractriz son

$$x = t - a \tanh \frac{t}{a} \quad \text{y} \quad y = a \operatorname{sech} \frac{t}{a}$$

Sugerencia: sustituya el valor de y en términos del parámetro t en la ecuación cartesiana, simplifique utilizando identidades hiperbólicas, y obtenga el valor de x en términos del parámetro t.

(b) Utilice las ecuaciones paramétricas del inciso (a) para trazar en la graficadora la tractriz para la cual $a = 4$. Dibuje lo que muestra la pantalla de la graficadora.

38. Demuestre que el parámetro t de las ecuaciones paramétricas de la tractriz (vea el ejercicio 37) es la intercepción x de la recta tangente.

39. Explique la importancia de las ecuaciones paramétricas en el estudio de las curvas planas.

9.2 LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA PLANA

En la sección 6.1 se obtuvo una fórmula para calcular la longitud de arco de la gráfica de una función. Ahora se desarrollará un método para determinar la longitud de arco de una curva plana general, no necesariamente la gráfica de una función.

Sea C la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = g(t)$$

y suponga que f y g son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Se desea asignar un número L para representar el número de unidades de la longitud de arco de C desde $t = a$ hasta $t = b$. Se procederá como en la sección 6.1.

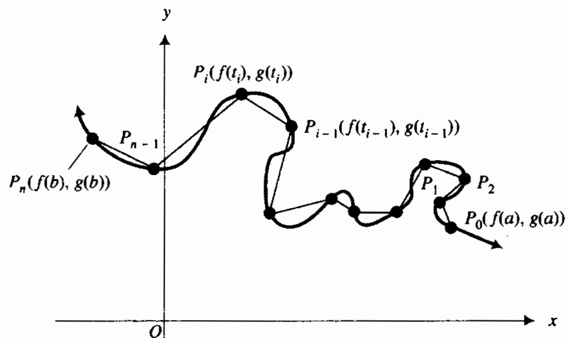


FIGURA 1

Sea Δ una partición del intervalo cerrado $[a, b]$ formada al dividir el intervalo en n subintervalo eligiendo $n - 1$ números entre a y b. Sean $t_0 = a$ y $t_n = b$, y $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ los números intermedios:

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n$$

El i-ésimo subintervalo es $[t_{i-1}, t_i]$ y el número de unidades de su longitud, denotado por $\Delta_i t$, es $t_i - t_{i-1}$, donde $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea $\|\Delta\|$ la norma de la partición, de modo que $\Delta_i t \leq \|\Delta\|$.

Asociado con cada número t_i se tiene un punto $P_i(f(t_i), g(t_i))$ de C. Desde cada punto P_{i-1} se dibuja un segmento de recta hasta el siguiente punto P_i. Vea la figura 1. El número de unidades de la longitud del segmento de recta de P_{i-1} a P_i se denota por $|\overline{P_{i-1}P_i}|$. De la fórmula de la distancia se tiene

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2} \quad (1)$$

La suma de los números de unidades de las longitudes de los n segmentos es

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}|$$

Nuestra noción intuitiva de la longitud de arco desde $t = a$ hasta $t = b$ nos conduce a definir el número de unidades de la longitud de arco como el límite de esta suma cuando $\|\Delta\|$ tiende a cero.

9.2.1 Definición de longitud de arco de una curva plana

Sea C la curva que tiene las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$. Suponga que existe un número L que tiene la siguiente propiedad: Para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partición Δ del intervalo $[a, b]$ para la cual $\|\Delta\| < \delta$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| - L \right| < \epsilon$$

Esto se expresa como

$$L = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}|$$

y L unidades se denomina la **longitud de arco** de la curva C desde el punto $(f(a), g(a))$ hasta el punto $(f(b), g(b))$.

Se dice que el arco de la curva es **rectificable** si el límite de la definición 9.2.1 existe. Si f' y g' son continuas en $[a, b]$, se procede como sigue para determinar una fórmula a fin de evaluar este límite.

Como f' y g' son continuas en $[a, b]$, son continuas en cada subintervalo de la partición Δ. De modo que f y g satisfacen la hipótesis del teorema del valor medio en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$; por tanto, existen números z_i y w_i en el intervalo abierto (t_{i-1}, t_i) tales que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(z_i)\,\Delta_i t \quad \text{y} \quad g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(w_i)\,\Delta_i t$$

Al sustituir de estas ecuaciones en (1) se obtiene

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{[f'(z_i)\Delta_i t]^2 + [g'(w_i)\Delta_i t]^2}$$

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{[f'(z_i)]^2 + [g'(w_i)]^2}\,\Delta_i t \quad (2)$$

donde z_i y w_i están en el intervalo abierto (t_{i-1}, t_i). Así, de la definición 9.2.1 y (2), si el límite existe, entonces

$$L = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(z_i)]^2 + [g'(w_i)]^2}\, \Delta_i t \tag{3}$$

La suma en (3) no es suma de Riemann debido a que z_i y w_i no son necesariamente los mismos números. Por esta razón no puede aplicarse la definición de integral definida para evaluar el límite de (3). Sin embargo, existe un teorema que puede aplicarse con el fin de evaluar este límite. Se establecerá el teorema sin demostración debido a que está más allá del alcance de este libro. La demostración puede encontrarse en un texto de Cálculo avanzado.

9.2.2 Teorema

Si las funciones F y G son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la función $\sqrt{F^2 + G^2}$ también es continua en $[a, b]$, y si Δ es una partición del intervalo $[a, b]$, y z_i y w_i son cualesquiera dos números de (t_{i-1}, t_i), entonces

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[F(z_i)]^2 + [G(w_i)]^2}\, \Delta_i t = \int_a^b \sqrt{[F(t)]^2 + [G(t)]^2}\, dt$$

Al aplicar este teorema a (3) donde F es f' y G es g', se tiene

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

Este resultado se establece en el teorema siguiente

9.2.3 Teorema

Sea C la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = f(t)$ y $y = g(t)$, y suponga que f' y g' son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si L unidades es la longitud de arco de la curva C desde el punto $(f(a), g(a))$ hasta el punto $(f(b), g(b))$, entonces

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

EJEMPLO 1 Calcule la longitud de arco de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

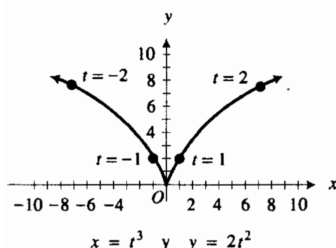
$$x = t^3 \quad \text{y} \quad y = 2t^2$$

para cada uno de los casos: **(a)** de $t = 0$ a $t = 1$; **(b)** de $t = -2$ a $t = 0$.

Solución La curva se muestra en la figura 2 y tiene las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$ donde

$$f(t) = t^3 \qquad g(t) = 2t^2$$
$$f'(t) = 3t^2 \qquad g'(t) = 4t$$

El teorema 9.2.3 se aplica a los incisos (*a*) y (*b*) donde L_a unidades es la longitud de arco de $t = 0$ a $t = 1$, y L_b es la longitud de arco de $t = -2$ a $t = 0$.



$x = t^3$ y $y = 2t^2$

FIGURA 2

(a)
$$\begin{aligned}
L_a &= \int_0^1 \sqrt{9t^4 + 16t^2}\,dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{t^2}\sqrt{9t^2 + 16}\,dt \\
&= \int_0^1 t\sqrt{9t^2 + 16}\,dt \\
&= \tfrac{1}{18}\cdot\tfrac{2}{3}(9t^2 + 16)^{3/2}\Big]_0^1 \\
&= \tfrac{1}{27}[(25)^{3/2} - (16)^{3/2}] \\
&= \tfrac{1}{27}(125 - 64) \\
&= \tfrac{61}{27}
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
L_b &= \int_{-2}^0 \sqrt{9t^4 + 16t^2}\,dt \\
&= \int_{-2}^0 \sqrt{t^2}\sqrt{9t^2 + 16}\,dt \\
&= \int_{-2}^0 -t\sqrt{9t^2 + 16}\,dt \\
&= -\tfrac{1}{18}\cdot\tfrac{2}{3}(9t^2 + 16)^{3/2}\Big]_{-2}^0 \\
&= -\tfrac{1}{27}[(16)^{3/2} - (52)^{3/2}] \\
&= \tfrac{1}{27}(104\sqrt{13} - 64) \\
&\approx 11.5
\end{aligned}$$

Observe que en la tercera integral del inciso (a) se sustituyó $\sqrt{t^2}$ por t ya que $0 \le t \le 1$. En cambio, en la tercera integral del inciso (b) se reemplazó $\sqrt{t^2}$ por $-t$ puesto que $-2 \le t \le 0$. ◀

▶ ***EJEMPLO 2*** Deduzca la fórmula para determinar la longitud de la circunferencia de radio a al calcular la longitud de arco de

$$x = a\cos t \quad \text{y} \quad y = a \operatorname{sen} t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Solución Con $f(t) = a \cos t$ y $g(t) = a \operatorname{sen} t$, $f'(t) = -a \operatorname{sen} t$ y $g'(t) = a \cos t$. Si L es la longitud de la circunferencia, del teorema 9.2.3, se tiene

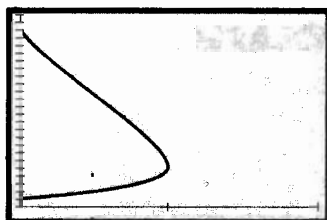
$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \operatorname{sen} t)^2 + (a\cos t)^2}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)}\,dt \\
&= \sqrt{a^2}\int_0^{2\pi} dt \\
&= a t\Big]_0^{2\pi} \\
&= 2\pi a
\end{aligned}$$ ◀

Justo como ocurrió cuando se calculó la longitud de arco de la gráfica de una función, la integral definida obtenida al aplicar el teorema 9.2.3 frecuentemente es difícil o imposible de evaluar mediante el segundo teorema fundamental del Cálculo. Sin embargo, con el procedimiento NINT de la graficadora se puede aproximar el valor como se muestra en el ejemplo siguiente.

▶ ***EJEMPLO 3*** Trace la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = \operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad y = e^t \qquad 0 \le t \le \pi$$

y calcule su longitud de arco con cuatro dígitos significativos.



[0, 2] por [0, 25]

$x = \operatorname{sen} t$ y $y = e^t$ $0 \le t \le \pi$

FIGURA 3

Solución La figura 3 muestra la curva trazada en el rectángulo de inspección de [0, 2] por [0, 25]. Sean $f(t) = \operatorname{sen} t$ y $g(t) = e^t$, de modo que $f'(t) = \cos t$ y $g'(t) = e^t$. Del teorema 9.2.3, si L es la longitud de arco de la curva dada, entonces,

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 t + e^{2t}}\, dt$$

En la calculadora se obtiene

$$\text{NINT}\,(\sqrt{\cos^2 t + e^{2t}}, 0, \pi) = 22.40$$

Conclusión: La longitud de arco es 22.40. ◀

EJERCICIOS 9.2

En los ejercicios 1 a 14, calcule la longitud de arco exacta de la curva definida por el conjunto dado de ecuaciones paramétricas. Trace la curva en la graficadora y observe si la longitud de arco aparente que se muestra en la gráfica apoya la respuesta.

1. $x = \frac{1}{2}t^2 + t, y = \frac{1}{2}t^2 - t$; de $t = 0$ a $t = 1$

2. $x = 3t^2, y = 2t^3$; de $t = 0$ a $t = 3$

3. $x = t^2 + 2t, y = t^2 - 2t$; de $t = 0$ a $t = 2$

4. $x = t^3, y = 3t^2$; de $t = -2$ a $t = 0$

5. $x = 2t^2, y = 2t^3$; de $t = 1$ a $t = 2$

6. $x = t, y = \cosh t$; de $t = 0$ a $t = 3$

7. $x = 3e^{2t}, y = -4e^{2t}$; de $t = 0$ a $t = \ln 5$

8. $x = t^2 + 3, y = 3t^2$; de $t = 1$ a $t = 4$

9. $x = e^t \cos t, y = e^t \operatorname{sen} t$; de $t = 0$ a $t = 1$

10. $x = \ln \operatorname{sen} t, y = t + 1$; de $t = \frac{1}{6}\pi$ a $t = \frac{1}{2}\pi$

11. $x = \tan^{-1} t, y = \frac{1}{2}\ln(t^2 + 1)$; de $t = 0$ a $t = 1$

12. $x = 2(\cos t + t \operatorname{sen} t), y = 2(\operatorname{sen} t - t \cos t)$; de $t = 0$ a $t = \frac{1}{3}\pi$

13. $x = 4 \operatorname{sen} 2t, y = 4 \cos 2t$; de $t = 0$ a $t = \pi$

14. $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \operatorname{sen} t$; de $t = 0$ a $t = \pi$

En los ejercicios 15 a 22, utilice NINT *en la graficadora para obtener un valor aproximado con cuatro dígitos significativos de la longitud de arco de la curva definida por las ecuaciones paramétricas dadas.*

15. $x = t + 2, y = 4t^2 + t$; de $t = 0$ a $t = 3$

16. $x = 2t^2 + 3t, y = 2t - 1$; de $t = 1$ a $t = 2$

17. $x = 3 \cos t, y = 2 \operatorname{sen} t$; de $t = 0$ a $t = \frac{1}{2}\pi$

18. $x = 2 \sec t, y = 3 \tan t$; de $t = 0$ a $t = \frac{1}{4}\pi$

19. $x = 8 \tan t, y = 6 \sec t$; de $t = \frac{3}{4}\pi$ a $t = \pi$

20. $x = e^t, y = \ln t$; de $t = 1$ a $t = 5$

21. $x = 4 - t^2, y = t^2 + 4t$; de $t = -4$ a $t = 4$

22. $x = 3t, y = 4t^3$; de $t = -1$ a $t = 1$

23. Calcule la longitud de la hipocicloide completa de cuatro cúspides:

$$x = a \cos^3 t \quad \text{y} \quad y = a \operatorname{sen}^3 t$$

24. Calcule la longitud de un arco de la cicloide

$$x = a(t - \operatorname{sen} t) \quad \text{y} \quad y = a(1 - \cos t)$$

25. Calcule la longitud de la tractriz

$$x = t - a \tanh \frac{t}{a} \quad \text{y} \quad y = a \operatorname{sech} \frac{t}{a}$$

desde $t = a$ a $t = 2a$.

26. Determine la distancia recorrida por una tachuela clavada en la llanta de una rueda de bicicleta si su radio es de 40 cm y la bicicleta recorre una distancia de 50π m. *Sugerencia:* la trayectoria de la tachuela es una cicloide.

27. **(a)** Demuestre que la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = a \operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad y = b \cos t \quad a > b$$

es una elipse.

(b) Si C es la longitud de la elipse del inciso (a), demuestre que

$$C = 4 \int_0^{\pi/2} a\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt$$

donde $k^2 = (a^2 - b^2)/a^2 < 1$. Esta integral se denomina *integral elíptica* y no puede evaluarse exactamente en términos de funciones elementales.

28. **(a)** Utilice la fórmula del ejercicio 27(b) y NINT en la graficadora para determinar la longitud de la elipse definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = 5 \operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad y = 4 \cos t$$

(b) Trace la elipse en la graficadora. Apoye la respuesta del inciso (a) determinando los perímetros del rombo inscrito y del rectángulo circunscrito en la elipse y mostrando que la longitud de la elipse está entre estos dos perímetros.

9.3 COORDENADAS POLARES Y GRÁFICAS POLARES

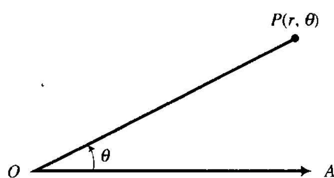
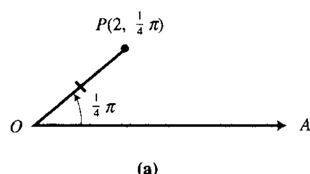


FIGURA 1

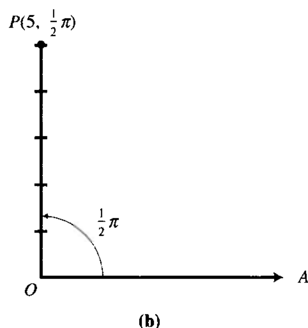
Hasta ahora, se ha localizado un punto en un plano mediante sus coordenadas cartesianas rectangulares. Otros sistemas coordenados permiten ubicar un punto en el plano, y el *sistema de coordenadas polares* es uno de ellos. Este sistema es importante debido a que ciertas curvas tienen ecuaciones más simples en coordenadas polares. Además, las tres cónicas (parábola, elipse e hipérbola) pueden representarse mediante una ecuación, como se verá en la sección 9.5. Esta ecuación se aplica en física para deducir las leyes de Kepler, y en astronomía, en el estudio del movimiento de los planetas.

Las coordenadas cartesianas son números, la abscisa y la ordenada, que representan la distancia dirigida a partir de dos rectas fijas. Las **coordenadas polares** consisten de una distancia dirigida y la medida de un ángulo en relación a un punto fijo y un rayo fijo (o semirecta). El punto fijo se denomina **polo** (u **origen**) y se representa mediante la letra O. El rayo fijo recibe el nombre de **eje polar** (o **recta polar**), la cual se denota por OA. El rayo OA usualmente se dibuja horizontal y se prolonga indefinidamente hacia la derecha. Vea la figura 1.

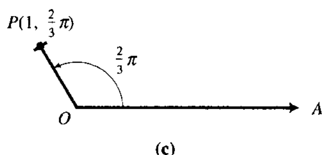
Sea P cualquier punto del plano diferente de O. Sea θ la medida en radianes del ángulo dirigido AOP, positivo cuando se mide en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj y negativo en el caso contrario, que tiene como su lado inicial el rayo OA y como su lado final el rayo OP. Si r es la distancia no dirigida de O a P (esto es, $r = |\overline{OP}|$), un conjunto de coordenadas polares de P está dado por r y θ, y se denotan estas coordenadas como (r, θ).



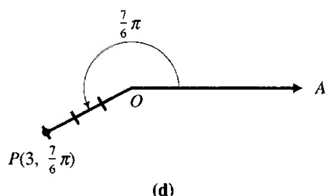
(a)



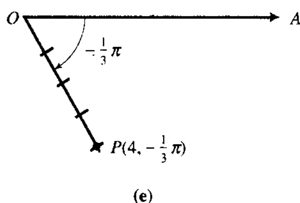
(b)



(c)



(d)



(e)

FIGURA 2

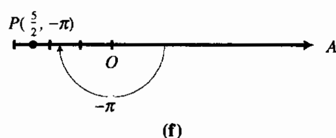
▶ ***EJEMPLO 1*** Localice cada uno de los siguientes puntos que tienen los conjuntos dados de coordenadas polares: **(a)** $(2, \frac{1}{4}\pi)$; **(b)** $(5, \frac{1}{2}\pi)$; **(c)** $(1, \frac{2}{3}\pi)$; **(d)** $(3, \frac{7}{6}\pi)$; **(e)** $(4, -\frac{1}{3}\pi)$; **(f)** $(\frac{5}{2}, -\pi)$.

Solución

(a) El punto $(2, \frac{1}{4}\pi)$ se determina al dibujar primero el ángulo que tiene una medida en radianes de $\frac{1}{4}\pi$, cuyo vértice está en el polo y su lado inicial sobre el eje polar. El punto en el lado terminal que está a 2 unidades del polo es el punto $(2, \frac{1}{4}\pi)$. consulte la figura 2(a). De manera semejante se obtienen los puntos que se muestran en las figuras 2(b)–(f). ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** La figura 3 muestra el punto $(4, \frac{5}{6}\pi)$. Otro conjunto de coordenadas polares para este punto es $(4, -\frac{7}{6}\pi)$; vea la figura 4. Además, las coordenadas polares $(4, \frac{17}{6}\pi)$ también representan el mismo punto, como se muestra en la figura 5. ◀

En realidad, las coordenadas $(4, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi)$, donde k es cualquier número entero, proporcionan el mismo punto. Así, un punto particular tiene un número ilimitado de conjuntos de coordenadas polares, a diferencia del sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, en el cual existe una correspondencia uno a uno entre las coordenadas y la posición de los puntos en el plano. Un ejemplo más se tiene al considerar conjuntos de coordenadas polares para el polo. Si $r = 0$ y θ es cualquier número real, se tiene el polo designado por $(0, \theta)$.



(f)

FIGURA 2

A continuación se considerarán las coordenadas polares para las cuales r es negativo. En este caso, en lugar de que el punto esté en el lado terminal del ángulo, el punto se encuentra sobre la prolongación del lado terminal, la cual es el rayo desde el polo que se extiende en sentido opuesto al lado terminal. En consecuencia, si P está sobre la prolongación del lado terminal del ángulo cuya medida en radianes es θ, entonces un conjunto de coordenadas polares de P es (r, θ), donde $r = -|\overline{OP}|$.

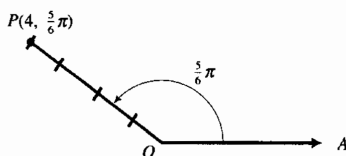


FIGURA 3

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 El punto $(-4, -\frac{1}{6}\pi)$ mostrado en la figura 6 es el mismo punto que $(4, \frac{5}{6}\pi)$, $(4, -\frac{7}{6}\pi)$ y $(4, \frac{17}{6}\pi)$ del ejemplo ilustrativo 1. Otro conjunto de coordenadas polares para este punto es $(-4, \frac{11}{6}\pi)$; vea la figura 7.

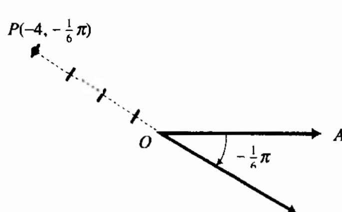


FIGURA 6

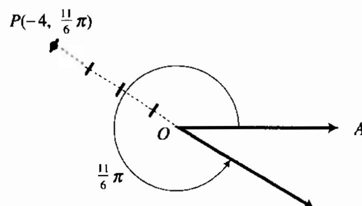


FIGURA 7

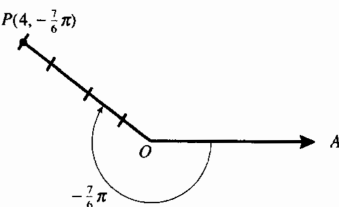


FIGURA 4

A menudo el ángulo se mide en radianes: de modo que un conjunto de coordenadas polares de un punto es un par ordenado de números reales. Para cada par ordenado de números reales existe un único punto al que le corresponde este conjunto de coordenadas polares. Sin embargo, se ha visto que un punto particular puede representarse mediante un número ilimitado de pares ordenados de números reales. Si el punto P no es el polo, y r y θ se restringen de modo que $r > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, entonces P tiene un único conjunto de coordenadas polares.

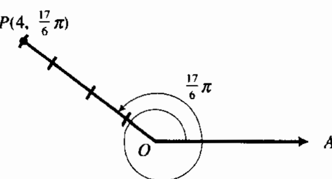


FIGURA 5

En ocasiones se desea hacer referencia a las coordenadas cartesianas rectangulares y coordenadas polares de un punto. Para lograr esto, se considera el origen del primer sistema como el polo del segundo sistema, el eje polar como la parte positiva del eje x y el rayo para el cual $\theta = \frac{1}{2}\pi$ como la parte positiva del eje y.

Suponga que P es un punto cuya representación en el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares es (x, y), y (r, θ) es la representación en coordenadas polares de P. Como caso particular, suponga que P está en el segundo cuadrante y $r > 0$, como se muestra en la figura 8. Entonces

$$\cos\theta = \frac{x}{|\overline{OP}|} = \frac{x}{r} \qquad \text{sen} = \frac{y}{|\overline{OP}|} = \frac{y}{r}$$

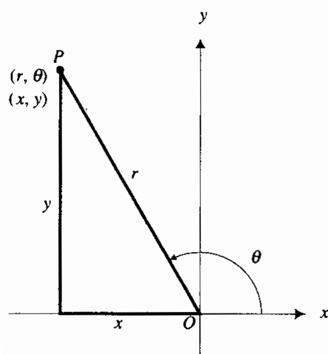


FIGURA 8

De este modo,

$$x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r \,\text{sen}\,\theta \tag{1}$$

Estas ecuaciones se cumplen para P en cualquier cuadrante y r positivo o negativo. De las ecuaciones no sólo se pueden obtener las coordenadas

cartesianas rectangulares de un punto cuando se conocen las coordenadas polares, sino que también se puede obtener una *ecuación polar* de una curva a partir de su ecuación cartesiana rectangular.

Con el fin de deducir las ecuaciones que proporcionen un conjunto de coordenadas polares de un punto cuando se conocen sus coordenadas cartesianas rectangulares, se elevan al cuadrado los dos miembros de cada ecuación de (1), se iguala la suma de los miembros izquierdos a la suma de los miembros derechos, y se resuelve para r, obteniéndose

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \qquad (2)$$

Al dividir miembro a miembro las ecuaciones de (1) se tiene

$$\frac{r \operatorname{sen} \theta}{r \cos \theta} = \frac{y}{x}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \qquad (3)$$

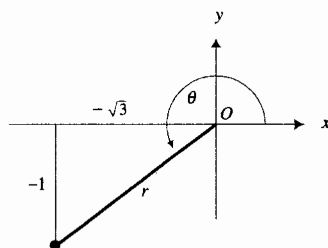


FIGURA 9

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 La figura 9 muestra el punto cuya representación en coordenadas cartesianas es $(-\sqrt{3}, -1)$. Para obtener las coordenadas polares (r, θ), donde $r > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, se aplican (2) y (3):

$$r = \sqrt{3 + 1} \qquad \tan \theta = \frac{-1}{-\sqrt{3}}$$

$$= 2 \qquad \theta = \tfrac{7}{6}\pi \qquad (\text{ya que } \pi < \theta < \tfrac{3}{2}\pi)$$

Así, el punto es $(2, \frac{7}{6}\pi)$. ◀

Una ecuación en coordenadas polares se denomina **ecuación polar** a fin de distinguirla de una **ecuación cartesiana**, término empleado cuando una ecuación está dada en coordenadas cartesianas rectangulares.

EJEMPLO 2 Obtenga una ecuación cartesiana de la gráfica que tiene la ecuación polar

$$r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$$

Solución Debido a que $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$, se tiene que $\operatorname{sen} 2\theta = 2(y/r)(x/r)$, donde $r \neq 0$. Con esta sustitución y $r^2 = x^2 + y^2$, se obtiene de la ecuación polar dada

$$x^2 + y^2 = 4(2)\frac{y}{r} \cdot \frac{x}{r}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{8xy}{r^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{8xy}{x^2 + y^2}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 8xy$$ ◀

La gráfica de una ecuación en coordenadas polares, denominada **gráfica polar**, consiste de aquellos, puntos y sólo aquellos, que tienen al menos un par de coordenadas polares que satisfacen la ecuación. A continuación se tratarán las propiedades de dichas gráficas, las cuales se obtendrán a mano y en la graficadora.

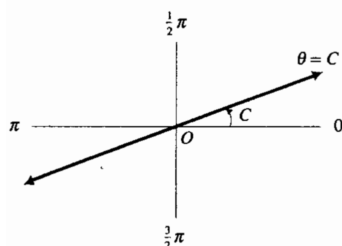


FIGURA 10

La ecuación

$$\theta = C$$

donde C es una constante, es satisfecha por todos los puntos cuyas coordenadas polares son (r, C) sin importar el valor de r. Por tanto, la gráfica de esta ecuación es una recta que contiene al polo y forma un ángulo de C radianes con el eje polar. Vea la figura 10. La misma recta está representada por la ecuación

$$\theta = C \pm k\pi$$

donde k es cualquier número entero.

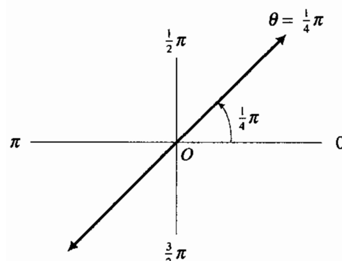


FIGURA 11

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

(a) La gráfica de la ecuación

$$\theta = \tfrac{1}{4}\pi$$

se presenta en la figura 11, y es la recta que pasa por el polo y forma un ángulo de $\frac{1}{4}\pi$ radianes con el eje polar. La misma recta está dada por las ecuaciones

$$\theta = \tfrac{5}{4}\pi \qquad \theta = \tfrac{9}{4}\pi \qquad \theta = -\tfrac{3}{4}\pi \qquad \theta = -\tfrac{7}{4}\pi$$

y así sucesivamente.

(b) La figura 12 muestra la gráfica de la ecuación

$$\theta = \tfrac{2}{3}\pi$$

la cual es la recta que pasa por el polo y forma un ángulo de $\frac{2}{3}\pi$ radianes con el eje polar. Otras ecuaciones de esta recta son

$$\theta = \tfrac{5}{3}\pi \qquad \theta = \tfrac{8}{3}\pi \qquad \theta = -\tfrac{1}{3}\pi \qquad \theta = -\tfrac{4}{3}\pi$$

etcétera. ◀

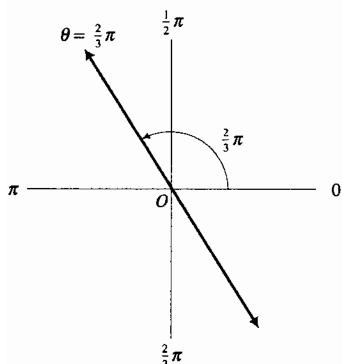


FIGURA 12

En general, la forma polar de una ecuación de una recta no es tan simple como la forma cartesiana. Sin embargo, si la recta es paralela al eje polar o al eje $\frac{1}{2}\pi$, entonces la ecuación es bastante sencilla.

Si una recta es paralela al eje polar y pasa por el punto B cuyas coordenadas cartesianas son $(0, b)$ y cuyas coordenadas polares son $(b, \frac{1}{2}\pi)$, entonces una ecuación cartesiana es $y = b$. Si se sustituye y por r sen θ, se tiene

$$r \text{ sen } \theta = b$$

la cual es la ecuación polar de cualquier recta paralela al eje polar. Si b es positivo, la recta está por arriba del eje polar. Si b es negativo, la recta está por debajo del eje polar.

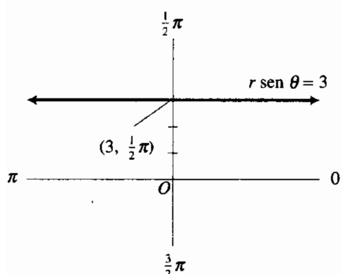


FIGURA 13

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

En la figura 13 se tiene la gráfica de la ecuación

$$r \text{ sen } \theta = 3$$

mientras que en la figura 14 se muestra la gráfica de la ecuación

$$r \text{ sen } \theta = -3$$

◀

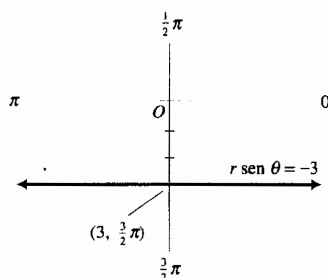


FIGURA 14

Ahora considere una recta paralela al eje $\frac{1}{2}\pi$ o, equivalentemente, perpendicular al eje polar. Si la recta pasa por el punto A, cuyas coordenadas cartesianas son $(a, 0)$ y cuyas coordenadas polares son $(a, 0)$, una ecuación cartesiana es $x = a$. Al sustituir x por $r \cos \theta$ se obtiene

$$r \cos \theta = a$$

la cual es la ecuación de cualquier recta perpendicular al eje polar. Si a es positivo, la recta está a la derecha del eje $\frac{1}{2}\pi$. Si a es negativo, la recta está a la izquierda del eje $\frac{1}{2}\pi$.

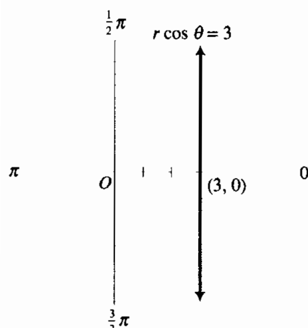


FIGURA 15

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 La figura 15 muestra la gráfica de la ecuación

$$r \cos \theta = 3$$

y la figura 16 presenta la gráfica de la ecuación

$$r \cos \theta = -3$$

◀

La gráfica de la ecuación

$$r = C$$

donde C es cualquier constante, es una circunferencia cuyo centro está en el polo y su radio es $|C|$. La misma circunferencia está dada por la ecuación.

$$r = -C$$

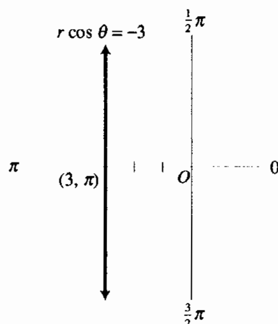


FIGURA 16

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7 En la figura 17 se muestra la gráfica de la ecuación

$$r = 4$$

la cual es una circunferencia con centro en el polo y radio 4. La misma circunferencia está dada por la ecuación

$$r = -4$$

aunque el uso de esta ecuación no es común. ◀

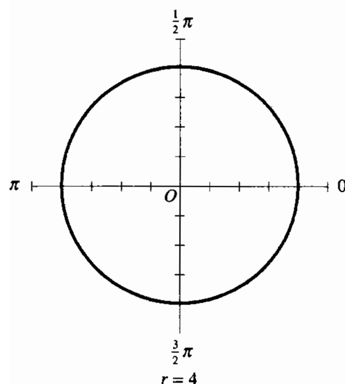


FIGURA 17

Como ocurre para la recta, la ecuación polar general de una circunferencia no es tan simple como la forma cartesiana. No obstante, se tienen casos especiales en los que una ecuación de una circunferencia merece considerarse en forma polar.

Si una circunferencia contiene al origen (el polo) y tiene su centro en el punto de coordenadas cartesianas (a, b), entonces una ecuación cartesiana de la circunferencia es

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$$

Una ecuación polar de esta circunferencia es

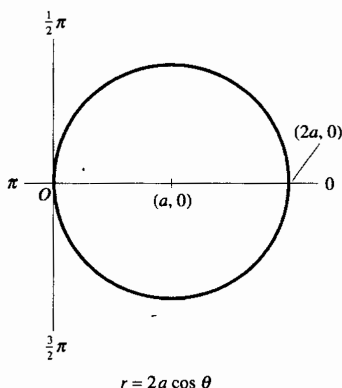
$$\begin{aligned} (r\cos\theta)^2 + (r \operatorname{sen}\theta)^2 - 2a(r\cos\theta) - 2b(r\operatorname{sen}\theta) &= 0 \\ r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) - 2ar\cos\theta - 2br\operatorname{sen}\theta &= 0 \\ r^2 - 2ar\cos\theta - 2br\operatorname{sen}\theta &= 0 \\ r(r - 2a\cos\theta - 2b\operatorname{sen}\theta) &= 0 \\ r = 0 \qquad r - 2a\cos\theta - 2b\operatorname{sen}\theta &= 0 \end{aligned}$$

Como la gráfica de la ecuación $r = 0$ es el polo y el polo ($r = 0$ cuando $\theta = \tan^{-1}(-a/b)$) está en la gráfica de $r - 2a \cos \theta - 2b \operatorname{sen} \theta = 0$, una ecuación de la circunferencia es

$$r = 2a \cos \theta + 2b \operatorname{sen} \theta$$

Cuando $b = 0$, en esta ecuación, se tiene

$$r = 2a \cos \theta$$



$r = 2a \cos \theta$

FIGURA 18

Esta es una ecuación polar de la circunferencia de radio $|a|$ unidades, tangente al eje $\frac{1}{2}\pi$, y con su centro en el eje polar o en su prolongación. Si $a > 0$, la circunferencia está a la derecha del polo como en la figura 18, y si $a < 0$, la circunferencia se encuentra a la izquierda del polo.

Si $a = 0$ en la ecuación $r = 2a \cos \theta + 2b \operatorname{sen} \theta$, se tiene

$$r = 2b \operatorname{sen} \theta$$

la cual es la ecuación polar de la circunferencia de radio $|b|$ unidades, con su centro sobre el eje $\frac{1}{2}\pi$ o en su prolongación, y es tangente al eje polar. Si $b > 0$, la circunferencia está por arriba del polo, y si $b < 0$, la circunferencia se encuentra debajo del polo.

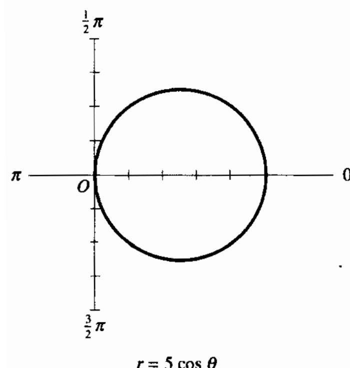
EJEMPLO 3 Dibuje la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones: **(a)** $r = 5 \cos \theta$; **(b)** $r = -6 \operatorname{sen} \theta$.

Solución

(a) La ecuación

$$r = 5 \cos \theta$$

es de la forma $r = 2a \cos \theta$ con $a = \frac{5}{2}$. Por tanto, la gráfica es una circunferencia con centro en el punto que tiene coordenadas polares $(\frac{5}{2}, 0)$ y es tangente al eje $\frac{1}{2}\pi$. La gráfica se presenta en la figura 19.



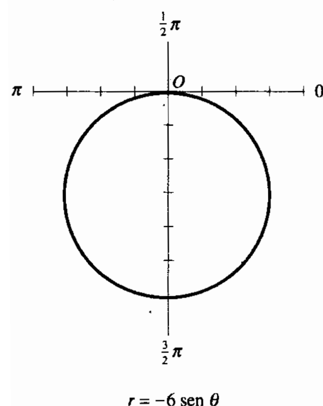
$r = 5 \cos \theta$

FIGURA 19

(b) La ecuación

$$r = -6 \operatorname{sen} \theta$$

es de la forma $r = 2b \operatorname{sen} \theta$ con $b = -3$. La gráfica es una circunferencia con centro en el punto que tiene coordenadas polares $(3, \frac{3}{2}\pi)$ y es tangente al eje polar. La figura 20 muestra la gráfica. ◀



$r = -6 \operatorname{sen} \theta$

FIGURA 20

Resumen de ecuaciones polares de rectas y circunferencias

C, *a* y *b* son constantes

$\theta = C$	Recta que contiene al polo; forma un ángulo de C radianes con el eje polar.
$r \operatorname{sen} \theta = b$	Recta paralela al eje polar; arriba del eje polar si $b > 0$; debajo del eje polar si $b < 0$.
$r \cos \theta = a$	Recta paralela al eje $\frac{1}{2}\pi$; a la derecha del eje $\frac{1}{2}\pi$ si $a > 0$; a la izquierda del eje $\frac{1}{2}\pi$ si $a < 0$.
$r = C$	Circunferencia; centro en el polo; radio C.
$r = 2a \cos \theta$	Circunferencia; radio $|a|$; tangente al eje $\frac{1}{2}\pi$; centro en el eje polar o en su prolongación.
$r = 2b \operatorname{sen} \theta$	Circunferencia; radio $|b|$; tangente al eje polar; centro en el eje $\frac{1}{2}\pi$ o en su prolongación.

Antes de discutir otras gráficas polares, se establecerán los siguientes criterios de simetría, los cuales pueden demostrarse a partir de la definición de simetría de una gráfica dada en la sección del apéndice A.2.

Criterios de simetría

Una gráfica es

(i) simétrica con respecto al eje polar si se obtiene una ecuación equivalente cuando (r, θ) se sustituye por $(r, -\theta)$ o $(-r, \pi - \theta)$;

(ii) simétrica con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$ si se obtiene una ecuación equivalente cuando (r, θ) se sustituye por $(r, \pi - \theta)$ o $(-r, -\theta)$;

(iii) simétrica con respecto al polo si se obtiene una ecuación equivalente cuando (r, θ) se sustituye por $(-r, \theta)$ o $(r, \pi + \theta)$.

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 8** Para la gráfica de la ecuación

$$r = 4 \cos 2\theta$$

se aplicarán los criterios de simetría con respecto al eje polar, al eje $\frac{1}{2}\pi$ y al polo.

Para el criterio de simetría con respecto al eje polar, se sustituye (r, θ) por $(r, -\theta)$ y se obtiene $r = 4 \cos(-2\theta)$, la cual es equivalente a $r = 4 \cos 2\theta$. Por tanto, la gráfica es simétrica con respecto al eje polar.

Para el criterio de simetría con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$, se sustituye (r, θ) por $(r, \pi - \theta)$ en la ecuación dada y se obtiene $r = 4 \cos (2(\pi - \theta))$ o, equivalentemente, $r = 4 \cos (2\pi - 2\theta)$, que equivale a $r = 4 \cos 2\theta$. Por tanto, la gráfica es simétrica con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$.

Para el criterio de simetría con respecto al polo, se sustituye (r, θ) por $(-r, \theta)$ y se obtiene $-r = 4 \cos 2\theta$, la cual no es equivalente a la ecuación dada. No obstante, también debe determinarse si el otro conjunto de coordenadas funciona. Al sustituir (r, θ) por $(r, \pi + \theta)$ se obtiene $r = 4 \cos(2 (\pi + \theta))$ o, equivalentemente, $r = 4 \cos(2\pi + 2\theta)$, que equivale a $r = 4 \cos 2\theta$. Por tanto, la gráfica es simétrica con respecto al eje polo. ◀

Cuando se dibuja una gráfica polar, a fin de determinar si contiene al polo se sustituye 0 por r en la ecuación y después se resuelve para θ.

 **EJEMPLO 4** Dibuje la gráfica de la ecuación

$$r = 1 - 2 \cos \theta$$

Solución Como se obtiene una ecuación equivalente cuando se sustituye (r, θ) por $(r, -\theta)$, la gráfica es simétrica con respecto al eje polar.

Si $r = 0$, se obtiene $\cos \theta = \frac{1}{2}$, y si $0 \leq \theta \leq \pi$, entonces $\theta = \frac{1}{3}\pi$. Así, el punto $(0, \frac{1}{3}\pi)$, el polo, está en la gráfica. La tabla 1 presenta las coordenadas de algunos otros puntos de la gráfica. A partir de estos puntos se dibuja la mitad de la gráfica; el resto se dibuja teniendo en cuenta su simetría con respecto al eje polar. La gráfica se muestra en la figura 21. ◀

Tabla 1

θ	r
0	-1
$\frac{1}{6}\pi$	$1 - \sqrt{3}$
$\frac{1}{3}\pi$	0
$\frac{1}{2}\pi$	1
$\frac{2}{3}\pi$	2
$\frac{5}{6}\pi$	$1 + \sqrt{3}$
π	3

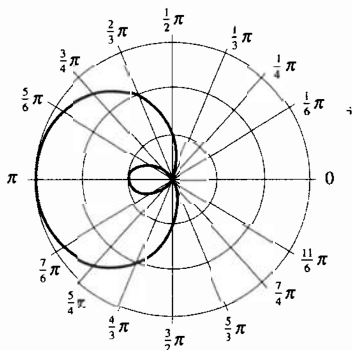
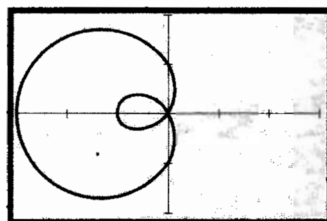


FIGURA 21

En la figura 21, la gráfica se ha dibujado en un sistema de coordenadas polares. En los ejercicios 51 a 60 se le pedirá que dibuje algunas gráficas polares en un sistema de coordenadas polares.

El teorema siguiente muestra cómo definir una gráfica polar mediante una par de ecuaciones paramétricas.



[−3, 3] por [−2, 2]

$r = 1 - 2\cos\theta$

FIGURA 22

9.3.1 Teorema

La gráfica de la ecuación polar $r = f(\theta)$ está definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t)\cos t \quad \text{y} \quad y = f(t)\text{sen } t$$

Demostración Sea (x, y) la representación cartesiana de un punto P cuya representación polar es (r, θ). Entonces

$$x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

Como $r = f(\theta)$, se tiene

$$x = f(\theta)\cos\theta \quad \text{y} \quad y = f(\theta)\text{sen}\,\theta$$

Al sustituir θ por t de modo que el parámetro sea t, se tiene

$$x = f(t)\cos t \quad \text{y} \quad y = f(t)\text{sen } t$$

■

Las ecuaciones paramétricas del teorema 9.3.1 son utilizadas por algunas computadoras y graficadoras para trazar gráficas polares. Otras graficadoras permiten trazar una gráfica polar directamente de la ecuación $r = f(\theta)$ empleando el modo polar de la graficadora.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 9** Para trazar la gráfica del ejemplo 4 en la graficadora, se utilizan las ecuaciones del teorema 9.3.1, como $f(\theta) = 1 - 2\cos\theta$, se consideran

$$x = (1 - 2\cos t)\cos t \quad \text{y} \quad y = (1 - 2\cos t)\text{sen } t$$

Con la graficadora en modo paramétrico y de radianes, y $0 \le t \le 2\pi$, se elige [−3, 3] por [−2, 2] como rectángulo de inspección y obteniéndose la gráfica mostrada en la figura 22, la cual es acorde con la curva de la figura 21. ◀

La gráfica polar del ejemplo 4 y del ejemplo ilustrativo 9 se denomina *limaçon*, palabra francesa que proviene del latín *limax* que significa *caracol*. Un **caracol** (o **limaçon**) es la gráfica de una ecuación de la forma

$$r = a \pm b\cos\theta \quad \text{o} \quad r = a \pm b\,\text{sen}\,\theta$$

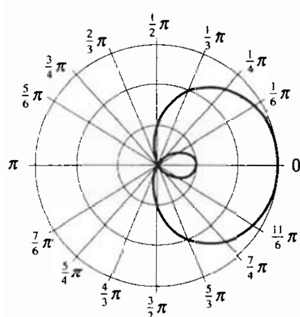
donde $a > 0$ y $b > 0$. Existen cuatro tipos de caracoles que dependen de la razón a/b.

Tipos de caracoles

De la ecuación $r = a + b\cos\theta$, donde $a > 0$ y $b > 0$:

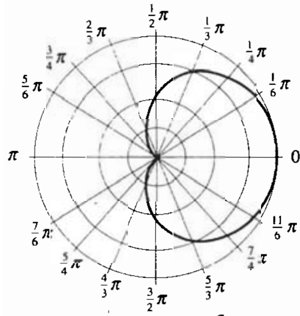
1. $0 < \frac{a}{b} < 1$ **Caracol con lazo**. Vea la figura 23(a).
2. $\frac{a}{b} = 1$ **Cardioide** (forma de corazón). Vea la figura 23(b).
3. $1 < \frac{a}{b} < 2$ **Caracol con hendidura**. Vea la figura 23(c).
4. $2 \le \frac{a}{b}$ **Caracol convexo** (sin hendidura). Vea la figura 23(d).

Más adelante en esta sección, cuando se estudien las rectas tangentes horizontales y verticales de gráficas polares, será evidente el por qué los caracoles del tipo 3 tienen una hendidura y los del tipo 4 no.



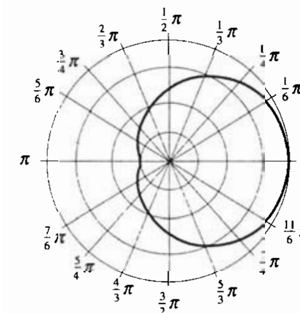
$r = a + b\cos\theta \quad 0 < \frac{a}{b} < 1$

(a) caracol con lazo



$r = a + b\cos\theta \quad \frac{a}{b} = 1$

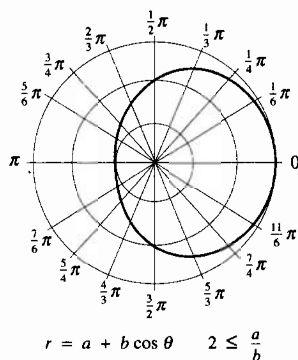
(b) cardioide



$r = a + b\cos\theta \quad 1 < \frac{a}{b} < 2$

(c) caracol con hendidura

FIGURA 23



$r = a + b\cos\theta \quad 2 \leq \frac{a}{b}$

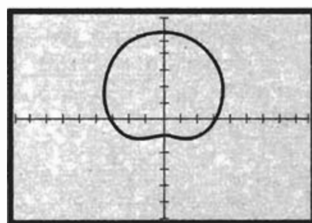
(d) caracol convexo

FIGURA 23

A partir de la ecuación de un caracol, también se puede determinar su simetría, y la dirección en la que apunta.

Simetría y dirección de un caracol

$a > 0$ y $b > 0$	
$r = a + b\cos\theta$	Simetría con respecto al eje polar; apunta hacia la derecha.
$r = a - b\cos\theta$	Simetría con respecto al eje polar; apunta hacia la izquierda.
$r = a + b\,\text{sen}\,\theta$	Simetría con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$; apunta hacia arriba.
$r = a - b\,\text{sen}\,\theta$	Simetría con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$; apunta hacia abajo.



$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

$r = 3 + 2\,\text{sen}\,\theta$

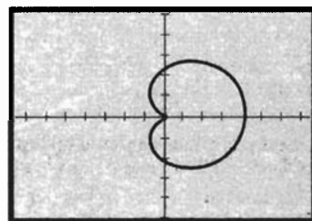
FIGURA 24

▶ ***EJEMPLO 5*** Para cada uno de los caracoles siguientes, determine el tipo, su simetría y la dirección en la que apunta, además trace el caracol: **(a)** $r = 3 + 2\,\text{sen}\,\theta$; **(b)** $r = 2 + 2\cos\theta$; **(c)** $r = 2 - \text{sen}\,\theta$.

Solución

(a) La ecuación $r = 3 + 2\,\text{sen}\,\theta$ es de la forma $r = a + b\,\text{sen}\,\theta$ con $a = 3$ y $b = 2$. Como $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ y $1 < \frac{3}{2} < 2$, la gráfica es un caracol con hendidura. Es simétrico con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$ y apunta hacia arriba. Se traza la gráfica en el rectángulo de inspección de $[-9, 9]$ por $[-6, 6]$ y se obtiene el caracol de la figura 24.

(b) La ecuación $r = 2 + 2\cos\theta$ es de la forma $r = a + b\cos\theta$ con $a = 2$ y $b = 2$. Como $\frac{a}{b} = 1$, la gráfica es una cardioide. Es simétrica con respecto al eje polar y apunta hacia la derecha. Se traza la cardioide en el rectángulo de inspección de $[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$ como se muestra en la figura 25.



$[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$

$r = 2 + 2\cos\theta$

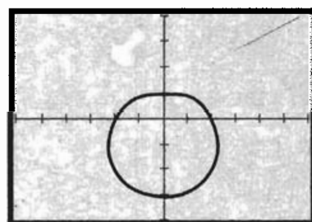
FIGURA 25

(c) La ecuación $r = 2 - \text{sen}\,\theta$ es de la forma $r = a - b\,\text{sen}\,\theta$ con $a = 2$ y $b = 1$. Como $\frac{a}{b} = 2$, la gráfica es un caracol convexo. Es simétrico con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$ y apunta hacia abajo. La gráfica se presenta en la figura 26. ◀

La gráfica de una ecuación de la forma

$$r = a\cos n\theta \quad \text{o} \quad r = a\,\text{sen}\,n\theta$$

es una **rosa**, que tiene n hojas si n es impar y $2n$ hojas si n es par.



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

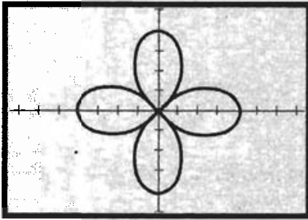
$r = 2 - \text{sen}\,\theta$

FIGURA 26

▶ ***EJEMPLO 6*** Describa y trace la ecuación

$$r = 4\cos 2\theta$$

Solución La ecuación es de la forma $r = a\cos n\theta$, donde n es igual a 2. Como n es par, entonces la gráfica es una rosa de cuatro hojas. La longitud de cada hoja es 4. En el ejemplo ilustrativo 8, se demostró que la gráfica es simétrica con respecto al eje polar, al eje $\frac{1}{2}\pi$ y al polo. La gráfica contiene al polo debido a que cuando $r = 0$ se tiene



[−7.5, 7.5] por [−5, 5]

$r = 4 \cos 2\theta$

FIGURA 27

$$\cos 2\theta = 0$$

de donde se obtiene, para $0 \leq \theta \leq 2\pi$,

$$\theta = \tfrac{1}{4}\pi \qquad \theta = \tfrac{3}{4}\pi \qquad \theta = \tfrac{5}{4}\pi \qquad \theta = \tfrac{7}{4}\pi$$

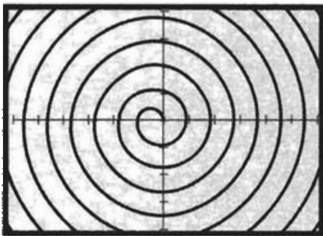
Se traza la gráfica en el rectángulo de inspección de [−7.5, 7.5] por [−5, 5] como se muestra en la figura 27. La gráfica concuerda con la descripción. ◀

Observe que si en la ecuación para una rosa se toma $n = 1$, resulta

$$r = a \cos \theta \quad \text{o} \quad r = a \operatorname{sen} \theta$$

las cuales son ecuaciones de una circunferencia. Por tanto, una circunferencia puede considerarse como una rosa de una hoja.

Otras gráficas polares que a menudo se presentan son las *espirales* (consulte los ejercicios 37 a 40) y las *lemniscatas* (vea los ejercicios 41 a 44). La gráfica del ejemplo siguiente se denomina *espiral de Arquímedes*.



[−42, 42] por [−28, 28]

$r = \theta \quad \theta \geq \theta$

FIGURA 28

▶ **EJEMPLO 7** Describa y trace la ecuación

$$r = \theta \qquad \theta \geq 0$$

Solución Observe primero que la gráfica no es simétrica con respecto a los ejes ni respecto al polo. Además, conforme θ crece, también lo hace r. Cuando $r = 0$, $\theta = 0$; de modo que el polo está en la gráfica. Cuando $\theta = n\pi$, donde n es cualquier número entero, la gráfica intersecta al eje polar o a su prolongación, y cuando $\theta = \frac{1}{2}n\pi$, donde n es cualquier número entero impar, la gráfica intersecta al eje $\frac{1}{2}\pi$ o a su prolongación. Se traza la gráfica en el rectángulo de inspección de [−42, 42] por [−28, 28], como se muestra en la figura 28, la cual concuerda con la descripción. ◀

Una fórmula para determinar la pendiente de una recta tangente a una gráfica polar la proporciona el teorema siguiente.

9.3.2 Teorema

Si m es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $r = f(\theta)$ en el punto (r, θ), entonces

$$m = \frac{\operatorname{sen} \theta \dfrac{dr}{d\theta} + r \cos \theta}{\cos \theta \dfrac{dr}{d\theta} - r \operatorname{sen} \theta}$$

Demostración Del teorema 9.3.1, la gráfica de $r = f(\theta)$ está definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(\theta) \cos \theta \quad \text{y} \quad y = f(\theta) \operatorname{sen} \theta$$

en donde θ es el parámetro. De la fórmula (4) de la sección 9.1, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}$$

$$= \frac{f'(\theta) \operatorname{sen} \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta + f(\theta)(-\operatorname{sen} \theta)}$$

Al sustituir dy/dx por $m, f(\theta)$ por r y $f'(\theta)$ por $dr/d\theta$, se obtiene

$$m = \frac{\operatorname{sen}\theta \dfrac{dr}{d\theta} + r\cos\theta}{\cos\theta \dfrac{dr}{d\theta} - r\operatorname{sen}\theta}$$ ■

La fórmula del teorema 9.3.2 puede emplearse para determinar dónde una gráfica polar tiene rectas tangentes horizontales y verticales. Esta información es útil cuando se dibujan gráficas polares. El procedimiento se muestra al aplicarlo, a dos de los caracoles del ejemplo 5, en el siguiente ejemplo ilustrativo y en el próximo ejemplo.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 10** El caracol del ejemplo 5(c) tiene la ecuación

$$r = 2 - \operatorname{sen}\theta$$

Con este valor de r y $dr/d\theta = -\cos\theta$, por el teorema 9.3.2, se tiene

$$\begin{aligned} m &= \frac{\operatorname{sen}\theta(-\cos\theta) + (2 - \operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{\cos\theta(-\cos\theta) - (2 - \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta} \\ &= \frac{-\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{-\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta} \\ &= \frac{2\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{-(1 - \operatorname{sen}^2\theta) - 2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta} \\ &= \frac{2\cos\theta(1 - \operatorname{sen}\theta)}{2\operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta - 1} \end{aligned} \tag{4}$$

Las rectas tangentes horizontales de este caracol ocurren cuando $m = 0$. Así, se iguala a cero el numerador de (4) y se resuelve para θ.

$$2\cos\theta(1 - \operatorname{sen}\theta) = 0$$

$$\begin{array}{lll} \cos\theta = 0 & & 1 - \operatorname{sen}\theta = 0 \\ \theta = \frac{1}{2}\pi \quad & \theta = \frac{3}{2}\pi \quad & \operatorname{sen}\theta = 1 \\ & & \theta = \frac{1}{2}\pi \end{array}$$

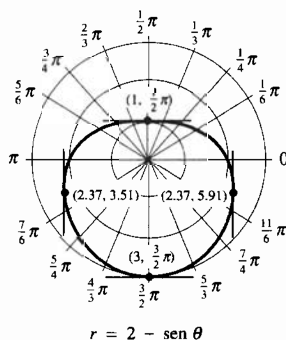
Por tanto, la curva tiene una recta tangente horizontal en los puntos $(1, \frac{1}{2}\pi)$ y $(3, \frac{3}{2}\pi)$. Las rectas tangentes verticales ocurren cuando el denominador de (4) es cero y el numerador es diferente de cero. Al resolver la ecuación que resulta se obtiene

$$2\operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 8}}{4}$$

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen}\theta = 1.3660 & \operatorname{sen}\theta = -0.3660 & \\ \text{no hay solución} & \theta \approx 3.51 & \theta \approx 5.91 \end{array}$$

En consecuencia, la curva tiene una recta tangente vertical en los puntos que tienen coordenadas polares (2.37, 3.51) y (2.37, 5.91). La figura 29 muestra el caracol y las rectas tangentes horizontales y verticales. ◀



$r = 2 - \operatorname{sen}\theta$

FIGURA 29

EJEMPLO 8 Determine los puntos en los que el caracol del ejemplo 5(a) tiene rectas tangentes horizontales y verticales. Dibuje la gráfica y muestre sus rectas tangentes.

Solución El caracol tiene la ecuación

$$r = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$$

Con este valor de r y $dr/d\theta = 2 \cos \theta$, por el teorema 9.3.2, se tiene

$$m = \frac{\operatorname{sen} \theta(2 \cos \theta) + (3 + 2 \operatorname{sen} \theta) \cos \theta}{\cos \theta(2 \cos \theta) - (3 + 2 \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta}$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 3 \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{2 \cos^2 \theta - 3 \operatorname{sen} \theta - 2 \operatorname{sen}^2 \theta}$$

$$= \frac{4 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 3 \cos \theta}{2 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta - 3 \operatorname{sen} \theta - 2 \operatorname{sen}^2 \theta}$$

$$= -\frac{\cos \theta(4 \operatorname{sen} \theta + 3)}{4 \operatorname{sen}^2 \theta + 3 \operatorname{sen} \theta - 2} \qquad \textbf{(5)}$$

A fin de determinar las rectas tangentes horizontales se iguala el numerador de (5) a cero. Al resolver para θ se tiene

$$\cos \theta (4 \operatorname{sen} \theta + 3) = 0$$

$$\cos \theta = 0 \qquad\qquad 4 \operatorname{sen} \theta + 3 = 0$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}\pi \qquad \theta = \tfrac{3}{2}\pi \qquad\qquad \operatorname{sen} \theta = -\tfrac{3}{4}$$

$$\theta \approx 3.99 \qquad \theta \approx 5.44$$

De este modo, la curva tiene una recta tangente horizontal en los puntos $(5, \tfrac{1}{2}\pi)$, $(1, \tfrac{3}{2}\pi)$, $(\tfrac{3}{2}, 3.99)$ y $(\tfrac{3}{2}, 5.44)$.

Las rectas tangentes verticales se determinan al igualar a cero el denominador de (5). Al resolver la ecuación resultante se obtiene

$$4 \operatorname{sen}^2 \theta + 3 \operatorname{sen} \theta - 2 = 0$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

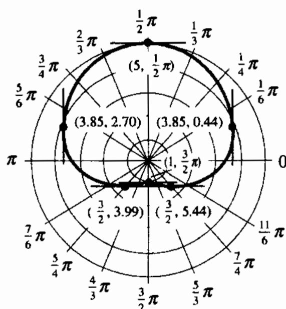
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{8}$$

$$\operatorname{sen} \theta = 0.4254 \qquad\qquad \operatorname{sen} \theta = -1.1754$$

$$\theta \approx 0.44 \qquad \theta \approx 2.70 \qquad\qquad \text{no hay solución}$$

Por tanto, la curva tiene una recta tangente vertical en los puntos de coordenadas polares (3.85, 0.44) y (3.85, 2.70).

La figura 30 muestra el caracol y las rectas tangentes horizontales y verticales. ◀



$r = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$

FIGURA 30

Observe en la figura 30 que el caracol tiene una hendidura. Este hecho se manifiesta debido a las cuatro rectas tangentes horizontales. El caracol de la figura 29 no tiene hendidura; sólo tiene dos rectas tangentes horizontales.

EJERCICIOS 9.3

En los ejercicios 1 a 4, ubique los puntos que tienen el conjunto dado de coordenadas polares.

1. **(a)** $(3, \frac{1}{6}\pi)$ **(b)** $(2, \frac{2}{3}\pi)$ **(c)** $(1, \pi)$
(d) $(4, \frac{5}{4}\pi)$ **(e)** $(5, \frac{11}{6}\pi)$

2. **(a)** $(4, \frac{1}{3}\pi)$ **(b)** $(3, \frac{3}{4}\pi)$ **(c)** $(1, \frac{7}{6}\pi)$
(d) $(2, \frac{3}{2}\pi)$ **(e)** $(5, \frac{5}{3}\pi)$

3. **(a)** $(1, -\frac{1}{4}\pi)$ **(b)** $(3, -\frac{5}{6}\pi)$ **(c)** $(-1, \frac{1}{4}\pi)$
(d) $(-3, \frac{5}{6}\pi)$ **(e)** $(-2, -\frac{1}{2}\pi)$

4. **(a)** $(5, -\frac{2}{3}\pi)$ **(b)** $(2, -\frac{7}{6}\pi)$ **(c)** $(-5, \frac{2}{3}\pi)$
(d) $(-2, \frac{7}{6}\pi)$ **(e)** $(-4, -\frac{5}{4}\pi)$

En los ejercicios 5 y 6, obtenga las coordenadas cartesianas rectangulares de los puntos cuyas coordenadas polares se indican.

5. **(a)** $(3, \pi)$ **(b)** $(\sqrt{2}, -\frac{3}{4}\pi)$
(c) $(-4, \frac{2}{3}\pi)$ **(d)** $(-1, -\frac{7}{6}\pi)$

6. **(a)** $(-2, -\frac{1}{2}\pi)$ **(b)** $(-1, \frac{1}{4}\pi)$
(c) $(2, -\frac{7}{6}\pi)$ **(d)** $(2, \frac{7}{4}\pi)$

En los ejercicios 7 y 8, obtenga un conjunto de coordenadas polares de los puntos cuyas coordenadas cartesianas rectangulares se proporcionan. Considere $r > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

7. **(a)** $(1, -1)$ **(b)** $(-\sqrt{3}, 1)$
(c) $(2, 2)$ **(d)** $(-5, 0)$

8. **(a)** $(3, -3)$ **(b)** $(-1, \sqrt{3})$
(c) $(0, -2)$ **(d)** $(-2, -2\sqrt{3})$

En los ejercicios 9 a 12, obtenga una ecuación cartesiana de la gráfica que tiene la ecuación polar indicada.

9. **(a)** $r^2 = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ **(b)** $r^2 = \cos\theta$

10. **(a)** $r^2 \cos 2\theta = 10$ **(b)** $r^2 = 4\cos 2\theta$

11. **(a)** $r\cos\theta = -1$ **(b)** $r = \dfrac{6}{2 - 3\operatorname{sen}\theta}$

12. **(a)** $r = 2\operatorname{sen} 3\theta$ **(b)** $r = \dfrac{4}{3 - 2\cos\theta}$

En los ejercicios 13 a 20, dibuje la gráfica de la ecuación.

13. **(a)** $\theta = \frac{1}{3}\pi$ **(b)** $r = \frac{1}{3}\pi$

14. **(a)** $\theta = \frac{3}{4}\pi$ **(b)** $r = \frac{3}{4}\pi$

15. **(a)** $\theta = 2$ **(b)** $r = 2$

16. **(a)** $\theta = -3$ **(b)** $r = -3$

17. **(a)** $r\cos\theta = 4$ **(b)** $r = 4\cos\theta$

18. **(a)** $r\operatorname{sen}\theta = 2$ **(b)** $r = 2\operatorname{sen}\theta$

19. **(a)** $r\operatorname{sen}\theta = -4$ **(b)** $r = -4\operatorname{sen}\theta$

20. **(a)** $r\cos\theta = -5$ **(b)** $r = -5\cos\theta$

En los ejercicios 21 a 30, determine el tipo de caracol, su simetría y la dirección en la que apunta. Trace el caracol.

21. $r = 4(1 - \cos\theta)$ **22.** $r = 3(1 - \operatorname{sen}\theta)$

23. $r = 2(1 + \operatorname{sen}\theta)$ **24.** $r = 3(1 + \cos\theta)$

25. $r = 2 - 3\operatorname{sen}\theta$ **26.** $r = 4 - 3\operatorname{sen}\theta$

27. $r = 3 - 2\cos\theta$ **28.** $r = 3 - 4\cos\theta$

29. $r = 4 + 2\operatorname{sen}\theta$ **30.** $r = 6 + 2\cos\theta$

En los ejercicios 31 a 50, describa y trace la gráfica de la ecuación.

31. $r = 2\operatorname{sen} 3\theta$ **32.** $r = 4\operatorname{sen} 5\theta$

33. $r = 2\cos 4\theta$ **34.** $r = 3\cos 2\theta$

35. $r = 4\operatorname{sen} 2\theta$ **36.** $r = 3\cos 3\theta$

37. $r = e^{\theta}$ (espiral logarítmica)

38. $r = e^{\theta/3}$ (espiral logarítmica)

39. $r = \dfrac{1}{\theta}$ (espiral recíproca)

40. $r = 2\theta$ (espiral de Arquímedes)

41. $r^2 = 9\operatorname{sen} 2\theta$ (lemniscata)

42. $r^2 = 16\cos 2\theta$ (lemniscata)

43. $r^2 = -25\cos 2\theta$ (lemniscata)

44. $r^2 = -4\operatorname{sen} 2\theta$ (lemniscata)

45. $r = 2\operatorname{sen}\theta\tan\theta$ (cisoide)

46. $r^2 = 8\theta$ (espiral de Fermat)

47. $r = 2\sec\theta - 1$ (concoide de Nicómedes)

48. $r = 2\csc\theta + 3$ (concoide de Nicómedes)

49. $r = |\operatorname{sen} 2\theta|$ **50.** $r = 2\,|\cos\theta|$

51. Las gráficas polares pueden dibujarse en papel polar en el que utiliza un sistema de coordenadas polares como se muestra en la figura 21. Construya un sistema de estos con regla, compás y transportador. En este sistema dibuje la gráfica de $r = 1 + 4\operatorname{sen}\theta$.

52. Siga las instrucciones del ejercicio 51 para la gráfica de $r = 2 + \cos\theta$.

En los ejercicios 53 a 60, determine los puntos en los que la gráfica tiene rectas tangentes horizontales y verticales. Dibuje la gráfica y muestre sus rectas tangentes. Para los dibujos puede emplear un sistema de coordenadas polares tal como el sugerido en el ejercicio 51.

53. $r = 4 + 3 \operatorname{sen} \theta$

54. $r = 2 + \cos \theta$

55. $r = 4 - 2 \cos \theta$

56. $r = 3 - 2 \operatorname{sen} \theta$

57. $r = \cos 2\theta$

58. $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$

59. $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$

60. $r^2 = 9 \cos 2\theta$

En los ejercicios 61 a 64, trace las gráficas de las dos ecuaciones en el mismo rectángulo de inspección. Después utilice los procedimientos intersección (intersect), o rastreo y aumento (trace y zoom-in), para aproximar a dos dígitos significativos las coordenadas cartesianas rectangulares de los puntos de intersección de las gráficas. En la sección 9.4 se estudia un método analítico para obtener los puntos de intersección de gráficas polares.

61. $\begin{cases} r = 3 \\ r = 2(1 + \cos \theta) \end{cases}$

62. $\begin{cases} r = 2 \cos \theta \\ r = 2 \operatorname{sen} \theta \end{cases}$

63. $\begin{cases} r = 2 \operatorname{sen} 3\theta \\ r = 4 \operatorname{sen} \theta \end{cases}$

64. $\begin{cases} r = 2 \cos 2\theta \\ r = 2 \operatorname{sen} \theta \end{cases}$

65. Explique por qué existe una correspondencia uno-a-uno entre la posición de un punto en el plano y sus coordenadas cartesianas rectangulares, pero no existe dicha correspondencia para las coordenadas polares del punto. En su explicación muestre dos puntos como ejemplos: uno en el primer cuadrante y el otro en segundo cuadrante.

9.4 LONGITUD DE ARCO Y ÁREA DE UNA REGIÓN PARA GRÁFICAS POLARES

La fórmula del teorema 9.2.3 para la longitud de arco L de una curva C, cuyas ecuaciones paramétricas son $x = f(t)$ y $y = g(t)$, desde el punto $(f(a), g(a))$ al punto $(f(b), g(b))$ es

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

donde f' y g' son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Al sustituir $f'(t)$ por dx/dt y $g'(t)$ por dy/dt, esta fórmula se transforma en

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \tag{1}$$

Suponga que se desea obtener la longitud de arco de una curva C cuya ecuación polar es $r = F(\theta)$. Si (x, y) es la representación cartesiana de un punto P de C y (r, θ) es una representación polar de P, entonces del teorema 9.3.1, las ecuaciones paramétricas de C, donde θ es el parámetro, son

$$x = F(\theta)\cos \theta \quad \text{y} \quad y = F(\theta)\operatorname{sen} \theta \tag{2}$$

Por tanto, si F' es continua en el intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$, la fórmula para la longitud de arco de C se obtiene a partir de (1) considerando $t = \theta$, de modo que

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \tag{3}$$

De las ecuaciones paramétricas (2),

$$\frac{dx}{d\theta} = F'(\theta)\cos \theta - F(\theta)\operatorname{sen} \theta \quad \text{y} \quad \frac{dy}{d\theta} = F'(\theta)\operatorname{sen} \theta + F(\theta)\cos \theta$$

De donde,

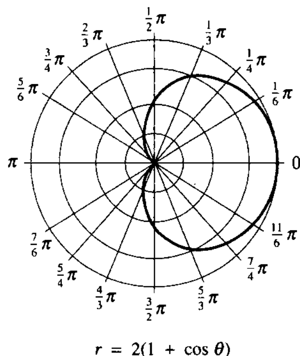
$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = (F'(\theta)\cos \theta - F(\theta)\operatorname{sen} \theta)^2 + (F'(\theta)\operatorname{sen} \theta + F(\theta)\cos \theta)^2$$

El miembro derecho de esta ecuación puede simplificarse de manera que

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [F'(\theta)]^2 + [F(\theta)]^2 \qquad (4)$$

En el ejercicio 50 se le pedirá que verifique esta ecuación. Al sustituir de (4) en (3) y reemplazar $F'(\theta)$ por $dr/d\theta$ y $F(\theta)$ por r, se obtiene la fórmula siguiente para la longitud de arco de una gráfica polar:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta \qquad (5)$$



$r = 2(1 + \cos\theta)$

FIGURA 1

▶ ***EJEMPLO 1*** Calcule la longitud de arco de la cardioide $r = 2(1 + \cos\theta)$.

Solución La cardioide se muestra en la figura 1. Para calcular la longitud de la curva completa se permite que θ tome los valores de 0 a 2π o puede emplearse la simetría de la curva y obtenerse la mitad de la longitud considerando que θ toma los valores de 0 a π.

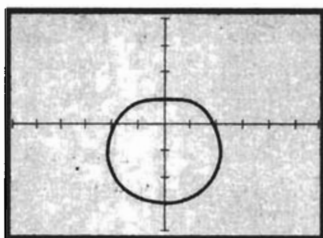
Como $r = 2(1 + \cos\theta)$, $\dfrac{dr}{d\theta} = -2 \operatorname{sen}\theta$. Al sustituir en (5), integrar de 0 a π y multiplicar por 2 se tiene

$$\begin{aligned} L &= 2\int_0^\pi \sqrt{(-2 \operatorname{sen}\theta)^2 + 4(1 + \cos\theta)^2}\, d\theta \\ &= 4\int_0^\pi \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}\, d\theta \\ &= 4\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos\theta}\, d\theta \end{aligned}$$

A fin de evaluar esta integral, se utiliza la identidad $\cos^2 \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$, de modo que $\sqrt{1 + \cos\theta} = \sqrt{2}\left|\cos\frac{1}{2}\theta\right|$. Puesto que $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \frac{1}{2}\theta \le \frac{1}{2}\pi$; entonces $\cos\frac{1}{2}\theta \ge 0$. Por tanto, $\sqrt{1 + \cos\theta} = \sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\theta$. Así,

$$\begin{aligned} L &= 4\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{2}\cos\tfrac{1}{2}\theta\, d\theta. \\ &= 16 \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta\Big]_0^\pi \\ &= 16 \end{aligned}$$

Como sucedió con las fórmulas anteriores para la longitud de arco, la fórmula para la longitud de arco de una gráfica polar conduce, la mayoría de las veces, a una integral definida difícil o imposible de evaluar mediante el segundo teorema fundamental del Cálculo. Sin embargo, la graficadora proporciona un valor aproximado, como se muestra en el siguiente ejemplo.



[−6, 6] por [−4, 4]

$r = 2 - \operatorname{sen} \theta$

FIGURA 2

▶ ***EJEMPLO 2*** Obtenga la longitud de arco del caracol

$$r = 2 - \operatorname{sen} \theta$$

Solución Este caracol se trazó en el ejemplo 5(c) de la sección 9.3. La figura 2 muestra su gráfica. De (5),

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \theta + (2 - \operatorname{sen} \theta)^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \theta + 4 - 4 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{5 - 4 \operatorname{sen} \theta}\, d\theta \end{aligned}$$

En la graficadora se obtiene

$$\text{NINT}(\sqrt{5 - 4 \operatorname{sen} \theta}, 0, 2\pi) = 13.36489322$$

De modo que, con cinco dígitos significativos, la longitud del caracol es 13.365. ◀

A continuación se desarrollará un método para calcular el área de una región acotada por dos rectas que pasan por el polo, y una gráfica polar.

Sea f una función continua y no negativa en el intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$. Sea R la región limitada por la curva cuya ecuación es $r = f(\theta)$ y por las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. La región R es la región AOB mostrada en la figura 3.

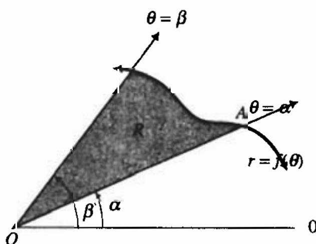


FIGURA 3

Considere una partición Δ de $[\alpha, \beta]$ definida por

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_{i-1} < \theta_i < \ldots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$$

De este modo se tienen n subintervalos de la forma $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea w_i un valor de θ en el i-esimo subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$. Vea la figura 4, donde el i-ésimo subintervalo se muestra junto con $\theta = w_i$. La medida en radianes del ángulo entre las rectas $\theta = \theta_{i-1}$ y $\theta = \theta_i$ se denota por $\Delta_i\theta$. El número de unidades cuadradas del área del sector circular de radio $f(w_i)$ unidades y ángulo central de medida $\Delta_i\theta$ radianes está dada por

$$\tfrac{1}{2}[f(w_i)]^2\, \Delta_i\theta$$

Existe un sector circular como este para cada uno de los n subintervalos. La suma de las medidas de las áreas de estos n sectores circulares es

$$\tfrac{1}{2}[f(w_1)]^2\Delta_1\theta + \tfrac{1}{2}[f(w_2)]^2\Delta_2\theta + \ldots + \tfrac{1}{2}[f(w_i)]^2\Delta_i\theta + \ldots + \tfrac{1}{2}[f(w_n)]^2\Delta_n\theta$$

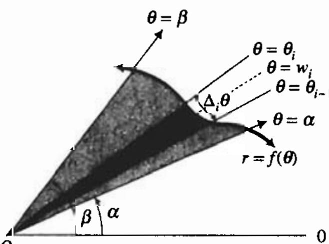


FIGURA 4

la cual puede expresarse, empleando la notación sigma, como

$$\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(w_i)]^2\, \Delta_i\theta \tag{3}$$

Sea $\|\Delta\|$ la norma de la partición Δ; esto es, $\|\Delta\|$ es la medida del más grande $\Delta_i\theta$. Entonces, si A unidades cuadradas es el área de la región R, A es el límite de la suma de Riemann (6) cuando $\|\Delta\|$ tiende a 0, el cual es una integral definida como se establece en el teorema siguiente.

9.4.1 Teorema

Sea R la región limitada por las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ y la curva cuya ecuación es $r = f(\theta)$, donde f es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$. Entonces, si A unidades cuadradas es el área de la región R,

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(w_i)]^2 \Delta_i\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta$$

EJEMPLO 3 Calcule el área de la región limitada por la cardioide del ejemplo 1: $r = 2 + 2\cos\theta$.

Solución La región junto con un elemento de área se muestra en la figura 5. Como la gráfica es simétrica con respecto al eje polar, se consideran los límites para θ de 0 a π, que determinan el área de la región acotada por la curva que se encuentra arriba del eje polar. Después, el área de la región completa se obtiene al multiplicar esa área por 2. Así, si A unidades cuadradas es el área requerida, entonces

$$A = 2 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}(2 + 2\cos w_i)^2 \Delta_i\theta$$

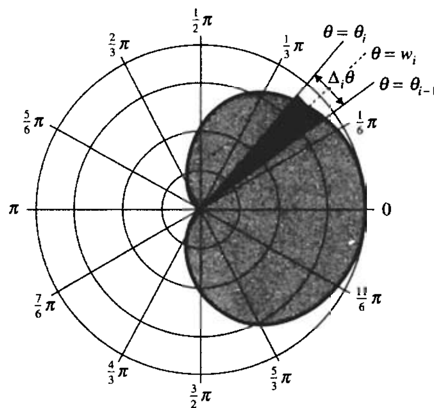
$$= 2\int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}(2 + 2\cos\theta)^2 \, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) \, d\theta$$

$$= 4\Big[\theta + 2\,\text{sen}\,\theta + \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\text{sen}\,2\theta\Big]_0^{\pi}$$

$$= 4(\pi + 0 + \tfrac{1}{2}\pi + 0 - 0)$$

$$= 6\pi$$



$r = 2 + 2\cos\theta$

FIGURA-5

Ahora considere la región acotada por las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ y las dos curvas cuyas ecuaciones son $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$, donde f y g son

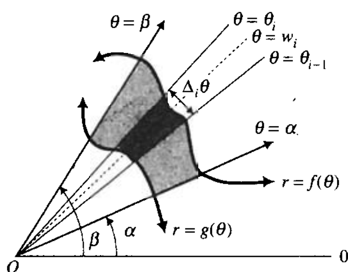


FIGURA 6

continuas en el intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$ y $f(\theta) \geq g(\theta)$ en $[\alpha, \beta]$. Vea la figura 6. Se desea calcular el área de esta región. Para este fin, se considera una partición del intervalo $[\alpha, \beta]$ con w_i como valor de θ en el i-ésimo subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$. La medida del área de un elemento es la diferencia de las medidas de las áreas de los sectores circulares:

$$\tfrac{1}{2}[f(w_i)]^2 \Delta_i\theta - \tfrac{1}{2}[g(w_i)]^2 \Delta_i\theta = \tfrac{1}{2}([f(w_i)]^2 - [g(w_i)]^2)\Delta_i\theta$$

La suma de las medidas de las áreas de los n elementos está dada por

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[(f(w_i)]^2 - [g(w_i)]^2)\Delta_i\theta$$

En consecuencia, si A unidades cuadradas es el área deseada de la región, se tiene

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[(f(w_i)]^2 - [g(w_i)]^2)\Delta_i\theta$$

Como f y g son continuas en $[\alpha, \beta]$, también lo es $f - g$; por tanto, el límite existe y es igual a una integral definida. Así,

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} ([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2)\,d\theta$$

▶ ***EJEMPLO 4*** Calcule el área de la región dentro de la circunferencia $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ y fuera del caracol $r = 2 - \operatorname{sen} \theta$.

Solución Primero se determinan los puntos de intersección de las dos curvas. Al igualar los miembros derechos de las dos ecuaciones, se tiene

$$\begin{aligned} 3 \operatorname{sen} \theta &= 2 - \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta &= \tfrac{1}{2} \\ \theta &= \tfrac{1}{6}\pi \qquad\qquad \theta = \tfrac{5}{6}\pi \end{aligned}$$

En la figura 7 se muestra la curva y la región junto con un elemento de área.

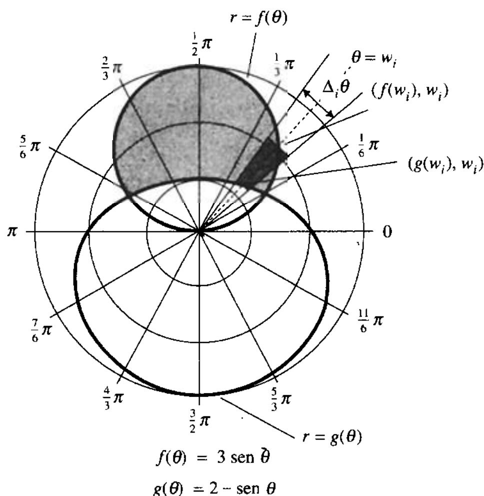


FIGURA 7

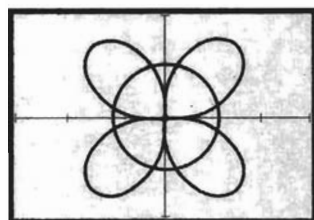
Si se considera $f(\theta) = 3 \operatorname{sen} \theta$ y $g(\theta) = 2 - \operatorname{sen} \theta$, entonces la ecuación de la circunferencia es $r = f(\theta)$ y la ecuación del caracol es $r = g(\theta)$.

En lugar de tomar los límites de $\frac{1}{6}\pi$ a $\frac{5}{6}\pi$ se empleará la propiedad de simetría con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$, por lo que se considerarán los límites de $\frac{1}{6}\pi$ a $\frac{1}{2}\pi$, y luego se multiplicará por 2. Entonces, si A unidades cuadradas es el área de la región dada,

$$\begin{aligned}
A &= 2 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}([f(w_i)]^2 - [g(w_i)]^2)\,\Delta_i\theta \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} ([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2)\,d\theta \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/2} [9 \operatorname{sen}^2 \theta - (2 - \operatorname{sen}\theta)^2]\,d\theta \\
&= 8\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \theta\,d\theta + 4\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen} \theta\,d\theta - 4\int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \\
&= 4\int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta)\,d\theta + \Big[-4\cos\theta - 4\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= 4\theta - 2 \operatorname{sen} 2\theta - 4\cos\theta - 4\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= -2 \operatorname{sen} 2\theta - 4\cos\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= (-2 \operatorname{sen} \pi - 4 \cos \tfrac{1}{2}\pi) - (-2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\pi - 4\cos \tfrac{1}{6}\pi) \\
&= 2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + 4 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\
&= 3\sqrt{3}
\end{aligned}$$

◀

En el ejemplo anterior, se determinaron los puntos de intersección de las dos gráficas polares al resolver las dos ecuaciones simultáneamente. Este procedimiento no siempre proporciona todos los puntos de intersección, como ocurre cuando se trata con ecuaciones en coordenadas cartesianas. Debido a que un punto tiene un número ilimitado de conjuntos de coordenadas polares, es posible tener, como intersección de dos gráficas polares, un punto para el cual no haya un solo par de coordenadas polares que satisfaga las dos ecuaciones. Esta situación se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.



[−3, 3] por [−2, 2]

$r = 2 - \operatorname{sen} 2\theta$ y $r = 1$

FIGURA 8

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** La figura 8 muestra las gráficas de la rosa de cuatro hojas $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ y de la circunferencia $r = 1$, trazadas en el mismo rectángulo de inspección de [−3, 3] por [−2, 2]. Observe que las gráficas se intersectan en ocho puntos.

Al resolver las dos ecuaciones simultáneamente se tiene

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{sen} 2\theta &= 1 \\
\operatorname{sen} 2\theta &= \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{array}{llll}
2\theta = \frac{1}{6}\pi & 2\theta = \frac{5}{6}\pi & 2\theta = \frac{13}{6}\pi & 2\theta = \frac{17}{6}\pi \\
\theta = \frac{1}{12}\pi & \theta = \frac{5}{12}\pi & \theta = \frac{13}{12}\pi & \theta = \frac{17}{12}\pi
\end{array}$$

Por tanto, se han obtenido cuatro puntos de intersección: $(1, \frac{1}{12}\pi)$, $(1, \frac{5}{12}\pi)$, $(1, \frac{13}{12}\pi)$ y $(1, \frac{17}{12}\pi)$. Los otros cuatro puntos se obtienen al considerar otra forma de la ecuación de la circunferencia $r = 1$; esto es, se toma la ecuación $r = -1$, la cual es una ecuación de misma circunferencia. Si se resuelve esta ecuación simultáneamente con la ecuación de la rosa de cuatro hojas, se tiene

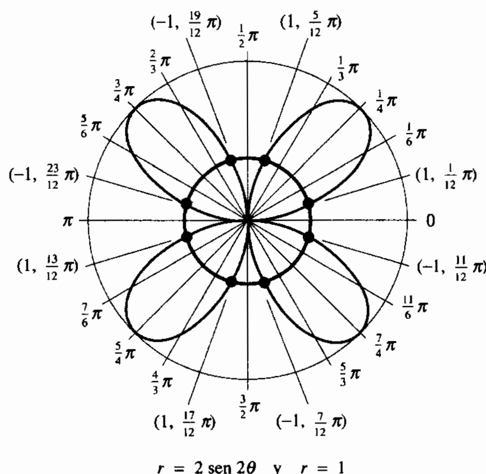
$$\operatorname{sen} 2\theta = -\tfrac{1}{2}$$

Entonces resulta

$$\begin{array}{llll} 2\theta = \frac{7}{6}\pi & 2\theta = \frac{11}{6}\pi & 2\theta = \frac{19}{12}\pi & 2\theta = \frac{23}{6}\pi \\ \theta = \frac{7}{12}\pi & \theta = \frac{11}{12}\pi & \theta = \frac{19}{12}\pi & \theta = \frac{23}{12}\pi \end{array}$$

De esta forma se obtienen los puntos: $(-1, \frac{7}{12}\pi)$, $(-1, \frac{11}{12}\pi)$, $(-1, \frac{19}{12}\pi)$ y $(-1, \frac{23}{12}\pi)$. Incidentalmente, $(-1, \frac{7}{12}\pi)$ también puede expresarse como $(1, \frac{19}{12}\pi)$, $(-1, \frac{11}{12}\pi)$ puede escribirse como $(1, \frac{23}{12}\pi)$, $(-1, \frac{19}{12}\pi)$ puede expresarse como $(1, \frac{7}{12}\pi)$ y $(-1, \frac{23}{12}\pi)$ puede escribirse como $(1, \frac{11}{12}\pi)$.

La figura 9 muestra las dos gráficas dibujadas en un sistema de coordenadas polares, donde los ocho puntos de intersección se han indicado mediante sus coordenadas polares. ◀



$r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ y $r = 1$

FIGURA 9

Si traza las dos gráficas del ejemplo ilustrativo anterior en el modo simultáneo de la graficadora, observará que el segundo grupo de cuatro puntos no se obtienen al mismo tiempo debido a que las dos gráficas no tienen el mismo valor de θ para estos puntos.

Al trazar dos gráficas polares se indicará el número de puntos de intersección, las coordenadas polares de estos puntos no siempre se obtienen fácilmente mediante los procedimientos de rastreo y aumento (*trace* y *zoom–in*) de la graficadora. Sin embargo, se tiene un método general para determinar los puntos de intersección analíticamente. El método está basado en el hecho de que si una ecuación de una gráfica polar es $r = f(\theta)$, entonces la misma curva está determinada por

$$(-1)^n r = f(\theta + n\pi) \tag{7}$$

donde n es cualquier número entero.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Considere las gráficas del ejemplo ilustrativo 1. La gráfica de la ecuación $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ también tiene la ecuación (tomando $n = 1$ en (7))

$$(-1)r = 2 \operatorname{sen} 2(\theta + \pi) \quad \Leftrightarrow \quad -r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$$

Si se considera $n = 2$ en (7), la gráfica de $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ también tiene la ecuación

$$(-1)^2 r = 2 \operatorname{sen} 2(\theta + 2\pi) \quad \Leftrightarrow \quad r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$$

la cual es la misma que la ecuación original. Al tomar cualquier otro número entero n, se obtiene $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ o $r = -2 \operatorname{sen} 2\theta$. La gráfica de la ecuación $r = 1$ también tiene la ecuación, tomando $n = 1$ en (7), $r = -1$. Si se consideran otros valores enteros de n en (7), aplicada a la ecuación $r = 1$, proporcionan $r = 1$ o $r = -1$. ◀

Otra observación necesaria acerca de las intersecciones es la siguiente. Como $(0, \theta)$ representa el polo para cualquier θ, se puede determinar si el polo es un punto de intersección considerando $r = 0$ en cada ecuación y resolviendo para θ.

Método general para determinar todos los puntos de intersección de las gráficas polares de las ecuaciones $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$

1. Utilice (7) para determinar todas las distintas ecuaciones de las gráficas:

$$r = f_1(\theta), r = f_2(\theta), r = f_3(\theta), \ldots \tag{8}$$

$$r = g_1(\theta), r = g_2(\theta), r = g_3(\theta), \ldots \tag{9}$$

2. Resuelva cada una de las ecuaciones (8) simultáneamente con cada una de las ecuaciones (9).
3. Verifique si el polo es un punto de intersección considerando $r = 0$ en cada ecuación, de modo que

$$f(\theta) = 0 \quad y \quad g(\theta) = 0$$

Si cada una de estas ecuaciones tiene solución para θ, no necesariamente la misma, entonces el polo pertenece a las dos gráficas.

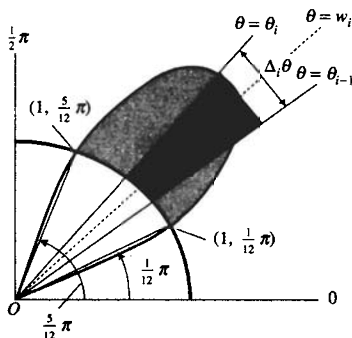


FIGURA 10

EJEMPLO 5 Calcule el área de la región dentro de la rosa de cuatro hojas $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$.

Solución En el ejemplo ilustrativo 1, se determinaron los ocho puntos de intersección de las dos gráficas y se dibujaron en la figura 9. A partir de la figura observe que, debido a la simetría, un cuarto del área requerida se obtiene considerando los límites para θ de $-\frac{1}{12}\pi$ a $\frac{5}{12}\pi$. Esta región y un elemento de área se muestran en la figura 10. Así, si A unidades cuadradas es el área requerida, entonces

$$A = 4 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[(2 \operatorname{sen} 2w_i)^2 - \tfrac{1}{2}(1)^2]\,\Delta_i\theta$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi/12}^{5\pi/12} (4 \operatorname{sen}^2 2\theta - 1)\,d\theta$$

$$= 2 \int_{\pi/12}^{5\pi/12} (2 - 2\cos 4\theta - 1)\,d\theta$$

$$= 2 \int_{\pi/12}^{5\pi/12} (1 - 2\cos 4\theta)\,d\theta$$

$$= 2\Big[\theta - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 4\theta\Big]_{\pi/12}^{5\pi/12}$$

$$= 2\big[\tfrac{5}{12}\pi - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\tfrac{5}{3}\pi - \tfrac{1}{12}\pi + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\tfrac{1}{3}\pi\big]$$

$$= 2\big[\tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\sqrt{3})\big]$$

$$= \tfrac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$$

◀

EJERCICIOS 9.4

En los ejercicios 1 a 4, utilice la fórmula de la longitud de arco para determinar la longitud de la circunferencia que tiene la ecuación polar dada.

1. $r = 5\cos\theta$
2. $r = 4\operatorname{sen}\theta$
3. $r = a, a > 0$
4. $r = a\operatorname{sen}\theta, a > 0$

En los ejercicios 5 a 12, calcule la longitud de arco exacta de la gráfica polar indicada.

5. La curva completa $r = 4 + 4\cos\theta$
6. La curva completa $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$
7. La curva completa $r = 3\cos^2 \frac{1}{2}\theta$
8. $r = 3\theta$; de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$
9. $r = e^{2\theta}$; de $\theta = 0$ a $\theta = 4$
10. $r = 3\theta^2$; de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$
11. $r = 2\operatorname{sen}^3 \frac{1}{3}\theta$; de $\theta = 0$ a $\theta = 6\pi$
12. $r = \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta$; de $\theta = 0$ a $\theta = \frac{1}{2}\pi$

En los ejercicios 13 a 20, utilice NINT *en la graficadora para obtener un valor aproximado a cuatro dígitos significativos de la longitud de arco de la gráfica polar dada.*

13. El caracol $r = 3 + \cos\theta$.
14. El caracol $r = 3 - 2\operatorname{sen}\theta$.
15. El lazo del caracol $r = 2 - 3\operatorname{sen}\theta$.
16. El lazo del caracol $r = 1 + 2\cos\theta$.
17. Una hoja de la rosa $r = 2\operatorname{sen} 3\theta$.
18. Una hoja de la rosa $r = 3\cos 4\theta$
19. La lemniscata $r^2 = 25\cos 2\theta$
20. La lemniscata $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$

En los ejercicios 21 a 26, calcule el área exacta de la región limitada por la gráfica de ecuación .

21. $r = 3\cos\theta$
22. $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$
23. $r = 4\cos 3\theta$
24. $r = 4\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta$
25. $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$
26. $r = 4\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta$
27. Obtenga el área de la región acotada por la gráfica de la ecuación $r = \theta$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{3}{2}\pi$.
28. Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la ecuación $r = e^\theta$ y las rectas $\theta = 0$ y $\theta = 1$.

En los ejercicios 29 a 32, determine el área de la región acotada por un lazo de la gráfica de la ecuación.

29 $r = 3\cos 2\theta$
30. $r = 4(1 - 2\cos\theta)$
31. $r = 1 + 3\operatorname{sen}\theta$
32. $r = 4\operatorname{sen} 3\theta$

En los ejercicios 33 a 36, calcule el área de la intersección de las regiones limitadas por las gráficas de las dos ecuaciones.

33. $\begin{cases} r = 2 \\ r = 3 - 2\cos\theta \end{cases}$
34. $\begin{cases} r = 4\operatorname{sen}\theta \\ r = 4\cos\theta \end{cases}$
35. $\begin{cases} r = 3\operatorname{sen} 2\theta \\ r = 3\cos 2\theta \end{cases}$
36. $\begin{cases} r^2 = 2\cos 2\theta \\ r = 1 \end{cases}$

En los ejercicios 37 a 40, obtenga el área exacta de la región dentro de la gráfica de la primera ecuación y fuera de la gráfica de la segunda ecuación.

37. $\begin{cases} r = 3 \\ r = 3(1 - \cos\theta) \end{cases}$

38. $\begin{cases} r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta \\ r = \sqrt{2} \end{cases}$

39. $\begin{cases} r = 2 \operatorname{sen}\theta \\ r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta \end{cases}$

40. $\begin{cases} r = 4 \operatorname{sen}\theta \\ r = 2 \end{cases}$

41. **(a)** Determine las coordenadas de todos los puntos de intersección del caracol $r = 1 + 4 \cos\theta$ y la circunferencia $r = 1$.
(b) Calcule el área de la región dentro del lazo del caracol y fuera de la circunferencia.

42. **(a)** Determine las coordenadas de todos los puntos de intersección del caracol $r = 1 - 3 \operatorname{sen}\theta$ y la circunferencia $r = 1$.
(b) Calcule el área de la región dentro del lazo del caracol y fuera de la circunferencia.

43. **(a)**Determine las coordenadas de todos los puntos de intersección de la rosa $r = 4 \cos 2\theta$ y la circunferencia $r = 2$.
(b) Calcule el área de la región dentro de la rosa y fuera de la circunferencia.

44. **(a)** Determine las coordenadas de todos los puntos de intersección de la rosa $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ y la circunferencia $r = 2 \operatorname{sen}\theta$.
(b) Calcule el área de la región dentro de la rosa y fuera de la circunferencia.

45. La cara principal de una corbata de moño corresponde a la región acotada por la gráfica de la ecuación $r^2 = 4 \cos 2\theta$. ¿Cuánto material se requiere para cubrir dicha cara?

46. Determine el valor de a para el cual el área de la región limitada por la cardioide $r = a(1 - \cos\theta)$ es 9π unidades cuadradas.

47. Calcule el área de la región barrida por el radio vector de la espiral $r = a\theta$ durante su segunda revolución y que no lo fue durante su primera revolución.

48. Obtenga el área de la región barrida por el radio vector de la espiral del ejercicio 47 durante su tercera revolución y que no lo fue durante su segunda revolución.

49. Determine el área de la región dentro de la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$ y que se encuentra fuera de la circunferencia $r = 2a \cos\theta$.

50. Verifique la ecuación (4).

51. Suponga que un compañero de clases calcula el área de la región del ejercicio 49 como

$$\tfrac{1}{2}a^2 \int_0^{2\pi} [(1 + \cos\theta)^2 - 4\cos^2\theta]\, d\theta$$

¿Cómo explicaría el error de su compañero?

9.5 TRATAMIENTO UNIFICADO DE LAS SECCIONES CÓNICAS Y ECUACIONES POLARES DE LAS CÓNICAS

Tal vez estudio las cónicas en un curso de matemáticas previas al Cálculo donde cada una de los tres tipos de cónicas se definió en forma separada. Para una revisión o primer contacto con esa forma de estudiar las cónicas, refiérase a las secciones del apéndice A.4 a A.8 Un enfoque alternativo de estudio consiste en iniciar con una definición que proporcione una propiedad común de las cónicas y después presentar cada una de las cónicas como caso especial de la definición general. Esta definición se establece en el siguiente teorema. La constante positiva e del enunciado del teorema se denomina **excentricidad** de la cónica.

9.5.1 Teorema

Una sección cónica puede definirse como el conjunto de todos los puntos P del plano tales que la razón de la distancia no dirigida de P a un punto fijo a la distancia no dirigida de P a una recta fija, la cual no contiene al punto fijo, es una constante positiva e. Además, si $e = 1$, la cónica es una parábola; si $0 < e < 1$, es una elipse; y si $e > 1$, es una hipérbola.

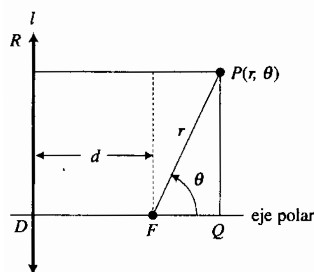


FIGURA 1

Demostración Si $e = 1$, se observa al compara la dfinición de una parábola como conjunto de puntos que equidistan de un foco y una directriz (definición A.4.1) con el enunciado de este teorema, que el conjunto es una parábola que tiene el punto fijo como su foco y la recta fija como su directriz.

Suponga ahora que $e \neq 1$. Primero se obtendrá una ecuación polar del conjunto de los puntos descritos. Considere que F denota el punto fijo y l representa la recta fija. Se toma el polo como F y el eje polar y su prolongación perpendicular a l. En primer lugar se considerará el caso en el que la recta l está a la izquierda del punto F. Sean D el punto de intersección de l con la prolongación del eje polar, y d la distancia no dirigida de F a l. Refiérase a la figura 1. Sea $P(r, \theta)$ cualquier punto del conjunto a la derecha de l y en el lado terminal del ángulo de medida θ. Dibuje las perpendiculares PQ y PR al eje polar y a la recta l, respectivamente. El punto P está en el conjunto descrito si y sólo si

$$|\overline{FP}| = e|\overline{RP}| \tag{1}$$

Como P está a la derecha de l, $\overline{RP} > 0$; de modo que $|\overline{RP}| = \overline{RP}$. Además, $|\overline{FP}| = r$ porque $r > 0$. Así, de (1),

$$r = e(\overline{RP}) \tag{2}$$

Sin embargo, $\overline{RP} = \overline{DQ}$, y como $\overline{DQ} = \overline{DF} + \overline{FQ}$, se tiene

$$\overline{RP} = d + r\cos\theta$$

Al sustituir esta expresión para $\overline{RP}$ en (2) resulta

$$r = e(d + r\cos\theta)$$

Si se resuelve la ecuación anterior para r, se obtiene

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta} \tag{3}$$

A fin de obtener una representación cartesiana de esta ecuación, primero se reemplaza $\cos\theta$ por x/r. Así,

$$r = \frac{ed}{1 - \frac{ex}{r}}$$

$$r = \frac{edr}{r - ex}$$

$$r - ex = ed$$

$$r = e(x + d)$$

Ahora se sustituye r por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ y resulta

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = e(x + d)$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros de esta ecuación se tiene

$$x^2 + y^2 = e^2x^2 + 2e^2dx + e^2d^2$$

$$y^2 + x^2(1 - e^2) = 2e^2dx + e^2d^2$$

Como $e \neq 1$, se puede dividir cada miembro de esta ecuación entre $1 - e^2$ para obtener

$$x^2 - \frac{2e^2d}{1 - e^2}x + \frac{1}{1 - e^2}y^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

Si se completan cuadrados para los términos que contienen x, al agregar $e^4d^2/(1 - e^2)^2$ en los dos miembros de la ecuación anterior, resulta

$$\left(x - \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{1}{1 - e^2}y^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Al dividir ambos miembros de esta ecuación entre $e^2d^2/(1 - e^2)^2$ se obtiene una ecuación de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{\dfrac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{e^2d^2}{1 - e^2}} = 1 \tag{4}$$

donde

$$h = \frac{e^2d}{1 - e^2} \tag{5}$$

Ahora considere

$$\frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} = a^2 \qquad \text{donde } a > 0 \tag{6}$$

Entonces (4) puede expresarse como

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1 \tag{7}$$

Si $0 < e < 1$, entonces $a^2(1 - e^2) > 0$ y puede considerarse

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \qquad \text{donde } 0 < e < 1 \tag{8}$$

Al sustituir de (8) en (7), se tiene

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la cual es una ecuación de una elipse que tiene su eje principal sobre el eje x y su centro en $(h, 0)$, donde $h > 0$.

Si $e > 1$, entonces $a^2(e^2 - 1) > 0$, de modo que puede considerarse

$$b^2 = a^2(e^2 - 1) \qquad \text{donde } e > 1 \tag{9}$$

Si se sustituye de esta ecuación en (7), se obtiene

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la cual es la ecuación de una hipérbola que tiene su eje principal sobre el eje x y su centro está en $(h, 0)$, donde $h < 0$.

De manera similar se puede deducir una ecuación de una cónica central (una elipse o una hipérbola) de (1), cuando $e \neq 1$, si la recta l está a la derecha del punto F y éste en el polo. En este caso en lugar de la ecuación (3) se tiene

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta} \tag{10}$$

La deducción de la ecuación (10) se deja como ejercicio (vea el ejercicio 33).

También se puede deducir una ecuación de una cónica central a partir de (1) cuando $e \neq 1$ si la recta l es paralela el eje polar y el punto F está en el foco. En este caso, en lugar de la ecuación (3) se obtiene

$$r = \frac{ed}{1 \pm e \operatorname{sen} \theta} \tag{11}$$

donde e y d son, respectivamente, la excentricidad y la distância no dirigida entre F y l. El signo más se toma cuando l está arriba de F, el signo menos se considera cuando l esta debajo de F. Las deducciones de (11) se dejan como ejercicios (vea los ejercicios 34 y 35).

Se pueden invertir los pasos (1) a (7). Así, si P es cualquier punto de una cónica central, entonces la ecuación (1) se satisface.

Por tanto, se concluye que una cónica puede definirse mediante el conjunto de puntos descrito. ■

En las secciones A.7 y A.8 del apéndice, se define la excentricidad e de una cónica central mediante la ecuación

$$e = \frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow \quad c = ae$$

A fin de demostrar que el número e del enunciado del teorema 9.5.1 satisface esta ecuación para una elipse, se sustituye de (8) en la ecuación $c^2 = a^2 - b^2$; para mostrar que la misma ecuación se satisface para una hipérbola, se sustituye de (9) en la ecuación $c^2 = a^2 + b^2$. Para una elipse se tiene

$$c^2 = a^2 - a^2(1 - e^2)$$

y para una hipérbola resulta

$$c^2 = a^2 + a^2(e^2 - 1)$$

En ambos casos se obtiene

$$c^2 = a^2e^2$$
$$c = ae$$

En la demostración del teorema 9.5.1 se probó que cuando la cónica es una parábola, el punto fijo F mencionado en el teorema es el foco de la parábola, y la recta fija es su directriz. En el ejercicio 40, se le pedirá que demuestre que el punto F es uno de los focos cuando se tiene una cónica central. Si (7) es una ecuación de una elipse, entonces F es el foco de la izquierda; y si (7) es la ecuación de una hipérbola, F es el foco de la derecha.

Considere ahora la forma estándar de una ecuación cartesiana de una cónica central que tiene su eje principal sobre el eje x y su centro en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1 \tag{12}$$

La recta fija mencionada en el teorema 9.5.1 es la directriz de la cónica central correspondiente al foco en F. Cuando la cónica definida por la ecuación (12) es una elipse, la directriz correspondiente al foco ubicado en $(-c, 0)$ o, equivalentemente $(-ae, 0)$, tiene la ecuación

$$x = -ae - d$$

De (6), cuando $0 < e < 1$, $d = a(1 - e^2)/e$, de modo que la ecuación de la directriz se transforma en

$$x = -ae - \frac{a(1 - e^2)}{e}$$

$$x = -\frac{a}{e}$$

De manera semejante, cuando la cónica definida por (12) es una hipérbola, la directriz correspondiente al foco ubicado en $(c, 0)$ o, equivalentemente $(ae, 0)$, tiene la ecuación

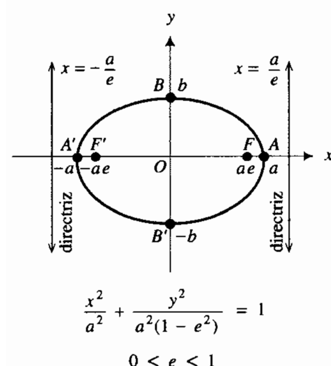
$$x = ae - d$$

Otra vez, de (6), cuando $e > 1$, $d = a(e^2 - 1)/e$, de modo que la ecuación anterior de la directriz puede expresarse como

$$x = \frac{a}{e}$$

En consecuencia, se ha demostrado que si (12) es una ecuación de una elipse, un foco y su directriz correspondiente son $(-ae, 0)$ y $x = -a/e$; y si (12) es la ecuación de una hipérbola, un foco y su directriz correspondiente son $(ae, 0)$ y $x = a/e$.

Como (12) contiene sólo potencias pares de x y y, su gráfica es simétrica con respecto a los ejes x y y. Por tanto, si existe un foco en $(-ae, 0)$ que tiene una directriz correspondiente cuya ecuación es $x = -a/e$, entonces, por simetría, existe también un foco en $(ae, 0)$ que tiene una directriz correspondiente de ecuación $x = a/e$. De igual manera, para un foco ubicado en $(ae, 0)$ y una directriz correspondiente de ecuación $x = a/e$, también existe un foco en$(-ae, 0)$ y una directriz correspondiente de ecuación $x = -a/e$. Estos resultados se resumen en el teorema siguiente.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

$$0 < e < 1$$

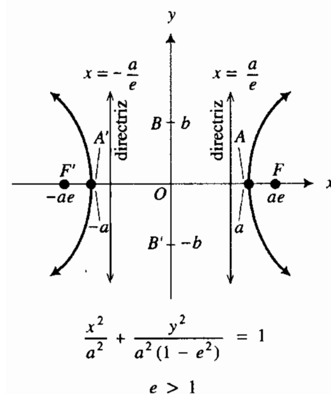
FIGURA 2

9.5.2 Teorema

La cónica central que tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1 \qquad \textbf{(13)}$$

donde $a > 0$, tiene un foco en $(-ae, 0)$, cuya directriz correspondiente es $x = -a/e$, y un foco en $(ae, 0)$, cuya directriz correspondiente es $x = a/e$.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

$$e > 1$$

FIGURA 3

Las figuras 2 y 3 muestran dibujos de la gráfica de (13) junto con los focos y directrices para los casos respectivos de una elipse y una hipérbola.

▶ ***EJEMPLO 1*** La elipse del ejemplo 1 de la sección A.7 tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

(a) Determine la excentricidad y las directrices de esta elipse. **(b)** Dibuje la elipse y muestre las directrices y los focos. También elija cualesquiera tres puntos P de la elipse y dibuje los segmentos de recta cuyas longitudes son las distancias no dirigidas desde P a un foco y a su directriz correspondiente. Observe que la razón de estas distancias es e.

Solución

(a) A partir de la ecuación de la elipse, $a = 5$ y $b = 4$. Para una elipse, $c^2 = a^2 - b^2$; por lo que $c = 3$. Como $e = c/a$, $e = 3/5$. Debido a que $a/e = 25/3$, se infiere, por el teorema 9.5.2, que la directriz correspondiente al foco ubicado en $(3, 0)$ tiene la ecuación $x = 25/3$, y la directriz correspondiente al foco $(-3, 0)$ tiene la ecuación $x = -25/3$.

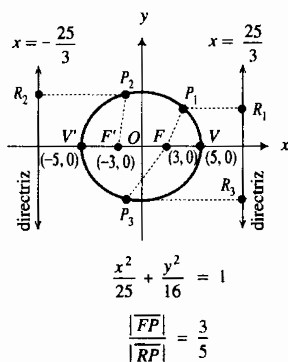


FIGURA 4

(b) La figura 4 muestra la elipse, las directrices y los focos, así como tres puntos P_1, P_2 y P_3 de la elipse. Para cada uno de estos puntos,

$$\frac{|\overline{FP}|}{|\overline{RP}|} = \frac{3}{5}$$ ◀

▶ ***EJEMPLO 2*** La hipérbola del ejemplo 1 de la sección A.8 tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

(a) Determine la excentricidad y las directrices de esta hipérbola. **(b)** Dibuje la hipérbola y muestre las directrices y los focos. También elija cualesquiera tres puntos P de la hipérbola y dibuje los segmentos de recta cuyas longitudes son las distancias no dirigidas desde P a un foco y a su directriz correspondiente. Observe que la razón de estas distancias es e.

Solución

(a) A partir de la ecuación de la hipérbola, $a = 3$ y $b = 4$. Para una hipérbola, $c^2 = a^2 + b^2$; por lo que $c = 5$. Como $e = c/a$, $e = 5/3$. Debido a que $a/e = 9/5$, se concluye, por el teorema 9.5.2, que la directriz correspondiente al foco ubicado en (5, 0) tiene la ecuación $x = 9/5$, y la directriz correspondiente al foco (–5, 0) tiene la ecuación $x = -9/5$.

(b) La figura 5 muestra la hipérbola, las directrices y los focos, así como tres puntos P_1, P_2 y P_3 de la hipérbola. Para cada uno de estos puntos

$$\frac{|\overline{FP}|}{|\overline{RP}|} = \frac{5}{3}$$ ◀

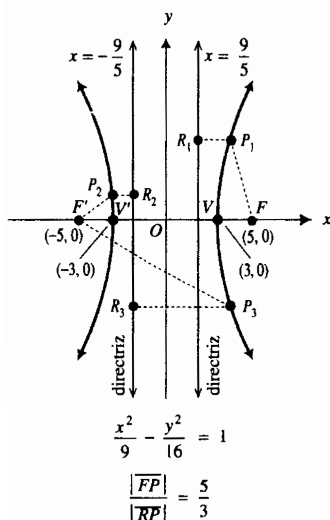


FIGURA 5

En la demostración del teorema 9.5.1 se mostró que los tres tipos de cónicas tienen ecuaciones polares de la misma forma. Cuando un foco está en el polo y la directriz correspondiente es perpendicular o paralela al eje polar, una ecuación de la cónica es de la forma (3), (10) u (11). Por tanto, se tiene el teorema siguiente.

9.5.3 Teorema

Los números e y d son, respectivamente, la excentricidad y la distancia no dirigida entre el foco y la directriz correspondiente de una cónica.

(i) Si un foco de la cónica está en el polo y la directriz correspondiente es perpendicular al eje polar, entonces una ecuación de la cónica es

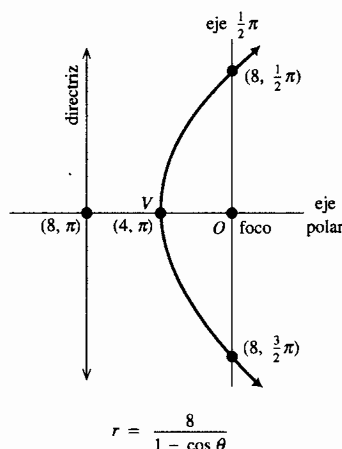
$$r = \frac{ed}{1 \pm e \cos \theta} \quad (14)$$

donde el signo más se toma cuando la directriz correspondiente al foco, ubicado en el polo, está a la derecha del foco, y se considera el signo menos cuando dicha directriz está a la izquierda del foco.

(ii) Si un foco de la cónica está en el polo y la directriz correspondiente es paralela al eje polar, entonces una ecuación de la cónica es

$$r = \frac{ed}{1 \pm e \operatorname{sen} \theta} \quad (15)$$

donde el signo más se toma cuando la directriz correspondiente al foco, ubicado en el polo, está arriba del foco, y se considera el signo menos cuando dicha directriz está debajo del foco.



$r = \dfrac{8}{1 - \cos\theta}$

FIGURA 6

EJEMPLO 3 Una parábola tiene su foco en el polo y su vértice en el punto $(4, \pi)$. Obtenga una ecuación polar de la parábola y una ecuación de la directriz. Dibuje la parábola y muestre su directriz. Verifique la gráfica en la graficadora.

Solución Como el foco está en el polo y el vértice en $(4, \pi)$, el eje polar y su prolongación coinciden con el eje de la parábola. Además, el vértice está a la izquierda del foco; de modo que la directriz también está a la izquierda del foco. En consecuencia, una ecuación de la parábola es de la forma (14) con el signo menos. Puesto que el vértice está en $(4, \pi)$, $\frac{1}{2}d = 4$; por lo que $d = 8$. La excentricidad e es igual a 1, por tanto, se obtiene la ecuación

$$r = \frac{8}{1 - \cos\theta}$$

Una ecuación de la directriz está dada por $r \cos\theta = -d$, y como $d = 8$, esta ecuación es $r \cos\theta = -8$.

La figura 6 muestra la parábola y la directriz. En la graficadora se obtiene la misma gráfica. ◀

EJEMPLO 4 Una ecuación de una cónica es

$$r = \frac{5}{3 + 2\,\text{sen}\,\theta}$$

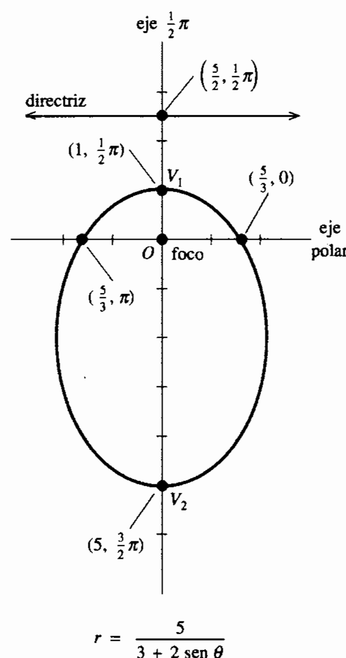
Identifique la cónica, obtenga la excentricidad, escriba una ecuación de la directriz correspondiente al foco, ubicado en el polo, y determine su vértice.

Solución Al dividir entre 3 el numerador y el denominador de la fracción dada en la ecuación se obtiene

$$r = \frac{\frac{5}{3}}{1 + \frac{2}{3}\,\text{sen}\,\theta}$$

la cual es una ecuación de la forma (15) con signo más. La excentricidad $e = \frac{2}{3}$. Como $e < 1$, la cónica es una elipse. Debido a que $ed = \frac{5}{3}$, $d = \frac{5}{3} \div \frac{2}{3}$; de donde $d = \frac{5}{2}$. El eje $\frac{1}{2}\pi$ y su prolongación coinciden con el eje principal de la elipse. La directriz correspondiente al foco, ubicado en el polo, está arriba del foco, y una ecuación de ella es $r\,\text{sen}\,\theta = \frac{5}{2}$. Cuando $\theta = \frac{1}{2}\pi$, $r = 1$; y cuando $\theta = \frac{3}{2}\pi$, $r = 5$. Por tanto, los vértices están en $(1, \frac{1}{2}\pi)$ y $(5, \frac{3}{2}\pi)$.

La elipse se muestra en la figura 7. En la graficadora se obtiene la misma curva. ◀



$r = \dfrac{5}{3 + 2\,\text{sen}\,\theta}$

FIGURA 7

EJEMPLO 5 El eje polar y su prolongación coinciden con el eje principal de una hipérbola que tiene un foco en el polo. La directriz correspondiente está a la izquierda del foco. Si la hipérbola contiene al punto $(1, \frac{2}{3}\pi)$ y $e = 2$, obtenga **(a)** una ecuación polar de la hipérbola, **(b)** los vértices, **(c)** el centro, **(d)** una ecuación de la directriz correspondiente al foco ubicado en el polo. **(e)** Dibuje la hipérbola y verifique la gráfica en la graficadora.

Solución Una ecuación de la hipérbola es de la forma (14) con el signo menos, donde $e = 2$. Entonces se tiene

$$r = \frac{2d}{1 - 2\cos\theta}$$

(a) Como el punto $(1, \frac{2}{3}\pi)$ está en la hipérbola, entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación. Por tanto,

$$1 = \frac{2d}{1 - 2(-\frac{1}{2})}$$

de donde se obtiene $d = 1$. En consecuencia una ecuación de la hipérbola es

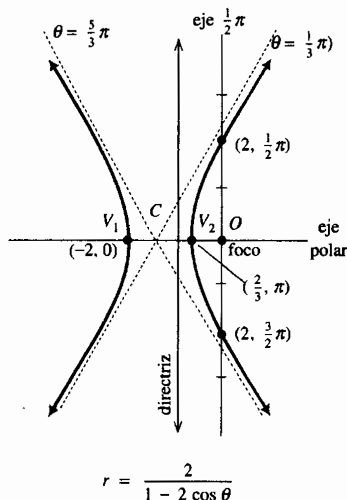
$$r = \frac{2}{1 - 2\cos\theta} \qquad \textbf{(16)}$$

(b) Los vértices son los puntos de la hipérbola para los cuales $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. De (16), cuando $\theta = 0$, $r = -2$; y cuando $\theta = \pi$, $r = \frac{2}{3}$. En consecuencia, el vértice izquierdo V_1 está en el punto $(-2, 0)$, y el vértice derecho V_2 está en el punto $(\frac{2}{3}, \pi)$.

(c) El centro C de la hipérbola es el punto del eje principal ubicado a la mitad entre los dos vértices. Este es el punto $(\frac{4}{3}, \pi)$.

(d) Una ecuación de la directriz correspondiente al foco ubicado en el polo está dada por $r\cos\theta = -d$. Como $d = 1$, entonces esta ecuación es $r\cos\theta = -1$.

(e) Como una ayuda para graficar hipérbola, primero se dibujan las dos asíntotas. Estas son las rectas que pasan por el centro de la hipérbola que son paralelas a las rectas $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$, donde θ_1 y θ_2 son los valores de θ en el intervalo $[0, 2\pi)$ para los cuales r no está definido. De (16), r no está definido cuando $1 - 2\cos\theta = 0$. Por tanto, $\theta_1 = \frac{1}{3}\pi$ y $\theta_2 = \frac{5}{3}\pi$. La figura 8 muestra la hipérbola, así como las dos asíntotas y la directriz correspondiente al foco ubicado en el polo. En la graficadora se obtiene la misma gráfica. ◀



$$r = \frac{2}{1 - 2\cos\theta}$$

FIGURA 8

EJERCICIOS 9.5

En los ejercicios 1 a 8 (a), determine la excentricidad, los focos, y las directrices de la cónica central. (b) Dibuje la cónica y muestre los focos y las directrices. También elija cualesquiera tres puntos P (en diferentes cuadrantes) de la cónica y dibuje los segmentos de recta cuyas longitudes son las distancias no dirigidas desde P a un foco y a su directriz correspondiente. Observe que la razón de estas distancias es e.

1. $4x^2 + 9y^2 = 36$ **2.** $4x^2 + 9y^2 = 4$

3. $25x^2 + 4y^2 = 100$ **4.** $16x^2 + 9y^2 = 144$

5. $4x^2 - 25y^2 = 100$ **6.** $x^2 - 9y^2 = 9$

7. $16x^2 - 9y^2 = 144$ **8.** $4y^2 - x^2 = 16$

En los ejercicios 9 y 10, la ecuación polar representa una cónica que tiene un foco en el polo. Identifique la cónica.

9. (a) $r = \dfrac{3}{1 - \cos\theta}$ **(b)** $r = \dfrac{6}{4 + 5\,\text{sen}\,\theta}$

(c) $r = \dfrac{5}{4 - \cos\theta}$ **(d)** $r = \dfrac{4}{1 + \text{sen}\,\pi}$

10. (a) $r = \dfrac{1}{1 - \text{sen}\,\theta}$ **(b)** $r = \dfrac{2}{3 + \text{sen}\,\theta}$

(c) $r = \dfrac{3}{2 + 4\cos\theta}$ **(d)** $r = \dfrac{5}{1 - \cos\pi}$

En los ejercicios 11 a 22, la gráfica de la ecuación es una cónica que tiene un foco en el polo. (a) Determine la excentricidad; (b) identifique la cónica; (c) escriba una ecuación de la directriz correspondiente al foco ubicado en el polo; y (d) dibuje la curva y verifique la gráfica en la graficadora.

11. $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$ **12.** $r = \dfrac{4}{1 + \cos\theta}$

13. $r = \dfrac{5}{2 + \text{sen}\,\theta}$ **14.** $r = \dfrac{4}{1 - 3\cos\theta}$

15. $r = \dfrac{6}{3 - 2\cos\theta}$ **16.** $r = \dfrac{1}{2 + \text{sen}\,\theta}$

17. $r = \dfrac{9}{5 - 6\,\text{sen}\,\theta}$ **18.** $r = \dfrac{1}{1 - 2\,\text{sen}\,\theta}$

19. $r = \dfrac{10}{7 - 2\,\text{sen}\,\theta}$

20. $r = \dfrac{7}{3 + 4\cos\theta}$

21. $r = \dfrac{10}{4 + 5\cos\theta}$

22. $r = \dfrac{1}{5 - 3\,\text{sen}\,\theta}$

En los ejercicios 23 a 28, obtenga una ecuación de la cónica que tiene un foco en el polo y satisface las condiciones dadas.

23. Parábola; vértice en $(4, \frac{3}{2}\pi)$.

24. Elipse; $e = \frac{1}{2}$; vértice correspondiente en $(4, \pi)$.

25. Hipérbola; $e = \frac{4}{3}$; $r\cos\theta = 9$ es la directriz correspondiente al foco ubicado en el polo.

26. Hipérbola; vértices en $(1, \frac{1}{2}\pi)$ y $(3, \frac{1}{2}\pi)$.

27. Elipse; vértices en $(3, 0)$ y $(1, \pi)$.

28. Parábola; vértice en $(6, \frac{1}{2}\pi)$.

29. (**a**) Obtenga una ecuación polar de la hipérbola que tiene un foco en el polo y la directriz correspondiente está a la izquierda de este foco, si el punto $(2, \frac{4}{3}\pi)$ pertenece a la hipérbola y $e = 3$. (**b**) Escriba una ecuación de la directriz que corresponde al foco ubicado en el polo.

30. (**a**) Obtenga una ecuación polar de la hipérbola para la cual $e = 3$ y que tiene la recta $r\,\text{sen}\,\theta = 3$ como directriz correspondiente al foco ubicado en el polo. (**b**) Obtenga las ecuaciones polares de las dos rectas que pasan por el polo que son paralelas a las asíntotas de la hipérbola.

31. Calcule el área de la región dentro de la elipse $r = 6/(2 - \text{sen}\,\theta)$ y ubicada arriba de la parábola $r = 3/(1 + \text{sen}\,\theta)$.

32. Para la elipse y la parábola del ejercicio 31, calcule el área de la región dentro de la elipse y debajo de la parábola.

33. Demuestre que una ecuación de una cónica, cuyo eje principal coincide con el eje polar y su prolongación, tiene un foco en el polo, y su directriz correspondiente está a la derecha del foco, es $r = ed/(1 + e\cos\theta)$.

34. Demuestre que una ecuación de una cónica, cuyo eje principal coincide con el eje $\frac{1}{2}\pi$ y su prolongación, tiene un foco en el polo y su directriz correspondiente está arriba del foco, es $r = ed/(1 + e\,\text{sen}\,\theta)$.

35. Demuestre que una ecuación de una cónica, cuyo eje principal coincide con el eje $\frac{1}{2}\pi$ y su prolongación, tiene un foco en el polo, y su directriz correspondiente está debajo del foco, es $r = ed/(1 - e\,\text{sen}\,\theta)$.

36. Demuestre que la ecuación $r = k\csc^2\frac{1}{2}\theta$, donde k es una constante, es una ecuación de una parábola.

37. Un cometa se desplaza en una órbita parabólica alrededor del Sol, siendo éste el foco de la parábola. Cuando el cometa está a 80 millones de millas del Sol, el segmento de recta desde el Sol hasta el cometa forma un ángulo de $\frac{1}{3}\pi$ rad con el eje de la órbita. (**a**) Obtenga una ecuación de la órbita del cometa. (**b**) ¿Qué tanto se acerca el cometa al Sol?

38. La órbita de un planeta tiene la forma de una elipse cuya ecuación es $r = p/(1 + e\cos\theta)$, donde el polo está en el Sol. Determine la medida promedio de la distancia del planeta desde el Sol con respecto a θ.

39. Un satélite se desplaza alrededor de la Tierra en una órbita elíptica que tiene al centro de la Tierra como un foco y una excentricidad de $\frac{1}{3}$. La menor distancia del satélite a la Tierra es de 300 mi. Determine la mayor distancia que puede separarse el satélite de la Tierra. Suponga que el radio de la Tierra es de 4000 mi.

40. Muestre que el punto F mencionado en la demostración del teorema 9.5.1 es uno de los focos cuando la cónica es una elipse o una hipérbola. *Sugerencia:* utilice (7), la cual es la ecuación cartesiana de una cónica central que tiene su centro en $(h, 0)$, considere el valor de h de la ecuación (5), el valor de a de la ecuación (6) y el hecho de que $c = ae$.

41. Demuestre que si α es el ángulo entre las asíntotas de una hipérbola de excentricidad e, entonces

$$\alpha = 2\tan^{-1}\sqrt{e^2 - 1}$$

42. Describa cómo cambia la forma de una cónica conforme la excentricidad toma los valores siguientes: 0.01, 0.10, 0.50, 0.99, 1.00, $\sqrt{2}$, 1.50, 2.00.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 9

▶ *SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 9*

1. ¿Cómo se obtiene una *ecuación cartesiana* de la gráfica de un par de *ecuaciones paramétricas*?

2. ¿Cómo se puede representar la gráfica de una función mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas?

3. Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$, ¿cómo se calcula dy/dx y d^2y/dx^2? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

4. ¿Cómo se determinan las rectas tangentes horizontales y verticales de la gráfica de un par de ecuaciones paramétricas?

5. ¿Qué es una *cicloide*? Defina una cicloide mediante un par de ecuaciones paramétricas.

6. ¿Cuál es la fórmula para la *longitud de arco* de una curva plana definida mediante las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$?

7. Coloque un sistema de *coordenadas polares* y un sistema de *coordenadas cartesianas rectangulares* en el mismo diagrama y muestre las relaciones entre los dos conjuntos de coordenadas.

8. Si un punto P tiene coordenadas polares (r, θ), donde $r > 0$ y $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, muestre otros dos conjuntos de coordenadas polares de P, un conjunto para el cual $r < 0$ y el otro con $r > 0$.

9. Responda la sugerencia 8 si $r < 0$ y $\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$.

10. ¿Cómo se obtiene una *ecuación cartesiana* de una gráfica a partir de su *ecuación polar*?

11. Escriba una ecuación polar de **(a)** una recta que contiene al polo, **(b)** una recta paralela al eje polar, y **(c)** una recta paralela al eje $\frac{1}{2}\pi$. Dibuje cada una de las rectas.

12. Escriba una ecuación polar de **(a)** una circunferencia cuyo centro esté en el polo, **(b)** una circunferencia tangente al eje $\frac{1}{2}\pi$ y que su centro este en el eje polar **(c)**, una circunferencia tangente al eje polar cuyo centro esté en el eje $\frac{1}{2}\pi$. Dibuje cada una de las circunferencias.

13. Defina la gráfica de la ecuación polar $r = f(\theta)$ mediante un par de ecuaciones paramétricas. Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

14. Escriba una ecuación polar de cada uno de los tipos de *caracol* y dibuje los caracoles.

15. Escriba una ecuación polar de **(a)** una *rosa* de tres hojas y **(b)** una *rosa* de cuatro hojas. Dibuje las rosas.

16. ¿Cuál es la fórmula para la longitud de arco de una gráfica polar?

17. ¿Cuál es la fórmula para el área de una región limitada por gráficas polares?

18. ¿Qué es lo más difícil de obtener, puntos de intersección de gráficas polares o puntos de intersección de gráficas cartesianas?

19. Establezca la definición que proporciona una propiedad común de las cónicas relacionada con la excentricidad e. ¿Cómo determina el valor de e el tipo de cónica?

20. Escriba la ecuación de una elipse cuyo foco esté en el polo y para la cual la directriz correspondiente es perpendicular al eje polar si **(a)** la directriz está a la derecha del foco y **(b)** la directriz está a la izquierda del foco. Dibuje cada una de las elipses.

21. Escriba la ecuación de una hipérbola cuyo foco esté en el polo y para la cual la directriz correspondiente es paralela al eje polar si **(a)** la directriz está arriba del foco y **(b)** la directriz está debajo del foco. Dibuje cada una de las hipérbolas.

22. Escriba la ecuación de una parábola cuyo foco estén el polo y **(a)** la directriz correspondiente sea perpendicular al eje polar, **(b)** la directriz correspondiente sea paralela al eje polar. Dibuje cada una de las parábolas.

▶ EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 9

En los ejercicios 1 a 4, (a) dibuje la gráfica de las ecuaciones paramétricas y verifíquela en la graficadora; (b) obtenga una ecuación cartesiana de la gráfica.

1. $x = 2 - t, y = 2t$
2. $x = t^2, y = t^3 + 1$
3. $x = 2t^3, y = 3t^2 - 4$
4. $x = 4 \cos t - 2, y = 4 \operatorname{sen} t + 3$

En los ejercicios 5 y 6, calcule $\dfrac{dy}{dx}$ *y* $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ *sin eliminar el parámetro.*

5. $x = 9t^2 - 1, y = 3t + 1$ 6. $x = e^{2t}, y = e^{-3t}$

En los ejercicios 7 y 8, obtenga ecuaciones de las rectas tangentes horizontales y verticales, y después dibuje la gráfica del par de ecuaciones paramétricas dadas.

7. $x = 12 - t^2, y = 12t - t^3$
8. $x = \dfrac{2at^2}{1+t^2}, \quad y = \dfrac{2at^3}{1+t^2}, \quad a > 0$
(la cisoide de Diocles)

En los ejercicios 9 y 10, localice el punto que tiene el conjunto de coordenadas polares dado; después obtenga otros dos conjuntos de coordenadas polares del mismo punto: uno con el mismo valor de r y el otro con un r de signo opuesto.

9. **(a)** $(2, \frac{3}{4}\pi)$ **(b)** $(-3, \frac{7}{6}\pi)$
10. **(a)** $(4, -\frac{1}{3}\pi)$ **(b)** $(-1, \frac{1}{4}\pi)$

En los ejercicios 11 y 12, obtenga las coordenadas cartesianas rectangulares del punto cuyas coordenadas polares se proporcionan.

11. **(a)** $(1, \frac{1}{2}\pi)$ **(b)** $(2, -\frac{1}{3}\pi)$ **(c)** $(4, \frac{5}{4}\pi)$ **(d)** $(-3, \frac{1}{6}\pi)$
12. **(a)** $(5, \pi)$ **(b)** $(-2, \frac{5}{6}\pi)$ **(c)** $(-\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$ **(d)** $(1, \frac{4}{3}\pi)$

En los ejercicios 13 y 14, obtenga un conjunto de coordenadas polares del punto cuyas coordenadas cartesianas rectangulares se proporcionan. Considere $r > 0$ y $0 \le \theta < 2\pi$.

13. **(a)** $(-4, 4)$ **(b)** $(1, -\sqrt{3})$ **(c)** $(0, 6)$ **(d)** $(-2\sqrt{3}, -2)$
14. **(a)** $(-4, 0)$ **(b)** $(\sqrt{3}, 1)$ **(c)** $(-2, -2)$ **(d)** $(3, -3\sqrt{3})$

En los ejercicios 15 a 18, obtenga una ecuación polar de la gráfica que tiene la ecuación cartesiana indicada.

15. $4x^2 - 9y^2 = 36$ 16. $2xy = 1$
17. $x^2 + y^2 - 9x + 8y = 0$ 18. $y^4 = x^2(a^2 - y^2)$

En los ejercicios 19 a 22, obtenga una ecuación cartesiana de la gráfica que tiene la ecuación polar indicada.

19. $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 4$ **20.** $r(1 - \cos\theta) = 2$

21. $r^2 = \operatorname{sen}^2\theta$ **22.** $r = a\tan^2\theta$

En los ejercicios 23 a 26, dibuje la gráfica de la ecuación.

23. **(a)** $\theta = \frac{1}{4}\pi$ **(b)** $r = 4$

24. **(a)** $\theta = \frac{2}{3}$ **(b)** $r = \frac{3}{2}$

25. **(a)** $r\cos\theta = 3$ **(b)** $r = 3\cos\theta$

26. **(a)** $r\operatorname{sen}\theta = 6$ **(b)** $r = 6\operatorname{sen}\theta$

En los ejercicios 27 a 32, determine el tipo de caracol, su simetría y la dirección en la que apunta. Trace el caracol en la graficadora.

27. $r = 3 + 2\cos\theta$ **28.** $r = 2 + 3\operatorname{sen}\theta$

29. $r = 2(1 - \cos\theta)$ **30.** $r = 3(1 + \operatorname{sen}\theta)$

31. $r = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$ **32.** $r = 2 - \cos\theta$

En los ejercicios 33 a 38, describa y trace la gráfica de la ecuación en la graficadora.

33. $r = 3\operatorname{sen} 2\theta$ **34.** $r = 3\cos 2\theta$

35. $r = \sqrt{|\cos\theta|}$ **36.** $r = |\operatorname{sen} 2\theta|$

37. $r^2 = -\operatorname{sen} 2\theta$ **38.** $r^2 = 16\cos\theta$

39. Describa y trace cada una de las siguientes ecuaciones: **(a)** $r\theta = 3$ (espiral recíproca); **(b)** $3r = \theta$ (espiral de Arquímedes).

40. Muestre a mano que las ecuaciones $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ y $r = \operatorname{sen}\theta - 1$ tienen la misma gráfica. Después verifique las gráficas en la graficadora.

41. Obtenga la longitud de arco exacta de la curva que tiene ecuaciones paramétricas $x = 2 - t$ y $y = t^2$ de $t = 0$ a $t = 3$.

42. Calcule la longitud de arco exacta de la curva que tiene ecuaciones paramétricas $x = t^2$ y $y = t^3$ de $t = 1$ a $t = 2$.

43. Obtenga la longitud de arco exacta de la cardioide $r = 4(1 - \operatorname{sen}\theta)$.

44. Determine la longitud de arco exacta de la gráfica polar $r = 3\sec\theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

45. Calcule el área de la región limitada por **(a)** el lazo del caracol $r = 4(1 + 2\cos\theta)$, y **(b)** la parte exterior del lazo del caracol.

46. Obtenga el área de una de las hojas de la rosa $r = 2\operatorname{sen} 3\theta$.

47. Determine el área de la región dentro de la gráfica de $r = 2a\operatorname{sen}\theta$ y fuera de la gráfica de $r = a$.

48. Calcule el área de la región dentro de la gráfica de la lemniscata $r^2 = 2\operatorname{sen} 2\theta$ y fuera de la gráfica de la circunferencia $r = 1$.

49. Determine el área de la región barrida por el radio vector de la espiral logarítmica $r = e^{k\theta}$, donde $k > 0$, conforme θ varía de 0 a 2π.

50. Calcule el área de la intersección de las regiones acotadas por las gráficas de las dos ecuaciones $r = a\cos\theta$ y $r = a(1 - \cos\theta)$, donde $a > 0$.

51. Obtenga una ecuación polar de la circunferencia que tiene su centro en (r_0, θ_0) y un radio de a unidades. *Sugerencia:* aplique la ley de los cosenos al triángulo cuyos vértices están en el polo, (r_0, θ_0) y (r, θ).

52. Calcule el área de la región limitada por un lazo de la curva $r = a\operatorname{sen} n\theta$, donde n es cualquier número entero positivo.

En los ejercicios 53 a 56, la ecuación corresponde a una cónica que tiene un foco en el polo. (a) Calcule la excentricidad; (b) identifique la cónica; (c) escriba una ecuación de la directriz que corresponde al foco ubicado en el polo; (d) dibuje la curva.

53. $r = \dfrac{2}{2 - \operatorname{sen}\theta}$ **54.** $r = \dfrac{5}{3 + 3\operatorname{sen}\theta}$

55. $r = \dfrac{4}{2 + 3\cos\theta}$ **56.** $r = \dfrac{4}{3 - 2\cos\theta}$

En los ejercicios 57 a 60, obtenga una ecuación polar de la cónica que satisface las condiciones, y dibuje la gráfica.

57. Un foco ubicado en el polo; vértices en $(2, \pi)$ y $(4, \pi)$.

58. Un foco ubicado en el polo; un vértice en $(6, \frac{1}{2}\pi)$; $e = \frac{3}{4}$.

59. Un foco ubicado en el polo; un vértice en $(3, \frac{3}{2}\pi)$; $e = 1$.

60. La recta $r\operatorname{sen}\theta = 6$ es la directriz correspondiente al foco ubicado en el polo y $e = \frac{5}{3}$.

En los ejercicios 61 a 64, utilice NINT *para obtener un valor aproximado a cuatro dígitos significativos de la longitud de arco de la curva indicada.*

61. $x = 2t^3, y = t - 2$; de $t = 2$ a $t = 3$

62. $x = e^t, y = \cos t$; de $t = -\frac{1}{2}\pi$ a $t = \frac{1}{2}\pi$

63. El caracol completo $r = 4 - 2\operatorname{sen}\theta$.

64. Una hoja de la rosa $r = 4\cos 3\theta$.

65. La órbita del planeta Mercurio alrededor del Sol tiene la forma de una elipse con el Sol como uno de sus focos, un semieje mayor de 36 millones de millas, y una excentricidad de 0.206. Obtenga **(a)** la distancia mínima a la que Mercurio se acerca al Sol, **(b)** la distancia máxima posible entre Mercurio y el Sol.

66. Un satélite se desplaza alrededor de la Tierra en una órbita elíptica que tiene a la Tierra en uno de sus focos y una excentricidad de $\frac{1}{2}$. La distancia mínima a la que el satélite se acerca a la Tierra es de 200 mi. Obtenga la distancia máxima a la que el satélite estará de la Tierra. Suponga que el radio de la Tierra es de 4000 mi.

67. Un cometa que se desplaza en una órbita parabólica alrededor del Sol tiene a éste como el foco F de la parábola. Se efectúa una observación del cometa cuando está en el

punto P_1, a 15 millones de millas del Sol, y se realizó una segunda observación cuando estaba en P_2, a 5 millones de millas del Sol. Los segmentos de recta FP_1 y FP_2 son perpendiculares. Con esta información existen dos posibles órbitas para el cometa. Determine la distancia mínima entre el cometa y el Sol en cada órbita.

68. Si la distancia entre las dos directrices de una elipse es tres veces la distancia entre los focos, determine la excentricidad.

69. Obtenga una ecuación polar de la parábola que contiene el punto $(2, \frac{1}{3}\pi)$, cuyo foco está en el polo y cuyo vértice se encuentra en la prolongación del eje polar.

70. Calcule el área de la región acotada por las dos parábolas $r = 2/(1 - \cos\theta)$ y $r = 2/(1 + \cos\theta)$.

71. Una **cuerda focal** es un segmento de recta que pasa por un foco y tiene sus extremos en la cónica. Demuestre que si dos cuerdas focales de una parábola son perpendiculares, entonces la suma de los recíprocos de las medidas de sus longitudes es una constante. *Sugerencia:* utilice coordenadas polares.

72. Una cuerda focal es dividida en dos segmentos por el foco. Demuestre que la suma de los recíprocos de las medidas de las longitudes de los dos segmentos es la misma, sin importar que cuerda se tome. *Sugerencia:* utilice coordenadas polares.

73. Una **epicicloide** es la curva descrita por un punto P de la circunferencia de radio b que rueda externamente sobre circunferencia fija de radio a. Si el origen está en el centro de la circunferencia fija, $A(a, 0)$ es uno de los puntos en los que el punto P hace contacto con la circunferencia fija, B es el punto móvil de tangencia de las dos circunferencias, y el parámetro t es la medida en radianes del ángulo AOB, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la epicicloide son

$$x = (a + b)\cos t - b\cos\frac{a + b}{b}t$$

y

$$y = (a + b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\frac{a + b}{b}t$$

74. Trace en la graficadora la epicicloide del ejercicio 73 si **(a)** $a = 4$ y $b = 2$ para $t \in [-\pi, \pi]$; **(b)** $a = 24$ y $b = 3$ para $t \in [-2\pi, 2\pi]$; **(c)** $a = 8$ y $b = 3$ para $t \in [-4\pi, 4\pi]$. Dibuje lo que se muestra en la pantalla de la graficadora.

Capítulo

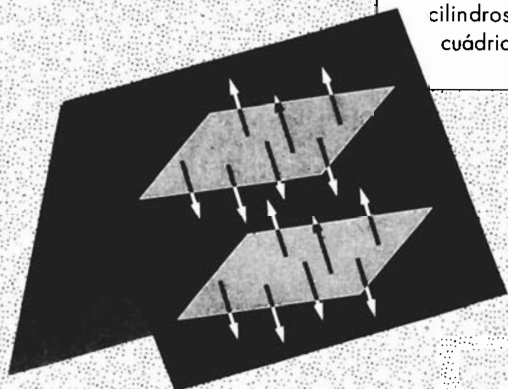
10

Vectores, rectas, planos y superficies en el espacio

VISIÓN PRELIMINAR

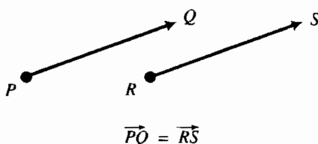
El estudio sobre vectores presentado en este capítulo es un enfoque moderno y sirve como introducción tanto desde el punto de vista del álgebra lineal como del análisis vectorial clásico. En las secciones 10.1 y 10.2 se definen los vectores como pares ordenados y ternas ordenadas de números reales, respectivamente. En estas secciones así como en las secciones 10.3 y 10.5 se realizan operaciones con vectores efectuando operaciones algebraicas entre sus coordenadas. Las aplicaciones de los vectores tratan sobre física, ingeniería, navegación y geometría.

En este capítulo se incluyen los temas de geometría analítica sólida debido a que su estudio se simplifica al emplear vectores. Estos temas, se presentan en las secciones 10.4 y 10.6, entre ellos se estudian planos, rectas, cilindros, superficies de revolución y las superficies cuádricas.



10.1 VECTORES EN EL PLANO

Las aplicaciones matemáticas con frecuencia se relacionan con magnitudes que poseen tanto cantidad (o intensidad) como dirección. Un ejemplo de tales magnitudes es la *velocidad.* Así, la velocidad de un avión tiene cantidad (la rapidez con que éste vuela) y dirección, la cual determina su curso. Otros ejemplos de dichas magnitudes son la *fuerza*, el *desplazamiento* y la *aceleración*. Los físicos e ingenieros entienden por *vector* un segmento rectilíneo dirigido, y las magnitudes que poseen cantidad y dirección se denominan **magnitudes vectoriales.** En contraste, una magnitud que tiene cantidad pero no dirección se llama **magnitud escalar.** Ejemplos de magnitudes escalares son la longitud, el área, el volumen, el costo, la utilidad, y la rapidez. El estudio de los vectores recibe el nombre de **análisis vectorial.**



$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$

FIGURA 1

El análisis vectorial puede estudiarse en forma geométrica o analítica. Si el estudio es geométrico, primero se define un **segmento rectilíneo dirigido** (o brevemente **segmento dirigido**) como un segmento de recta que parte desde un punto P y llega hasta un punto Q, y se denota por $\overrightarrow{PQ}$. El punto P se llama **punto inicial,** y el punto Q se denomina **punto terminal.** Después, se dice que **dos segmentos dirigidos son iguales** si tienen la misma *longitud* y la misma *dirección*, y se escribe $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ (consulte la figura 1). El segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ se llama **vector** de P a Q. Un vector se denota por una sola letra en tipo negro tal como **A.** En algunos libros, se emplea una sola letra en tipo claro y con una flecha encima para denotar un vector, por ejemplo $\vec{A}$. Cuando trabaje con vectores, puede usar esa notación o $\underline{A}$ a fin de distinguir el símbolo para un vector del símbolo para un número real.

Al continuar con el aspecto geométrico del análisis vectorial, observe que si el segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ es el vector **A**, y $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, entonces el segmento dirigido $\overrightarrow{RS}$ también es el vector **A**. Por esto se considera que un vector permanece sin cambio si se mueve paralelamente a sí mismo. Con esta interpretación de vector, se puede suponer, por conveniencia, que cada vector tiene su punto inicial en algún punto de referencia fijo. Si se considera este punto como el origen del sistema coordenado cartesiano rectangular, entonces un vector puede definirse analíticamente en términos de números reales. Tal definición permite el estudio del análisis vectorial desde un punto de vista puramente algebraico.

En este libro se emplea el estudio analítico, mientras que la interpretación geométrica se utiliza con fines ilustrativos. Un vector en el plano se denota por un par ordenado de números reales y la notación $\langle x, y\rangle$ se emplea en lugar de (x, y) para evitar la confusión entre vector y punto. V_2 es el conjunto de todos los pares ordenados $\langle x, y\rangle$.

10.1.1 Definición de vector en el plano

Un **vector en el plano** es un par ordenado de números reales $\langle x, y\rangle$. Los números x y y son las **componentes** del vector $\langle x, y\rangle$.

De esta definición, dos vectores $\langle a_1, a_2\rangle$ y $\langle b_1, b_2\rangle$ son **iguales** si y sólo si $a_1 = b_1$ y $a_2 = b_2$.

Existe una correspondencia entre los vectores $\langle x, y\rangle$ del plano y los puntos (x, y) del plano. Sea el vector **A** el par ordenado de números reales $\langle a_1, a_2\rangle$. Si A es el punto (a_1, a_2), entonces el vector **A** puede representarse geométricamente por el segmento dirigido $\overrightarrow{OA}$. Este segmento dirigido es una **representación** del vector **A**. Cualquier segmento dirigido a $\overrightarrow{OA}$ también

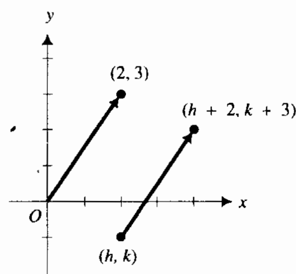


FIGURA 2

es una representación del vector **A**. La representación particular de un vector con su punto inicial en el origen se denomina **representación de posición** del vector.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 El vector $\langle 2, 3\rangle$ tiene como su representación de posición el segmento dirigido desde el origen hasta el punto $(2, 3)$. La representación del vector $\langle 2, 3\rangle$ cuyo punto inicial es (h, k) tiene como punto terminal $(h + 2, k + 3)$; consulte la figura 2. ◀

El vector $\langle 0, 0\rangle$ se denomina **vector cero** y se denota por **0**; esto es,

$$\mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle.$$

Cualquier punto es una representación del vector cero.

10.1.2 Definición de módulo* y dirección de un vector

El **módulo** de un vector **A**, denotado por $\|\mathbf{A}\|$, es la longitud de cualquiera de sus representaciones, y la **dirección** de un vector diferente del vector cero es la dirección de cualquiera de sus representaciones.

10.1.3 Teorema

Si **A** es el vector $\langle a_1, a_2\rangle$, entonces $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Demostración De la definición 10.1.2, $\|\mathbf{A}\|$ es la longitud de cualquiera de las representaciones de **A**, entonces $\|\mathbf{A}\|$ será la longitud de la representación de posición de **A**, la cual es la distancia del origen al punto (a_1, a_2). De la fórmula de la distancia entre dos puntos, se obtiene

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\| &= \sqrt{(a_1 - 0)^2 + (a_2 - 0)^2}\\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\end{aligned}$$ ■

Observe que $\|\mathbf{A}\|$ es un número no negativo y no un vector. Del teorema 10.1.3, se tiene $\|\mathbf{0}\| = 0$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Si $\mathbf{A} = \langle -3, 5\rangle$, entonces

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\| &= \sqrt{(-3)^2 + 5^2}\\ &= \sqrt{32}\end{aligned}$$ ◀

EJEMPLO 1 Sean **A** el vector $\langle -4, 5\rangle$ y P el punto $(6, -2)$. **(a)** Dibuje la representación de posición de **A** y también la representación particular de **A** que tiene a P como su punto inicial. **(b)** Determine el módulo de **A**.

Solución

(a) Sea A el punto $(-4, 5)$. La figura 3 muestra el segmento dirigido $\overrightarrow{OA}$, el cual es la representación de posición del vector **A**. Sea $\overrightarrow{PQ}$ la representa-

*N. del T. Otros nombres para el módulo de un vector son *magnitud*, *intensidad* y *tamaño*.

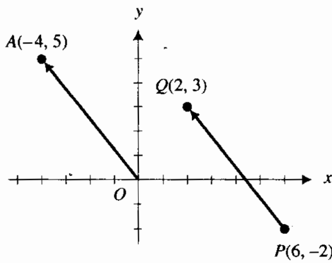


FIGURA 3

ción particular del vector **A** que tiene a P como su punto inicial. Si $Q = (x, y)$, entonces

$$x - 6 = -4 \qquad y + 2 = 5$$
$$x = 2 \qquad y = 3$$

Por tanto, $Q = (2, 3)$ y $\overrightarrow{PQ}$ se muestra en la figura 3.

(b) Del teorema 10.1.3,

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2}$$
$$= \sqrt{41}$$

◀

El **ángulo director** de cualquier vector diferente del vector cero es el ángulo θ medido desde la parte positiva del eje x en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj hasta la representación de posición del vector. Si θ se mide en radianes, entonces $0 \leq \theta < 2\pi$. Si $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$, entonces

$$\tan \theta = \frac{a_2}{a_1} \qquad \text{si } a_1 \neq 0 \tag{1}$$

Si $a_1 = 0$ y $a_2 > 0$, entonces $\theta = \frac{1}{2}\pi$; si $a_1 = 0$ y $a_2 < 0$, entonces $\theta = \frac{3}{2}\pi$. Las figuras 4 a 6 muestran el ángulo director θ para vectores específicos cuyas representaciones de posición están dibujadas en ellas.

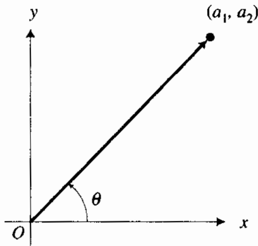


FIGURA 4

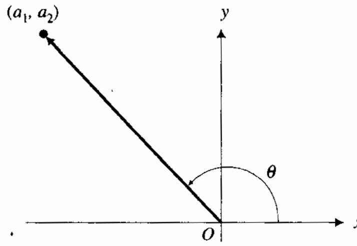


FIGURA 5

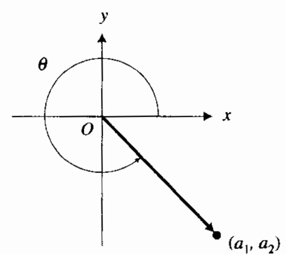


FIGURA 6

▶ ***EJEMPLO 2*** Determine la medida en radianes del ángulo director de cada uno de los siguientes vectores; **(a)** $\langle -1, 1 \rangle$; **(b)** $\langle 0, -5 \rangle$; **(c)** $\langle 1, -2 \rangle$.

Solución Las representaciones de posición de los vectores de (a), (b) y (c) se muestran en las figuras 7, 8 y 9, respectivamente.

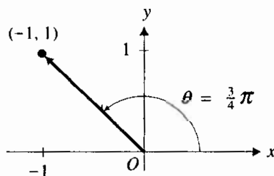


FIGURA 7

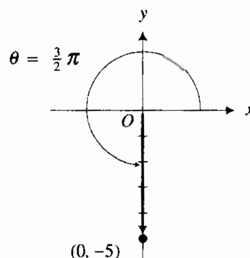


FIGURA 8

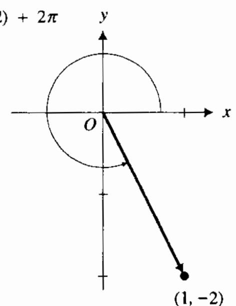


FIGURA 9

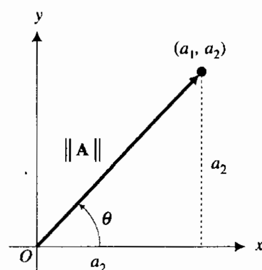


FIGURA 10

(**a**) $\tan \theta = -1$, y $\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$; de modo que $\theta = \frac{3}{4}\pi$.
(**b**) $\tan \theta$ no existe, y $a_2 < 0$; por lo que $\theta = \frac{3}{2}\pi$.
(**c**) $\tan \theta = -2$, y $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$; por tanto $\theta = \tan^{-1}(-2) + 2\pi$; es decir, $\theta \approx 5.176$. ◀

Observe que si $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y θ es el ángulo director de **A**, entonces

$$a_1 = \|\mathbf{A}\| \cos \theta \qquad \text{y} \qquad a_2 = \|\mathbf{A}\| \operatorname{sen} \theta \tag{2}$$

Refiérase a la figura 10, donde el punto (a_1, a_2) está en el primer cuadrante.

Si el vector $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$, entonces la representación de **A** cuyo punto inicial es (x, y) tiene como punto terminal al punto $(x + a_1, y + a_2)$. De esta manera, un vector puede considerarse como una traslación del plano en sí mismo. La figura 11 muestra cinco representaciones del vector $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$. En cada caso **A** traslada el punto (x_i, y_i) en el punto $(x_i + a_1, y_i + a_2)$.

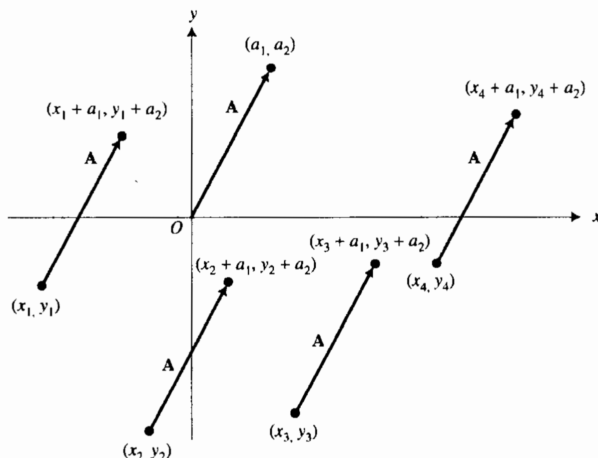


FIGURA 11

▶ ***EJEMPLO 3*** Suponga que P es el punto $(-1, 8)$ y Q es el punto $(3, 2)$. Determine el vector **A** que tiene a $\overrightarrow{PQ}$ como una representación. Dibuje $\overrightarrow{PQ}$ y la representación de posición de **A**.

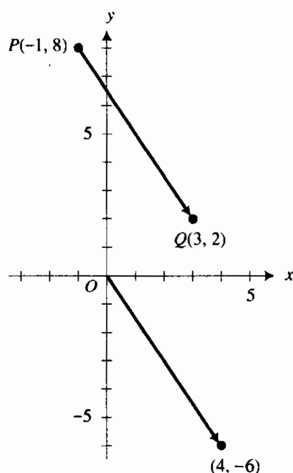


FIGURA 12

Solución La figura 12 muestra el segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$. Sea el vector $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$. Como $\overrightarrow{PQ}$ es una representación del vector **A**, el vector **A** traslada el punto $P(-1, 8)$ al punto $Q(3, 2)$. Pero el vector $\langle a_1, a_2 \rangle$ traslada el punto $(-1, 8)$ al punto $(-1 + a_1, 8 + a_2)$. Así,

$$\begin{aligned} -1 + a_1 &= 3 & 8 + a_2 &= 2 \\ a_1 &= 4 & a_2 &= -6 \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathbf{A} = \langle 4, -6 \rangle$. La figura 12 también muestra la representación de posición de **A**. ◀

La definición siguiente proporciona el método para sumar dos vectores.

10.1.4 Definición de la suma de vectores

La **suma** de los vectores $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$ es el vector $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ definido por

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$$

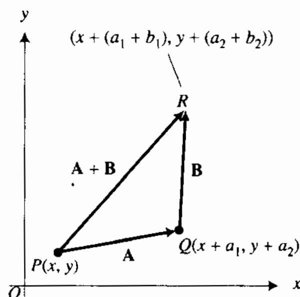


FIGURA 13

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Si $\mathbf{A} = \langle 3, -1\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle -4, 5\rangle$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= \langle 3 + (-4), -1 + 5\rangle\\ &= \langle -1, 4\rangle\end{aligned}$$

◀

La interpretación geométrica de la suma de dos vectores se muestra en la figura 13. Sean $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2\rangle$, y sea P el punto (x, y). Entonces $\mathbf{A}$ traslada el punto P al punto $(x + a_1, y + a_2) = Q$. El vector $\mathbf{B}$ traslada el punto Q al punto $((x + a_1) + b_1, (y + a_2) + b_2)$ o, equivalentemente, $(x + (a_1 + b_1), y + (a_2 + b_2)) = R$. Además,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$$

En consecuencia, el vector $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ traslada el punto P al punto $(x + (a_1 + b_1), y + (a_2 + b_2)) = R$. Así, en la figura 13, $\overrightarrow{PQ}$ es una representación de $\mathbf{A}$, $\overrightarrow{QR}$ es una representación del vector $\mathbf{B}$, y $\overrightarrow{PR}$ es una representación de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$. Las representaciones de los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son lados adyacentes de un paralelogramo, y la representación del vector $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ es una diagonal del paralelogramo. Esta diagonal se denomina **resultante** de los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$. La regla para la adición de vectores también se conoce como la **ley del paralelogramo.**

La fuerza es una magnitud vectorial donde la cantidad se expresa en unidades de fuerza y el ángulo director se determina mediante la dirección de la fuerza. En física se demuestra que dos fuerzas aplicadas a un objeto en un punto particular pueden reemplazarse por una fuerza equivalente, la cual es su resultante.

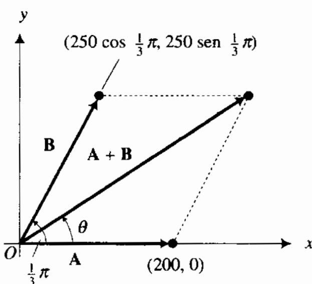


FIGURA 14

▶ ***EJEMPLO 4*** Dos fuerzas de 200 lb y 250 lb forman un ángulo de $\frac{1}{3}\pi$ entre sí y están aplicadas a un objeto en el mismo punto. Determine **(a)** la intensidad o módulo de la fuerza resultante, y **(b)** el ángulo que forma la resultante con la fuerza de 200 lb.

Solución Consulte la figura 14, donde los ejes se han elegido de modo que la representación de posición de la fuerza de 200 lb coincida con la parte positiva del eje x. El vector $\mathbf{A}$ denota esta fuerza, por lo que $\mathbf{A} = \langle 200, 0\rangle$. El vector $\mathbf{B}$ representa la fuerza de 250 lb. De las fórmulas (2), si $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2\rangle$, entonces

$$\begin{aligned}b_1 &= 250 \cos \tfrac{1}{3}\pi & b_2 &= 250 \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\pi\\ &= 125 & &\approx 216.5\end{aligned}$$

Así, $\mathbf{B} = \langle 125, 216.5\rangle$. La fuerza resultante es $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, por lo que

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= \langle 200, 0\rangle + \langle 125, 216.5\rangle\\ &= \langle 325, 216.5\rangle\end{aligned}$$

(a) $$\begin{aligned}\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| &= \sqrt{(325)^2 + (216.5)^2}\\ &\approx 390.5\end{aligned}$$

(b) Si θ es el ángulo que el vector $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ forma con el vector $\mathbf{A}$, entonces

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{216.5}{325}\\ \tan\theta &\approx 0.6662\\ \theta &\approx 0.5877\end{aligned}$$

◀

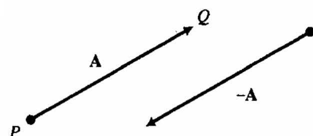


FIGURA 15

10.1.5 Definición del negativo de un vector

Si $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$, entonces el **negativo de A,** denotado por $-\mathbf{A}$, es el vector $\langle -a_1, -a_2 \rangle$.

Si el segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ es una representación del vector **A**, entonces el segmento dirigido $\overrightarrow{QP}$ es una representación de $-\mathbf{A}$. Cualquier segmento dirigido paralelo a $\overrightarrow{PQ}$, que tenga la misma longitud de $\overrightarrow{PQ}$ y sentido contrario al de $\overrightarrow{PQ}$, es también una representación de $-\mathbf{A}$. Refiérase a la figura 15.

10.1.6 Definición de la diferencia de dos vectores

La **diferencia** de los vectores **A** y **B**, denotada por $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, es el vector que se obtiene al sumar **A** al negativo de **B**; es decir,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Así, si $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$, entonces $-\mathbf{B} = \langle -b_1, -b_2 \rangle$, y

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 Si $\mathbf{A} = \langle 4, -2 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 6, -3 \rangle$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{B} &= \langle 4, -2 \rangle - \langle 6, -3 \rangle \\ &= \langle 4, -2 \rangle + \langle -6, 3 \rangle \\ &= \langle -2, 1 \rangle \end{aligned}$$

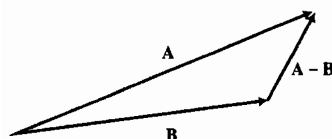


FIGURA 16

A fin de interpretar geométricamente la diferencia de dos vectores, considere que las representaciones de los vectores **A** y **B** tienen el mismo punto inicial. Entonces el segmento dirigido desde el punto terminal de **B** al punto terminal del segmento dirigido de la representación de **A** es una representación del vector $\mathbf{A} - \mathbf{B}$. Esto obedece la ley del paralelogramo $\mathbf{B} + (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}$. Consulte la figura 16.

El ejemplo siguiente, que involucra la diferencia de dos vectores, trata acerca de la navegación aérea. La *velocidad al aire* (o *con respecto al aire*) de un avión es su velocidad con relación a la velocidad del aire en que navega, y la *velocidad a tierra* (o *con respecto a la tierra*) es su velocidad considerada desde el suelo. Cuando hay viento, la velocidad del avión relativa al suelo es la resultante del vector que representa la velocidad del aire y el vector que representa la velocidad del avión relativa al aire. En navegación, el *curso* de un barco o un avión es el ángulo medido en grados en el sentido en que giran las manecillas del reloj desde el norte a la dirección en la que se encamina la nave. El ángulo se considera positivo aunque se recorre en el sentido del giro de las manecillas del reloj.

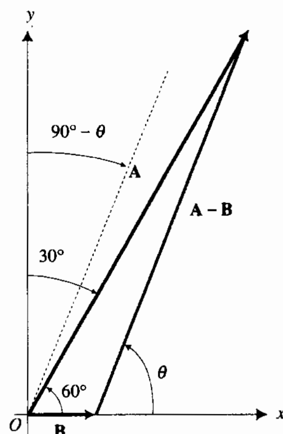


FIGURA 17

EJEMPLO 5 Un avión puede volar a 300 mi/h. Si el viento sopla hacia el este a 50 mi/h, ¿cuál debe ser el enfilamiento del avión para que el curso sea de 30°? ¿Cuál será la velocidad a tierra del avión si vuela en este curso?

Solución Refiérase a la figura 17, la cual muestra las representaciones de posición de los vectores **A** y **B** así como una representación de $\mathbf{A} - \mathbf{B}$. El

vector **A** representa la velocidad a tierra del avión sobre un curso de 30°. El ángulo director de **A** es 60°. El vector **B** representa la velocidad del viento. Como **B** tiene una intensidad de 50 y un ángulo director de 0°, entonces $\mathbf{B} = \langle 50, 0 \rangle$. El vector $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ representa la velocidad del avión al aire; así, $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| = 300$. Sea θ el ángulo director de $\mathbf{A} - \mathbf{B}$. De la figura 17 se obtiene el triángulo mostrado en la figura 18. Al aplicar la ley de los senos a este triángulo, se tiene

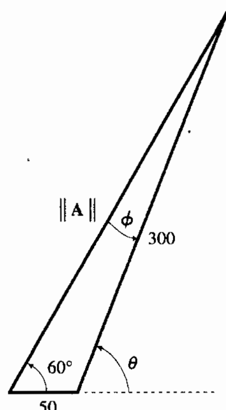


FIGURA 18

$$\frac{\operatorname{sen} \phi}{50} = \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{300}$$
$$\operatorname{sen} \phi = \frac{50 \operatorname{sen} 60^\circ}{300}$$
$$\operatorname{sen} \phi = 0.1433$$
$$\phi = 8.3^\circ$$

Por tanto,

$$\theta = 60^\circ + 8.3^\circ$$
$$= 68.3^\circ$$

Si se aplica otra vez la ley de los senos al triángulo de la figura 18, se tiene

$$\frac{\|A\|}{\operatorname{sen}(180^\circ - \theta)} = \frac{300}{\operatorname{sen} 60^\circ}$$
$$\|\mathbf{A}\| = \frac{300 \operatorname{sen} 111.7^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ}$$
$$\|\mathbf{A}\| = 322$$

<u>**Conclusión:**</u> El enfilamiento del avión debe ser $90^\circ - \theta$, el cual es 21.7°, y si el avión vuela en este curso, su velocidad a tierra será de 322 mi/h. ◀

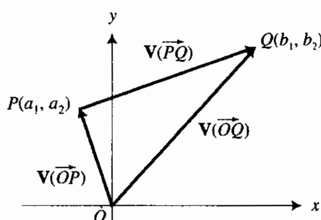


FIGURA 19

Suponga que P es el punto (a_1, a_2) y Q es el punto (b_1, b_2). Se empleará la notación $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$ para denotar el vector que tiene al segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ como una representación. Consulte la figura 19, la cual muestra representaciones de los vectores $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$, $\mathbf{V}(\overrightarrow{OP})$ y $\mathbf{V}(\overrightarrow{OQ})$. Observe que

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \mathbf{V}(\overrightarrow{OQ}) - \mathbf{V}(\overrightarrow{OP})$$
$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \langle b_1, b_2 \rangle - \langle a_1, a_2 \rangle$$

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \langle b_1 - a_1, b_2 - a_2 \rangle$$



EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 Si P es el punto $(-6, 7)$ y Q es el punto $(2, 9)$, entonces

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \langle 2 - (-6), 9 - 7 \rangle$$
$$= \langle 8, 2 \rangle$$
◀

Otra operación con vectores es la *multiplicación escalar* (o *multiplicación por un escalar*) que implica el producto de un vector y un escalar (un número real).

10.1.7 Definición del producto de un vector y un escalar

Si c es un escalar y **A** es el vector $\langle a_1, a_2 \rangle$, entonces el **producto** de c y **A**, denotado por $c\mathbf{A}$, es el vector definido por

$$\begin{aligned} c\mathbf{A} &= c\langle a_1, a_2 \rangle \\ &= \langle ca_1, ca_2 \rangle \end{aligned}$$

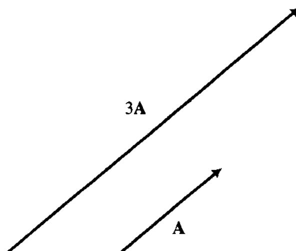


FIGURA 20

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 Si $\mathbf{A} = \langle 4, -5 \rangle$, entonces

$$\begin{aligned} 3\mathbf{A} &= 3\langle 4, -5 \rangle \\ &= \langle 12, -15 \rangle \end{aligned}$$

En el ejercicio 45 se le pedirá que demuestre que si **A** es cualquier vector y c es cualquier escalar, entonces

$$0(\mathbf{A}) = \mathbf{0} \qquad \text{y} \qquad c(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

El módulo del vector $c\mathbf{A}$ se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} \| c\mathbf{A} \| &= \sqrt{(ca_1)^2 + (ca_2)^2} \\ &= \sqrt{c^2(a_1{}^2 + a_2{}^2)} \\ &= \sqrt{c^2}\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2} \\ &= |c| \, \| \mathbf{A} \| \end{aligned}$$

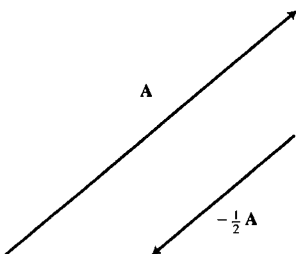


FIGURA 21

Por tanto, el módulo de $c\mathbf{A}$ es el valor absoluto de c por el módulo de **A**.

La interpretación geométrica del vector $c\mathbf{A}$ se presenta en las figuras 20 y 21. Si $c > 0$, entonces $c\mathbf{A}$ es un vector cuya representación tiene una longitud de c veces el módulo de **A** y tiene la misma dirección de **A**; un ejemplo de esto se muestra en la figura 20, donde $c = 3$. Si $c < 0$, entonces $c\mathbf{A}$ es un vector cuya representación tiene una longitud que es $|c|$ veces el módulo de **A** y posee dirección opuesta a la de **A**. Esta situación se muestra en la figura 21, donde $c = -\frac{1}{2}$.

El teorema siguiente proporciona las leyes que satisfacen las operaciones de adición vectorial y multiplicación por un escalar de vectores de V_2.

10.1.8 Teorema

Si **A**, **B** y **C** son tres vectores cualesquiera de V_2, y c y d son dos escalares cualesquiera, entonces la adición vectorial y la multiplicación por un escalar satisfacen las siguientes propiedades:

(i) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (ley conmutativa)
(ii) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (ley asociativa)
(iii) Existe un vector **0** en V_2 para el cual $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ (existencia del *idéntico aditivo*)
(iv) Existe un vector $-\mathbf{A}$ en V_2 tal que $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ (existencia del *inverso aditivo* o *negativo*)
(v) $(cd)\mathbf{A} = c(d\mathbf{A})$ (ley asociativa)
(vi) $c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$ (ley distributiva)
(vii) $(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$ (ley distributiva)
(viii) $1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ (existencia del idéntico multiplicativo escalar)

Demostración Se presentarán las demostraciones de (i) y (vi), las demás se dejan como ejercicios (consulte los ejercicios 46 a 50). En la demostración de (i) se utiliza la propiedad conmutativa para los números reales, y en la demostración de (vi) se emplea la propiedad distributiva para los números reales. Sean $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$.

Demostración de (i)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle \\ &= \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle \\ &= \langle b_1 + a_1, b_2 + a_2 \rangle \\ &= \langle b_1, b_2 \rangle + \langle a_1, a_2 \rangle \\ &= \mathbf{B} + \mathbf{A} \end{aligned}$$

Demostración de (vi)

$$\begin{aligned} c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= c(\langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle) \\ &= c(\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle) \\ &= \langle c(a_1 + b_1), c(a_2 + b_2) \rangle \\ &= \langle ca_1 + cb_1, ca_2 + cb_2 \rangle \\ &= \langle ca_1, ca_2 \rangle + \langle cb_1, cb_2 \rangle \\ &= c\langle a_1, a_2 \rangle + c\langle b_1, b_2 \rangle \\ &= c\mathbf{A} + c\mathbf{B} \end{aligned}$$

■

El teorema 10.1.8 es muy importante debido a que cualquier ley algebraica para las operaciones de adición vectorial y multiplicación por un escalar en V_2 se puede deducir a partir de las ocho propiedades establecidas en el teorema. Estas leyes son semejantes a las leyes de la aritmética de números reales. Además, en álgebra lineal, un *espacio vectorial real* se define como un conjunto de vectores junto con el conjunto de números reales (*escalares*) y las dos operaciones de adición vectorial y multiplicación por un escalar que satisfacen las ocho propiedades presentadas en el teorema 10.1.8.

10.1.9 Definición de espacio vectorial real

Un **espacio vectorial real** V es un conjunto de elementos, llamados *vectores*, junto con el conjunto de números reales, denominados *escalares*, con dos operaciones llamadas *adición vectorial* y *multiplicación por un escalar*, tal que para cada par de vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en V y para cualquier escalar c, se definen los vectores $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ y $c\mathbf{A}$ de modo que las propiedades (i)–(viii) del teorema 10.1.8 se cumplan.

De esta definición, V_2 es un espacio vectorial.

Ahora se considerará un vector arbitrario de V_2 y se expresará en una forma especial:

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \langle a_1, 0 \rangle + \langle 0, a_2 \rangle$$

$$\langle a_1, a_2 \rangle = a_1\langle 1, 0 \rangle + a_2\langle 0, 1 \rangle \qquad (3)$$

Debido a que el módulo de cada uno de los dos vectores $\langle 1, 0 \rangle$ y $\langle 0, 1 \rangle$ es una unidad, se les conoce como **vectores unitarios.** A continuación se presenta la notación para estos dos vectores unitarios:

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$$

Con estas notaciones, se tiene de (3)

$$\langle a_1, a_2 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} \qquad (4)$$

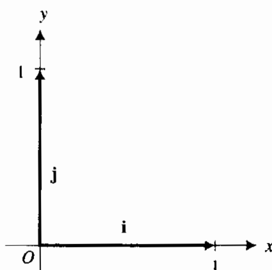


FIGURA 22

La representación de posición de los vectores **i** y **j** se muestra en la figura 22. La ecuación (4) establece que cualquier vector de V_2 puede escribirse como una *combinación lineal* de **i** y **j**. De esta proposición y del hecho de que **i** y **j** son *independientes* (es decir, sus representaciones de posición no son colineales), se dice que los vectores **i** y **j** forman una **base** para el espacio

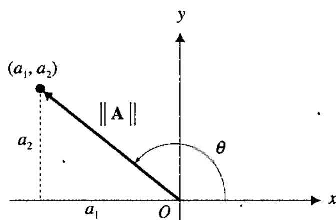


FIGURA 23

vectorial V_2. Refiérase al ejercicio 52 para un ejemplo de una base que consiste de vectores no unitarios. El número de elementos de una base de un espacio vectorial se denomina **dimensión** del espacio vectorial. Por tanto, V_2 es un espacio vectorial bidimensional o de dos dimensiones.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

De (4),

$$\langle 3, -4\rangle = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$ ◀

Sean **A** el vector $\langle a_1, a_2\rangle$ y θ el ángulo director de **A**. Observe la figura 23, donde el punto (a_1, a_2) está en el segundo cuadrante y se muestra la representación de posición de **A**. Como $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, $a_1 = \|\mathbf{A}\| \cos\theta$, y $a_2 = \|\mathbf{A}\| \operatorname{sen}\theta$, entonces se puede escribir

$$\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\| \cos\theta\,\mathbf{i} + \|\mathbf{A}\| \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\|(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}) \qquad \mathbf{(5)}$$

Esta ecuación expresa el vector **A** en términos de su módulo, del coseno y del seno de su ángulo director, y de los vectores unitarios **i** y **j**.

▶ EJEMPLO 6

Exprese el vector $\langle -5, -2\rangle$ en la forma (5).

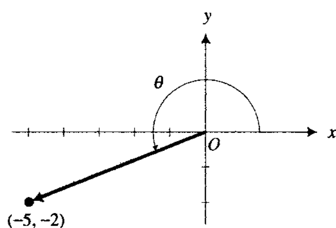


FIGURA 24

Solución Vea la figura 24, la cual muestra la representación de posición del vector $\langle -5, -2\rangle$. Al calcular el módulo y el coseno y seno del ángulo director, se tiene

$$\|\langle -5, -2\rangle\| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2}$$
$$= \sqrt{29}$$
$$\cos\theta = -\frac{5}{\sqrt{29}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{\sqrt{29}}$$

Por tanto, de (5),

$$\langle -5, -2\rangle = \sqrt{29}\left(-\frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{j}\right)$$ ◀

10.1.10 Teorema

Si el vector $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ es diferente del vector cero, entonces el vector unitario **U** que tiene la misma dirección y el mismo sentido de **A** está definido por

$$\mathbf{U} = \frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|}\mathbf{i} + \frac{a_2}{\|\mathbf{A}\|}\mathbf{j}$$

Demostración Se demostrará que el vector **U** es un vector unitario que tiene la misma dirección de **A**.

$$\|\mathbf{U}\| = \sqrt{\left(\frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|}\right)^2} \qquad \mathbf{U} = \frac{1}{\|\mathbf{A}\|}(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})$$

$$= \frac{\sqrt{a_1 + a_2{}^2}}{\|\mathbf{A}\|} \qquad\qquad = \frac{1}{\|\mathbf{A}\|}(\mathbf{A})$$

$$= \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

$$= 1$$

Como $\|\mathbf{U}\| = 1$, **U** es un vector unitario, y debido a que **U** es igual al producto de un escalar positivo y el vector **A**, la dirección y el sentido de **U** son los mismos que los de **A**. ■

▶ ***EJEMPLO 7*** Dados $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, obtenga el vector unitario que tiene la misma dirección de $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.

Solución

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (3\mathbf{i} + \mathbf{j}) - (-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$$
$$= 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$

Así,

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| = \sqrt{5^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{34}$$

Por el teorema 10.1.10, el vector unitario requerido es

$$\mathbf{U} = \frac{5}{\sqrt{34}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{34}}\mathbf{j}$$ ◀

EJERCICIOS 10.1

En los ejercicios 1 a 4, (a) dibuje la representación de posición del vector **A** *y también la representación particular que pasa por el punto P. (b) Calcule el módulo de* **A**.

1. $\mathbf{A} = \langle 3, 4\rangle$; $P = (2, 1)$

2. $\mathbf{A} = \langle -2, 5\rangle$; $P = (-3, 4)$

3. $\mathbf{A} = \langle e, -\frac{1}{2}\rangle$; $P = (-2, -e)$

4. $\mathbf{A} = \langle 4, 0\rangle$; $P = (2, 6)$

En los ejercicios 5 y 6, obtenga la medida exacta en radianes del ángulo director del vector. En el inciso (c) aproxime la medida a centésimos de radián.

5. **(a)** $\langle 1, -1\rangle$ **(b)** $\langle -3, 0\rangle$ **(c)** $\langle 5, 2\rangle$

6. **(a)** $\langle \sqrt{3}, 1\rangle$ **(b)** $\langle 0, 4\rangle$ **(c)** $\langle -3, 2\rangle$

En los ejercicios 7 a 10, obtenga el vector **A** *que tiene al segmento dirigido* $\overrightarrow{PQ}$ *como una representación. Dibuje* $\overrightarrow{PQ}$ *y la representación de posición de* **A**.

7. $P = (3, 7)$; $Q = (5, 4)$ **8.** $P = (5, 4)$; $Q = (3, 7)$

9. $P = (-5, -3)$; $Q = (0, 3)$

10. $P = (-\sqrt{2}, 0)$; $Q = (0, 0)$

En los ejercicios 11 a 14, determine el punto S de modo que $\overrightarrow{PQ}$ *y* $\overrightarrow{RS}$ *sean representaciones del mismo vector.*

11. $P = (2, 5)$; $Q = (1, 6)$; $R = (-3, 2)$

12. $P = (-2, 0)$; $Q = (-3, -4)$; $R = (4, 2)$

13. $P = (0, 3)$; $Q = (5, -2)$; $R = (7, 0)$

14. $P = (-1, 4)$; $Q = (2, -3)$; $R = (-5, -2)$

En los ejercicios 15 y 16, calcule la suma del par de vectores e ilústrela geométricamente.

15. **(a)** $\langle 2, 4\rangle, \langle -3, 5\rangle$ **(b)** $\langle -3, 0\rangle, \langle 4, -5\rangle$

16. **(a)** $\langle 0, 3\rangle, \langle -2, 3\rangle$ **(b)** $\langle 2, 3\rangle, \langle -\sqrt{2}, -1\rangle$

En los ejercicios 17 y 18, reste el segundo vector del primero e ilustre la diferencia geométricamente.

17. **(a)** $\langle -3, -4\rangle, \langle 6, 0\rangle$ **(b)** $\langle 1, e\rangle, \langle -3, 2e\rangle$

18. **(a)** $\langle 0, 5\rangle, \langle 2, 8\rangle$ **(b)** $\langle 3, 7\rangle, \langle 3, 7\rangle$

En los ejercicios 19 y 20, determine el vector o el escalar si $\mathbf{A} = \langle 2, 4\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 4, -3\rangle$ y $\mathbf{C} = \langle -3, 2\rangle$.

19. **(a)** $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ **(b)** $\|\mathbf{C} - \mathbf{B}\|$ **(c)** $\|7\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$

20. **(a)** $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ **(b)** $\|\mathbf{C}\|$ **(c)** $\|2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}\|$

En los ejercicios 21 a 24, obtenga el vector o el escalar si $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

21. **(a)** $5\mathbf{A}$ **(b)** $-6\mathbf{B}$ **(c)** $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ **(d)** $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|$

22. **(a)** $-2\mathbf{A}$ **(b)** $3\mathbf{B}$ **(c)** $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ **(d)** $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$

23. **(a)** $\|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$ **(b)** $5\mathbf{A} - 6\mathbf{B}$
(c) $\|5\mathbf{A} - 6\mathbf{B}\|$ **(d)** $\|5\mathbf{A}\| - \|6\mathbf{B}\|$

24. **(a)** $\|\mathbf{A}\| - \|\mathbf{B}\|$ **(b)** $3\mathbf{B} - 2\mathbf{A}$
(c) $\|3\mathbf{B} - 2\mathbf{A}\|$ **(d)** $\|3\mathbf{B}\| - \|2\mathbf{A}\|$

En los ejercicios 25 y 26, $\mathbf{A} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ *y* $\mathbf{C} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

25. Obtenga: **(a)** $5\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 2\mathbf{C}$; **(b)** $\|5\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 2\mathbf{C}\|$.

26. Determine: **(a)** $3\mathbf{B} - 2\mathbf{A} - \mathbf{C}$; **(b)** $\|3\mathbf{B} - 2\mathbf{A} - \mathbf{C}\|$.

En los ejercicios 27 y 28, $\mathbf{A} = 8\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ *y* $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

27. Determine un vector unitario que tenga la misma dirección que $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

28. Obtenga un vector unitario que tenga la misma dirección que $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.

En los ejercicios 29 a 32, exprese el vector dado en la forma $r(\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j})$, *donde r es el módulo y θ es el ángulo director. También obtenga un vector unitario que tenga la misma dirección.*

29. **(a)** $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ **(b)** $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

30. **(a)** $8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ **(b)** $2\sqrt{5}\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

31. **(a)** $-4\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\mathbf{j}$ **(b)** $-16\mathbf{i}$

32. **(a)** $3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **(b)** $2\mathbf{j}$

33. Si $\mathbf{A} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{C} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, determine los escalares h y k tales que $\mathbf{C} = h\mathbf{A} + k\mathbf{B}$.

34. Si $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{C} = -6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$, determine los escalares h y k tales que $\mathbf{B} = h\mathbf{C} - k\mathbf{A}$.

35. Si $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{C} = 7\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$, demuestre que $\mathbf{C}$ no puede expresarse en la forma $h\mathbf{A} + k\mathbf{B}$, donde h y k son escalares.

36. Dos fuerzas de 340 lb y 475 lb forman entre sí un ángulo de 34.6° y se aplican a un objeto en el mismo punto. Calcule **(a)** el módulo o intensidad de la fuerza resultante, y **(b)** el ángulo que forma la resultante con la fuerza de 475 lb con aproximación de décimos de grado.

37. Dos fuerzas de 60 lb y 80 lb forman entre sí un ángulo de 30° y se aplican a un objeto en el mismo punto. Obtenga **(a)** el módulo o intensidad de la fuerza resultante, y **(b)** el ángulo que forma la resultante con la fuerza de 60 lb con aproximación de grados.

38. Una fuerza de 22 lb y otra de 34 lb se aplican a un objeto en el mismo punto y forman un ángulo θ entre sí. Si la fuerza resultante es de 46 lb, determine θ con aproximación de grados.

39. Una fuerza de 112 lb y otra de 84 lb se aplican a un objeto en el mismo punto, y la fuerza resultante es de 162 lb. Determine el ángulo formado por la resultante y la fuerza de 112 lb con aproximación de décimos de grado.

40. Un avión tiene una velocidad al aire de 350 mi/h. Para que el curso real del avión sea el norte, su enfilamiento debe ser 340°. Si el viento sopla del oeste, **(a)** ¿cuál es la rapidez del viento? **(b)** ¿Cuál es la velocidad a tierra del avión?

41. En un avión que tiene una velocidad al aire de 250 mi/h, el piloto desea volar hacia el norte. Si el viento sopla hacia el este a 60 mi/h, **(a)** ¿cuál debe ser el enfilamiento del avión? **(b)** ¿Cuál sería la velocidad a tierra si el avión volase en este curso?

42. Una lancha puede desplazarse a 15 nudos con respecto al agua. En un río, cuya corriente es de 3 nudos hacia el oeste, la lancha tiene un enfilamiento hacia el sur. ¿Cuál es la velocidad de la lancha con respecto a tierra y cuál es su curso?

43. Un nadador con una velocidad de nado de 1.5 mi/h con respecto al agua, parte de la ribera sur de un río y se dirige al norte directamente a través del río. Si la corriente del río fluye hacia el este a 0.8 mi/h, **(a)** ¿en qué dirección va el nadador? **(b)** ¿Cuál es la velocidad del nadador con respecto a tierra? **(c)** Si la distancia a través del río es de 1 milla, ¿qué tan lejos, río abajo, el nadador alcanza la otra orilla?

44. Suponga que el nadador del ejercicio 43 desea llegar al punto ubicado directamente al norte a través del río. **(a)** ¿En qué dirección debe dirigirse el nadador? **(b)** ¿Cuál será la velocidad respecto a tierra del nadador si elige esta dirección?

45. Demuestre que si $\mathbf{A}$ es cualquier vector y c es cualquier escalar, entonces $0(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ y $c(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

46. Demuestre el teorema 10.1.8(ii).

47. Demuestre el teorema 10.1.8(iii) y (viii).

48. Demuestre el teorema 10.1.8(iv).

49. Demuestre el teorema 10.1.8(v).

50. Demuestre el teorema 10.1.8(vii).

51. Sean $\mathbf{A} = \langle 2, -5\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 3, 1\rangle$ y $\mathbf{C} = \langle -4, 2\rangle$.
(a) Calcule $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ e ilustre geométricamente.
(b) Calcule $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ e ilustre geométricamente.

52. Se dice que dos vectores son *independientes* si y sólo si sus representaciones de posición no son colineales. Además, se dice que dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ forman una *base* para el espacio vectorial V_2 si y sólo si cualquier vector de V_2 puede expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$. Se puede demostrar un teorema que establece que dos vectores forman una base para el espacio vectorial V_2 si son independientes. Muestre que este teorema se cumple para los dos vectores $\langle 2, 5\rangle$ y $\langle 3, -1\rangle$ haciendo lo siguiente: **(a)** verifique que los vectores son independientes mostrando que sus representaciones de posición no son colineales; y **(b)** verifique que los vectores forman una base al mostrar que cualquier vector $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ puede expresarse como $c(2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) + d(3\mathbf{i} - \mathbf{j})$, donde c y d son escalares. *Sugerencia:* exprese c y d en términos de a_1 y a_2.

53. Consulte las dos primeras oraciones del ejercicio 52. Se puede demostrar un teorema que afirma que dos vectores forman una base para el espacio vectorial V_2 sólo si son independientes. Muestre que este teorema se cumple para los vectores $\langle 3, -2\rangle$ y $\langle -6, 4\rangle$ efectuando lo siguiente: **(a)** verifique que los vectores son *dependientes* (es decir, no son independientes) probando que sus representaciones de posición son colineales; **(b)** verifique que los vectores no forman una base tomando un vector particular y demostrando que no puede expresarse en la forma $c(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) + d(-6\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$, donde c y d son escalares (es decir, no generan el espacio vectorial).

54. Un conjunto de vectores $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \ldots, \mathbf{V}_n$ se dice que es *linealmente dependiente* si y sólo si existen escalares $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$, no todos cero, tales que

$$k_1\mathbf{V}_1 + k_2\mathbf{V}_2 + k_3\mathbf{V}_3 + \ldots + k_n\mathbf{V}_n = \mathbf{0}$$

Demuestre que si $\mathbf{V}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{V}_3 = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, entonces $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ y $\mathbf{V}_3$ son linealmente dependientes.

55. Sean $\overrightarrow{PQ}$ una representación del vector **A**, $\overrightarrow{QR}$ una representación del vector **B**, y $\overrightarrow{RS}$ una representación del vector **C**. Demuestre que si $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{RS}$ son los lados de un triángulo, entonces $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{0}$.

56. Demuestre analíticamente la desigualdad del triángulo para vectores:

$$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$$

57. Explique la diferencia entre magnitud vectorial y magnitud escalar.

10.2 VECTORES EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

Hasta ahora se han tratado el espacio numérico unidimensional R, la recta numérica, y el espacio bidimensional R^2, el plano numérico. Se identificaron los números reales de R con los puntos de un eje horizontal y los pares de números reales de R^2 con los puntos de un plano geométrico. Ahora, antes de extender el concepto de vector a tres dimensiones, se discutirá el *espacio numérico tridimensional.*

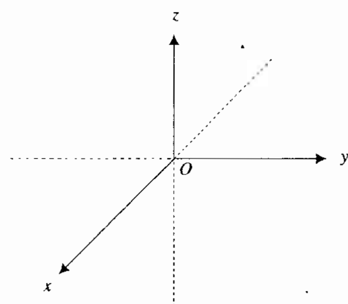
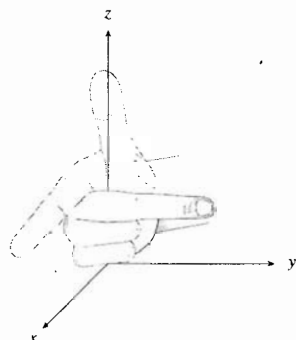


FIGURA 1

10.2.1 Definición de espacio numérico tridimensional

El conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales recibe el nombre de **espacio numérico tridimensional,** y se denota por R^3. Cada terna ordenada (x, y, z) se denomina **punto** del espacio numérico tridimensional.



Sistema coordenado derecho

FIGURA 2

Con el fin de representar R^3 en un espacio geométrico tridimensional, se consideran las distancias dirigidas de un punto a tres planos mutuamente perpendiculares. Los tres planos se forman al tomar tres rectas perpendiculares entre sí, las cuales se intersectan en un punto llamado **origen** y denotado por O. Estas rectas, denominadas *ejes de coordenadas*, se designan como el eje x, eje y y eje z. Por lo común los ejes x y y se consideran en un plano horizontal, y el eje z vertical. El sentido positivo, elegido en cada eje como se muestra en la figura 1, proporciona un **sistema coordenado derecho.** Este nombre se deriva del hecho de que si se coloca la mano derecha de modo que el dedo índice apunte en la dirección positiva del eje x, y el dedo medio apunte hacia el sentido positivo del eje y, entonces el pulgar apuntará en la dirección positiva del eje z. Observe la figura 2. Los tres ejes determinan tres *planos coordenados*: el plano xy que contiene a los ejes x y y, el plano xz que contiene a los ejes x y z, y el plano yz que contiene a los ejes y y z, como se muestra en la figura 3.

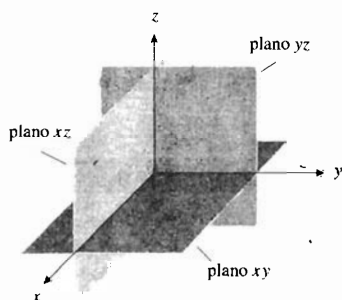


FIGURA 3

Una terna ordenada (x, y, z) se asocia con cada punto P del espacio geométrico tridimensional. La distancia dirigida de P al plano yz es la **coordenada x,** su distancia dirigida al plano xz es la **coordenada y,** y la **coordenada z** es la distancia dirigida de P al plano xy. Estas tres coordenadas se denominan **coordenadas cartesianas rectangulares** de P, y existe una correspondencia uno a uno, denominada **sistema coordenado cartesiano rectangular,** entre las ternas ordenadas de números reales y los puntos del espacio geométrico tridimensional. En consecuencia, se identifica R^3 con el espacio geométrico tridimensional. En la figura 4 se muestran los puntos $(2, 3, 4)$ y $(4, -2, -5)$. Los tres planos coordenados dividen al espacio en

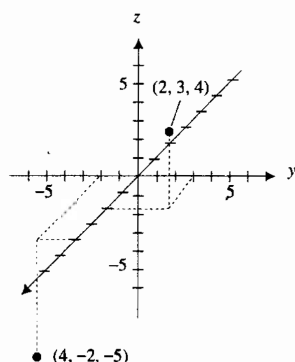
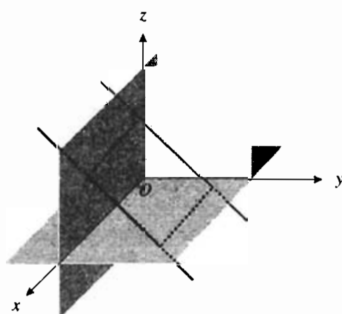


FIGURA 4

ocho partes denominadas **octantes.** El primer octante es aquel en el que las tres coordenadas son positivas.

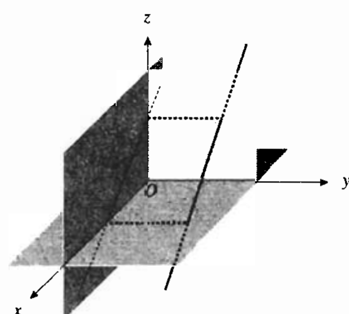
Una recta es paralela a un plano si y sólo si la distancia desde cualquier punto de la recta al plano es constante.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Una recta paralela al plano *yz*, otra paralela al plano *xz*, y otra más paralela al plano *xy*, se muestran en las figuras 5, 6 y 7, respectivamente. ◀



Recta paralela al plano *yz*

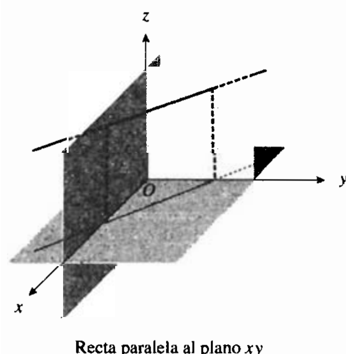
FIGURA 5



Recta paralela al plano *xz*

FIGURA 6

El teorema siguiente se deduce inmediatamente de la discusión anterior.



Recta paralela al plano *xy*

FIGURA 7

10.2.2 Teorema

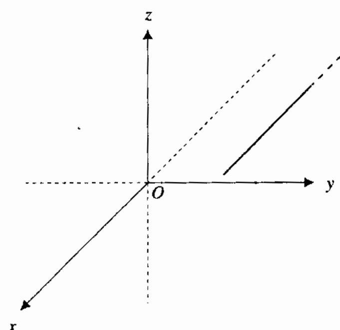
(i) Una recta es paralela al plano *yz* si y sólo si todos los puntos de la recta tienen la misma coordenada *x*.
(ii) Una recta es paralela al plano *xz* si y sólo si todos los puntos de la recta tienen la misma coordenada *y*.
(iii) Una recta es paralela al plano *xy* si y sólo si todos los puntos de la recta tienen la misma coordenada *z*.

Como caso especial, se consideran todas las rectas que están en un plano dado como paralelas al plano. En este caso, la distancia de cualquier punto de una de estas rectas al plano es cero.

En el espacio tridimensional, si una recta es paralela a cada uno de dos planos que se intersectan, entonces la recta es paralela a la recta de intersección de los dos planos. También, si una recta dada es paralela a una segunda recta, entonces la recta dada es paralela a cualquier plano que contenga a la segunda recta. El teorema siguiente se infiere de estos dos hechos geométricos y del teorema 10.2.2.

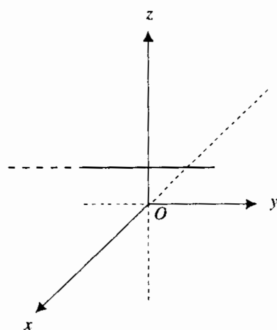
10.2.3 Teorema

(i) Una recta es paralela al eje *x* si y sólo si todos los puntos de la recta tienen la misma coordenada *y* y la misma coordenada *z*.
(ii) Una recta es paralela al eje *y* si y sólo si todos los puntos de la recta tienen la misma coordenada *x* y la misma coordenada *z*.



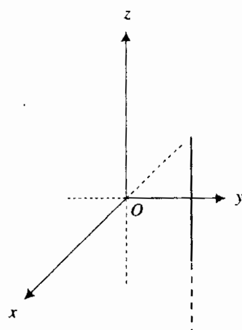
Recta paralela al eje x

FIGURA 8



Recta paralela al eje y

FIGURA 9



Recta paralela al eje z

FIGURA 10

(iii) Una recta es paralela al eje z si y sólo si todos los puntos de la recta tienen la misma coordenada x y la misma coordenada y.

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Una recta paralela al eje x, otra paralela al eje y, y otra más paralela al eje z, se presentan en las figuras 8, 9, y 10, respectivamente. ◀

Las fórmulas para determinar la distancia de un punto a otro de una recta paralela a uno de los ejes coordenados se obtienen a partir de la definición de distancia dirigida dada en la sección A.2 del apéndice, y se establecen en el teorema siguiente.

10.2.4 Teorema

(i) Si $A(x_1, y, z)$ y $B(x_2, y, z)$ son dos puntos de una recta paralela al eje x, entonces la distancia dirigida de A a B, denotada por $\overline{AB}$, está dada por

$$\overline{AB} = x_2 - x_1$$

(ii) Si $C(x, y_1, z)$ y $D(x, y_2, z)$ son dos puntos de una recta paralela al eje y, entonces la distancia dirigida de C a D, denotada por $\overline{CD}$, está dada por

$$\overline{CD} = y_2 - y_1$$

(iii) Si $E(x, y, z_1)$ y $F(x, y, z_2)$ son dos puntos de una recta paralela al eje z, entonces la distancia dirigida de E a F, denotada por $\overline{EF}$, está dada por

$$\overline{EF} = z_2 - z_1$$

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** La distancia dirigida $\overline{PQ}$ del punto $P(2, -5, -4)$ al punto $Q(2, -3, -4)$ está dada por el teorema 10.2.4(ii):

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (-3) - (-5)\\ &= 2\end{aligned}$$ ◀

El teorema siguiente proporciona una fórmula para determinar la distancia no dirigida entre dos puntos cualesquiera del espacio tridimensional.

10.2.5 Teorema

La distancia no dirigida entre los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ está dada por

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Demostración Se construye un paralelepípedo rectangular que tiene a P_1 y P_2 como vértices opuestos y caras paralelas a los planos coordenados (consulte la figura 11).

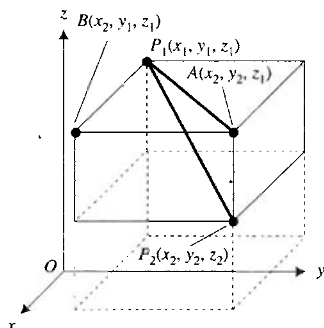


FIGURA 11

Por el teorema de Pitágoras,

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{P_1A}|^2 + |\overline{AP_2}|^2 \tag{1}$$

Como

$$|\overline{P_1A}|^2 = |\overline{P_1B}|^2 + |\overline{BA}|^2$$

se obtiene, al sustituir de esta ecuación en (1),

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{P_1B}|^2 + |\overline{BA}|^2 + |\overline{AP_2}|^2$$

Si se aplica el teorema 10.2.4(i), (ii) y (iii), a los lados rectos se obtiene

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$
$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

■

▶ **EJEMPLO 1** Calcule la distancia no dirigida entre los puntos $P(-3, 4, -1)$ y $Q(2, 5, -4)$.

Solución Del teorema 10.2.5,

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(2 + 3)^2 + (5 - 4)^2 + (-4 + 1)^2}$$
$$= \sqrt{35}$$

◀

La fórmula de la distancia entre dos puntos de R^3 es una extensión de la fórmula para la distancia entre dos puntos de R^2. Cabe hacer notar que la distancia dirigida entre dos puntos x_1 y x_2 de R está dada por

$$|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$$

Las fórmulas para determinar las coordenadas del punto medio de un segmento de recta se deducen al considerar los triángulos congruentes que se forman, y proceder de manera análoga al caso de dos dimensiones. Estas fórmulas se establecen en el teorema siguiente y la demostración se deja como un ejercicio (refiérase al ejercicio 18).

10.2.6 Teorema

Las coordenadas del punto medio del segmento de recta cuyos extremos son $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ están dadas por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad \bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

10.2.7 Definición de la gráfica de una ecuación en R^3

La **gráfica de una ecuación en R^3** es el conjunto de puntos (x, y, z) cuyas coordenadas son números que satisfacen la ecuación.

Una **superficie** es la gráfica de una ecuación en R^3. La *esfera* es un ejemplo de una superficie.

10.2.8 Definición de esfera

Una **esfera** es el conjunto de todos los puntos del espacio tridimensional que equidistan de un punto fijo. El punto fijo se denomina **centro** de la esfera y la medida de la distancia constante se llama **radio.**

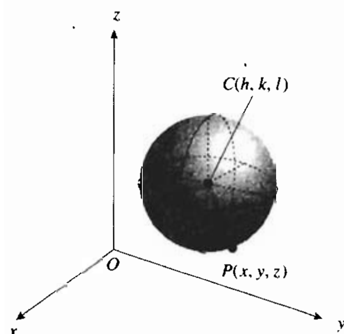


FIGURA 12

10.2.9 Teorema

Una ecuación de la esfera de radio r y centro en (h, k, l) es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2 \quad \textbf{(2)}$$

Demostración Denote punto (h, k, l) por C (vea la figura 12). El punto $P(x, y, z)$ es un punto de la esfera si y sólo si $|\overline{CP}| = r$; es decir,

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2} = r$$

Al elevar al cuadrado los dos miembros de esta ecuación se obtiene el resultado requerido. ■

Si el centro de la esfera está en el origen, entonces $h = 0$, $k = 0$ y $l = 0$; por lo que una ecuación de esta esfera es

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Si se desarrollan los cuadrados de (2) y se reagrupan los términos se tiene

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2hx - 2ky - 2lz + (h^2 + k^2 + l^2 - r^2) = 0$$

Esta ecuación es de la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad \textbf{(3)}$$

donde G, H, I y J son constantes. La ecuación (3) se denomina **forma general** de la ecuación de la esfera, mientras que (2) recibe el nombre de **forma centro-radio.** Como toda esfera tiene un centro y un radio, su ecuación puede expresarse en la forma centro-radio, y por tanto, en la forma general.

Cualquier ecuación de la forma (3) puede presentarse en la forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = K \quad \textbf{(4)}$$

donde

$$h = -\tfrac{1}{2}G \quad k = -\tfrac{1}{2}H \quad l = -\tfrac{1}{2}I \qquad K = \tfrac{1}{4}(G^2 + H^2 + I^2 - 4J)$$

Se le pedirá que demuestre esto en el ejercicio 19.

Si $K > 0$, entonces (4) tiene la forma de la ecuación (2); de modo que la gráfica de la ecuación es una esfera que tiene su centro en (h, k, l) y radio $\sqrt{K}$. Si $K = 0$, la gráfica de la ecuación es el punto (h, k, l). Si $K < 0$, entonces la gráfica es el conjunto vacío debido a que la suma de los cuadrados de tres números reales es no negativa (es decir, es mayor que o igual a cero). Este resultado se establece en el teorema siguiente.

10.2.10 Teorema

La gráfica de cualquier ecuación de segundo grado en x, y y z, de la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

es una esfera, un punto o el conjunto vacío.

EJEMPLO 2 Determine la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 2z = 2$$

Solución Si se reagrupan los términos y se completan los cuadrados se tiene

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 2z + 1 = 2 + 9 + 4 + 1$$
$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 16$$

La gráfica es una esfera que tiene su centro en $(3, 2, -1)$ y radio 4. ◀

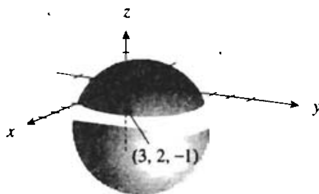


FIGURA 13

La figura 13 muestra la esfera del ejemplo 2.

EJEMPLO 3 Obtenga una ecuación de la esfera que tiene los puntos $A(-5, 6, -2)$ y $B(9, -4, 0)$ como los extremos de uno de sus diámetros.

Solución El centro de la esfera es el punto medio del segmento de recta AB. Sea este punto $C(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Por el teorema 10.2.6 se tiene

$$\bar{x} = \frac{9 - 5}{2} = 2 \qquad \bar{y} = \frac{-4 + 6}{2} = 1 \qquad \bar{z} = \frac{0 - 2}{2} = -1$$

De modo que C es el punto $(2, 1, -1)$. El radio de la esfera es $|\overline{CB}|$. En consecuencia,

$$r = \sqrt{(9 - 2)^2 + (-4 - 1)^2 + (0 + 1)^2}$$
$$= \sqrt{75}$$

Por tanto, del teorema 10.2.9, una ecuación de la esfera es

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 75$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 69 = 0$$ ◀

En la sección 10.1 se definió un vector en el plano como un par ordenado de números reales. Ahora se extenderá esta definición a un vector en el espacio tridimensional.

10.2.11 Definición de vector en el espacio tridimensional

Un **vector en el espacio tridimensional** es una terna ordenada de números reales $\langle x, y, z\rangle$. Los números x, y y z se denominan **componentes** del vector $\langle x, y, z\rangle$.

Se dice que los vectores $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\langle b_1, b_2, b_3\rangle$ son **iguales** si y sólo si $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ y $a_3 = b_3$.

El conjunto de todas las ternas ordenadas $\langle x, y, z\rangle$, donde x, y y z son números reales, se denota por V_3. Del mismo modo que para los vectores de V_2, un vector de V_3 puede representarse mediante un segmento dirigido. Si $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, entonces el segmento dirigido que tiene su punto inicial en el origen y su punto terminal en el punto (a_1, a_2, a_3) recibe el nombre de

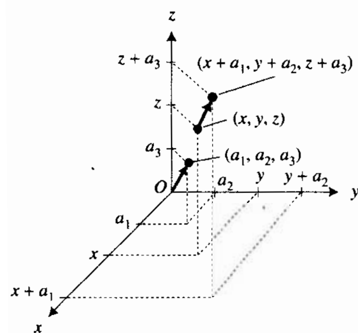


FIGURA 14

representación de posición de **A**. Un segmento dirigido que tiene su punto inicial en (x, y, z) y su punto terminal en el punto $(x + a_1, y + a_2, z + a_3)$ es también una representación del vector **A**. Consulte la figura 14.

El **vector cero** es el vector $\langle 0, 0, 0\rangle$ y se denota por **0**. Cualquier punto es una representación del vector cero.

El **módulo** de un vector es la longitud de alguna de sus representaciones. Si el vector $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, el módulo de **A** se denota por $\|\mathbf{A}\|$, y

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

La **dirección** de un vector diferente del vector cero de V_3 está determinada por tres ángulos llamados *ángulos directores* del vector.

10.2.12 Definición de ángulos directores de un vector

Los **ángulos directores** de un vector diferente del vector cero son los tres ángulos que tienen la menor medida en radianes no negativa α, β y γ medidos a partir de los ejes x, y y z, respectivamente, hasta la representación de posición del vector.

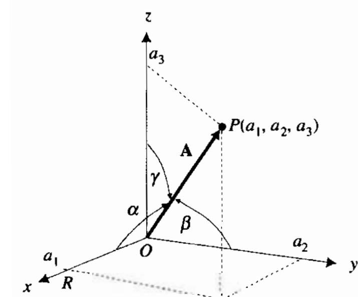


FIGURA 15

La medida en radianes de cada ángulo director de un vector es mayor que o igual a 0 y menor que o igual a π. Los ángulos directores del vector $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, cuyas medidas en radianes son α, β y γ, se muestran en la figura 15. En esta figura, las componentes de **A** son números positivos, y los ángulos directores de este vector tiene medidas en radianes positivas menores que $\frac{1}{2}\pi$. En la figura se observa que el triángulo *POR* es un triángulo rectángulo y

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|}$$

Puede demostrarse que la misma fórmula se cumple si $\frac{1}{2}\pi \leq \alpha \leq \pi$. De igual manera pueden deducirse fórmulas para $\cos \beta$ y $\cos \gamma$, obteniéndose

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|} \qquad \cos \beta = \frac{a_2}{\|\mathbf{A}\|} \qquad \cos \gamma = \frac{a_3}{\|\mathbf{A}\|} \tag{5}$$

Los tres números $\cos \alpha$, $\cos \beta$ y $\cos \gamma$ se denominan **cosenos directores** del vector **A**. El vector cero no tiene ángulos directores, y, en consecuencia, tampoco cosenos directores.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** Se determinarán el módulo y los cosenos directores del vector $\mathbf{A} = \langle 3, 2, -6\rangle$.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\| &= \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-6)^2} \\ &= 7\end{aligned}$$

De las fórmulas (5),

$$\cos \alpha = \tfrac{3}{7} \qquad \cos \beta = \tfrac{2}{7} \qquad \cos \gamma = -\tfrac{6}{7}$$ ◀

Si el módulo de un vector y sus cosenos directores se conocen, entonces el vector está determinado de manera única debido a que de (5)

$$a_1 = \|\mathbf{A}\| \cos \alpha \qquad a_2 = \|\mathbf{A}\| \cos \beta \qquad a_3 = \|\mathbf{A}\| \cos \gamma \tag{6}$$

Los tres cosenos directores de un vector no son independientes entre sí, como lo muestra el siguiente teorema.

10.2.13 Teorema

Si $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ son los cosenos directores de un vector, entonces

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Demostración Si $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, entonces los cosenos directores de **A** están dados por (5), de modo que

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= \frac{a_1^2}{\|\mathbf{A}\|^2} + \frac{a_2^2}{\|\mathbf{A}\|^2} + \frac{a_3^2}{\|\mathbf{A}\|^2}\\ &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{\|\mathbf{A}\|^2}\\ &= \frac{\|\mathbf{A}\|^2}{\|\mathbf{A}\|^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

■

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** Se verificará el teorema 10.2.13 para el vector del ejemplo ilustrativo 4

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= (\tfrac{3}{7})^2 + (\tfrac{2}{7})^2 + (-\tfrac{6}{7})^2\\ &= \tfrac{9}{49} + \tfrac{4}{49} + \tfrac{36}{49}\\ &= 1\end{aligned}$$

◀

El vector $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ es un vector unitario si $\|\mathbf{A}\| = 1$, y de las ecuaciones (5), las componentes de un vector unitario son sus cosenos directores.

Las operaciones de adición, sustracción y multiplicación por un escalar en V_3 se definen de manera similar a las definiciones correspondientes para vectores de V_2.

Si $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ y c es un escalar, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\rangle & -\mathbf{A} &= \langle -a_1, -a_2, -a_3\rangle\\ \mathbf{A} - \mathbf{B} &= \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) & c\mathbf{A} &= c\langle a_1, a_2, a_3\rangle\\ &= \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3\rangle & &= \langle ca_1, ca_2, ca_3\rangle\end{aligned}$$

▶ ***EJEMPLO 4*** Dados $\mathbf{A} = \langle 5, -2, 6\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 8, -5, -4\rangle$, calcule $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, $3\mathbf{A}$ y $-5\mathbf{B}$.

Solución

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= \langle 5 + 8, -2 + (-5), 6 + (-4)\rangle\\ &= \langle 13, -7, 2\rangle\\ \mathbf{A} - \mathbf{B} &= \langle 5 - 8, -2 - (-5), 6 - (-4)\rangle\\ &= \langle -3, 3, 10\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3\mathbf{A} &= 3\langle 5, -2, 6\rangle & -5\mathbf{B} &= -5\langle 8, -5, -4\rangle\\ &= \langle 15, -6, 18\rangle & &= \langle -40, 25, 20\rangle\end{aligned}$$

◀

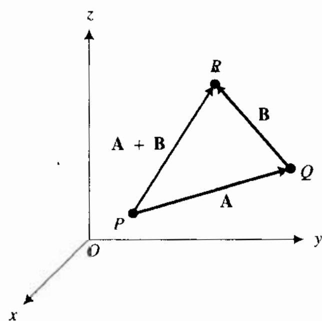


FIGURA 16

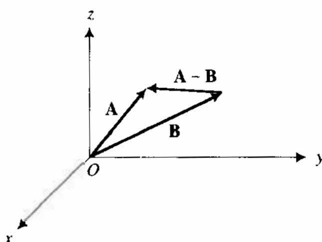


FIGURA 17

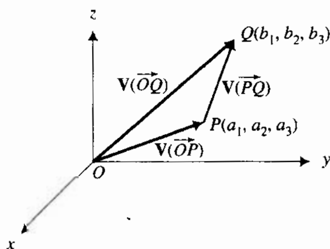


FIGURA 18

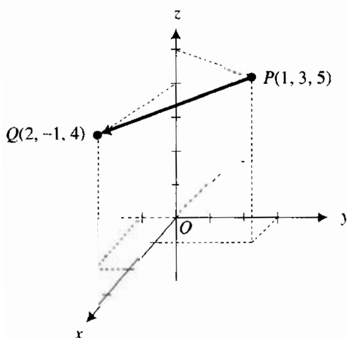


FIGURA 19

La interpretación geométrica de la suma de dos vectores de V_3 es semejante a aquélla para vectores de V_2. Refiérase a la figura 16. Si P es el punto (x, y, z), $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\overrightarrow{PQ}$ es una representación de $\mathbf{A}$, entonces Q es el punto $(x + a_1, y + a_2, z + a_3)$. Sean $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ y $\overrightarrow{QR}$ una representación de $\mathbf{B}$, entonces $(x + (a_1 + b_1), y + (a_2 + b_2), z + (a_3 + b_3))$ es el punto R. Por tanto, $\overrightarrow{PR}$ es una representación del vector $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, y se cumple la ley del paralelogramo.

La diferencia de dos vectores de V_3 también se interpreta geométricamente de manera semejante como se hace en V_2. Consulte la figura 17. Se puede obtener una representación del vector $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ al elegir las representaciones de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de modo que tengan el mismo punto inicial. Entonces, una representación del vector $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ es el segmento dirigido del punto terminal de la representación de $\mathbf{B}$ al punto terminal de la representación de $\mathbf{A}$.

La figura 18 muestra los puntos $P(a_1, a_2, a_3)$ y $Q(b_1, b_2, b_3)$, y los segmentos dirigidos $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$. Observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) &= \mathbf{V}(\overrightarrow{OQ}) - \mathbf{V}(\overrightarrow{OP}) \\ &= \langle b_1, b_2, b_3 \rangle - \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \langle b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3 \rangle$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 La figura 19 muestra el segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$, donde P es el punto $(1, 3, 5)$ y Q es el punto $(2, -1, 4)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) &= \langle 2 - 1, -1 - 3, 4 - 5 \rangle \\ &= \langle 1, -4, -1 \rangle \end{aligned}$$

◀

Suponga que $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ es diferente del vector cero y que tiene los cosenos directores $\cos \alpha$, $\cos \beta$ y $\cos \gamma$ y que c es cualquier escalar. Entonces $c\mathbf{A} = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle$; y si $\cos \alpha_1$, $\cos \beta_1$ y $\cos \gamma_1$ son los cosenos directores de $c\mathbf{A}$, entonces, de las ecuaciones (5), se tiene

$$\cos \alpha_1 = \frac{ca_1}{\|c\mathbf{A}\|} \qquad \cos \beta_1 = \frac{ca_2}{\|c\mathbf{A}\|} \qquad \cos \gamma_1 = \frac{ca_3}{\|c\mathbf{A}\|}$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{c}{|c|} \frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|} \qquad \cos \beta_1 = \frac{c}{|c|} \frac{a_2}{\|\mathbf{A}\|} \qquad \cos \gamma_1 = \frac{c}{|c|} \frac{a_3}{\|\mathbf{A}\|}$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{c}{|c|} \cos \alpha \qquad \cos \beta_1 = \frac{c}{|c|} \cos \beta \qquad \cos \gamma_1 = \frac{c}{|c|} \cos \gamma \tag{7}$$

De modo que si $c > 0$, entonces, de las ecuaciones (7), los cosenos directores de $c\mathbf{A}$ son los mismos que los cosenos directores de $\mathbf{A}$. Si $c < 0$, los cosenos directores de $c\mathbf{A}$ son los negativos de los cosenos directores de $\mathbf{A}$. Por tanto, si c es un escalar diferente de cero, entonces el vector $c\mathbf{A}$ es un vector cuyo módulo es $|c|$ veces el módulo de $\mathbf{A}$. Si $c > 0$, $c\mathbf{A}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{A}$. Si $c < 0$, el sentido de $c\mathbf{A}$ es el opuesto al de $\mathbf{A}$.

Las operaciones de adición vectorial y multiplicación por un escalar de cualesquiera vectores de V_3 satisfacen las propiedades enunciadas en el teorema 10.1.8; se le pedirá que las demuestre en los ejercicios 47 y 48.

A partir de este hecho y de la definición 10.1.9, V_3 es un espacio vectorial real. Los tres vectores unitarios

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle \qquad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$$

forman una base para el espacio vectorial V_3 debido a que cualquier vector $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ puede expresarse en términos de ellos como sigue:

$$\langle a_1, a_2, a_3\rangle = a_1\langle 1, 0, 0\rangle + a_2\langle 0, 1, 0\rangle + a_3\langle 0, 0, 1\rangle$$

En consecuencia, si $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, también se puede escribir

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \tag{8}$$

Ahora bien, como hay tres elementos en una base, V_3 es un espacio vectorial tridimensional.

Si se sustituye de (6) en (8) se tiene

$$\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\|\cos\alpha\mathbf{i} + \|\mathbf{A}\|\cos\beta\mathbf{j} + \|\mathbf{A}\|\cos\gamma\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\|(\cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}) \tag{9}$$

Esta ecuación permite expresar cualquier vector diferente de cero en términos de su módulo y de sus cosenos directores.

EJEMPLO 5 Exprese el vector del ejemplo ilustrativo 4 en términos de su módulo y de sus cosenos directores.

Solución En el ejemplo ilustrativo 4, $\mathbf{A} = \langle 3, 2, -6\rangle$ y se obtuvo $\|\mathbf{A}\| = 7$, $\cos\alpha = \frac{3}{7}$, $\cos\beta = \frac{2}{7}$ y $\cos\gamma = -\frac{6}{7}$. En consecuencia, de (9),

$$\mathbf{A} = 7\left(\tfrac{3}{7}\mathbf{i} + \tfrac{2}{7}\mathbf{j} - \tfrac{6}{7}\mathbf{k}\right)$$

10.2.14 Teorema

Si $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ es diferente del vector cero, entonces el vector unitario $\mathbf{U}$ que tiene la misma dirección que $\mathbf{A}$ está determinado por

$$\mathbf{U} = \frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|}\mathbf{i} + \frac{a_2}{\|\mathbf{A}\|}\mathbf{j} + \frac{a_3}{\|\mathbf{A}\|}\mathbf{k}$$

La demostración de este teorema es análoga a la demostración del teorema 10.1.10 para un vector de V_2 y se deja como ejercicio (consulte el ejercicio 55).

EJEMPLO 6 Dados los puntos $R(2, -1, 3)$ y $S(3, 4, 6)$, obtenga el vector unitario que tiene la misma dirección que $\mathbf{V}(\overrightarrow{RS})$.

Solución

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{RS}) = \langle 3 - 2, 4 - (-1), 6 - 3\rangle \qquad \|\mathbf{V}(\overrightarrow{RS})\| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 3^2}$$
$$= \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \qquad = \sqrt{35}$$

Por tanto, por el teorema 10.2.14, el vector unitario pedido es

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{35}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{35}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{35}}\mathbf{k}$$ ◀

Las operaciones con vectores, tales como la adición y la multiplicación por un escalar, así como la determinación del módulo de un vector y de un vector unitario que tenga la misma dirección que un vector dado, pueden efectuarse en algunas computadoras y calculadoras. Refiérase al manual de usuarios correspondiente a fin de conocer el método para realizar ciertas operaciones vectoriales.

EJERCICIOS 10.2

*En los ejercicios 1 a 5, los puntos A y B son vértices opuestos de un paralelepípedo que tiene sus caras paralelas a los planos coordenados. En cada ejercicio, **(a)** dibuje la figura, **(b)** obtenga las coordenadas de los otros seis vértices, **(c)** calcule la longitud de la diagonal AB.*

1. $A(0, 0, 0)$; $B(7, 2, 3)$

2. $A(1, 1, 1)$; $B(3, 4, 2)$

3. $A(-1, 1, 2)$; $B(2, 3, 5)$

4. $A(2, -1, -3)$; $B(4, 0 -1)$

5. $A(1, -1, 0)$; $B(3, 3, 5)$

6. El vértice opuesto al rincón de una sala está a 18 pie al este, 15 pie al sur y 12 pie por arriba del primer rincón. **(a)** Dibuje la figura; **(b)** determine la longitud de la diagonal que une dos vértices opuestos; **(c)** obtenga las coordenadas de los ocho vértices de la sala.

En los ejercicios 7 a 11, determine (a) la distancia no dirigida entre los puntos A y B, y (b) el punto medio del segmento de recta que une a A con B.

7. $A(3, 4, 2)$; $B(1, 6, 3)$

8. $A(4, -3, 2)$; $B(-2, 3, -5)$

9. $A(2, -4, 1)$; $B(\frac{1}{2}, 2, 3)$

10. $A(-2, -\frac{1}{2}, 5)$; $B(5, 1, -4)$

11. $A(-5, 2, 1)$; $B(3, 7, -2)$

12. Demuestre que los tres puntos $(1, -1, 3)$, $(2, 1, 7)$ y $(4, 2, 6)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, y calcule su área.

13. Se dibuja una recta que pasa por el punto $(6, 4, 2)$ y que es perpendicular al plano yz. Obtenga las coordenadas de los puntos de la recta que están a una distancia de 10 unidades del punto $(0, 4, 0)$.

14. Resuelva el ejercicio 13 si la recta se dibuja perpendicular al plano xy.

15. Demuestre que los tres puntos $(-3, 2, 4)$, $(6, 1, 2)$ y $(-12, 3, 6)$ son colineales empleando la fórmula de la distancia.

16. Determine los vértices del triángulo cuyos lados tienen los puntos medios en $(3, 2, 3)$, $(-1, 1, 5)$ y $(0, 3, 4)$.

17. Para el triángulo que tiene vértices $A(2, -5, 3)$, $B(-1, 7, 0)$ y $C(-4, 9, 7)$ calcule **(a)** la longitud de cada lado, y **(b)** los puntos medios de cada lado.

18. Demuestre el teorema 10.2.6.

19. Demuestre que cualquier ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

puede expresarse en la forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = K$$

En los ejercicios 20 a 25, determine la gráfica de la ecuación.

20. $x^2 + y^2 + z^2 - 8y + 6z - 25 = 0$

21. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 4 = 0$

22. $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - 3z + 2 = 0$

23. $x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 9 = 0$

24. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 4z + 13 = 0$

25. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 19 = 0$

En los ejercicios 26 a 28, obtenga una ecuación de la esfera que satisface las condiciones indicadas.

26. Uno de sus diámetros es el segmento de recta que tiene extremos en $(6, 2, -5)$ y $(-4, 0, 7)$.

27. Es concéntrica con la esfera que tiene la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 8z - 9 = 0$, y tiene radio 3.

28. Contiene los puntos $(0, 0, 4)$, $(2, 1, 3)$ y $(0, 2, 6)$ y su centro se encuentra en el plano yz.

En los ejercicios 29 a 34, $\mathbf{A} = \langle 1, 2, 3\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 4, -3, -1\rangle$, $\mathbf{C} = \langle -5, -3, 5\rangle$ y $\mathbf{D} = \langle -2, 1, 6\rangle$.

29. Calcule **(a)** $\mathbf{A} + 5\mathbf{B}$; **(b)** $7\mathbf{C} - 5\mathbf{D}$; **(c)** $\|7\mathbf{C}\| - \|5\mathbf{D}\|$; **(d)** $\|7\mathbf{C}\| - \|5\mathbf{D}\|$.

30. Calcule **(a)** $2\mathbf{A} - \mathbf{C}$; **(b)** $\|2\mathbf{A}\| - \|\mathbf{C}\|$; **(c)** $4\mathbf{B} + 6\mathbf{C} - 2\mathbf{D}$; **(d)** $\|4\mathbf{B}\| + \|6\mathbf{C}\| - \|2\mathbf{D}\|$.

31. Calcule **(a)** $\mathbf{C} + 3\mathbf{D} - 8\mathbf{A}$; **(b)** $\|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|(\mathbf{C} - \mathbf{D})$.

32. Calcule **(a)** $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{C} - 12\mathbf{D}$; **(b)** $\|\mathbf{A}\|\mathbf{C} - \|\mathbf{B}\|\mathbf{D}$.

33. Determine los escalares a y b tales que

$$a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + b(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{0}$$

34. Determine los escalares a, b y c tales que

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = \mathbf{D}$$

En los ejercicios 35 a 38, determine los cosenos directores del vector $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_2})$ y verifique las respuestas al mostrar que la suma de sus cuadrados es 1.

35. $P_1(3, -1, -4)$; $P_2(7, 2, 4)$

36. $P_1(-2, 6, 5)$; $P_2(2, 4, 1)$

37. $P_1(4, -3, -1)$; $P_2(-2, -4, -8)$

38. $P_1(1, 3, 5)$; $P_2(2, -1, 4)$

39. Utilice los puntos P_1 y P_2 del ejercicio 35 y obtenga el punto Q tal que $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_2}) = 3\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1Q})$.

40. Utilice los puntos P_1 y P_2 del ejercicio 38 y obtenga el punto R tal que $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1R}) = -2\mathbf{V}(\overrightarrow{P_2R})$.

41. Dados $P_1(3, 2, -4)$ y $P_2(-5, 4, 2)$, determine el punto P_3 tal que $4\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_2}) = -3\mathbf{V}(\overrightarrow{P_2P_3})$.

42. Dados $P_1(7, 0, -2)$ y $P_2(2, -3, 5)$, determine el punto P_3 tal que $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_3}) = 5\mathbf{V}(\overrightarrow{P_2P_3})$.

En los ejercicios 43 y 44, exprese el vector en términos de su módulo y de sus cosenos directores.

43. (**a**) $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ (**b**) $-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

44. (**a**) $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (**b**) $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

En los ejercicios 45 y 46, obtenga el vector unitario que tiene la misma dirección de $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_2})$.

45. (**a**) $P_1(4, -1, -6)$ y $P_2(5, 7, -2)$

(**b**) $(P_1(-2, 5, 3)$ y $P_2(-4, 7, 5)$

46. (**a**) $P_1(3, 0, -1)$ y $P_2(-3, 8, -1)$

(**b**) $P_1(-8, -5, 2)$ y $P_2(-3, -9, 4)$

En los ejercicios 47 y 48, demuestre la propiedad si **A**, **B** *y* **C** *son tres vectores cualesquiera de V_3 y c es cualquier escalar.*

47. (**a**) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (*ley conmutativa*)

(**b**) Existe un vector $\mathbf{0}$ en V_3 para el cual $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ (existencia del *idéntico aditivo*).

(**c**) Existe un vector $-\mathbf{A}$ en V_3 tal que $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ (existencia del *negativo*).

(**d**) $c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$ (*ley distributiva*).

48. (**a**) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (*ley asociativa*).

(**b**) $(cd)\mathbf{A} = c(d\mathbf{A})$ (*ley asociativa*).

(**c**) $(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$ (*ley distributiva*).

(**d**) $1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$

49. Demuestre mediante geometría analítica que las cuatro diagonales que unen los vértices opuestos de un paralelepípedo se bisectan mutuamente.

50. Si P, Q, R y S son cuatro puntos del espacio tridimensional y A, B, C y D son los puntos medios de PQ, QR, RS y SP, respectivamente, demuestre mediante geometría analítica que $ABCD$ es un paralelogramo.

51. Demuestre mediante geometría analítica que las cuatro diagonales de un paralelepípedo rectangular tienen la misma longitud.

52. Se dice que tres vectores en V_3 son *independientes* si y sólo si sus representaciones de posición no están en un plano; también se dice que tres vectores, $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ y $\mathbf{E}_3$, forman una base para el espacio vectorial V_3 si y sólo si cualquier vector de V_3 puede expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ y $\mathbf{E}_3$. Se puede demostrar un teorema que establece que tres vectores forman una base para el espacio vectorial V_3 si son independientes. Muestre que este teorema se cumple para los tres vectores $\langle 1, 0, 0\rangle$, $\langle 1, 1, 0\rangle$ y $\langle 1, 1, 1\rangle$ haciendo lo siguiente: (**a**) verifique que los vectores son independientes demostrando que sus representaciones de posición no son coplanares; (**b**) verifique que los vectores forman una base probando que cualquier vector **A** puede expresarse como

$$\mathbf{A} = r\langle 1, 0, 0\rangle + s\langle 1, 1, 0\rangle + t\langle 1, 1, 1\rangle \qquad \textbf{(10)}$$

donde r, s y t son escalares. (**c**) Si $\mathbf{A} = \langle 6, -2, 5\rangle$, determine los valores particulares de r, s y t tales que se cumple (10).

53. Consulte el ejercicio 52. (**a**) Verifique que los vectores $\langle 2, 0, 1\rangle$, $\langle 0, -1, 0\rangle$ y $\langle 1, -1, 0\rangle$ forman una base para V_3 al demostrar que cualquier vector **A** puede expresarse como

$$\mathbf{A} = r\langle 2, 0, 1\rangle + s\langle 0, -1, 0\rangle + t\langle 1, -1, 0\rangle \qquad \textbf{(11)}$$

donde r, s y t son escalares. (**b**) Si $\mathbf{A} = \langle -2, 3, 5\rangle$, determine los valores particulares de r, s y t tales que se cumple (11).

54. Refiérase al primer enunciado del ejercicio 52. Se puede demostrar un teorema que afirma que tres vectores de V_3 forman una base para el espacio V_3 sólo si son independientes. Muestre que este teorema es válido para los tres vectores $\mathbf{F}_1 = \langle 1, 0, 1\rangle$, $\mathbf{F}_2 = \langle 1, 1, 1\rangle$ y $\mathbf{F}_3 = \langle 2, 1, 2\rangle$, realizando lo siguiente: (**a**) Verifique que $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ no son independientes al demostrar que sus representaciones de posición son coplanares; (**b**) verifique que los vectores no forman una base probando que no todo vector de V_3 puede expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ (es decir, no generan el espacio vectorial).

55. Demuestre el teorema 10.2.14.

56. Si las medidas en radianes de los ángulos directores de un vector son iguales, ¿cuál es la medida de cada uno? Explique cómo llegó a la respuesta.

10.3 PRODUCTO PUNTO

Hasta este momento se han definido las siguientes operaciones con vectores: adición, sustracción y multiplicación de un vector por un escalar. El resultado de cada una de estas operaciones es un vector. A continuación se definirá la operación en la que se multiplicarán dos vectores, denominada *producto punto*, la cual tiene como resultado un escalar y no un vector.

10.3.1 Definición de producto punto

El **producto punto** de dos vectores **A** y **B**, denotado por $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, se define como sigue:

(i) Si $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$ son dos vectores de V_2, entonces

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

(ii) Si $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ son dos vectores de V_3, entonces

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

En ocasiones el producto punto recibe el nombre de **producto interior** o **producto escalar,** no debe confundirse con la multiplicación escalar (multiplicación por un escalar) la cual es el producto de un escalar y un vector.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Si $\mathbf{A} = \langle 2, -3 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle -\frac{1}{2}, 4 \rangle$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \langle 2, -3 \rangle \cdot \langle -\tfrac{1}{2}, 4 \rangle \\ &= (2)(-\tfrac{1}{2}) + (-3)(4) \\ &= -13 \end{aligned}$$

◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Si $\mathbf{A} = \langle 4, 2, -6 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle -5, 3, -2 \rangle$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \langle 4, 2, -6 \rangle \cdot \langle -5, 3, -2 \rangle \\ &= 4(-5) + 2(3) + (-6)(-2) \\ &= -2 \end{aligned}$$

◀

Los productos puntos que contienen los vectores unitarios **i**, **j** y **k** son útiles y pueden verificarse fácilmente (consulte los ejercicios 5 y 6):

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 \qquad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 \qquad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 \qquad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0 \qquad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

El teorema siguiente afirma que el producto punto es conmutativo y que se distribuye con respecto a la adición vectorial.

10.3.2 Teorema

Si **A**, **B** y **C** son tres vectores cualesquiera de V_2 o V_3, entonces

(i) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ (ley conmutativa)

(ii) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ (ley distributiva)

Las demostraciones se dejan como ejercicios (refiérase a los ejercicios 7 y 8).

Como $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ es un escalar, la expresión $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ carece de significado. En consecuencia, no se considera la asociatividad del producto punto.

En el teorema siguiente se presentan otras leyes del producto punto.

10.3.3 Teorema

Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos vectores cualesquiera de V_2 o V_3, y c es cualquier escalar, entonces

(i) $c(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (c\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$
(ii) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = 0$
(iii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \|\mathbf{A}\|^2$

Las demostraciones se dejan como ejercicios (consulte los ejercicios 9 y 10).

Ahora se considerará el significado de *ángulo entre dos vectores*, el cual conduce a otra expresión para el producto punto de vectores.

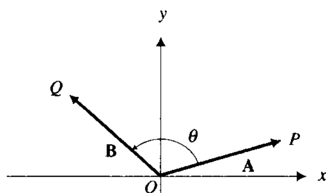


FIGURA 1

10.3.4 Definición del ángulo entre dos vectores

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos vectores diferentes del vector cero.

(i) Si $\mathbf{A}$ no es un múltiplo escalar de $\mathbf{B}$ y si $\overrightarrow{OP}$ es la representación de posición de $\mathbf{A}$ y $\overrightarrow{OQ}$ es la representación de posición de $\mathbf{B}$, entonces el **ángulo entre los vectores** $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es el ángulo de medida positiva entre $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ e interior al triángulo determinado por O, P y Q.

(ii) Si $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$, donde c es un escalar, entonces si $c > 0$, el ángulo entre los vectores mide 0 radianes; y si $c < 0$, entonces el ángulo entre los vectores mide π radianes.

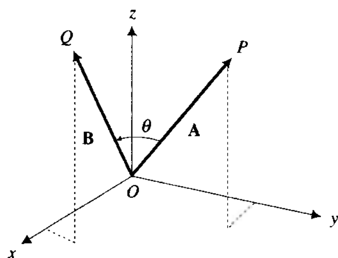


FIGURA 2

El símbolo empleado para denotar el ángulo entre dos vectores también se utiliza para representar la medida del ángulo. De la definición, si θ es la medida en radianes del ángulo entre dos vectores, entonces $0 \leq \theta \leq \pi$. La figura 1 muestra el ángulo θ entre los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ (donde $\mathbf{A}$ no es un múltiplo escalar de $\mathbf{B}$) de V_2, y la figura 2 muestra el ángulo cuando los vectores pertenecen a V_3.

10.3.5 Teorema

Si θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, diferentes del vector cero, entonces

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\| \cos \theta$$

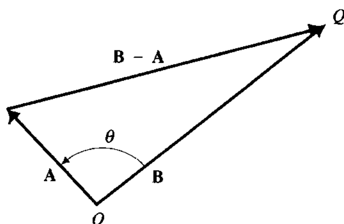


FIGURA 3

Demostración La figura 3 muestra la representación de posición $\overrightarrow{OP}$ de $\mathbf{A}$, la representación de posición $\overrightarrow{OQ}$ de $\mathbf{B}$, la representación $\overrightarrow{PQ}$ de $\mathbf{B} - \mathbf{A}$, y el ángulo θ en el origen, dentro del triángulo POQ. De la ley de los cosenos, se tiene

$$\cos \theta = \frac{\|\mathbf{A}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2 - \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\|^2}{2\|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\|} \tag{1}$$

Al aplicar las propiedades del producto punto, de los teoremas 10.3.2 y 10.3.3, resulta

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\|^2 &= (\mathbf{B} - \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{A}) \\ &= (\mathbf{B} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\mathbf{B} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} \\ &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \\ &= \|\mathbf{B}\|^2 - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \|\mathbf{A}\|^2 \end{aligned} \qquad (2)$$

Si se sustituye de (2) en (1), se obtiene

$$\cos \theta = \frac{\|\mathbf{A}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2 - (\|\mathbf{B}\|^2 - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \|\mathbf{A}\|^2)}{2\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|}$$

$$\cos \theta = \frac{2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{2\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\| \cos \theta$$ ■

El teorema 10.3.5 afirma que el producto punto de dos vectores es el producto de los módulos de los vectores y el coseno del ángulo entre ellos.

▶ **EJEMPLO 1** Dados los vectores

$$\mathbf{A} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

determine $\cos \theta$ si θ es el ángulo entre **A** y **B**.

Solución Primero se calcula $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\|\mathbf{A}\|$ y $\|\mathbf{B}\|$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \langle 6, -3, 2\rangle \cdot \langle 2, 1, -3\rangle \\ &= 12 - 3 - 6 \\ &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \|\mathbf{A}\| &= \sqrt{36 + 9 + 4} \\ &= \sqrt{49} \\ &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \|\mathbf{B}\| &= \sqrt{4 + 1 + 9} \\ &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

Del teorema 10.3.5,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|} \\ &= \frac{3}{7\sqrt{14}} \end{aligned}$$ ◀

En la sección 10.1 se dijo que si dos vectores diferentes del vector cero son múltiplos escalares uno del otro, entonces tienen la misma dirección o direcciones opuestas. Este hecho conduce a la siguiente definición.

10.3.6 Definición de vectores paralelos

Se dice que dos vectores son **paralelos** si y sólo si uno de los vectores es múltiplo escalar del otro.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Los vectores $\langle 3, -4, 8\rangle$ y $\langle \frac{3}{4}, -1, 2\rangle$ son paralelos debido a que $\langle 3, -4, 8\rangle = 4\langle \frac{3}{4}, -1, 2\rangle$. ◀

Si **A** es cualquier vector, entonces $\mathbf{0} = 0\mathbf{A}$; de modo que, de la definición 10.3.6, el vector cero es paralelo a cualquier vector.

Se le pedirá como ejercicio que demuestre el hecho de que dos vectores diferentes del vector cero son paralelos si y sólo si la medida en radianes del ángulo entre ellos es 0 o π (consulte el ejercicio 49).

Si **A** y **B** son dos vectores diferentes del vector cero, entonces, por el teorema 10.3.5,

$$\cos\theta = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$$

Como $0 \leq \theta \leq \pi$, se infiere de esta proposición que

$$\theta = \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$$

En consecuencia se tiene la definición siguiente.

10.3.7 Definición de vectores ortogonales

Se dice que dos vectores **A** y **B** son **ortogonales** (o **perpendiculares**) si y sólo si $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Los vectores $\langle -4, 5, 0\rangle$ y $\langle 10, 8, 3\rangle$ son ortogonales ya que

$$\begin{aligned}\langle -4, 5, 0\rangle \cdot \langle 10, 8, 3\rangle &= (-4)(10) + (5)(8) + (0)(3)\\ &= 0\end{aligned}$$ ◀

Si **A** es cualquier vector, $\mathbf{0}\cdot\mathbf{A} = 0$, y por tanto, el vector cero es ortogonal a cualquier vector.

▶ EJEMPLO 2

Dados $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + k\mathbf{j}$, donde k es un escalar, determine **(a)** k tal que **A** y **B** sean ortogonales; **(b)** k tal que **A** y **B** sean paralelos.

Solución

(a) Por la definición 10.3.7, **A** y **B** son ortogonales si y sólo si $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$; es decir,

$$\begin{aligned}(3)(2) + 2(k) &= 0\\ k &= -3\end{aligned}$$

(b) De la definición 10.3.6, **A** y **B** son paralelos si y sólo si existe algún escalar c tal que $\langle 3, 2\rangle = c\langle 2, k\rangle$; esto es,

$$3 = 2c \quad \text{y} \quad 2 = ck$$

Al resolver estas dos ecuaciones simultáneamente se obtiene $k = \frac{4}{3}$. ◀

▶ EJEMPLO 3

Demuestre, empleando vectores, que los puntos $A(4, 9, 1)$, $B(-2, 6, 3)$ y $C(6, 3, -2)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

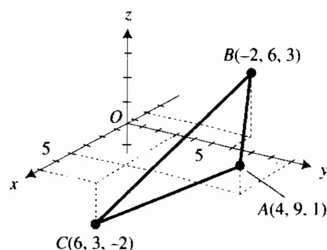


FIGURA 4

Solución El triángulo CAB se muestra en la figura 4. De la figura se observa que el ángulo en A puede ser un ángulo recto. Se obtienen $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$ y

$\mathbf{V}(\overrightarrow{AC})$ y si el producto punto de estos dos vectores es cero, entonces el ángulo en A es un ángulo recto.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) &= \langle -2 - 4, 6 - 9, 3 - 1\rangle & \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) &= \langle 6 - 4, 3 - 9, -2 - 1\rangle \\ &= \langle -6, -3, 2\rangle & &= \langle 2, -6, -3\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) &= \langle -6, -3, 2\rangle \cdot \langle 2, -6, -3\rangle \\ &= -12 + 18 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

<u>**Conclusión:**</u> $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$ y $\mathbf{V}(\overrightarrow{AC})$ son ortogonales; de modo que el ángulo en A es un ángulo recto, y por tanto, el triángulo CAB es un triángulo rectángulo. ◀

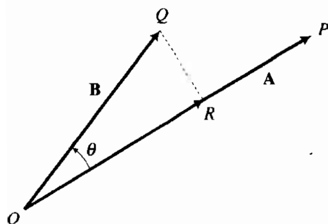
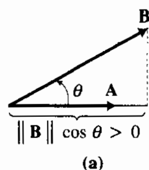


FIGURA 5

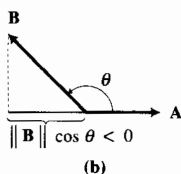
Una interpretación geométrica del producto punto se obtiene a partir de la *proyección escalar* de un vector sobre otro. Observe la figura 5, donde $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ son las representaciones de posición de los vectores **A** y **B**, respectivamente. El punto R es el pie de la perpendicular de Q a la recta que contiene a $\overrightarrow{OP}$. La proyección escalar de **B** sobre **A** es el módulo del vector que tiene a $\overrightarrow{OR}$ como su representación de posición.

10.3.8 Definición de la proyección escalar de un vector sobre otro

Si **A** y **B** son dos vectores diferentes del vector cero, entonces la **proyección escalar** de **B** sobre **A** se define como $\|\mathbf{B}\| \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre **A** y **B**.



(a)



(b)

FIGURA 6

Observe que la proyección escalar puede ser positiva o negativa, dependiendo del signo de $\cos\theta$.

Del teorema 10.3.5,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \|\mathbf{A}\|(\|\mathbf{B}\| \cos\theta) \tag{3}$$

De modo que el producto punto de **A** y **B** es el módulo de **A** multiplicado por la proyección escalar de **B** sobre **A**. Consulte las figuras 6(a) y (b). Como el producto punto es conmutativo, **A** · **B** también es igual al módulo de **B** multiplicado por la proyección escalar de **A** sobre **B**.

Si $\mathbf{B} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{B} = b_1 \qquad \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} = b_2 \qquad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = b_3$$

En consecuencia, del producto punto de **B** y uno de los vectores unitarios **i**, **j** o **k**, se obtiene la componente de **B** en la dirección de ese vector unitario. Con el fin de generalizar este resultado, sea **U** cualquier vector unitario, entonces de (3), si θ es el ángulo entre **U** y **B**,

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} &= \|\mathbf{U}\| \, \|\mathbf{B}\| \cos\theta \\ &= \|\mathbf{B}\| \cos\theta \end{aligned}$$

Por tanto, **U** · **B** es la proyección escalar de **B** sobre **U**, a la cual se le llama *componente* del vector **B** en la dirección de **U**. De manera más general, la **componente** de un vector **B** en la dirección de un vector **A** es la proyección escalar de **B** sobre un vector unitario en la dirección de **A**.

El teorema siguiente puede emplearse para calcular la proyección escalar de un vector sobre otro.

10.3.9 Teorema

La proyección escalar del vector **B** sobre el vector **A** es

$$\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|}$$

Demostración De la definición 10.3.8, la proyección escalar de **B** sobre **A** es $\|\mathbf{B}\| \cos \theta$, donde θ es el ángulo entre **A** y **B**. Del teorema 10.3.5,

$$\|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\| \cos \theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

$$\|\mathbf{B}\| \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|}$$ ■

Consulte otra vez la figura 5. Si **C** es el vector que tiene a $\overrightarrow{OR}$ como su representación de posición, entonces **C** se denomina **vector proyección** de **B** sobre **A**. Para determinar **C**, se multiplica $\|\mathbf{B}\| \cos \theta$ por el vector unitario que tiene la misma dirección de **A**. Así,

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= (\|\mathbf{B}\| \cos \theta) \frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|} \\ &= \frac{\|\mathbf{A}\| \, (\|\mathbf{B}\| \cos \theta)}{\|\mathbf{A}\|^2} \mathbf{A} \\ &= \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|^2} \right) \mathbf{A} \qquad \text{(del teorema 10.3.5)} \end{aligned}$$

Este resultado se establece en el siguiente teorema.

10.3.10 Teorema

El vector proyección del vector **B** sobre el vector **A** es

$$\left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|^2} \right) \mathbf{A}$$

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** En el ejemplo 1, para los vectores

$$\mathbf{A} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

se calculó $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 3$ y $\|\mathbf{A}\| = 7$.

La componente de **B** en la dirección de **A** es la proyección escalar de **B** sobre **A**, la cual, del teorema 10.3.9, es

$$\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|} = \frac{3}{7}$$

Del teorema 10.3.10, el vector proyección de **B** sobre **A** es

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|^2} \right) \mathbf{A} &= \frac{3}{49}(6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \\ &= \frac{18}{49}\mathbf{i} - \frac{9}{49}\mathbf{j} + \frac{6}{49}\mathbf{k} \end{aligned}$$ ◀

EJEMPLO 4 Sean los vectores

$$\mathbf{A} = -5\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

Determine: (**a**) la proyección escalar de **B** sobre **A**; (**b**) el vector proyección de **B** sobre **A**. (**c**) Muestre en una figura las representaciones de posición de **A**, **B** y el vector proyección de **B** sobre **A**.

Solución Primero se calcula $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ y $\|\mathbf{A}\|$.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \langle -5, 1\rangle \cdot \langle 4, 2\rangle = -20 + 2 = -18 \qquad \|\mathbf{A}\| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

(**a**) Del teorema 10.3.9, la proyección escalar de **B** sobre **A** es

$$\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|} = -\frac{18}{\sqrt{26}}$$

(**b**) Del teorema 10.3.10, el vector proyección de **B** sobre **A** es

$$\left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|^2}\right)\mathbf{A} = -\tfrac{18}{26}(-5\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -\tfrac{9}{13}(-5\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \tfrac{45}{13}\mathbf{i} - \tfrac{9}{13}\mathbf{j}$$

(**c**) La figura 7 muestra las representaciones de posición de **A**, **B** y **C**, donde **C** es el vector proyección de **B** sobre **A**. ◀

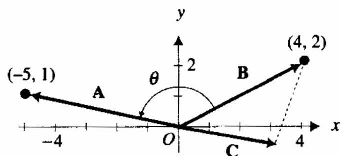


FIGURA 7

EJEMPLO 5 Calcule la distancia del punto $P(4, 1, 6)$ a la recta que pasa por los puntos $A(8, 3, 2)$ y $B(2, -3, 5)$.

Solución La figura 8 muestra el punto P y la recta que pasa por A y B. El punto M es el pie de la perpendicular a la recta que pasa por A y B trazada desde P. Sean d unidades la distancia $|\overline{PM}|$. Así, por el teorema de Pitágoras,

$$d = \sqrt{|\overline{AP}|^2 - |\overline{AM}|^2} \tag{4}$$

A fin de aplicar (4) se necesita calcular $|\overline{AP}|$, la cual es el módulo de $\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})$ y $|\overline{AM}|$, que es la proyección escalar de $\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})$ sobre $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$. Primero se determinan $\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})$ y $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$.

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{AP}) = \langle 4 - 8, 1 - 3, 6 - 2\rangle = \langle -4, -2, 4\rangle \qquad \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) = \langle 2 - 8, -3 - 3, 5 - 2\rangle = \langle -6, -6, 3\rangle$$

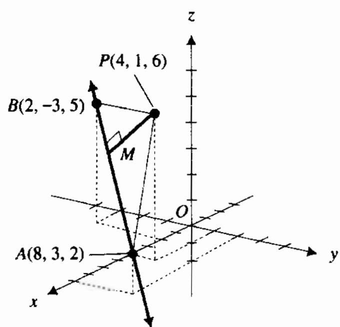


FIGURA 8

Se obtiene $|\overline{AP}|$ al calcular $\|\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})\|$, y se calcula $|\overline{AM}|$ mediante el teorema 10.3.9 con $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$ y $\mathbf{B} = \mathbf{V}(\overrightarrow{AP})$.

$$|\overline{AP}| = \|\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$|\overline{AM}| = \frac{\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AP})}{\|\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})\|} = \frac{\langle -6, -6, 3\rangle \cdot \langle -4, -2, 4\rangle}{\sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + 3^2}} = \frac{24 + 12 + 12}{\sqrt{81}} = \frac{48}{9}$$

Si se sustituyen estos valores de $|\overline{AP}|$ y $|\overline{AM}|$ en (4) resulta

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{6^2 - (\tfrac{48}{9})^2} \\ &= 6\sqrt{1 - \tfrac{64}{81}} \\ &= \tfrac{2}{3}\sqrt{17} \end{aligned}$$

◀

En la sección 6.4 se dijo que si una fuerza constante de F libras mueve un cuerpo una distancia de d pies a lo largo de una recta y la fuerza actúa en la dirección de movimiento, entonces si W es el número de libras-pie del trabajo realizado por la fuerza, $W = Fd$. Sin embargo, suponga que la fuerza constante no está dirigida a lo largo de la recta de movimiento. En este caso los físicos definen el **trabajo** realizado como *el producto de la componente de la fuerza a lo largo de la recta de movimiento, por el desplazamiento.* Si un objeto se mueve de un punto A a un punto B, se denomina **vector de desplazamiento,** el cual se denota por $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$, al vector que tiene a $\overrightarrow{AB}$ como una representación. De modo que si el módulo de un vector $\mathbf{F}$ de fuerza constante se expresa en libras y la distancia de A a B se expresa en pies, y θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{F}$ y $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$, entonces si W es el número de libras por pie del trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}$ que mueve un cuerpo de A a B,

$$\begin{aligned} W &= (\|\mathbf{F}\| \cos\theta)\, \|\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})\| \\ &= \|\mathbf{F}\|\, \|\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})\| \cos\theta \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \end{aligned}$$

▶ ***EJEMPLO 6*** Suponga que una fuerza $\mathbf{F}$ tiene una intensidad de 6 lb y la medida del ángulo que indica su dirección es $\frac{1}{6}\pi$ rad. Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al mover un objeto a lo largo de una recta desde el origen al punto $P(7, 1)$, donde la distancia se mide en pies.

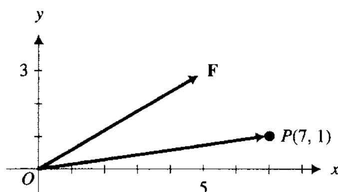


FIGURA 9

Solución La figura 9 muestra las representaciones de posición de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{V}(\overrightarrow{OP})$. Como $\mathbf{F} = \langle 6\cos\frac{1}{6}\pi, 6 \operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi\rangle$ y $\mathbf{V}(\overrightarrow{OP}) = \langle 7, 1\rangle$, entonces si W lb-pie es el trabajo realizado,

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{OP}) \\ &= \langle 6\cos\tfrac{1}{6}\pi, 6 \operatorname{sen} \tfrac{1}{6}\pi\rangle \cdot \langle 7, 1\rangle \\ &= \langle 3\sqrt{3}, 3\rangle \cdot \langle 7, 1\rangle \\ &= 21\sqrt{3} + 3 \\ &\approx 39.37 \end{aligned}$$

<u>**Conclusión:**</u> El trabajo realizado es aproximadamente 39.37 lb-pie. ◀

Los vectores tienen representaciones geométricas independientes del sistema coordenado utilizado. Debido a esto, el análisis vectorial puede emplearse para demostrar ciertos teoremas de geometría plana como se ilustra en el ejemplo siguiente.

▶ ***EJEMPLO 7*** Demuestre mediante análisis vectorial que las alturas de un triángulo coinciden en un punto.

Solución Sea ABC un triángulo que tiene alturas AP y BQ que intersectan en el punto S. Dibuje la recta que pasa por C y S, y que intersecta el

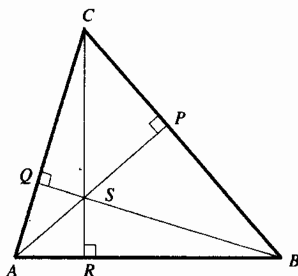


FIGURA 10

lado AB en el punto R. Se desea demostrar que RC es perpendicular a AB (vea la figura 10).

Sean $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{BS}$ y $\overrightarrow{CS}$ representaciones de vectores. Considere que el vector $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$ tiene al segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ como una representación. De manera semejante sean $\mathbf{V}(\overrightarrow{BC})$, $\mathbf{V}(\overrightarrow{AC})$, $\mathbf{V}(\overrightarrow{AS})$, $\mathbf{V}(\overrightarrow{BS})$ y $\mathbf{V}(\overrightarrow{CS})$ los vectores que tienen al segmento dirigido entre paréntesis como una representación.

Como AP es una altura del triángulo,

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{AS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{BC}) = 0 \tag{5}$$

También, como BQ es una altura del triángulo,

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{BS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) = 0 \tag{6}$$

Con el própósito de probar que RC es perpendicular a AB se demostrará que $\mathbf{V}(\overrightarrow{CS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) = 0$.

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\overrightarrow{CS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) &= \mathbf{V}(\overrightarrow{CS}) \cdot [\mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{CB})] \\ &= \mathbf{V}(\overrightarrow{CS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{CS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) \\ &= [\mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{BS})] \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) + [\mathbf{V}(\overrightarrow{CA}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{AS})] \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) \\ &= \mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{BS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{CA}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{AS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{CB})\end{aligned}$$

Al sustituir $\mathbf{V}(\overrightarrow{CA})$ por $-\mathbf{V}(\overrightarrow{AC})$ y al utilizar (5) y (6) se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\overrightarrow{CS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) &= \mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) + 0 + [-\mathbf{V}(\overrightarrow{AC})] \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

<u>**Conclusión:**</u> Las alturas AP, BQ y CR son concurrentes, es decir, coinciden en un punto. ◀

EJERCICIOS 10.3

En los ejercicios 1 a 4, calcule $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

1. **(a)** $\mathbf{A} = \langle -1, 2\rangle, \mathbf{B} = \langle -4, 3\rangle$
(b) $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{B} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

2. **(a)** $\mathbf{A} = \langle \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\rangle, \mathbf{B} = \langle \frac{5}{2}, \frac{4}{3}\rangle$
(b) $\mathbf{A} = -2\mathbf{i}, \mathbf{B} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$

3. **(a)** $\mathbf{A} = \langle \frac{2}{5}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{2}\rangle, \mathbf{B} = \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}\rangle$
(b) $\mathbf{A} = 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

4. **(a)** $\mathbf{A} = \langle 4, 0, 2,\rangle, \mathbf{B} = \langle 5, 2, -1\rangle$
(b) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}; \mathbf{B} = 6\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

5. Demuestre que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$, y $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$.

6. Demuestre que $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$, e $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$.

En los ejercicios 7 a 10, demuestre el teorema para vectores de V_3.

7. Teorema 10.3.2(i)
8. Teorema 10.3.2(ii)
9. Teorema 10.3.3(i)
10. Teorema 10.3.3(ii), (iii)

En los ejercicios 11 y 12, si θ *es el ángulo entre* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$, *calcule* $\cos\theta$.

11. **(a)** $\mathbf{A} = \langle 4, 3\rangle, \mathbf{B} = \langle 1, -1\rangle$
(b) $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 12\mathbf{j}, \mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

12. **(a)** $\mathbf{A} = \langle -2, -3\rangle, \mathbf{B} = \langle 3, 2\rangle$
(b) $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \mathbf{B} = -5\mathbf{j}$

13. Determine el valor de k tal que la medida en radianes del ángulo entre los vectores del ejemplo 2 sea $\frac{1}{4}\pi$.

14. Sean $\mathbf{A} = k\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{B} = k\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, donde k es un escalar. Obtenga el valor de k tal que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sean ortogonales.

15. Sean $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - k\mathbf{j}$ y $\mathbf{B} = k\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, donde k es un escalar. Obtenga el valor de k tal que **(a)** $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sean ortogonales, y **(b)** $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sean paralelos.

16. Determine el valor de k tal que los vectores del ejercicio 14 tengan direcciones opuestas.

17. Si $\mathbf{A} = -8\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{B} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, calcule **(a)** la proyección escalar de $\mathbf{A}$ sobre $\mathbf{B}$, y **(b)** el vector proyección de $\mathbf{A}$ sobre $\mathbf{B}$.

18. Para los vectores del ejercicio 17, **(a)** obtenga la proyección escalar de $\mathbf{B}$ sobre $\mathbf{A}$, y **(b)** el vector proyección de $\mathbf{B}$ sobre $\mathbf{A}$.

19. Determine la componente del vector $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ en la dirección del vector $\mathbf{B} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

20. Para los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ del ejercicio 19, calcule la componente de $\mathbf{B}$ en la dirección de $\mathbf{A}$.

En los ejercicios 21 a 26, **A** = ⟨−4, −2, 4⟩; **B** = ⟨2, 7, −1⟩; **C** = ⟨6, −3, 0⟩ *y* **D** = ⟨5, 4, −3⟩.

21. Obtenga (**a**) **A** · (**B** + **C**); (**b**) (**A** · **B**)(**C** · **D**); (**c**) **A** · **D** − **B** · **C**; (**d**) (**D** · **B**)**A** − (**D** · **A**)**B**.

22. Obtenga (**a**) **A** · **B** + **A** · **C**; (**b**) (**A** · **B**)(**B** · **C**); (**c**) (**A** · **B**)**C** + (**B** · **C**)**D**; (**d**) (2**A** + 3**B**) · (4**C** − **D**).

23. Calcule (**a**) cos θ si θ es el ángulo entre **A** y **C**; (**b**) la componente de **C** en la dirección de **A**; (**c**) el vector proyección de **C** sobre **A**.

24. Determine (**a**) cos θ si θ es el ángulo entre **B** y **D**; (**b**) la componente de **B** en la dirección de **D**; (**c**) el vector proyección de **B** sobre **D**.

25. Obtenga (**a**) la proyección escalar de **A** sobre **B**; (**b**) el vector proyección de **A** sobre **B**.

26. Calcule (**a**) la proyección escalar de **D** sobre **C**; (**b**) el vector proyección de **D** sobre **C**.

27. Calcule la distancia del punto (2, −1, −4) a la recta que pasa por los puntos (3, −2, 2) y (−9, −6, 6).

28. Determine la distancia del punto (3, 2, 1) a la recta que pasa por los puntos (1, 2, 9) y (−3, −6, −3).

29. Pruebe, empleando vectores, que los puntos (2, 2, 2), (2, 0, 1), (4, 1, −1) y (4, 3, 0) son los vértices de un rectángulo.

30. Demuestre, utilizando vectores que los puntos (2, 2, 2), (0, 1, 2), (−1, 3, 3) y (3, 0, 1) son los vértices de un paralelogramo.

31. Determine el área del triángulo cuyos vértices son (−2, 3, 1), (1, 2, 3) y (3, −1, 2).

32. Demuestre, empleando vectores, que los puntos (−2, 1, 6), (2, 4, 5) y (−1, −2, 1) son los vértices de un triángulo rectángulo, y determine el área del triángulo.

33. Determine dos vectores unitarios que tengan una representación cuyo punto inicial sea el punto (2, 4), y que sean tangentes a la parábola $y = x^2$ en ése punto.

34. Determine dos vectores unitarios que tengan una representación cuyo punto inicial sea el punto (2, 4), y que sean normales a la parábola $y = x^2$ en ese punto.

35. Si **A** = 3**i** + 5**j** − 3**k**, **B** = −**i** − 2**j** + 3**k** y **C** = 2**i** − **j** + 4**k**, obtenga la componente de **B** en la dirección **A** − 2**C**.

36. Calcule los cosenos de los ángulos del triángulo que tiene vértices en $A(0, 0, 0)$, $B(4, -1, 3)$ y $C(1, 2, 3)$.

37. Un vector **F** representa una fuerza que tiene una intensidad de 8 lb y su dirección está determinada por el ángulo cuya medida en radianes es $\frac{1}{3}\pi$. Determine el trabajo realizado por la fuerza al desplazar un objeto (**a**) a lo largo del eje x desde el origen hasta el punto (6, 0), y (**b**) a lo largo del eje y desde el origen hasta el punto (0, 6). La distancia se mide en pies.

38. Un vector **F** representa una fuerza que tiene una intensidad de 10 lb y su dirección está determinada por el ángulo cuya medida en radianes es $\frac{1}{4}\pi$. Calcule el trabajo realizado por la fuerza al desplazar un objeto desde el punto (0, −2) hasta el punto (0, 5). La distancia se mide en pies.

39. Un vector **F** representa una fuerza que tiene una intensidad de 9 lb y su dirección está determinada por el ángulo cuya medida en radianes es $\frac{2}{3}\pi$. Determine el trabajo realizado por la fuerza al desplazar un objeto desde el origen hasta el punto (−4, −2). La distancia se mide en pies.

40. Dos fuerzas representadas por los vectores $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ actúan sobre una partícula ocasionando que se desplace a lo largo de una recta desde el punto (2, 5) hasta el punto (7, 3). Si $\mathbf{F}_1 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{F}_2 = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, y si las intensidades de las fuerzas se miden en libras y la distancia en pies, calcule el trabajo realizado por las dos fuerzas al actuar juntas.

41. Si una fuerza tiene la representación vectorial **F** = 3**i** − 2**j** + **k**, calcule el trabajo realizado por la fuerza al desplazar un objeto a lo largo de una recta desde el punto $P_1(-2, 4, 3)$ hasta el punto $P_2(1, -3, 5)$. La intensidad de la fuerza se mide en libras y la distancia en pies.

42. Si una fuerza tiene la representación vectorial **F** = 5**i** − 3**k**, calcule el trabajo realizado por la fuerza al desplazar un objeto a lo largo de una recta desde el punto $P_1(4, 1, 3)$ hasta el punto $P_2(-5, 6, 2)$. La intensidad de la fuerza se mide en libras y la distancia en pies.

43. El vector **F** representa una fuerza que tiene una intensidad de 10 lb, y los cosenos directores de **F** son $\cos\alpha = \frac{1}{6}\sqrt{6}$ y $\cos\beta = \frac{1}{3}\sqrt{6}$. Si la fuerza desplaza un cuerpo a lo largo de una recta desde el origen hasta el punto (7, −4, 2), calcule el trabajo realizado. La distancia se mide en pies.

44. Si **A** y **B** son vectores diferentes del vector cero, demuestre que el vector **A** − c**B** es ortogonal a **B** si $c = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}/\|\mathbf{B}\|^2$.

45. Si **A** = 12**i** + 9**j** − 5**k** y **B** = 4**i** + 3**j** − 5**k**, emplee el resultado del ejercicio 44 para determinar el valor del escalar c de modo que el vector **B** − c**A** sea ortogonal a **A**.

46. Para los vectores del ejercicio 45, utilice el resultado del ejercicio 44 a fin de calcular el valor del escalar d de modo que el vector **A** − d**B** sea ortogonal a **B**.

47. Demuestre que si **A** y **B** son dos vectores cualesquiera, entonces los vectores $\|\mathbf{B}\|\mathbf{A} + \|\mathbf{A}\|\mathbf{B}$ y $\|\mathbf{B}\|\mathbf{A} - \|\mathbf{A}\|\mathbf{B}$ son ortogonales.

48. Demuestre que si **A** y **B** son dos vectores cualesquiera diferentes del vector cero y $\mathbf{C} = \|\mathbf{B}\|\mathbf{A} + \|\mathbf{A}\|\mathbf{B}$, entonces el ángulo entre **A** y **C** tiene la misma medida en radianes que el ángulo entre **B** y **C**.

49. Demuestre que dos vectores diferentes del vector cero son paralelos si y sólo si la medida en radianes del ángulo entre ellos es 0 o π.

50. Demuestre, mediante análisis vectorial, que las medianas de un triángulo son concurrentes, es decir coinciden en un punto.

51. Demuestre, mediante análisis vectorial, que el segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado.

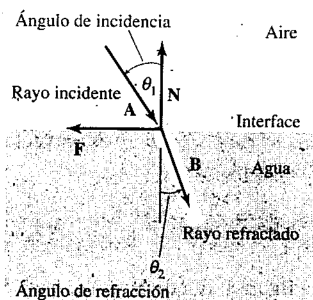
52. Demuestre, mediante análisis vectorial, que el segmento de recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a los lados paralelos del trapecio y su longitud es la mitad de la suma de las longitudes de los lados paralelos.

53. La **ley de refracción de Snell** trata sobre la luz que atraviesa de un medio, tal como el aire, a otro medio más denso, tal como el agua. La ley establece que la parte del rayo luminoso que pasa por el medio más denso será refractado ("desviado") hacia la normal. Observe la figura adjunta donde θ_1 es el ángulo de incidencia y θ_2 es el ángulo de refracción. De la ley de Snell,

$$\text{sen}\,\theta_1 = \mu\,\text{sen}\,\theta_2$$

donde μ es el índice de refracción del medio más denso. Demuestre que si **A** es un vector unitario a lo largo del rayo incidente, **B** es un vector unitario a lo largo del rayo refractado, **F** es un vector unitario en la interface y **N** es el vector normal unitario en la interface como se muestra en la figura, entonces

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{F} + \mu\mathbf{B}\cdot\mathbf{F} = 0$$



54. Demuestre la **desigualdad de Cauchy-Schwarz:** si **A** y **B** son dos vectores cualesquiera, entonces

$$|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|$$

donde la igualdad se cumple si y sólo si existe un escalar c tal que $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$, es decir, **A** y **B** son paralelos.

55. Demuestre el siguiente teorema: si **A** y **B** son dos vectores cualesquiera, entonces

$$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{A}\|^2 + 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \|\mathbf{B}\|^2$$

Sugerencia: utilice el teorema 10.3.3(iii).

56. Demuestre el **teorema de Pitágoras:**

$$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{A}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2$$

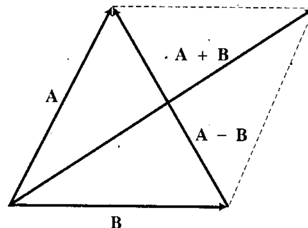
si y sólo si **A** y **B** son ortogonales. *Sugerencia:* utilice la identidad del ejercicio 55.

57. Demuestre la **ley del paralelogramo:** si **A** y **B** son dos vectores cualesquiera, entonces

$$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|^2 + \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|^2 = 2\|\mathbf{A}\|^2 + 2\|\mathbf{B}\|^2$$

¿Cuál es la interpretación geométrica de esta identidad?

Sugerencia: observe la figura adjunta que muestra el paralelogramo determinado por las representaciones de los vectores **A** y **B**.



58. Demuestre la **identidad de polarización:** si **A** y **B** son dos vectores cualesquiera, entonces

$$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|^2 - \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|^2 = 4\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$$

¿Cuál es la interpretación geométrica de esta identidad? *Sugerencia:* consulte la figura del ejercicio 57.

59. En la teoría electromagnética, en ocasiones es necesario realizar lo siguiente: si **E** y **H** son dos vectores dados, escriba **E** como la suma de dos vectores $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ tales que $\mathbf{E}_1$ sea paralelo a **H** y $\mathbf{E}_2$ sea ortogonal a **H**. Defina $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ en esta situación.

60. La notación vectorial junto con el producto punto pueden emplearse para almacenar datos. Por ejemplo, suponga que una compañía de inversiones vende acciones de los tipos X, Y y Z. Sean a_1, a_2 y a_3 las componentes del vector **A**, respectivamente, las cantidades de acciones X, Y y Z vendidas un día específico. Sean s_1, s_2 y s_3 las componentes del vector **S**, respectivamente, las cantidades de dólares de los precios de venta de las acciones X, Y y Z en ese día. Entonces, si R dólares es el ingreso total obtenido por las tres acciones en ese día, $R = \mathbf{A}\cdot\mathbf{S}$. Calcule el ingreso total obtenido por la venta de las tres acciones cada día de la semana, donde **A** y **S** se proporcionan en la tabla 1. *Nota:* puesto que una compañía no está limitada a comerciar sólo tres acciones, este ejemplo puede generalizarse para comercializar n acciones donde los vectores **A** y **S** tiene cada uno n componentes, de modo que $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\rangle$ y $\mathbf{S} = \langle s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n\rangle$, y

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{S} = a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 + \ldots + a_ns_n$$

Tabla 1

Día	**A**	**S**
Lunes	⟨250, 180, 310⟩	⟨25.50, 16.80, 54.55⟩
Martes	⟨185, 210, 215⟩	⟨27.50, 14.60, 61.25⟩
Miércoles	⟨400, 120, 180⟩	⟨21.20, 21.50, 66.50⟩
Jueves	⟨355, 165, 200⟩	⟨23.40, 18.50, 62.30⟩
Viernes	⟨370, 145, 240⟩	⟨22.60, 19.10, 61.75⟩

10.4 PLANOS Y RECTAS EN R^3

La gráfica de una ecuación en dos variables, x y y, es una curva en R^2. El tipo de curva más simple es una recta cuya ecuación general es $Ax + By + C = 0$, la cual es una ecuación de primer grado. En R^3, la gráfica de una ecuación en tres variables, x, y y z, es una superficie. En la sección 10.2 se estudió una superficie particular, la esfera, y en la sección 10.6 se tratarán otras superficies. En esta sección se concentrará la atención en la superficie más simple, el *plano*, y aprenderá que una ecuación de un plano es de primer grado en tres variables. También sabrá que las rectas en R^3 se definen mediante pares de ecuaciones, en los que cada ecuación representa a un plano que contiene a la recta.

10.4.1 Definición de plano

Si **N** es un vector dado diferente del vector cero y P_0 es un punto dado, entonces el conjunto de todos los puntos para los cuales $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P})$ y **N** son ortogonales define al plano que pasa por P_0 y tiene a **N** como **vector normal.**

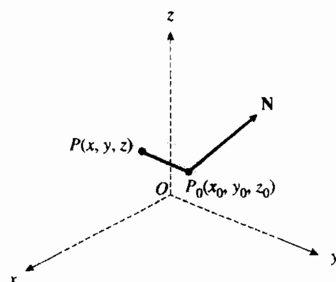


FIGURA 1

La figura 1 muestra una porción del plano que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y la representación del vector normal **N** cuyo punto inicial es P_0.

En geometría analítica plana se puede obtener una ecuación de una recta si se conocen un punto de la recta y su dirección (pendiente). De manera análoga, en geometría analítica sólida puede determinarse una ecuación de un plano conociendo un punto del plano y la dirección de un vector normal.

10.4.2 Teorema

Si $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto de un plano y $\langle a, b, c\rangle$ es un vector normal al plano, entonces una ecuación del plano es

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Demostración Refiérase a la figura 1, donde $\mathbf{N} = \langle a, b, c\rangle$. Sea $P(x, y, z)$ cualquier punto del plano. $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P})$ es el vector que tiene a $\overrightarrow{P_0P}$ como una representación; de modo que

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P}) = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle \qquad (1)$$

De la definición 10.4.1 y del hecho de que el producto punto de dos vectores ortogonales es cero se tiene

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P}) \cdot \langle a, b, c\rangle = 0$$

De (1) y de la ecuación anterior se obtiene

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

la cual es la ecuación deseada. ■

▶ ***EJEMPLO 1*** Obtenga una ecuación del plano que contiene al punto (2, 1, 3) y tiene al vector $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ como un vector normal.

Solución Del teorema 10.4.2, donde (x_0, y_0, z_0) es el punto (2, 1, 3) y $\langle a, b, c\rangle$ es el vector $\langle 3, -4, 1\rangle$, se tiene como una ecuación del plano

$$3(x - 2) - 4(y - 1) + (z - 3) = 0$$
$$3x - 4y + z - 5 = 0$$

◀

10.4.3 Teorema

Si a, b y c no son cero a la vez, la gráfica de una ecuación de la forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

es un plano y $\langle a, b, c\rangle$ es un vector normal al plano.

Demostración Suponga que $b \neq 0$. Entonces el punto $(0, -d/b, 0)$ está en la gráfica de la ecuación debido a que sus coordenadas satisfacen la ecuación. La ecuación dada puede expresarse como

$$a(x - 0) + b\left(y + \frac{d}{b}\right) + c(z - 0) = 0$$

la cual, por el teorema 10.4.2, es la ecuación de un plano que pasa por el punto $(0, -d/b, 0)$ y para el cual $\langle a, b, c\rangle$ es un vector normal. Esto demuestra el teorema si $b \neq 0$. Un argumento similar es válido si $b = 0$ y $a \neq 0$, o bien, $c \neq 0$. ■

Las ecuaciones de los teoremas 10.4.2 y 10.4.3 se denominan *ecuaciones cartesianas* del plano. La ecuación del teorema 10.4.2 es análoga a la forma punto-pendiente de una ecuación de una recta en dos dimensiones. La ecuación del teorema 10.4.3 es la ecuación general de primer grado en tres variables y se le llama *ecuación lineal*.

Un plano está determinado por tres puntos no colineales, por una recta y un punto fuera de ella, por dos rectas que se intersectan, o por dos rectas paralelas.

▶ ***EJEMPLO 2*** Determine una ecuación del plano que pasa por los puntos $P(1, 3, 2)$, $Q(3, -2, 2)$ y $R(2, 1, 3)$.

Solución Del teorema 10.4.3, la gráfica de la ecuación lineal

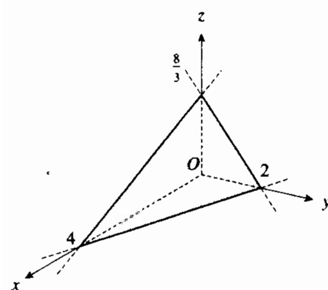
$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (2)$$

es un plano. Si esta ecuación es satisfecha por las coordenadas de los puntos P, Q y R, entonces el plano los contendrá. Al sustituir x, y y z en (2) por las coordenadas de los tres puntos se tienen las ecuaciones

$$a + 3b + 2c + d = 0$$
$$3a - 2b + 2c + d = 0$$
$$2a + b + 3c + d = 0$$

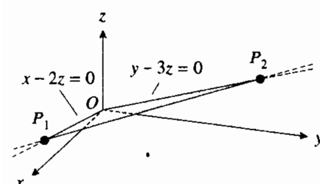
Si se resuelve este sistema de ecuaciones para a, b y c en términos de d, se obtiene

$$a = -\tfrac{5}{9}d \qquad b = -\tfrac{2}{9}d \qquad c = \tfrac{1}{9}d$$



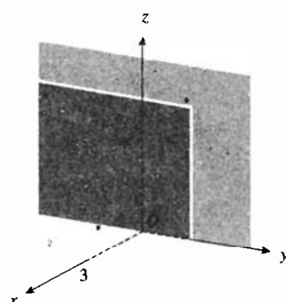
Plano: $2x + 4y + 3z = 8$

FIGURA 2



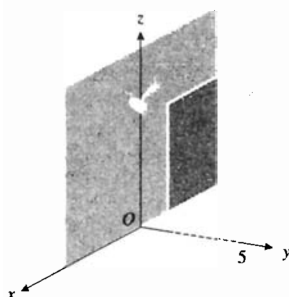
Plano: $3x + 2y - 6z = 0$

FIGURA 3



Plano: $x = 3$

FIGURA 4



Plano: $y = 5$

FIGURA 5

Al sustituir a, b y c en (2) por estos valores resulta

$$-\tfrac{5}{9}dx - \tfrac{2}{9}dy + \tfrac{1}{9}dz + d = 0$$

Si se multiplican los dos miembros de esta ecuación por $-9/d$, se obtiene

$$5x + 2y - z - 9 = 0$$

la cual es la ecuación requerida. ◀

Para dibujar un plano a partir de su ecuación, conviene determinar los puntos en los que el plano intersecta a cada uno de los ejes coordenados. La coordenada x del punto en el que el plano corta al eje x se denomina *intercepción x* del plano; la coordenada y del punto en el que el plano intersecta al eje y se llama *intercepción y* del plano; y la *intercepción z* del plano es la coordenada z del punto en el que el plano intersecta al eje z.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Se desea dibujar el plano que tiene la ecuación

$$2x + 4y + 3z = 8$$

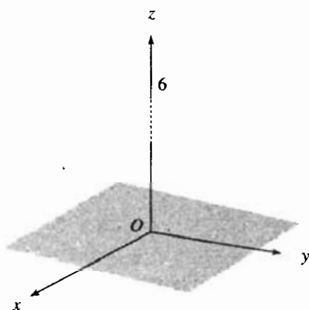
Al sustituir cero por y y z se obtiene $x = 4$; de modo que la intercepción x del plano es 4. Las intercepciones y y z se obtienen de manera similar; ellas son 2 y $\frac{8}{3}$, respectivamente. Al localizar estas intercepciones y al unirlas con rectas se obtiene la figura 2. Observe que sólo una porción del plano se muestra en la figura. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** A fin de dibujar el plano que tiene la ecuación

$$3x + 2y - 6z = 0$$

primero observe que debido a que la ecuación se satisface cuando x, y y z son cero, el plano intersecta a cada uno de los ejes en el origen. Si $x = 0$ en la ecuación anterior, se obtiene $y - 3z = 0$, la cual es una recta en el plano yz; ésta es la recta de intersección del plano yz con el plano dado. De igual manera, la recta de intersección del plano xz con el plano dado se obtiene al considerar $y = 0$, de lo que resulta $x - 2z = 0$. Al dibujar cada una de estas dos rectas y el segmento de recta desde un punto de una de las rectas hasta otro punto de la otra recta, se obtiene la figura 3. ◀

En el ejemplo ilustrativo 2, la recta del plano yz y la recta del plano xz se denominan **trazas** del plano dado en los planos yz y xz, respectivamente. La ecuación $x = 0$ es una ecuación del plano yz ya que el punto (x, y, z) está en el plano yz si y sólo si $x = 0$. De manera semejante, las ecuaciones $y = 0$ y $z = 0$ son ecuaciones de los planos xz y xy, respectivamente. Un plano paralelo al plano yz tiene una ecuación de la forma $x = k$, donde k es una constante. La figura 4 muestra el plano que tiene ecuación $x = 3$. Un plano paralelo al plano xz tiene una ecuación de la forma $y = k$, y un plano paralelo al plano xy tiene una ecuación de la forma $z = k$. Las figuras 5 y 6 muestran los planos que tienen las ecuaciones $y = 5$ y $z = 6$, respectivamente.



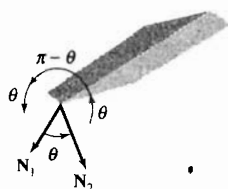
Plano: $z = 6$

FIGURA 6

10.4.4 Definición de ángulo entre dos planos

Un **ángulo entre dos planos** se define como el ángulo entre los vectores normales de los planos.

Existen dos ángulos entre dos planos. Si uno de estos ángulos es θ, entonces el otro es el suplemento de θ. La figura 7 presenta dos planos y los dos ángulos entre ellos.



Ángulo entre dos planos

FIGURA 7

▶ ***EJEMPLO 3*** Determine la medida en radianes del ángulo agudo entre los planos

$$5x - 2y + 5z - 12 = 0 \quad \text{y} \quad 2x + y - 7z + 11 = 0$$

Solución Sean $\mathbf{N}_1$ un vector normal al primer plano y $\mathbf{N}_2$ un vector normal al segundo plano. Entonces

$$\mathbf{N}_1 = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{N}_2 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

De la definición 10.4.4, el ángulo entre dos planos es el ángulo entre $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$. Así, del teorema 10.3.5, si θ es la medida en radianes de este ángulo, entonces

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2}{\|\mathbf{N}_1\|\,\|\mathbf{N}_2\|}\\ &= \frac{\langle 5, -2, 5\rangle \cdot \langle 2, 1, -7\rangle}{\sqrt{25 + 4 + 25}\;\sqrt{4 + 1 + 49}}\\ &= \frac{10 - 2 - 35}{\sqrt{54}\;\sqrt{54}}\\ &= -\tfrac{27}{54}\\ &= -\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

Por tanto, $\theta = \frac{2}{3}\pi$. El ángulo agudo entre los dos planos es el suplemento de θ, el cual es $\frac{1}{3}\pi$. ◀

10.4.5 Definición de planos paralelos

Dos planos son **paralelos** si y sólo si sus vectores normales son paralelos.

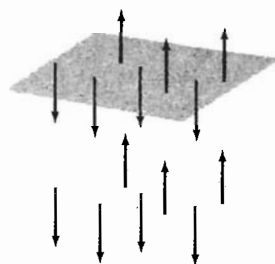


FIGURA 8

Recuerde que dos vectores son paralelos si y sólo si uno de los vectores es un múltiplo escalar del otro. Así, de la definición 10.4.5, si se tiene un plano con un vector normal $\mathbf{N}_1$ y otro plano con un vector normal $\mathbf{N}_2$, entonces los dos planos son paralelos si y sólo si

$$\mathbf{N}_1 = k\mathbf{N}_2$$

donde k es una constante. La figura 8 muestra dos planos paralelos y representaciones de algunos de sus vectores normales.

10.4.6 Definición de planos perpendiculares

Dos planos son **perpendiculares** si y sólo si sus vectores normales son ortogonales.

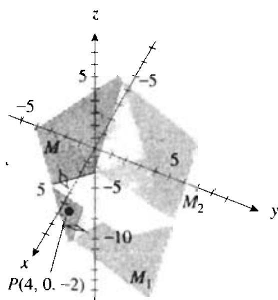
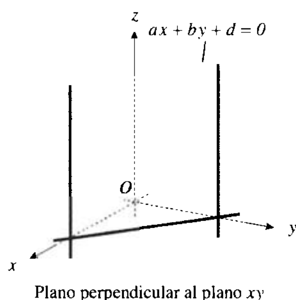
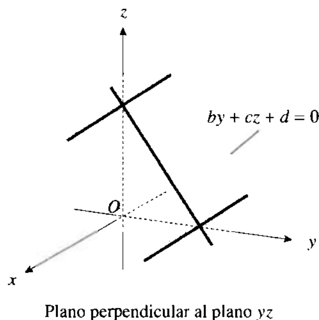


FIGURA 9



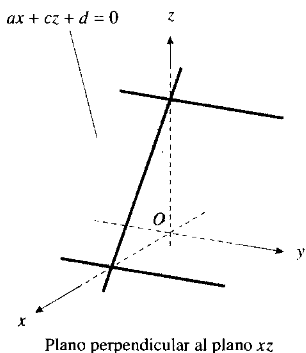
Plano perpendicular al plano xy

FIGURA 10



Plano perpendicular al plano yz

FIGURA 11



Plano perpendicular al plano xz

FIGURA 12

De esta definición y del hecho de que dos vectores son ortogonales si y sólo si su producto punto es cero, se infiere que dos planos, cuyos vectores normales son $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$, son perpendiculares si y sólo si

$$\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 = 0 \tag{3}$$

EJEMPLO 4 Determine una ecuación del plano que contenga al punto $P(4, 0, -2)$ y sea perpendicular a cada uno de los planos

$$x - y + z = 0 \quad \text{y} \quad 2x + y - 4z - 5 = 0$$

Solución Sea M el plano requerido y $\langle a, b, c\rangle$, $a \neq 0$, un vector normal de M. Sea M_1 el plano que tiene la ecuación $x - y + z = 0$. Por el teorema 10.4.3, un vector normal de M_1 es $\langle 1, -1, 1\rangle$. Como M y M_1 son perpendiculares, entonces de (3)

$$\begin{aligned} \langle a, b, c\rangle \cdot \langle 1, -1, 1\rangle &= 0 \\ a - b + c &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Sea M_2 el plano que tiene la ecuación $2x + y - 4z - 5 = 0$. Un vector normal de M_2 es $\langle 2, 1, -4\rangle$. Puesto que M y M_2 son perpendiculares,

$$\begin{aligned} \langle a, b, c\rangle \cdot \langle 2, 1, -4\rangle &= 0 \\ 2a + b - 4c &= 0 \end{aligned}$$

Si se resuelve esta ecuación y (4) simultáneamente para b y c en términos de a, se obtiene $b = 2a$ y $c = a$. Por tanto, un vector normal de M es $\langle a, 2a, a\rangle$. Como $P(4, 0, -2)$ es un punto de M, entonces, del teorema 10.4.2, una ecuación de M es

$$a(x - 4) + 2a(y - 0) + a(z + 2) = 0$$

Puesto que $a \neq 0$, se divide entre a y se reducen los términos semejantes para obtener

$$x + 2y + z - 2 = 0$$

La figura 9 muestra los tres planos y el punto P. ◀

Considere ahora el plano que tiene la ecuación $ax + by + d = 0$ y el plano xy cuya ecuación es $z = 0$. Entonces $\langle a, b, 0\rangle$ y $\langle 0, 0, 1\rangle$, son vectores normales a estos planos respectivamente. Como $\langle a, b, 0\rangle \cdot \langle 0, 0, 1\rangle = 0$, los dos planos son perpendiculares. Esto significa que un plano cuya ecuación no contenga término en z, es perpendicular al plano xy. La figura 10 ilustra este hecho. De manera semejante puede concluirse que un plano cuya ecuación no contenga término en x es perpendicular al plano yz (consulte la figura 11), y que un plano cuya ecuación no contenga término en y es perpendicular al plano xz (refiérase a la figura 12).

Los vectores pueden emplearse para calcular la distancia de un punto a un plano. El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 5 Calcule la distancia del punto $(1, 4, 6)$ al plano

$$2x - y + 2z + 10 = 0$$

Solución Sea P el punto (1, 4, 6) y elija cualquier punto Q del plano. Por simplicidad se elige el punto Q como el punto donde el plano intersecta al eje x, esto es, el punto (–5, 0, 0). El vector que tiene a $\overrightarrow{PQ}$ como una representación está dado por

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

Un vector normal al plano dado es

$$\mathbf{N} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

El negativo de **N** también es un vector normal al plano dado y

$$-\mathbf{N} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

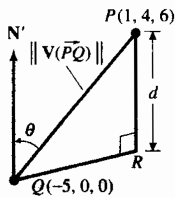


FIGURA 13

No se tiene seguridad de cuál de los dos vectores, **N** o **–N**, forma el ángulo menor con el vector $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$. Sea **N**′ uno de estos dos vectores, **N** o **–N**, que forman un ángulo de medida $\theta < \frac{1}{2}\pi$ con $\mathbf{V}(\overrightarrow{PO})$. La figura 13 muestra una porción del plano dado que contiene al punto $Q(-5, 0, 0)$, la representación del vector **N**′ que tiene su punto inicial en Q, el punto $P(1, 4, 6)$, el segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ y el punto R, el cual es el pie de la perpendicular de P al plano. Con el fin de simplificar no se han incluido los ejes coordenados en esta figura. La distancia $|\overrightarrow{RP}|$ es la distancia requerida, la cual se denota por d. Como d es una distancia no dirigida, entonces es no negativa. En la figura 13 se observa que d es el valor absoluto de la proyección escalar de $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$ sobre **N**′. De este modo, por el teorema 10.3.9, se tiene

$$d = \frac{|\mathbf{N}' \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})|}{\|\mathbf{N}'\|}$$

Debido a que se tiene el valor absoluto del producto punto en el numerador y el módulo de **N**′ en el denominador, se puede sustituir **N**′ por **N**, para obtener

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\mathbf{N}' \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})|}{\|\mathbf{N}'\|} \\ &= \frac{|\langle 2, -1, 2\rangle \cdot \langle -6, -4, -6\rangle|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} \\ &= \frac{|-12 + 4 - 12|}{\sqrt{9}} \\ &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

◄

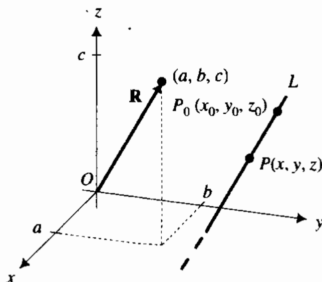


FIGURA 14

Ahora se estudiarán las rectas en R^3. Sea L una recta que pasa por el punto dado $P(x_0, y_0, z_0)$ y que es paralela a la representación del vector dado $\mathbf{R} = \langle a, b, c\rangle$. La figura 14 muestra a L y la representación de posición de **R**. La recta L es el conjunto de puntos $P(x, y, z)$ tales que $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P})$ es paralelo a **R**. Así, P está en L si y sólo si existe un escalar t diferente de cero tal que

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P}) = t\mathbf{R}$$

Como $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P}) = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle$, a partir de la ecuación anterior se obtiene

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = t\langle a, b, c\rangle$$

de donde se deduce que

$$x - x_0 = ta \qquad y - y_0 = tb \qquad z - z_0 = tc$$

$$x = x_0 + ta \qquad y = y_0 + tb \qquad z = z_0 + tc \tag{5}$$

Si t representa a cualquier número real, entonces P puede ser cualquier punto de L. Por tanto, las ecuaciones (5) representan a la recta L; estas ecuaciones se denominan **ecuaciones paramétricas** de la recta.

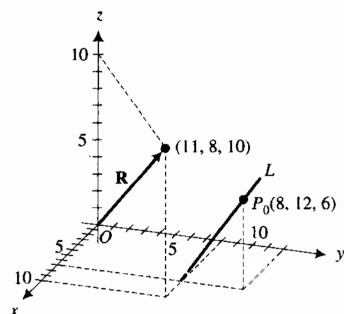


FIGURA 15

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 De las ecuaciones (5), las ecuaciones paramétricas de la recta L, paralela a la representación del vector $\mathbf{R} = \langle 11, 8, 10\rangle$ y que contiene al punto (8, 12, 6), son

$$x = 8 + 11t \qquad y = 12 + 8t \qquad z = 6 + 10t$$

La figura 15 muestra la recta y la representación de posición de **R**. ◀

Si ninguno de los números a, b o c es cero, se puede eliminar t de las ecuaciones (5) para obtener

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{6}$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de **ecuaciones simétricas** de la recta. Las ecuaciones (6) son equivalentes al sistema de ecuaciones

$$b(x - x_0) = a(y - y_0)$$
$$c(x - x_0) = a(z - z_0)$$
$$c(y - y_0) = b(z - z_0)$$

En realidad, estas tres ecuaciones no son independientes ya que cualquiera de ellas puede deducirse de las otras dos. Cada una de estas ecuaciones es una ecuación de un plano que contiene a la recta L representada por las ecuaciones (6). Cualesquiera dos de estos planos tiene como su intersección a la recta L; en consecuencia, cualesquiera dos de las ecuaciones definen la recta. Sin embargo, un número ilimitado de planos contienen a la recta dada, y como dos cualesquiera de ellos determinarán la recta, entonces un número ilimitado de pares de ecuaciones representan a la recta.

El vector $\mathbf{R} = \langle a, b, c\rangle$ determina la dirección de la recta que tiene las ecuaciones simétricas (6), y los números a, b y c se denominan **números directores** (o **parámetros directores**) de la recta. Cualquier vector paralelo a **R** tiene el mismo sentido o el opuesto al de **R**; en consecuencia, dicho vector puede emplearse en lugar de **R** en la explicación anterior. Puesto que las componentes de cualquier vector paralelo a **R** son proporcionales a las componentes del vector **R**, entonces cualquier conjunto de números proporcionales a a, b y c también sirven como un conjunto de números directores. Un conjunto de números directores de una recta se escriben entre corchetes como $[a, b, c]$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 Si [2, 3, −4] representa un conjunto de números directores de una recta, entonces otros conjuntos de números directores para la misma recta son $[4, 6, -8]$, $[1, \frac{3}{2}, -2]$ y $[2/\sqrt{29}, 3/\sqrt{29}, -4/\sqrt{29}]$. ◀

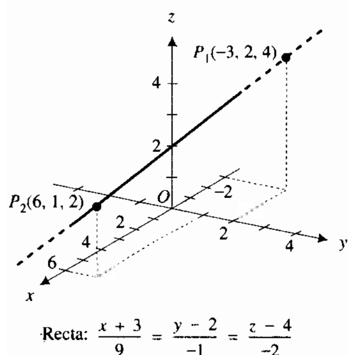
▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** Un conjunto de números directores de la recta del ejemplo ilustrativo 3 es [11, 8, 10], y la recta contiene al punto (8, 12, 6). Así, de (6), las ecuaciones simétricas de esta recta son

$$\frac{x-8}{11} = \frac{y-12}{8} = \frac{z-6}{10}$$ ◀

▶ **EJEMPLO 6** Obtenga dos conjuntos de ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos (−3, 2, 4) y (6, 1, 2).

Solución Sean P_1 el punto (−3, 2, 4) y P_2 el punto (6, 1, 2). Entonces, la recta requerida es paralela a las representaciones del vector $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_2})$, de modo que las componentes de éste constituyen un conjunto de números directores de la recta. Así, $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_2}) = \langle 9, -1, -2\rangle$. Considerando P_0 como el punto (−3, 2, 4) se tienen, de (6), las ecuaciones

$$\frac{x+3}{9} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{-2}$$



Recta: $\frac{x+3}{9} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{-2}$

FIGURA 16

Otro conjunto de ecuaciones simétricas de esta recta, obtenidas al considerar P_0 como el punto (6, 1, 2), es

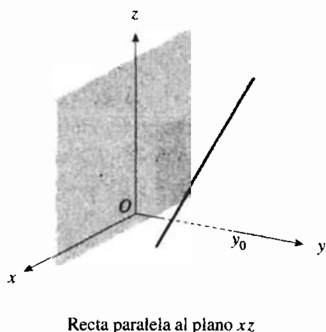
$$\frac{x-6}{9} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$$

La figura 16 muestra esta recta y los puntos P_1 y P_2 de la recta. ◀

Si uno de los números a, b o c es cero, no pueden emplearse las ecuaciones simétricas (6). Sin embargo, suponga que $b = 0$ y que a y c son diferentes de cero. Entonces, las ecuaciones de la recta son

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{z-z_0}{c} \quad \text{y} \quad y = y_0$$

Una recta que tiene estas ecuaciones simétricas está contenida en el plano $y = y_0$ y en consecuencia es paralela al plano xz. La figura 17 muestra dicha recta.



Recta paralela al plano xz

FIGURA 17

▶ **EJEMPLO 7** Considere los planos

$$x + 3y - z - 9 = 0 \quad \text{y} \quad 2x - 3y + 4z + 3 = 0$$

Para la recta de intersección de estos dos planos, determine **(a)** un conjunto de ecuaciones simétricas, **(b)** un conjunto de ecuaciones paramétricas, y **(c)** los cosenos directores de un vector cuya representación sea paralela a ella.

Solución

(a) Un conjunto de ecuaciones simétricas es de la forma (6). A fin de obtener esta forma se resuelve el par de ecuaciones dadas para x y y en términos de z. Los cálculos son:

$$\begin{array}{rl} x + 3y - z - 9 = 0 & \\ 2x - 3y + 4z + 3 = 0 & (+) \\ \hline 3x + 3z - 6 = 0 & \\ x = -z + 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 2x + 6y - 2z - 18 = 0 & \\ 2x - 3y + 4z + 3 = 0 & (-) \\ \hline 9y - 6z - 21 = 0 & \\ y = \frac{2}{3}z + \frac{7}{3} & \end{array}$$

Ahora se resuelve cada ecuación para z, obteniéndose

$$\frac{x-2}{-1} = z \qquad \frac{y-\frac{7}{3}}{\frac{2}{3}} = z$$

De modo que el conjunto de ecuaciones simétricas es

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-\frac{7}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{z-0}{1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-2}{-3} = \frac{y-\frac{7}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{z-0}{3}$$

(b) Un conjunto de ecuaciones paramétricas se obtiene al considerar cada una de las razones del inciso (a) igual a t, de donde resulta

$$\frac{x-2}{-3} = t \qquad \frac{y-\frac{7}{3}}{2} = t \qquad \frac{z-0}{3} = t$$

$$x = 2 - 3t \qquad y = \tfrac{7}{3} + 2t \qquad z = 3t$$

(c) A partir de las ecuaciones simétricas del inciso (a), un conjunto de números directores de la recta es $[-3, 2, 3]$. Por tanto, el vector $\langle -3, 2, 3\rangle$ tiene su representación paralela a la recta. Como $\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{22}$, los cosenos directores de este vector son

$$\cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{22}} \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{22}} \qquad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{22}}$$ ◀

▶ **EJEMPLO 8** Obtenga ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(1, -1, 1)$ y que es perpendicular a la recta

$$3x = 2y = z \tag{7}$$

y paralela al plano

$$x + y - z = 0 \tag{8}$$

Solución Sea $[a, b, c]$ un conjunto de números directores de la recta pedida. Las ecuaciones (7) pueden expresarse como

$$\frac{x-0}{\frac{1}{3}} = \frac{y-0}{\frac{1}{2}} = \frac{z-0}{1}$$

las cuales son las ecuaciones simétricas de la recta. Un conjunto de números directores de esta recta es $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1]$. Como la recta pedida es perpendicular a esta recta, se infiere que los vectores $\langle a, b, c\rangle$ y $\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\rangle$ son ortogonales. Por tanto,

$$\langle a, b, c\rangle \cdot \langle \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, 1\rangle = 0$$

$$\tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{2}b + c = 0 \tag{9}$$

Un vector normal al plano (8) es $\langle 1, 1, -1\rangle$. Puesto que la recta requerida es paralela a este plano, la recta debe ser perpendicular a las representaciones del vector normal. En consecuencia, los vectores $\langle a, b, c\rangle$ y $\langle 1, 1, -1\rangle$ son ortogonales; así,

$$\langle a, b, c\rangle \cdot \langle 1, 1, -1\rangle = 0$$

$$a + b - c = 0$$

Si se supone que $c \neq 0$, se resuelve esta ecuación y (9) simultáneamente para a y b en términos de c, de donde resulta $a = 9c$ y $b = -8c$. Entonces, la recta pedida tiene el conjunto de números directores $[9c, -8c, c]$ y contiene al punto $(1, -1, 1)$. Por tanto, las ecuaciones simétricas de la recta son

$$\frac{x-1}{9c} = \frac{y+1}{-8c} = \frac{z-1}{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{9} = \frac{y+1}{-8} = \frac{z-1}{1}$$ ◀

En el ejemplo siguiente se emplea el concepto de **rectas oblicuas** (o **cruzantes**), las cuales son dos rectas que no están contenidas en un mismo plano.

▶ ***EJEMPLO 9*** Si l_1 es la recta que pasa por $A(1, 2, 7)$ y $B(-2, 3, -4)$, y l_2 es la recta que pasa por $C(2, -1, 4)$ y $D(5, 7, -3)$, demuestre que l_1 y l_2 son rectas oblicuas.

Solución Para demostrar que dos rectas no están en un mismo plano se probará que ellas no se intersectan y que no son paralelas. Las ecuaciones paramétricas de una recta son

$$x = x_0 + ta \qquad y = y_0 + tb \qquad z = z_0 + tc$$

donde $[a, b, c]$ es un conjunto de números directores de la recta y (x_0, y_0, z_0) es cualquier punto dicha recta. Como $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) = \langle -3, 1, -11\rangle$, un conjunto de números directores de l_1 es $[-3, 1, -11]$. Si se toma A como el punto P_0, se tienen como ecuaciones paramétricas de l_1

$$x = 1 - 3t \qquad y = 2 + t \qquad z = 7 - 11t \tag{10}$$

Debido a que $\mathbf{V}(\overrightarrow{CD}) = \langle 3, 8, -7\rangle$ y l_2 contiene al punto C, las ecuaciones paramétricas de l_2 son

$$x = 2 + 3s \qquad y = -1 + 8s \qquad z = 4 - 7s \tag{11}$$

Puesto que los conjuntos de números directores no son proporcionales, l_1 y l_2 no son paralelas. Para que las rectas se intersecten, deben existir dos números t y s que proporcionen el mismo punto (x_1, y_1, z_1) en los dos conjuntos de ecuaciones (10) y (11). Por tanto, al igualar los miembros derechos de las ecuaciones respectivas se obtiene

$$\begin{aligned} 1 - 3t &= 2 + 3s \\ 2 + t &= -1 + 8s \\ 7 - 11t &= 4 - 7s \end{aligned}$$

Si se resuelven las primeras dos ecuaciones simultáneamente se obtienen $s = \frac{8}{27}$ y $t = -\frac{17}{27}$. Este conjunto de valores no sastisface la tercera ecuación; en consecuencia, las rectas no se intersectan. De este modo, l_1 y l_2 son rectas oblicuas.

La figura 18 muestra las rectas l_1, que pasa por los puntos A y B, y l_2, que pasa por los puntos C y D. ◀

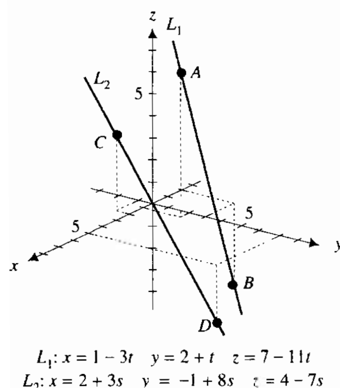


FIGURA 18

EJERCICIOS 10.4

En los ejercicios 1 a 6, obtenga una ecuación del plano que contenga al punto P y tenga al vector **N** *como vector normal.*

1. $P(3, 1, 2)$; $\mathbf{N} = \langle 1, 2, -3 \rangle$
2. $P(-3, 2, 5)$; $\mathbf{N} = \langle 6, -3, -2 \rangle$
3. $P(0, -1, 2)$; $\mathbf{N} = \langle 0, 1, -1 \rangle$
4. $P(-1, 8, 3)$; $\mathbf{N} = \langle -7, -1, 1 \rangle$
5. $P(2, 1, -1)$; $\mathbf{N} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
6. $P(1, 0, 0)$; $\mathbf{N} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

En los problemas 7 y 8, determine una ecuación del plano que contenga los tres puntos.

7. $(3, 4, 1), (1, 7, 1), (-1, -2, 5)$
8. $(0, 0, 2), (2, 4, 1), (-2, 3, 3)$

En los ejercicios 9 a 14, dibuje el plano y obtenga dos vectores unitarios normales al plano.

9. $2x - y + 2z - 6 = 0$
10. $4x - 4y + 2z - 9 = 0$
11. $4x + 3y - 12z = 0$
12. $y + 2z - 4 = 0$
13. $3x + 2z - 6 = 0$
14. $z = 5$

En los ejercicios 15 a 20, obtenga una ecuación del plano que satisfaga las condiciones indicadas.

15. Perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(2, 2, -4)$ y $(7, -1, 3)$, y contiene al punto $(-5, 1, 2)$.
16. Paralelo al plano $4x - 2y + z - 1 = 0$ y contiene al punto $(2, 6, -1)$.
17. Perpendicular al plano $x + 3y - z - 7 = 0$ y contiene a los puntos $(2, 0, 5)$ y $(0, 2, -1)$.
18. Perpendicular a cada uno de los planos $x - y + z = 0$ y $2x + y - 4z - 5 = 0$ y contiene al punto $(4, 0, -2)$.
19. Perpendicular al plano yz, contiene al punto $(2, 1, 1)$ y forma un ángulo de $\cos^{-1}\frac{2}{3}$ rad con el plano $2x - y + 2z - 3 = 0$.
20. Contiene al punto $P(-3, 5, -2)$ y es perpendicular a la representación del vector $\mathbf{V}(\overrightarrow{OP})$.

En los ejercicios 21 a 23, determine el ángulo agudo entre los dos planos.

21. $2x - y - 2z - 5 = 0$ y $6x - 2y + 3z + 8 = 0$
22. $2x - 5y + 3z - 1 = 0$ y $y - 5z + 3 = 0$
23. $3x + 4y = 0$ y $4x - 7y + 4z - 6 = 0$
24. Calcule la distancia del plano $2x + 2y - z - 6 = 0$ al punto $(2, 2, -4)$.
25. Obtenga la distancia del plano $5x + 11y + 2z - 30 = 0$ al punto $(-2, 6, 3)$.
26. Calcule la distancia perpendicular entre los planos paralelos $4x - 8y - z = -9$ y $4x - 8y - z = 6$.
27. Determine la distancia perpendicular entre los planos paralelos $4y - 3z - 6 = 0$ y $8y - 6z - 27 = 0$.
28. Si a, b, y c son diferentes de cero, y son las intercepciones x, y y z, respectivamente, de un plano, demuestre que una ecuación del plano es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Ésta es la **forma de intercepción** de la ecuación de un plano.

En los ejercicios 29 a 36, obtenga ecuaciones paramétricas y simétricas para la recta que satisface las condiciones indicadas.

29. Pasa por los dos puntos $(1, 2, 1)$ y $(5, -1, 1)$.
30. Pasa por el punto $(5, 3, 2)$ con números directores $[4, 1, -1]$.
31. Pasa por el origen y es perpendicular a la recta $\frac{1}{4}(x - 10) = \frac{1}{3}y = \frac{1}{2}z$ en su intersección.
32. Pasa por el origen y es perpendicular a las rectas que tienen números directores $[4, 2, 1]$ y $[-3, -2, 1]$.
33. Perpendicular a las rectas que tiene números directores $[-5, 1, 2]$ y $[2, -3, -4]$ en el punto $(-2, 0, 3)$.
34. Pasa por el punto $(-3, 1, -5)$ y es perpendicular al plano $4x - 2y + z - 7 = 0$.
35. Pasa por el punto $(4, -5, 20)$ y es perpendicular al plano $x + 3y - 6z - 8 = 0$.
36. Pasa por el punto $(2, 0, -4)$ y es paralela a cada uno de los planos $2x + y - z = 0$ y $x + 3y + 5z = 0$.
37. Obtenga un conjunto de ecuaciones simétricas para la recta

$$\begin{cases} 4x - 3y + z - 2 = 0 \\ 2x + 5y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

38. Demuestre que las rectas

$$\frac{x + 1}{2} = \frac{y + 4}{-5} = \frac{z - 2}{3}$$
$$\frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 14}{5} = \frac{z - 8}{-3}$$

coinciden.

39. Demuestre que la recta $\frac{1}{2}(x - 3) = \frac{1}{3}(y + 2) = \frac{1}{4}(z + 1)$ está contenida en el plano $x - 2y + z = 6$.
40. Demuestre que la recta $x + 1 = -\frac{1}{2}(y - 6) = z$ está contenida en el plano $3x + y - z = 3$.

Los planos que pasan por una recta y son perpendiculares a los planos coordenados se denominan **planos de proyección** *de la recta. En los ejercicios 41 a 44, determine las ecuaciones de los planos de proyección de la recta y dibuje la recta.*

41. $\begin{cases} 3x - 2y + 5z - 30 = 0 \\ 2x + 3y - 10z - 6 = 0 \end{cases}$
42. $\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - y - 3z + 14 = 0 \end{cases}$
43. $\begin{cases} x - 2y - 3z + 6 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$

44. $\begin{cases} 2x - y + z - 7 = 0 \\ 4x - y + 3z - 13 = 0 \end{cases}$

45. Calcule el coseno del ángulo menor entre el vector cuya representación es paralela a la recta $x = 2y + 4$, $z = -y + 4$, y el vector cuya representación es paralela a la recta $x = y + 7, 2z = y + 2$.

46. Obtenga una ecuación del plano que contiene al punto (6, 2, 4) y a la recta $\frac{1}{5}(x - 1) = \frac{1}{6}(y + 2) = \frac{1}{7}(z - 3)$

En los ejercicios 47 y 48, determine una ecuación del plano que contiene a las rectas indicadas que se intersectan.

47. $\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3}$

$\begin{cases} 3x + 2y + z + 2 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$

48. $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ y $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$

49. Demuestre que las rectas

$\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 8x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 3y + z + 3 = 0 \\ 3x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$

son paralelas, y obtenga una ecuación del plano determinado por estas rectas.

50. Demuestre que las rectas

$$\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{-2} = z + 4$$

$$\frac{x-3}{-5} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{-1}$$

son paralelas, y obtenga una ecuación del plano determinado por estas rectas.

51. Calcule las coordenadas del punto de intersección de la recta $\frac{1}{4}(x - 2) = -\frac{1}{2}(y + 3) = \frac{1}{7}(z - 1)$ y el plano $5x - y + 2z - 12 = 0$.

52. Determine ecuaciones de la recta que pasa por el punto (1, −1, 1), es perpendicular a la recta $3x = 2y = z$, y es paralela al plano $x + y - z = 0$.

53. Obtenga ecuaciones de la recta que pasa por el punto (3, 6, 4), que intersecta al eje z y es paralela al plano $x - 3y + 5z - 6 = 0$.

54. Calcule la distancia perpendicular del origen a la recta $x = -2 + \frac{6}{7}t, y = 7 - \frac{2}{7}t, z = 4 + \frac{3}{7}t$.

55. Calcule la distancia perpendicular del punto (−1, 3, −1) a la recta $x - 2z = 7, y = 1$.

56. Obtenga ecuaciones de la recta que pasa por el origen, y es perpendicular a la recta $x = y - 5, z = 2y - 3$, e intersecta a la recta $y = 2x + 1, z = x + 2$.

57. Demuestre que las rectas

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-3}$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+3}{2}$$

son rectas oblicuas.

58. Obtenga ecuaciones de la recta que pasa por el punto (3, −4, −5) y que intersecta a cada una de las rectas oblicuas del ejercicio 57.

59. Demuestre que la distancia perpendicular entre los planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ y $ax + by + cz + d_2 = 0$ está dada por

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

60. Demuestre que la distancia no dirigida del plano $ax + by + cz + d = 0$ al punto (x_0, y_0, z_0) está determinada por

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

61. ¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas de una recta si los dos números directores a y b son cero?

62. Describa cómo se emplean los vectores para determinar la distancia de un punto a un plano.

63. Describa cómo se emplean los vectores para determinar la distancia de un punto a una recta en R^3.

10.5 PRODUCTO CRUZ

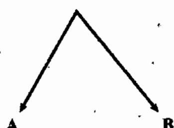


FIGURA 1

El *producto cruz*, operación vectorial para vectores de V_3, tiene aplicaciones en la geometría, el movimiento planetario, la electricidad, el magnetismo y la mecánica. A continuación se estudiará esta operación junto con sus propiedades.

Si **A** y **B** son dos vectores no paralelos, entonces las representaciones de los dos vectores con el mismo punto inicial determinan un plano como se indica en la figura 1. El resultado del producto cruz de **A** y **B** es un vector cuyas representaciones son perpendiculares a este plano.

10.5.1 Definición de producto cruz

Si $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, entonces el **producto cruz** de **A** y **B**, denotado por $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, está dado por

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

Observe que esta definición trata sólo con vectores de V_3. No existe el producto cruz para vectores de V_2. El producto cruz también se denomina **producto vectorial** o **producto exterior.** La operación para obtener el producto cruz se llama **multiplicación cruz** o **multiplicación vectorial.**

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Si $\mathbf{A} = \langle 2, 1, -3 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 3, -1, 4 \rangle$, entonces, de la definición 10.5.1,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \langle 2, 1, -3 \rangle \times \langle 3, -1, 4 \rangle \\ &= \langle (1)(4) - (-3)(-1), (-3)(3) - (2)(4), (2)(-1) - (1)(3) \rangle \\ &= \langle 4 - 3, -9 - 8, -2 - 3 \rangle \\ &= \langle 1, -17, -5 \rangle \\ &= \mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \end{aligned}$$

◀

Existe un recurso nemotécnico para recordar la fórmula del producto cruz, el cual emplea la notación de determinantes. Un determinante de segundo orden se define por la ecuación

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

donde a, b, c y d son números reales. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} &= 3(5) - (6)(-2) \\ &= 27 \end{aligned}$$

Por tanto, la fórmula del producto cruz puede escribirse como

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

El miembro derecho de la expresión anterior puede escribirse simbólicamente como

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

la cual es la notación para un determinante de tercer orden. Sin embargo, observe que el primer renglón contiene vectores y no números reales como se acostumbra en la notación de determinantes.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Se utiliza el recurso nemotécnico que emplea la notación de determinantes para calcular el producto cruz de los vectores del ejemplo ilustrativo 1.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= [(1)(4) - (-3)(-1)]\mathbf{i} - [(2)(4) - (-3)(3)]\mathbf{j} + [(2)(-1) - (1)(3)]\mathbf{k}$$
$$= \mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$ ◀

10.5.2 Teorema

Si **A** es cualquier vector de V_3, entonces

(i) $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$
(ii) $\mathbf{0} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$
(iii) $\mathbf{A} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Demostración de (i) Si $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, entonces, por la definición 10.5.1,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{A} &= \langle a_2a_3 - a_3a_2, a_3a_1 - a_1a_3, a_1a_2 - a_2a_1\rangle \\ &= \langle 0, 0, 0\rangle \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Las demostraciones de (ii) y (iii) se dejan como ejercicios (refiérase al ejercicio 13). ■

Al aplicar la definición 10.5.1 a pares de los vectores **i**, **j** y **k** se obtiene lo siguiente:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{array}$$

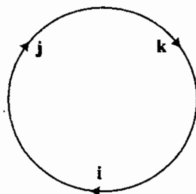


FIGURA 2

Como ayuda para recordar los productos cruz anteriores, primero observe que el producto cruz de cualquiera de los vectores unitarios **i**, **j** o **k** consigo mismo tiene como resultado el vector cero. Los otros sels productos cruz pueden obtenerse de la figura 2 aplicando la siguiente regla: el producto cruz de dos vectores consecutivos, en el sentido del giro de las manecillas del reloj, es el siguiente vector; y el producto cruz de dos vectores consecutivos, en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj es el negativo del siguiente vector.

Puede demostrarse fácilmente que la multiplicación cruz de dos vectores no es conmutativa debido a que, en particular, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} \neq \mathbf{j} \times \mathbf{i}$. Sin embargo, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ y $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$; de modo que $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -(\mathbf{j} \times \mathbf{i})$. En general, si **A** y **B** son dos vectores cualesquiera de V_3, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$, lo cual se establece y demuestra en el siguiente teorema.

10.5.3 Teorema

Si **A** y **B** son dos vectores cualesquiera de V_3, entonces

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}).$$

Demostración Si $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, entonces, por la definición 10.5.1,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle \\ &= -1\langle a_3b_2 - a_2b_3, a_1b_3 - a_3b_1, a_2b_1 - a_1b_2 \rangle \\ &= -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \end{aligned}$$

■

La multiplicación cruz de vectores no es asociativa, como se muestra en el siguiente caso particular:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) &= \mathbf{i} \times \mathbf{k} \\ &= -\mathbf{j} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} &= \mathbf{0} \times \mathbf{j} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Así,

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \neq (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j}$$

La multiplicación cruz es distributiva con respecto a la adición vectorial, como se establece en el teorema siguiente.

10.5.4 Teorema

Si **A**, **B** y **C** son tres vectores cualesquiera de V_3, entonces

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

Para demostrar este teorema considere $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ y $\mathbf{C} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$, y después pruebe que las componentes del vector del miembro izquierdo de la ecuación son las mismas que las componentes del vector del miembro derecho. Los detalles se dejan como ejercicio (consulte el ejercicio 39).

10.5.5 Teorema

Si **A** y **B** son dos vectores cualesquiera de V_3 y c es un escalar, entonces

(i) $(c\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (c\mathbf{B})$;
(ii) $(c\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = c(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$.

La demostración de este teorema se deja como ejercicio (refiérase al ejercicio 40).

Los teoremas 10.5.4 y 10.5.5 pueden aplicarse para calcular el producto cruz de dos vectores empleando las leyes del álgebra, con tal que no se cambie el orden de los vectores en la multiplicación vectorial, lo cual está prohibido por el teorema 10.5.3. El ejemplo ilustrativo siguiente, muestra este procedimiento.



EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Calcule el producto cruz de los vectores del ejemplo ilustrativo 1 aplicando los teoremas 10.5.4 y 10.5.5.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \\ &= 6(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) - 2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + 8(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + 3(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) - 1(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + 4(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) - 9(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + \\ &\qquad 3(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) - 12(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \\ &= 6(\mathbf{0}) - 2(\mathbf{k}) + 8(-\mathbf{j}) + 3(-\mathbf{k}) - 1(\mathbf{0}) + 4(\mathbf{i}) - 9(\mathbf{j}) + 3(-\mathbf{i}) - 12(\mathbf{0}) \\ &= -2\mathbf{k} - 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + 4\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 3\mathbf{i} \\ &= \mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \end{aligned}$$

◀

El procedimiento del ejemplo ilustrativo 3 proporciona un método para calcular el producto cruz sin tener que recordar la fórmula de la definición 10.5.1 o sin emplear la notación de determinantes. En realidad, no es necesario incluir todos los pasos mostrados, debido a que algunos de los productos cruz de los vectores unitarios pueden obtenerse inmediatamente de la figura 2 y la regla correspondiente.

En ocasiones, en las aplicaciones de vectores se presentan dos *triples productos*. Uno es el producto $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, denominado **triple producto escalar** de los vectores **A**, **B** y **C**. De hecho, los paréntesis no son necesarios ya que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ puede interpretarse sólo en una manera puesto que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ es un escalar.

10.5.6 Teorema

Si **A**, **B** y **C** son tres vectores cualesquiera de V_3, entonces

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

Este teorema puede demostrarse al considerar

$$\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \qquad \mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle \qquad \mathbf{C} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$$

y después probar que el escalar del miembro izquierdo de la ecuación es igual al escalar del miembro derecho. Los detalles se dejan como ejercicio (consulte el ejercicio 41).

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 Se verificará el teorema 10.5.6 para $\mathbf{A} = \langle 1, -1, 2 \rangle$, $\mathbf{B} = \langle 3, 4, -2 \rangle$ y $\mathbf{C} = \langle -5, 1, -4 \rangle$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} \times \mathbf{C} &= (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \times (-5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \\
&= 3\mathbf{k} - 12(-\mathbf{j}) - 20(-\mathbf{k}) - 16\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 2(-\mathbf{i}) \\
&= -14\mathbf{i} + 22\mathbf{j} + 23\mathbf{k} \\
\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \langle 1, -1, 2 \rangle \cdot \langle -14, 22, 23 \rangle \\
&= -14 - 22 + 46 \\
&= 10 \\
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \\
&= 4\mathbf{k} - 2(-\mathbf{j}) - 3(-\mathbf{k}) + 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8(-\mathbf{i}) \\
&= -6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 7\mathbf{k} \\
(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= \langle -6, 8, 7 \rangle \cdot \langle -5, 1, -4 \rangle \\
&= 30 + 8 - 28 \\
&= 10
\end{aligned}$$

Esto verifica el teorema para estos tres vectores. ◀

El triple producto $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ se denomina **triple producto vectorial.**

10.5.7 Teorema

Si **A**, **B** y **C** son tres vectores cualesquiera de V_3, entonces

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

La demostración de este teorema es semejante a la demostración del teorema 10.5.6. Al emplear las componentes de los vectores **A**, **B** y **C** puede demostrarse que el vector del miembro izquierdo de la ecuación es el mismo

que el vector del miembro derecho. Los cálculos se dejan como ejercicio (consulte el ejercicio 42).

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** Se verificará el teorema 10.5.7 para los vectores **A**, **B** y **C** del ejemplo ilustrativo 4. Como $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = -14\mathbf{i} + 22\mathbf{j} + 23\mathbf{k}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -14 & 22 & 23 \end{vmatrix} \\ &= -23\mathbf{i} - 28\mathbf{j} + 22\mathbf{k} - 14\mathbf{k} - 44\mathbf{i} - 23\mathbf{j} \\ &= -67\mathbf{i} - 51\mathbf{j} + 8\mathbf{k} \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} &= \langle 1, -1, 2\rangle \cdot \langle -5, 1, -4\rangle \\ &= -5 - 1 - 8 \\ &= -14 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \langle 1, -1, 2\rangle \cdot \langle 3, 4, -2\rangle \\ &= 3 - 4 - 4 \\ &= -5 \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} &= -14\langle 3, 4, -2\rangle - (-5)\langle -5, 1, -4\rangle \\ &= \langle -42, -56, 28\rangle - \langle 25, -5, 20\rangle \\ &= \langle -67, -51, 8\rangle \\ &= -67\mathbf{i} - 51\mathbf{j} + 8\mathbf{k} \end{aligned}$$

Al comparar este resultado con (1), el teorema 10.5.7 se ha verificado para estos tres vectores. ◀

El teorema siguiente se emplea con el fin de tener una interpretación geométrica del producto cruz.

10.5.8 Teorema

Si **A** y **B** son dos vectores cualesquiera de V_3 y θ es el ángulo entre **A** y **B**, entonces

$$\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\| \operatorname{sen} \theta$$

Demostración Del teorema 10.3.3(iii),

$$\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|^2 = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \qquad (2)$$

Con la notación **U**, **V** y **W** como vectores, del teorema 10.5.6,

$$(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{W} = \mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W})$$

Si en esta ecuación se considera $\mathbf{U} = \mathbf{A}$, $\mathbf{V} = \mathbf{B}$ y $\mathbf{W} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, se tiene

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]$$

Al aplicar el teorema 10.5.7 al vector que está entre corchetes en el miembro derecho se obtiene

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}] \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \\ &= \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 \qquad (3) \end{aligned}$$

Del teorema 10.3.5, si θ es el ángulo entre **A** y **B**, entonces

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\| \cos \theta$$

Al sustituir de esta ecuación en (3) se tiene

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2 - \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2 (1 - \cos^2 \theta)\end{aligned}$$

Ahora, si se reemplaza de (2) en la ecuación anterior, y puesto que $1 - \cos^2 \theta = \operatorname{sen}^2 \theta$, resulta

$$\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

Puesto que $0 \leq \theta \leq \pi$, entonces sen $\theta \geq 0$. Por tanto, se considera la raíz cuadrada de los dos miembros y se obtiene

$$\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \operatorname{sen} \theta$$ ■

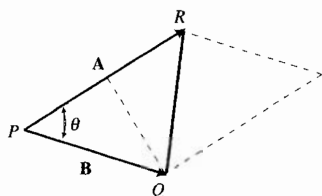


FIGURA 3

A continuación se considerará la interpretación geométrica de $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$. Sean $\overrightarrow{PR}$ una representación de **A** y $\overrightarrow{PQ}$ una representación de **B**. Entonces, el ángulo entre los vectores **A** y **B** es el ángulo en P del triángulo RPQ (refiérase a la figura 3). Sea θ la medida en radianes de este ángulo. Por tanto, el área del paralelogramo que tiene a $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PQ}$ como lados adyacentes es $\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$ sen θ unidades cuadradas debido a que la altura del paralelogramo tiene longitud $\|\mathbf{B}\|$ sen θ unidades y la longitud de la base es $\|\mathbf{A}\|$ unidades. De modo que por el teorema 10.5.8, $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$ unidades cuadradas es el área de este paralelogramo.

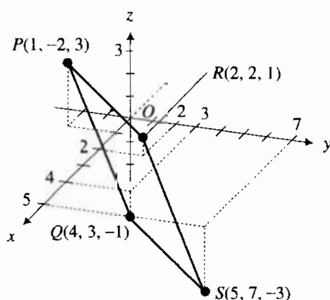


FIGURA 4

▶ ***EJEMPLO 1*** Demuestre que el cuadrilátero que tiene vértices en $P(1, -2, 3)$, $Q(4, 3, -1)$, $R(2, 2, 1)$ y $S(5, 7, -3)$ es un paralelogramo, y determine su área.

Solución La figura 4 muestra el cuadrilátero $PQSR$.

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) &= \langle 4 - 1, 3 + 2, -1 - 3\rangle & \mathbf{V}(\overrightarrow{PR}) &= \langle 2 - 1, 2 + 2, 1 - 3\rangle \\ &= \langle 3, 5, -4\rangle & &= \langle 1, 4, -2\rangle \\ \mathbf{V}(\overrightarrow{RS}) &= \langle 5 - 2, 7 - 2, -3 - 1\rangle & \mathbf{V}(\overrightarrow{QS}) &= \langle 5 - 4, 7 - 3, -3 + 1\rangle \\ &= \langle 3, 5, -4\rangle & &= \langle 1, 4, -2\rangle\end{aligned}$$

Como $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \mathbf{V}(\overrightarrow{RS})$ y $\mathbf{V}(\overrightarrow{PR}) = \mathbf{V}(\overrightarrow{QS})$, se deduce que $\overrightarrow{PQ}$ es paralelo a $\overrightarrow{RS}$ y $\overrightarrow{PR}$ es paralelo a $\overrightarrow{QS}$. Por tanto, $PQSR$ es un paralelogramo.

Sean $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PR})$ y $\mathbf{B} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$; entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \\ &= 3(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + 5(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) - 4(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + 12(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + 20(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) - 16(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) - \\ &\qquad 6(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) - 10(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + 8(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \\ &= 3(\mathbf{0}) + 5(\mathbf{k}) - 4(-\mathbf{j}) + 12(-\mathbf{k}) + 20(\mathbf{0}) - 16(\mathbf{i}) - 6(\mathbf{j}) - 10(-\mathbf{i}) + 8(\mathbf{0}) \\ &= -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}\end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| &= \sqrt{36 + 4 + 49} \\ &= \sqrt{89}\end{aligned}$$

<u>**Conclusión:**</u> El área del paralelogramo es $\sqrt{89}$ unidades cuadradas. ◀

10.5.9 Teorema

Si **A** y **B** son dos vectores de V_3, **A** y **B** son paralelos si y sólo si $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Demostración Si $\mathbf{A}$ o $\mathbf{B}$ es el vector cero, entonces del teorema 10.5.2, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$. Como el vector cero es paralelo a cualquier vector, entonces el teorema se cumple.

Si ninguno de los dos vectores es el vector cero, entonces $\|\mathbf{A}\| \neq 0$ y $\|\mathbf{B}\| \neq 0$. Por tanto, por el teorema 10.5.8, $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| = 0$ si y sólo si sen $\theta = 0$. Como $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, y sen $\theta = 0$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ si y sólo si $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, se puede concluir que

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad \text{si y sólo si} \quad \theta = 0 \text{ o } \theta = \pi$$

Sin embargo, dos vectores diferentes del vector cero son paralelos si y sólo si la medida en radianes del ángulo entre los dos vectores es 0 o π, de lo cual se deduce el teorema. ■

10.5.10 Teorema

Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos vectores de V_3, entonces el vector $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{A}$ como a $\mathbf{B}$.

Demostración Del teorema 10.5.6,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

Del teorema 10.5.2(i), $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$. Por tanto, de la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \mathbf{0} \cdot \mathbf{B} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como el producto punto de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es cero, entonces $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ son ortogonales. También del teorema 10.5.6,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{B}$$

Otra vez, al aplicar el teorema 10.5.2(i) se tiene $\mathbf{B} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$; así, de la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, puesto que el producto punto de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y $\mathbf{B}$ es cero, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y $\mathbf{B}$ son ortogonales, demostrándose así el teorema. ■

Del teorema 10.5.10 se puede concluir que si las representaciones de los vectores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ tienen el mismo punto inicial, entonces la representación de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es perpendicular al plano formado por las representaciones de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

▶ ***EJEMPLO 2*** Dados los puntos $P(-1, -2, -3)$, $Q(-2, 1, 0)$ y $R(0, 5, 1)$, determine un vector unitario cuyas representaciones sean perpendiculares al plano que pasa por P, Q y R.

Solución Sean $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$ y $\mathbf{B} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PR})$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \langle -2 + 1, 1 + 2, 0 + 3 \rangle \\ &= \langle -1, 3, 3 \rangle \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbf{B} &= \langle 0 + 1, 5 + 2, 1 + 3 \rangle \\ &= \langle 1, 7, 4 \rangle \end{aligned}$$

El plano que pasa por P, Q y R es el plano formado por $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, los cuales son, respectivamente, representaciones de los vectores **A** y **B**. Por tanto, cualquier representación del vector $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es perpendicular a este plano. Al calcular este producto se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \\ &= -9\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 10\mathbf{k}\end{aligned}$$

El vector deseado es un vector unitario paralelo a $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Para determinar este vector unitario, se aplica el teorema 10.2.4 y se divide $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ entre $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$, obteniéndose

$$\frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|} = -\frac{9}{\sqrt{230}}\mathbf{i} + \frac{7}{\sqrt{230}}\mathbf{j} - \frac{10}{\sqrt{230}}\mathbf{k}$$ ◀

Los dos ejemplos siguientes muestran cómo el producto cruz puede aplicarse para obtener la ecuación de un plano. Estos ejemplos contienen la misma información de los ejemplos 2 y 4 de la sección 10.4.

▶ ***EJEMPLO 3*** Obtenga una ecuación del plano que pasa por los puntos $P(1, 3, 2)$, $Q(3, -2, 2)$ y $R(2, 1, 3)$.

Solución Sean $\mathbf{V}(\overrightarrow{QR}) = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{V}(\overrightarrow{PR}) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Un vector normal al plano requerido es el producto cruz $\mathbf{V}(\overrightarrow{QR}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{PR})$, el cual es

$$(-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

De modo que si $P_0 = (1, 3, 2)$ y $\mathbf{N} = \langle 5, 2, -1 \rangle$, del teorema 10.4.2, una ecuación del plano es

$$\begin{aligned}5(x - 1) + 2(y - 3) - (z - 2) &= 0 \\ 5x + 2y - z - 9 &= 0\end{aligned}$$

Este resultado concuerda con el del ejemplo 2 de la sección 10.4. ◀

▶ ***EJEMPLO 4*** Obtenga una ecuación del plano que contiene al punto $(4, 0, -2)$ y es perpendicular a cada uno de los planos

$$x - y + z = 0 \quad \text{y} \quad 2x + y - 4z - 5 = 0$$

Solución Por el teorema 10.4.3, un vector normal al plano $x - y + z = 0$ es $\langle 1, -1, 1 \rangle$, y un vector normal al plano $2x + y - 4z - 5 = 0$ es $\langle 2, 1, -4 \rangle$. De modo que un vector normal al plano indicado es ortogonal tanto a $\langle 1, -1, 1 \rangle$ como a $\langle 2, 1, -4 \rangle$. Por el teorema 10.5.10, tal vector es

$$\begin{aligned}\langle 1, -1, 1 \rangle \times \langle 2, 1, -4 \rangle &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\end{aligned}$$

El plano señalado contiene al punto $(4, 0, -2)$ y tiene a $\langle 3, 6, 3 \rangle$ como vector normal. Del teorema 10.4.2, una ecuación de este plano es

$$\begin{aligned}3(x - 4) + 6(y - 0) + 3(z + 2) &= 0 \\ x + 2y + z - 2 &= 0\end{aligned}$$

Esta ecuación concuerda con la obtenida en el ejemplo 4 de la sección 10.4. ◀

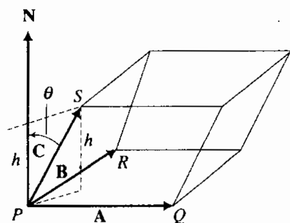


FIGURA 5

Una interpretación geométrica del triple producto escalar se obtiene al considerar un paralelepípedo cuyas aristas son $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$, y tomar $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$, $\mathbf{B} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PR})$ y $\mathbf{C} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PS})$. Consulte la figura 5. El vector $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es un vector normal al plano determinado por $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$. El vector $-(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ también es un vector normal a este plano. No se tiene seguridad de cuál de los dos vectores, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ o $-(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, forma con $\mathbf{C}$ el menor ángulo. Sea $\mathbf{N}$ uno de estos dos vectores que forma con $\mathbf{C}$ el ángulo menor, cuya medida en radianes es $\theta < \frac{1}{2}\pi$. Entonces, las representaciones de $\mathbf{N}$ y $\mathbf{C}$ que tienen su punto inicial en P están del mismo lado del plano determinado por $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, como se muestra en la figura 5. El área de la base de este paralelepípedo es $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$ unidades cuadradas. Si h unidades es la longitud de la altura del paralelepípedo, y si V unidades cúbicas es el volumen de este paralelepípedo, entonces

$$V = \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| h \tag{4}$$

Ahora considere el producto punto $\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}$. Por el teorema 10.3.5,

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{C} = \|\mathbf{N}\| \|\mathbf{C}\| \cos\theta$$

Pero $h = \|\mathbf{C}\| \cos\theta$; por lo que

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{C} = \|\mathbf{N}\| h \tag{5}$$

Como $\mathbf{N}$ es $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ o $-(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, $\|\mathbf{N}\| = \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$. Así, de (5),

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{C} = \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| h$$

Al comparar esta ecuación y (4) se tiene

$$V = \mathbf{N} \cdot \mathbf{C}$$

En consecuencia, se concluye que la medida del volumen del paralelepípedo es $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ o $-(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$; es decir,

$$V = |\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}|$$

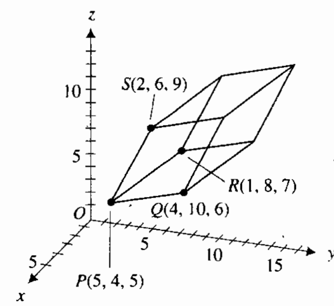


FIGURA 6

▶ *EJEMPLO 5* Calcule el volumen del paralelepípedo que tiene vértices en $P(5, 4, 5)$, $Q(4, 10, 6)$, $R(1, 8, 7)$ y $S(2, 6, 9)$ y aristas $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$.

Solución La figura 6 muestra el paralelepípedo. Sea $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$, entonces $\mathbf{A} = \langle -1, 6, 1\rangle$. Sea $\mathbf{B} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PR})$, entonces $\mathbf{B} = \langle -4, 4, 2\rangle$. Sea $\mathbf{C} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PS})$, entonces $\mathbf{C} = \langle -3, 2, 4\rangle$. Así,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (-\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \\ &= 8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 20\mathbf{k}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} &= \langle 8, -2, 20\rangle \cdot \langle -3, 2, 4\rangle \\ &= -24 - 4 + 80 \\ &= 52\end{aligned}$$

<u>Conclusión:</u> El volumen del paralelepípedo es de 52 unidades cúbicas. ◀

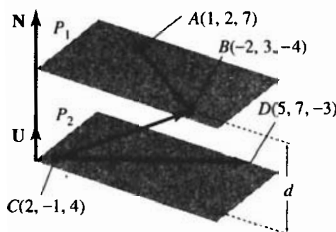


FIGURA 7

EJEMPLO 6 Calcule la distancia entre las dos rectas oblicuas l_1 y l_2 del ejemplo 9 de la sección 10.4.

Solución La recta l_1 contiene a los puntos $A(1, 2, 7)$ y $B(-2, 3, -4)$, mientras que la recta l_2 contiene a los puntos $C(2, -1, 4)$ y $D(5, 7, -3)$. Como l_1 y l_2 son rectas oblicuas, existen planos paralelos P_1 y P_2 que contienen a las rectas l_1 y l_2, respectivamente. Observe la figura 7. Sean d unidades la distancia entre los planos P_1 y P_2. La distancia entre l_1 y l_2 también es d unidades. Un vector normal a los dos planos es

$$\mathbf{N} = \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{CD})$$

Sea **U** un vector unitario en la dirección de **N**. Entonces

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{CD})}{\|\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{CD})\|} \tag{6}$$

Ahora tome dos puntos, uno en cada plano (por ejemplo B y C). Entonces la proyección escalar de $\mathbf{V}(\overrightarrow{CB})$ sobre **N** es $\mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) \cdot \mathbf{U}$, y

$$d = |\mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) \cdot \mathbf{U}| \tag{7}$$

A continuación se realizarán los cálculos.

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) = \langle -2 - 1, 3 - 2, -4 - 7\rangle = \langle -3, 1, -11\rangle \qquad \mathbf{V}(\overrightarrow{CD}) = \langle 5 - 2, 7 + 1, -3 - 4\rangle = \langle 3, 8, -7\rangle$$

Así,

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -11 \\ 3 & 8 & -7 \end{vmatrix} = 27(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

Por tanto, de (6),

$$\mathbf{U} = \frac{27(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k})}{\sqrt{27^2(3^2 + 2^2 + 1^2)}}$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \tag{8}$$

Además,

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) = \langle -2 - 2, 3 + 1, -4 - 4\rangle$$
$$\mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) = \langle -4, 4, -8\rangle$$

Si se sustituye de esta ecuación y de (8) en (7), se tiene

$$d = \left|\langle -4, 4, -8\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}\langle 3, -2, -1\rangle\right| = \frac{1}{\sqrt{14}}|-12 - 8 + 8| = \frac{12}{\sqrt{14}} \approx 3.21$$

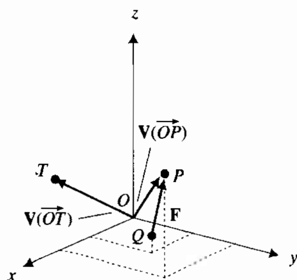


FIGURA 8

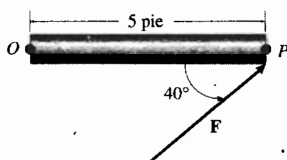


FIGURA 9

Esta sección se concluye con una aplicación del producto cruz a la mecánica. En ella se calcula el *vector torque*. Refiérase a la figura 8, donde el vector de fuerza **F**, que tiene la representación $\overrightarrow{QP}$, se aplica en el punto P de un objeto situado a lo largo de $\overrightarrow{OP}$. **F** ocasiona que el objeto rote alrededor de una recta perpendicular al plano determinado por $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{QP}$. El **vector torque,** cuya representación de posición es $\overrightarrow{OT}$, es el momento de **F** alrededor de O; y proporciona la intensidad (o módulo) y dirección de la resultante de rotación generada por **F**. Este vector torque está definido por

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{OT}) = \mathbf{V}(\overrightarrow{OP}) \times \mathbf{F}$$

EJEMPLO 7 Una fuerza **F**, cuya intensidad es de 15 lb, se aplica en un ángulo de 40° en el extremo derecho P de una barra de 5 pie de longitud, como se indica en la figura 9. Calcule el módulo del vector torque inducido por **F** en el extremo izquierdo O.

Solución La intensidad, o módulo, del vector torque está dada por $\|\mathbf{V}(\overrightarrow{OP}) \times \mathbf{F}\|$, y por el teorema 10.5.8,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}(\overrightarrow{OP}) \times \mathbf{F}\| &= \|\mathbf{V}(\overrightarrow{OP})\| \, \|\mathbf{F}\| \operatorname{sen} 40° \\ &= (5)(15) \operatorname{sen} 40° \\ &= 48.21 \end{aligned}$$

Conclusión: La intensidad del vector torque es de 48.21 pie-lb. ◀

EJERCICIOS 10.5

En los ejercicios 1 a 12, $\mathbf{A} = \langle 1, 2, 3\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 4, -3, -1\rangle$, $\mathbf{C} = \langle -5, -3, 5\rangle$, $\mathbf{D} = \langle -2, 1, 6\rangle$, $\mathbf{E} = \langle 4, 0, -7\rangle$, *y* $\mathbf{F} = \langle 0, 2, 1\rangle$.

1. Obtenga $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.
2. Calcule $\mathbf{D} \times \mathbf{E}$.
3. Determine $(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{F})$.
4. Obtenga $(\mathbf{C} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{D} \times \mathbf{F})$.
5. Verifique el teorema 10.5.3 para los vectores **A** y **B**.
6. Verifique el teorema 10.5.4 para los vectores **A**, **B** y **C**.
7. Verifique el teorema 10.5.5(i) para **A** y **B**, y $c = 3$.
8. Verifique el teorema 10.5.5(ii) para **A** y **B**, y $c = 3$.
9. Verifique el teorema 10.5.6 para los vectores **A**, **B** y **C**.
10. Verifique el teorema 10.5.7 para los vectores **A**, **B** y **C**.
11. Calcule $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} - \mathbf{D})$ y $(\mathbf{D} - \mathbf{C}) \times (\mathbf{A} + \mathbf{B})$, y verifique que son iguales.
12. Determine $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| \, \|\mathbf{C} \times \mathbf{D}\|$.
13. Demuestre el teorema 10.5.2(ii) y (iii).
14. Sean los vectores unitarios $\mathbf{A} = \frac{4}{9}\mathbf{i} + \frac{7}{9}\mathbf{j} - \frac{4}{9}\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$. Si θ es el ángulo entre **A** y **B**, calcule sen θ en dos formas: **(a)** utilice el producto cruz (teorema 10.5.8); **(b)** emplee el producto punto y una identidad trigonométrica.
15. Siga las instrucciones del ejercicio 14 para los dos vectores unitarios

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{k}$$

16. Demuestre que el cuadrilátero que tiene vértices en $(-2, 1, -1)$, $(1, 1, 3)$, $(-5, 4, 0)$ y $(8, 4, -4)$ es un paralelogramo y obtenga su área.
17. Demuestre que el cuadrilátero que tiene vértices en $(1, -2, 3)$, $(4, 3, -1)$, $(2, 2, 1)$ y $(5, 7, -3)$ es un paralelogramo y calcule su área.
18. Obtenga el área del paralelogramo $PQRS$ si $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{V}(\overrightarrow{PS}) = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
19. Determine el área del triángulo que tiene vértices en $(0, 2, 2)$, $(8, 8, -2)$ y $(9, 12, 6)$.
20. Calcule el área del triángulo que tiene vértices en $(4, 5, 6)$, $(4, 4, 5)$ y $(3, 5, 5)$.

En los ejercicios 21 y 22, utilice el producto cruz para obtener una ecuación del plano que pasa por los tres puntos indicados.

21. $(-2, 2, 2)$, $(-8, 1, 6)$, $(3, 4, -1)$.
22. $(2, 3, 0)$, $(2, 0, 4)$, $(0, 3, 4)$.
23. Realice el ejercicio 18 de la sección 10.4 empleando el producto cruz.
24. Determine un vector unitario cuyas representaciones sean perpendiculares al plano que contiene a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ si $\overrightarrow{PQ}$ es una representación del vector $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\overrightarrow{PR}$ es una representación del vector $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

En los ejercicios 25 a 27, obtenga un vector unitario cuyas representaciones sean perpendiculares al plano que pasa por los puntos P, Q y R.

25. $P(5, 2, -1)$, $Q(2, 4, -2)$, $R(11, 1, 4)$

26. $P(-2, 1, 0)$, $Q(2, -2, -1)$, $R(-5, 0, 2)$

27. $P(1, 4, 2)$, $Q(3, 2, 4)$, $R(4, 3, 1)$

28. Obtenga el volumen del paralelepípedo que tiene aristas $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$ si los puntos P, Q, R y S son, respectivamente, $(1, 3, 4)$, $(3, 5, 3)$, $(2, 1, 6)$ y $(2, 2, 5)$.

29. Calcule el volumen del paralelepípedo $PQRS$ si los vectores $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$, $\mathbf{V}(\overrightarrow{PR})$ y $\mathbf{V}(\overrightarrow{PS})$ son, respectivamente, $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

30. Obtenga una ecuación del plano que contenga a los puntos terminales de las representaciones de posición de los vectores $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $5\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

En los ejercicios 31 y 32, calcule la distancia perpendicular entre las dos rectas oblicuas.

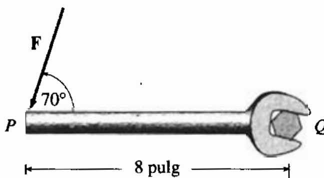
31. $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{2}$

$\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-3}$

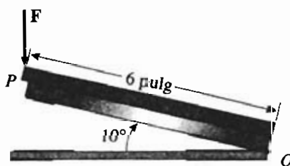
32. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-1}{-3}$

$\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{2}$

33. En la figura adjunta, un tornillo en el punto Q se gira al aplicar en el punto P una fuerza $\mathbf{F}$ de 25 lb en un ángulo de 70° con respecto a la llave, la cual mide 8 pulg de longitud. Calcule la intensidad (o módulo) del vector torque generado por la fuerza en el tornillo.



34. Una fuerza $\mathbf{F}$ de 30 lb en la dirección hacia abajo se aplica en un punto P, que es el extremo izquierdo de la palanca de la engrapadora mostrada en la figura adjunta. La longitud de la palanca es de 6 pulg y, en reposo, la palanca forma un ángulo de 10° con la base horizontal de la engrapadora en el punto Q. Obtenga la intensidad (o módulo) del vector torque ejercido por $\mathbf{F}$ en Q.



35. Si θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de V_3, demuestre que

$$\tan\theta = \frac{\|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\|}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}$$

36. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son vectores de V_3, demuestre que

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = 0$$

37. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son vectores de V_3, demuestre que

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = 2(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

38. Sean P, Q y R tres puntos no colineales de R^3 y sean $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$ las representaciones de posición de los vectores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$, respectivamente. Demuestre que las representaciones del vector $\mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{B}\times\mathbf{C} + \mathbf{C}\times\mathbf{A}$ son perpendiculares al plano que contiene a los puntos P, Q y R.

39. Demuestre el teorema 10.5.4.

40. Demuestre el teorema 10.5.5.

41. Demuestre el teorema 10.5.6.

42. Demuestre el teorema 10.5.7.

43. Sean P, Q y R tres puntos no colineales de R^3 y sean $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$ las representaciones de posición de los vectores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$, respectivamente. Demuestre que la distancia del origen al plano determinado por los tres puntos está dada por

$$\frac{|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}|}{\|(\mathbf{B}-\mathbf{A})\times(\mathbf{C}-\mathbf{A})\|}$$

44. Sean $\overrightarrow{OP}$ la representación de posición del vector $\mathbf{A}$, $\overrightarrow{OQ}$ la representación de posición de $\mathbf{B}$, y $\overrightarrow{OR}$ la representación de posición de $\mathbf{C}$. Demuestre que el área del triángulo PQR es $\frac{1}{2}\|(\mathbf{B}-\mathbf{A})\times(\mathbf{C}-\mathbf{A})\|$.

45. Si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son vectores de V_3, demuestre que

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = (\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{C}\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}$$

46. Si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son vectores de V_3, demuestre la **identidad de Jacobi**

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) + \mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) + \mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{0}$$

Sugerencia: aplique el teorema 10.5.7 a cada término.

47. Si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son vectores de V_3, demuestre que

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

si y sólo si $\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

Sugerencia: aplique la identidad de Jacobi del ejercicio 46.

48. Describa las interpretaciones geométricas del producto cruz, del triple producto escalar y el triple producto vectorial.

10.6 SUPERFICIES

Hasta este momento se han tratado dos tipos de superficies, el plano y la esfera. El propósito de esta sección es estudiar otras superficies que desempeñan un papel importante en el estudio del Cálculo de funciones de más de una variable, en los capítulos 12 y 14.

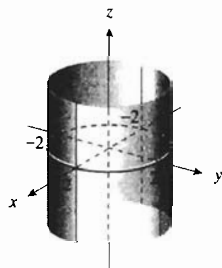
Una **superficie** está representada por una ecuación en tres variables si las coordenadas de cada punto de la superficie satisfacen la ecuación, y si cada punto cuyas coordenadas verifican la ecuación pertenece a la superficie. Un tipo de superficie es el *cilindro*, el cual se estudiará a continuación.

10.6.1 Definición de cilindro

Un **cilindro** es una superficie generada por una recta que se mueve a lo largo de una curva plana de tal manera que siempre permanece paralela a una recta fija que no está contenida en el plano de la curva dada. La recta que se mueve se denomina **generatriz** del cilindro, y la curva plana dada se llama **directriz** del cilindro. Cualquier posición de una generatriz recibe el nombre de **regladura** del cilindro.

El estudio de cilindros se limitará a aquellos que tengan una directriz en uno de los planos coordenados y regladuras perpendiculares a ese plano. Si las regladuras de un cilindro son perpendiculares al plano de la directriz, se dice que el cilindro es perpendicular al plano.

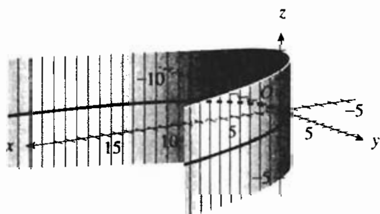
El bien conocido **cilindro circular recto** es aquel cuya directriz es una circunferencia y cuyas regladuras son paralelas al eje del cilindro.



Cilindro: $x^2 + y^2 = 4$

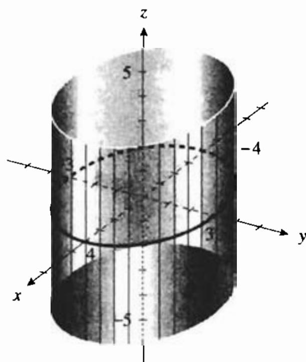
FIGURA 1

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 La figura 1 muestra un cilindro circular recto cuya directriz es $x^2 + y^2 = 4$, la cual está en el plano xy, y cuyas regladuras son paralelas al eje z. En la figura 2 se tiene un cilindro cuya directriz es la parábola $y^2 = 8x$, contenida en el plano xy, y cuyas regladuras son paralelas al eje z. Este cilindro se denomina **cilindro parabólico.** Un **cilindro elíptico** se muestra en la figura 3; su directriz es la elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$, la cual está en el plano xy, y sus regladuras son paralelas al eje z. La figura 4 muestra un **cilindro hiperbólico** que tiene como directriz a la hipérbola $25x^2 - 4y^2 = 100$, contenida en el plano xy, y sus regladuras son paralelas al eje z. ◀



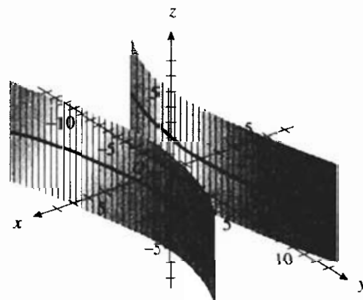
Cilindro: $y^2 = 8x$

FIGURA 2



Cilindro: $9x^2 + 16y^2 = 144$

FIGURA 3



Cilindro: $25x^2 - 4y^2 = 100$

FIGURA 4

◀

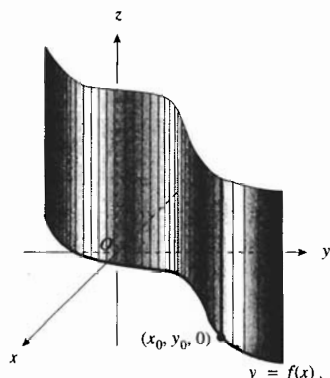


FIGURA 5

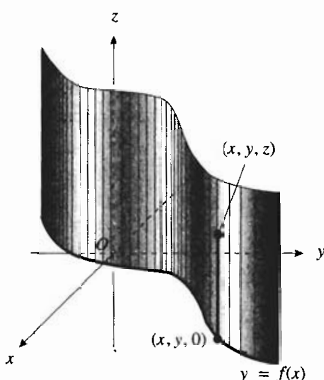
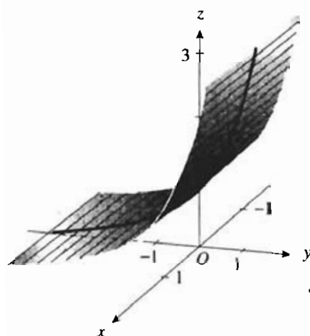


FIGURA 6



Cilindro: $y = \ln z$

FIGURA 7

Considere ahora el problema de obtener una ecuación de un cilindro que tiene una directriz en un plano coordenado y que sus regladuras son paralelas al eje coordenado que no está contenido en ese plano. Para ser específicos, considere la directriz en el plano xy y las regladuras paralelas al eje z. Refiérase a la figura 5. Suponga que una ecuación de la directriz en el plano xy es $y = f(x)$. Si el punto $(x_0, y_0, 0)$ del plano xy satisface esta ecuación, entonces cualquier punto de la forma (x_0, y_0, z) del espacio tridimensional, donde z es cualquier número real, satisfará la misma ecuación debido a que z no aparece en la ecuación. Los puntos que tienen representaciones (x_0, y_0, z) están ubicados en una recta paralela al eje z que pasa por el punto $(x_0, y_0, 0)$. Esta recta es una regladura del cilindro. En consecuencia, cualquier punto cuyas coordenadas x y y satisfagan la ecuación $y = f(x)$, estará en el cilindro. Recíprocamente, si el punto $P(x, y, z)$ pertenece al cilindro (vea la figura 6), entonces el punto $(x, y, 0)$ está en la directriz del cilindro la cual yace en el plano xy, y en consecuencia, las coordenadas x y y de P satisfacen la ecuación $y = f(y)$. Por tanto, si $y = f(x)$ se considera como una ecuación de la gráfica en el espacio tridimensional, entonces la gráfica es un cilindro cuyas regladuras son paralelas al eje z, y el cual tiene como directriz a la curva $y = f(x)$ contenida en el plano $z = 0$. Se tiene una explicación semejante cuando la directriz está en alguno de los otros planos coordenados. Los resultados se resumen en el teorema siguiente.

10.6.2 Teorema

En el espacio tridimensional, la gráfica de una ecuación en dos de las tres variables x, y, y z es un cilindro cuyas regladuras son paralelas al eje asociado con la variable que falta y cuya directriz es una curva en el plano asociado con las dos variables que aparecen en la ecuación.

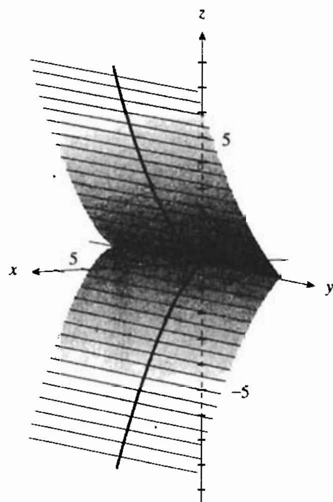
▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Del teorema 10.6.2, una ecuación del cilindro circular recto de la figura 1 es $x^2 + y^2 = 4$, considerada como una ecuación en R^3. De manera semejante, una ecuación del cilindro parabólico de la figura 2 es $y^2 = 8x$, considerada también como una ecuación en R^3. La ecuación del cilindro elíptico de la figura 3 y del cilindro hiperbólico de la figura 4 son, respectivamente, $9x^2 + 16y^2 = 144$ y $25x^2 - 4y^2 = 100$, las dos consideradas como ecuaciones en R^3. ◀

La **sección transversal** de una superficie en un plano es el conjunto de todos los puntos de la superficie que están en el plano dado. Si un plano es paralelo al plano de la directriz del cilindro, entonces la sección transversal del cilindro es congruente a su directriz. Por ejemplo, la sección transversal del cilindro elíptico de la figura 3 en cualquier plano paralelo al plano xy es una elipse.

▶ ***EJEMPLO 1*** Dibuje la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones: **(a)** $y = \ln z$; **(b)** $z^2 = x^3$

Solución

(a) La gráfica es un cilindro cuya directriz, que yace en el plano yz, es la curva $y = \ln z$ y cuyas regladuras son paralelas al eje x. La gráfica se muestra en la figura 7.



Cilindro: $z^2 = x^3$

FIGURA 8

(b) La gráfica es un cilindro cuya directriz está en el plano xz y cuyas regladuras son paralelas al eje y. Una ecuación de la directriz es $z^2 = x^3$. La figura 8 muestra la gráfica de este cilindro. ◀

10.6.3 Definición de superficie de revolución

Si una curva plana se gira alrededor de una recta fija que está en el plano de la curva, entonces la superficie así generada se denomina **superficie de revolución.** La recta fija se llama **eje** de la superficie de revolución, y la curva plana recibe el nombre de **curva generatriz** (o **revolvente**).

La figura 9 muestra una superficie de revolución cuya curva generatriz es la curva C del plano yz y cuyo eje es el eje z. Una esfera es un ejemplo particular de una superficie de revolución ya que la esfera puede generarse al girar una semicircunferencia alrededor de un diámetro. Otro ejemplo de superficie de revolución es un cilindro circular recto para el cual la curva generatriz y el eje son rectas paralelas.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Una esfera generada al girar la semicircunferencia $y^2 + z^2 = r^2$, $z \geq 0$, alrededor del eje y se muestra en la figura 10. La figura 11 muestra el cilindro circular recto para el cual la curva generatriz es la recta $z = k$ del plano xz y su eje es el eje x. ◀

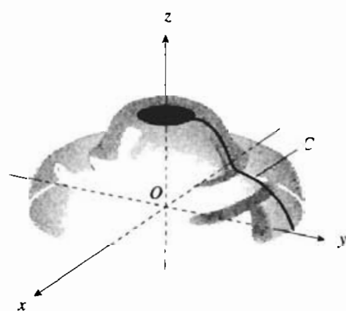
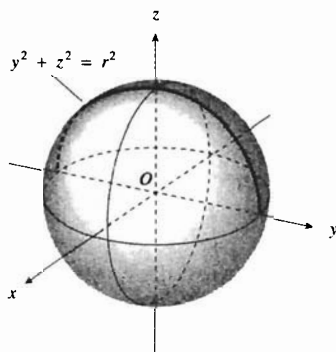


FIGURA 9



Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

FIGURA 10

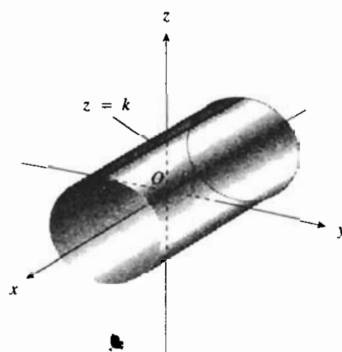


FIGURA 11

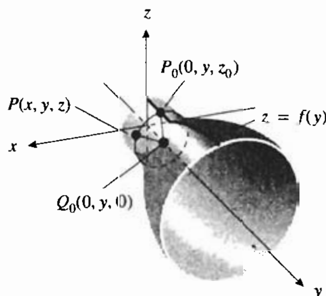


FIGURA 12

A continuación se obtendrá la ecuación de una superficie generada al girar alrededor del eje y la curva del plano yz que tiene la ecuación bidimensional

$$z = f(y) \tag{1}$$

Refiérase a la figura 12. Sea $P(x, y, z)$ cualquier punto de la superficie de revolución. Por P, se pasa un plano perpendicular al eje y, y $Q(0, y, 0)$ denota el punto de intersección de este plano con el eje y. Sea $P_0(0, y, z_0)$ el punto de intersección del plano con la curva generatriz. Como la sección transversal de la superficie con el plano que pasa por P es una circunferencia, P está en la superficie si y sólo si

$$|\overline{QP}|^2 = |\overline{QP_0}|^2$$

Debido a que $|\overline{QP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $|\overline{QP_0}| = z_0$, se obtiene de esta ecuación

$$x^2 + z^2 = z_0^2 \qquad (2)$$

El punto P_0 está en la curva generatriz; por lo que sus coordenadas deben satisfacer (1). Por tanto,

$$z_0 = f(y)$$

De esta ecuación y de (2), el punto P está en la superficie de revolución si y sólo si

$$x^2 + z^2 = [f(y)]^2 \qquad (3)$$

Ésta es la ecuación deseada de la superficie de revolución. Puesto que (3) es equivalente a

$$\pm\sqrt{x^2 + z^2} = f(y)$$

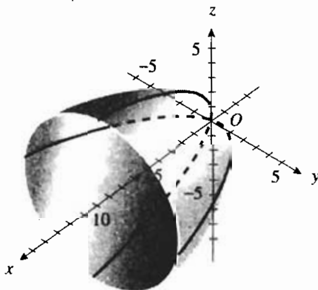
se puede obtener (3) al sustituir z por $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$ en (1).

De manera similar se puede demostrar que si la curva del plano yz tiene la ecuación bidimensional

$$y = g(z) \qquad (4)$$

se gira alrededor del eje z, se obtiene una ecuación de la superficie de revolución generada al sustituir y por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ en (4). Se tienen observaciones análogas cuando una curva en cualquier plano coordenado se hace girar alrededor de uno de los ejes coordenados de ese plano. En resumen, las gráficas de las ecuaciones siguientes son superficies de revolución que tiene el eje indicado: $x^2 + y^2 = [F(z)]^2$ —eje z; $x^2 + z^2 = [F(y)]^2$ —eje y; $y^2 + z^2 = [F(x)]^2$ —eje x. En cada caso, las secciones transversales de la superficie en planos perpendiculares al eje son circunferencias que tienen sus centros sobre el eje.

EJEMPLO 2 Obtenga una ecuación de la superficie de revolución generada al girar alrededor del eje x la parábola $y^2 = 4x$ del plano xy. Dibuje la superficie.



Paraboloide de revolución $y^2 + z^2 = 4x$

FIGURA 13

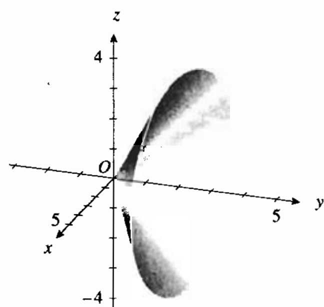
Solución Si en la ecuación de la parábola se sustituye y por $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$, se obtiene

$$y^2 + z^2 = 4x$$

La superficie se muestra en la figura 13. La misma superficie se genera si la parábola $z^2 = 4x$ del plano xz se gira alrededor del eje x. ◀

La superficie del ejemplo 2 se denomina **paraboloide de revolución.** Si se gira una elipse alrededor de uno de sus ejes, la superficie generada se llama **elipsoide de revolución.** Un **hiperboloide de revolución** se obtiene cuando una hipérbola se gira alrededor de un eje. La superficie del ejemplo siguiente se denomina **cono circular recto.**

EJEMPLO 3 Dibuje la superficie $x^2 + z^2 - 4y^2 = 0$, $y \geq 0$.



Cono: $x^2 + z^2 - 4y^2 = 0, \quad y \geq 0$

FIGURA 14

Solución La ecuación dada es de la forma $x^2 + z^2 = [F(y)]^2$; por lo que su gráfica es una superficie de revolución que tiene al eje y como su eje. Al resolver la ecuación dada para y, se obtiene

$$2y = \pm\sqrt{x^2 + z^2}$$

En consecuencia, la curva generatriz puede ser la recta $2y = x$ del plano xy, o la recta $2y = z$ del plano yz. Al dibujar las dos curvas generatrices posibles y empleando el hecho de que las secciones transversales de la superficie en planos perpendiculares al eje y son circunferencias cuyos centros están en el eje y, se obtiene la superficie mostrada en la figura 14. Observe que como $y \geq 0$, el cono tiene sólo un manto. ◀

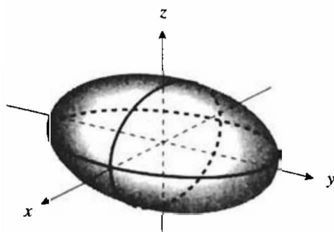
Tal vez estudió en algún curso de matemáticas previas al Cálculo (en otro caso consulte la sección A.10 del apéndice) que la gráfica de una ecuación de segundo grado en dos variables x y y,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una sección cónica. La gráfica de una ecuación de segundo grado en las tres variables x, y y z,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \tag{5}$$

se denomina **superficie cuádrica.** Los tipos más simples de superficies cuádricas son los cilindros parabólicos, elípticos e hiperbólicos, los cuales ya se han estudiado. Ahora se considerarán otros seis tipos de superficies cuádricas. En el estudio de cada una de estas superficies, se elegirán los ejes coordenados de modo que las ecuaciones resulten en su forma más simple, y se hará referencia a las secciones transversales de las superficies en planos paralelos a los planos coordenados. Estas secciones transversales ayudan a visualizar la superficie.



Elipsoide

FIGURA 15

Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{6}$$

donde a, b y c son positivos. Consulte la figura 15.

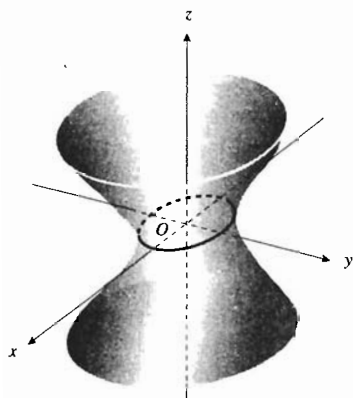
Si en (6) z se sustituye por 0, se obtiene la sección transversal del elipsoide en el plano xy, la cual es la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A fin de obtener las secciones transversales de la superficie en los planos $z = k$, se reemplaza z por k en la ecuación del elipsoide, de lo que se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$$

Si $|k| < c$, la sección transversal es una elipse y las longitudes de los semiejes decrece hacia cero conforme $|k|$ aumenta hacia el valor de c. Si $|k| = c$, la intersección del plano $z = k$ con el elipsoide consiste del único punto $(0, 0, k)$. Si $|k| > c$, no existe intersección. La discusión es semejante si se consideran las secciones transversales formadas por planos paralelos a alguno de los otros dos planos coordenados.



Hiperboloide elíptico de una hoja

FIGURA 16

Los números a, b y c son las longitudes de los semiejes del elipsoide. Si dos cualesquiera de estos tres números son iguales, se obtiene un elipsoide de revolución, también denominado **esferoide.** Un esferoide para el cual el tercer número es mayor que los otros dos números iguales, se dice **prolato** (o **alargado**). Un esferoide prolato tiene la forma de un balón de fútbol americano. Un esferoide **oblato** (o **achatado**) se obtiene si el tercer número es menor que los dos números iguales. Si los tres números a, b y c de la ecuación de un elipsoide son iguales, entonces el elipsoide es una **esfera.**

Hiperboloide elíptico de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{7}$$

donde a, b y c son positivos. Refiérase a la figura 16.

Las secciones transversales en los planos $z = k$ son las elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

Cuando $k = 0$, las longitudes de los semiejes de la elipse son pequeñas y aumentan conforme $|k|$ se incrementa. Las secciones transversales en los planos $x = k$ son las hipérbolas

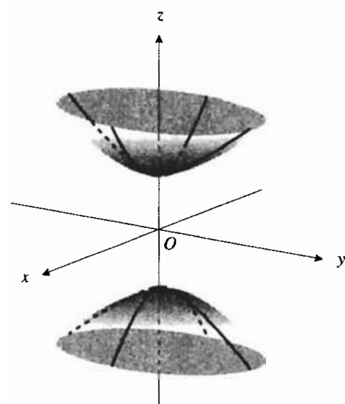
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$$

Si $|k| < a$, el eje transverso de la hipérbola es paralelo al eje y, y si $|k| > a$, el eje transverso es paralelo al eje z. Si $k = a$, la hipérbola degenera en dos rectas:

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0$$

De manera análoga, las secciones transversales en los planos $y = k$ también son hipérbolas. El eje de este paraboloide es el eje z.

Si $a = b$, la superficie es un hiperboloide de revolución para el cual el eje es la recta que contiene al eje conjugado.



Hiperboloide elíptico de dos hojas

FIGURA 16

Hiperboloide elíptico de dos hojas

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{8}$$

donde a, b y c son positivos. Consulte a la figura 17.

Al sustituir z por k en (8) se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1$$

Si $|k| < c$, el plano $z = k$ no intersecta a la superficie; en consecuencia, no existen puntos de la superficie entre los planos $z = -c$ y $z = c$. Si $|k| = c$, la intersección del plano $z = k$ con la superficie consiste del único punto $(0, 0, k)$. Cuando $|k| > c$, la sección transversal de la superficie en el plano $z = k$ es una elipse, y las longitudes de los semiejes se incrementan conforme $|k|$ aumenta.

Las secciones transversales de la superficie en los planos $x = k$ son las hipérbolas

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{a^2}$$

cuyos ejes transversos son paralelos al eje z. De manera similar, las secciones transversales en los planos $y = k$ son las hipérbolas

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2}$$

para las cuales sus ejes transversos también son paralelos al eje z.

Si $a = b$, la superficie es un hiperboloide de revolución en el que el eje es la recta que contiene al eje transverso de la hipérbola.

Cada una de las tres superficies cuádricas anteriores es simétrica con respecto a cada uno de los planos coordenados y también es simétrica con respecto al origen. Sus gráficas se denominan **cuádricas centrales** y sus centros están en el origen.

La gráfica de cualquier ecuación de la forma

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

donde a, b y c son positivos, es una cuádrica central.

EJEMPLO 4 Dibuje la gráfica de la ecuación

$$4x^2 - y^2 + 25z^2 = 100$$

e identifique la superficie.

Solución Al dividir ambos miembros de la ecuación entre 100 se obtiene

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} + \frac{z^2}{4} = 1$$

la cual es de la forma (7) con y y z intercambiadas. En consecuencia, la superficie es un hiperboloide elíptico de una hoja cuyo eje es el eje y. Las secciones transversales en los planos $y = k$ son las elipses

$$\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1 + \frac{k^2}{100}$$

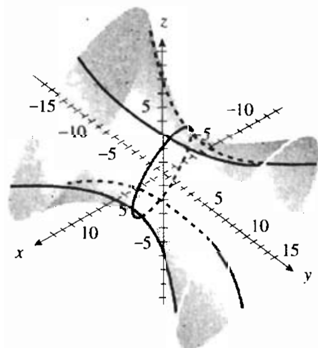
Las secciones transversales en los planos $x = k$ son las hipérbolas

$$\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{100} = 1 - \frac{k^2}{25}$$

y las secciones transversales en los planos $z = k$ son las hipérbolas

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1 - \frac{k^2}{4}$$

La superficie se muestra en la figura 18. ◀



Hiperboloide elíptico de una hoja

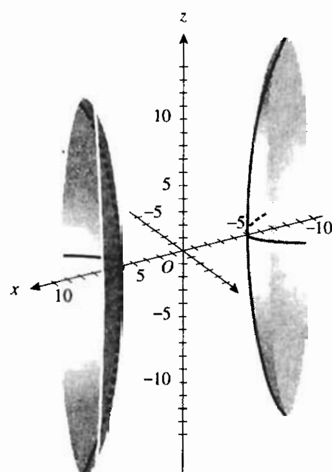
$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} + \frac{z^2}{4} = 1$$

FIGURA 18

EJEMPLO 5 Dibuje la gráfica de la ecuación

$$4x^2 - 25y^2 - z^2 = 100$$

e identifique la superficie.



Hiperboloide elíptico de dos hojas

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{100} = 1$$

FIGURA 19

Solución Si se dividen los dos miembros entre 100 se puede escribir la ecuación como

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{100} = 1$$

la cual es de la forma (8) con x y z intercambiadas; de modo que la superficie es un hiperboloide elíptico de dos hojas, cuyo eje es el eje x. Las secciones transversales en los planos $x = k$, donde $|k| > 5$, son las elipses

$$\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{100} = \frac{k^2}{25} - 1$$

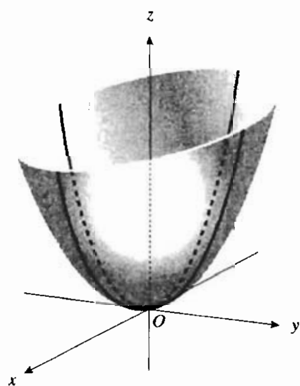
Los planos $x = k$, donde $|k| < 5$, no intersectan a la superficie. Las secciones transversales en los planos $y = k$ son las hipérbolas

$$\frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{100} = 1 + \frac{k^2}{4}$$

y las secciones transversales en los planos $z = k$ son las hipérbolas

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1 + \frac{k^2}{100}$$

La superficie requerida se muestra en la figura 19. ◀



Paraboloide elíptico

FIGURA 20

Las dos superficies siguientes se denominan **cuádricas no centrales.**

Paraboloide elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \qquad (9)$$

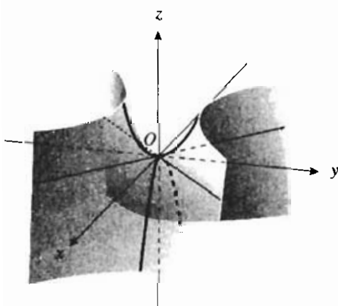
donde a y b son positivos y $c \neq 0$. La figura 20 muestra la superficie para $c > 0$.

Al sustituir k por z en (9) se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k}{c}$$

Cuando $k = 0$, esta ecuación se transforma en $b^2x^2 + a^2y^2 = 0$, la cual representa un único punto, el origen. Si $k \neq 0$, y k y c tienen el mismo signo, la ecuación corresponde a una elipse. Por lo que se concluye que las secciones transversales de la superficie en los planos $z = k$, donde k y c tienen el mismo signo, son elipses y las longitudes de los semiejes se incrementa a medida que $|k|$ aumenta. Si k y c tienen signos opuestos, los planos $z = k$ no intersectan la superficie. Las secciones transversales de la superficie en los planos $x = k$ y $y = k$ son parábolas. Cuando $c > 0$, las parábolas abren hacia arriba, como se muestra en la figura 20; cuando $c < 0$, las parábolas abren hacia abajo.

Si $a = b$, la superficie es un paraboloide de revolución.



Paraboloide hiperbólico

FIGURA 21

Paraboloide hiperbólico

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c} \qquad (10)$$

donde a y b son positivas y $c \neq 0$. La superficie se muestra en la figura 21 para $c > 0$.

Las secciones transversales de la superficie en los plano $z = k$, donde $k \neq 0$, son hipérbolas que tienen sus ejes transversos paralelos al eje y si k y c poseen el mismo signo, y los ejes son paralelos al eje x si k y c tienen signos opuestos. La sección transversal de la superficie en el plano $z = 0$ consiste de dos líneas rectas que pasan por el origen. Las secciones transversales en los planos $x = k$ son parábolas que abren hacia arriba si $c > 0$, y abren hacia abajo si $c < 0$. Las secciones transversales en los planos $y = k$ también son parábolas, abren hacia abajo si $c > 0$ y abren hacia arriba si $c < 0$.

EJEMPLO 6 Dibuje la gráfica de la ecuación

$$3y^2 + 12z^2 = 16x$$

e identifique la superficie.

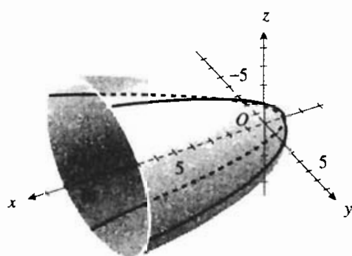
Solución La ecuación dada puede escribirse como

$$\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = \frac{x}{3}$$

la cual es de la forma de (9) con x y z intercambiadas. En consecuencia, la gráfica de la ecuación es un paraboloide elíptico cuyo eje es el eje x. Las secciones transversales en los planos $x = k$, donde $k > 0$, son las elipses

$$\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = \frac{k}{3}$$

Los planos $x = k$, donde $k < 0$, no intersectan la superficie. Las secciones transversales en los planos $y = k$ son las parábolas $12z^2 = 16x - 3k^2$, y las secciones transversales en los planos $z = k$ son las parábolas $3y^2 = 16x - 12k^2$. La figura 22 muestra el paraboloide elíptico. ◀



Paraboloide elíptico

$$\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = \frac{x}{3}$$

FIGURA 22

EJEMPLO 7 Dibuje la gráfica de la ecuación

$$3y^2 - 12z^2 = 16x$$

e identifique la superficie.

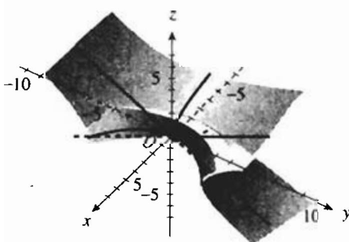
Solución La ecuación dada puede expresarse como

$$\frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = \frac{x}{3}$$

la cual es de la forma de (10) con x y z intercambiadas. Por tanto, la superficie es un paraboloide hiperbólico. Las secciones transversales en los planos $x = k$, donde $k \neq 0$ son las hipérbolas

$$\frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = \frac{k}{3}$$

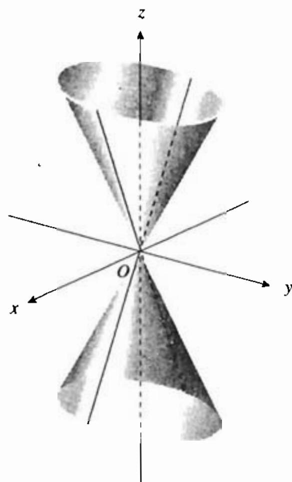
La sección transversal en el plano yz consiste de las dos rectas $y = 2z$ y $y = -2z$. En los planos $z = k$ las secciones transversales son las parábolas $3y^2 = 16x + 12k^2$; en los planos $y = k$ las secciones transversales son las parábolas $12z^2 = 3k^2 - 16x$. El paraboloide hiperbólico se muestra en la figura 23. ◀



Paraboloide hiperbólico

$$\frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = \frac{x}{3}$$

FIGURA 23



Cono elíptico

FIGURA 24

Cono elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (11)$$

donde a, b y c son positivos. Consulte la figura 24.

La intersección del plano $z = 0$ con la superficie es un punto, el origen. Las secciones transversales de la superficie en los planos $z = k$, donde $k \neq 0$, son elipses, y las longitudes de los semiejes aumentan conforme k se incrementa. Las secciones transversales en los planos $x = 0$ y $y = 0$ son pares de rectas que se intersectan. En los planos $x = k$ y $y = k$, donde $k \neq 0$, las secciones transversales son hipérbolas.

▶ *EJEMPLO 8* Dibuje la gráfica de la ecuación

$$4x^2 - y^2 + 25z^2 = 0$$

e identifique la superficie.

Solución La ecuación dada se puede escribir como

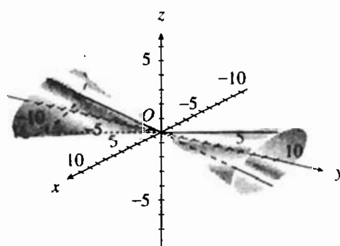
$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} + \frac{z^2}{4} = 0$$

la cual es de la forma de (11) con y y z intercambiadas. Por tanto, la superficie es un cono elíptico que tiene al eje y como su eje. La superficie intersecta al plano $y = 0$ sólo en el origen. La intersección de la superficie con el plano $x = 0$ es el par de rectas que se intersectan $y = \pm 5z$, y la intersección con el plano $z = 0$ es el par de rectas que se intersectan $y = \pm 2x$. Las secciones transversales en los planos $y = k$, donde $k \neq 0$, son las elipses

$$\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{4} = \frac{k^2}{100}$$

En los planos $x = k$ y $z = k$, donde $k \neq 0$, las secciones transversales son, respectivamente, las hipérbolas

$$\frac{y^2}{100} - \frac{z^2}{4} = \frac{k^2}{25} \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{25} = \frac{k^2}{4}$$



Cono elíptico: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} + \frac{z^2}{4} = 0$

FIGURA 25

La superficie se presenta en la figura 25. ◀

La tabla 1 resume la discusión de los seis tipos básicos de superficies cuádricas. En dicha tabla se muestran dos gráficas para cada superficie. Una gráfica fue dibujada, y la otra fue trazada mediante un programa de computadora empleado para generar superficies. Muchos programas para trazar gráficas en computadora se encuentran disponibles, generalmente involucran muchos cálculos numéricos. Estos programas se denominan **graficadores matemáticos,** los cuales se tratan con mayor detalle en la sección 12.1, donde se presentarán diversas e intrincadas superficies que pueden ser trazadas mediante estos programas.

La ecuación (5) es la ecuación general de segundo grado en x, y y z. Puede demostrarse que mediante una traslación y rotación de los ejes coor-

Tabla 1

Superficie cuádrica	*Trazas en el plano indicado*	*Gráfica dibujada*	*Gráfica trazada por medio de Mathematica*
Elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	plano xy: Elipse $z=\lvert k\rvert<c$: Elipse plano yz: Elipse $x=\lvert k\rvert<c$: Elipse plano xz: Elipse $y=\lvert k\rvert<c$: Elipse	z, x, y	
Hiperboloide elíptico de una hoja $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	plano xy: Elipse $z=k$: Elipse plano yz: Hipérbola $x=k$ Hipérbola plano xz: Hipérbola $y=k$: Hipérbola	z, x, y	
Hiperboloide elíptico de dos hojas $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	plano xy: Ninguna $z=\lvert k\rvert<c$: Ninguna $z=\lvert k\rvert>c$: Elipse plano yz: Hipérbola $x=k$: Hipérbola plano xz: Hipérbola $y=k$: Hipérbola	z, x, y	
Paraboloide elíptico $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ $c>0$	plano xy: Punto (origen) $z=k>0$: Elipse $z=k<0$: Ninguno plano yz: Parábola $x=k$: Parábola plano xz: Parábola $y=k$: Parábola	z, x, y	
Paraboloide hiperbólico $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c}$ $c>0$	plano xy: Dos rectas que se intersectan (en el origen) $z=k\neq 0$: Hipérbola plano yz: Parábola $x=k$: Parábola plano xz: Parábola $y=k$: Parábola	z, y	
Cono elíptico $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	plano xy: Punto (origen) $z=k\neq 0$: Elipse plano yz: Dos rectas que se intersectan (en el origen) $x=k\neq 0$: Hipérbola plano xz: Dos rectas que se intersectan (en el origen) $y=k\neq 0$: Hipérbola	z, x, y	

denados del espacio tridimencional (cuyo estudio está más allá del alcance de este libro) esta ecuación puede reducirse a una de las dos formas siguientes:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \qquad (12)$$

$$Ax^2 + By^2 + Iz = 0 \qquad (13)$$

Las gráficas de las ecuaciones de segundo grado serán uno de los seis tipos anteriores de cuádricas o bien, degenerarán en un cilindro, un plano, una recta, un punto o el conjunto vacío.

Las superficies no degeneradas asociadas con ecuaciones de la forma (12) son las cuádricas centrales, mientras que aquéllas asociadas con ecuaciones de la forma (13) son las cuádricas no centrales. A continuación se presentan algunos casos degenerados:

$x^2 - y^2 = 0$; dos planos, $x - y = 0$ y $x + y = 0$
$z^2 = 0$; un plano, el plano xy
$x^2 + y^2 = 0$; una recta, el eje z
$x^2 + y^2 + z^2 = 0$; un punto, el origen
$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$; el conjunto vacío

EJERCICIOS 10.6

En los ejercicios 1 a 4, dibuje la sección transversal del cilindro dado en el plano indicado.

1. $4x^2 + y^2 = 16$; plano xy
2. $4z^2 - y^2 = 4$; plano yz
3. $z = e^x$; plano xz
4. $x = |y|$; plano xy

En los ejercicios 5 a 12, dibuje el cilindro que tiene la ecuación indicada.

5. $4x^2 + 9y^2 = 36$
6. $z = \text{sen } y$
7. $y = |z|$
8. $x^2 - z^2 = 4$
9. $z = 2x^2$
10. $z^2 = 4y^2$
11. $y = \cosh x$
12. $x^2 = y^3$

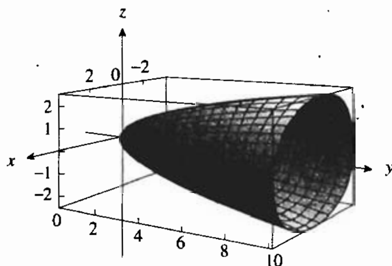
En los ejercicios 13 a 20, obtenga una ecuación de la superficie de revolución generada al girar la curva plana alrededor del eje indicado. Dibuje la superficie

13. $x^2 = 4y$ en el plano xy, alrededor del eje y.
14. $x^2 + 4z^2 = 16$ en el plano xz, alrededor del eje z.
15. $x^2 + 4z^2 = 16$ en el plano xz, alrededor del eje x.
16. $x^2 = 4y$ en el plano xy, alrededor del eje x.
17. $y = 3z$ en el plano yz, alrededor del eje y.
18. $9y^2 - 4z^2 = 144$ en el plano yz, alrededor del eje z.
19. $y = \text{sen } x$ en el plano xy, alrededor del eje x.
20. $y^2 = z^3$ en el plano yz, alrededor del eje z.

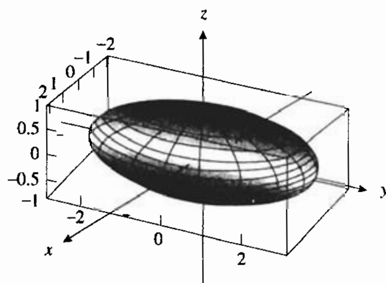
En los ejercicios 21 a 28, obtenga una curva generatriz y el eje para la superficie de revolución dada. Dibuje la superficie.

21. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$
22. $x^2 + z^2 = y$
23. $x^2 + y^2 - z^2 = 4$
24. $y^2 + z^2 = e^{2x}$
25. $x^2 + z^2 = |y|$
26. $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$
27. $9x^2 - y^2 + 9z^2 = 0$
28. $4x^2 + 4y^2 - z = 9$
29. En los incisos (a)–(f), relacione la ecuación con la superficie correspondiente, generada en computadora (i)–(vi), e identifique la superficie.
   (a) $9x^2 - 4y^2 + 36z = 36$
   (b) $5x^2 - 2z^2 = 3y$
   (c) $9x^2 - 4y^2 + 36z^2 = 0$
   (d) $5x^2 + 2z^2 = 3y$
   (e) $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$
   (f) $9x^2 - 4y^2 - 36z^2 = 36$

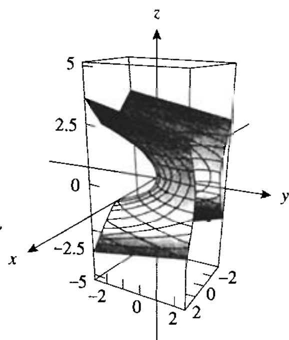
(i)



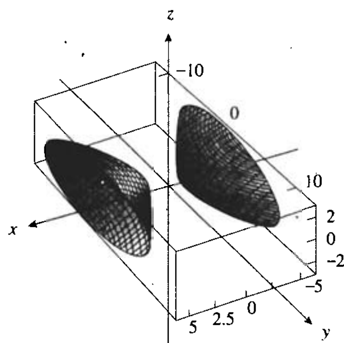
(ii)



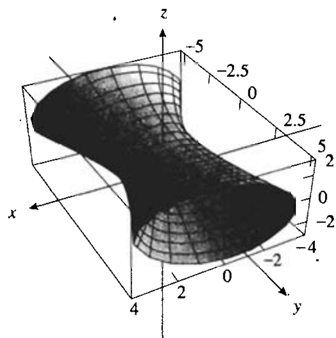
(iii)



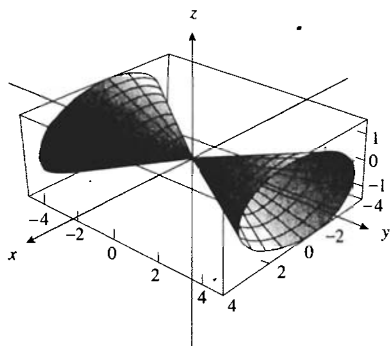
(iv)



(v)



(vi)



30. En los incisos (a)–(f), relacione la ecuación con la superficie correspondiente, generada en computadora, (i)–(vi) e identifique la superficie.

(a) $4x^2 - 16y^2 + 9z^2 = 0$

(b) $3y^2 + 7z^2 = 6x$

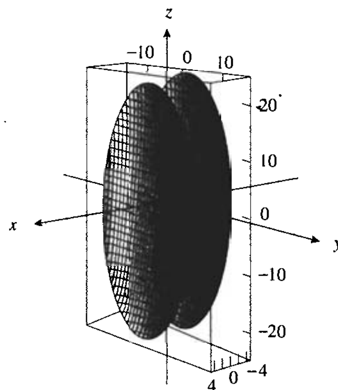
(c) $25x^2 = 4y^2 + z^2 + 100$

(d) $3y^2 - 7z^2 = 6x$

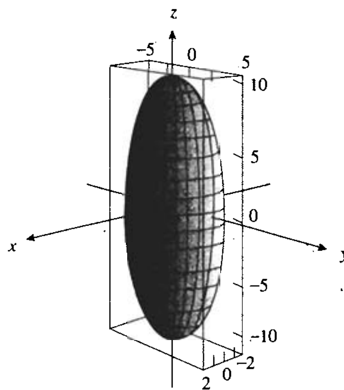
(e) $25x^2 = 4y^2 - z^2 + 100$

(f) $25x^2 = 100 - 4y^2 - z^2$

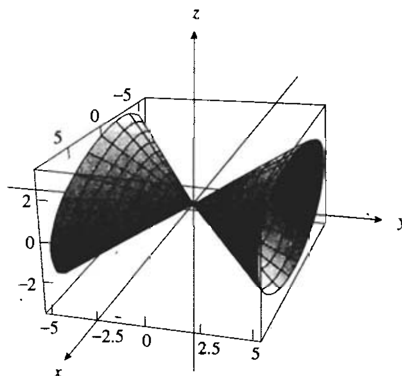
(i)



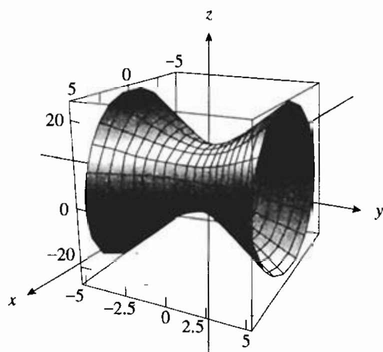
(ii)



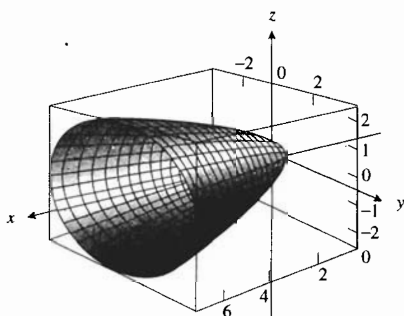
(iii)



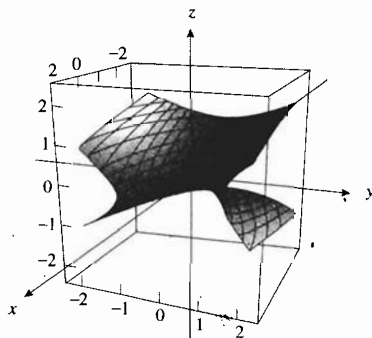
(iv)



(v)



(vi)



En los ejercicios 31 a 42, dibuje la gráfica de la ecuación e identifique la superficie.

31. $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$ **32.** $4x^2 - 9y^2 - z^2 = 36$

33. $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$ **34.** $4x^2 - 9y^2 + z^2 = 36$

35. $x^2 = y^2 - z^2$ **36.** $x^2 = y^2 + z^2$

37. $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{z^2}{25} = 4y$ **38.** $\dfrac{y^2}{25} + \dfrac{x^2}{36} + \ = 4z$

39. $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{z^2}{25} = 9y$ **40.** $x^2 = 2y + 4z$

41. $x^2 + 16z^2 = 4y - 16$ **42.** $9y^2 - 4z^2 + 18x = 0$

43. Obtenga los valores de k para los cuales la intersección del plano $x + ky = 1$ y el hiperboloide elíptico de dos hojas $y^2 - x^2 - z^2 = 1$ sea **(a)** una elipse, y **(b)** una hipérbola.

44. Determine el vértice y el foco de la parábola que es la intersección del plano $y = 2$ y el paraboloide hiperbólico $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{z}{9}$.

45. Obtenga el vértice y el foco de la parábola que es la intersección del plano $x = 1$ y el paraboloide hiperbólico $\dfrac{z^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = \dfrac{y}{3}$.

46. Calcule el área de la sección plana formada por la intersección del plano $y = 3$ y el sólido limitado por el elipsoide $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{4} = 1$.

47. Demuestre que la intersección de la superficie $x^2 - 4y^2 - 9z^2 = 36$ y el plano $x + z = 9$ es una circunferencia.

48. Pruebe que la intersección del paraboloide hiperbólico $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{z}{c}$ y el plano $z = bx + ay$ consiste de dos rectas que se cortan.

En los ejercicios 49 a 51, utilice el método del rebanado para calcular el volumen del sólido. La medida del área de la región limitada por la elipse que tiene semiejes a y b es πab.

49. El sólido limitado por el elipsoide $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$.

50. El sólido limitado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

51. El sólido limitado por el plano $z = h$, donde $h > 0$, y el paraboloide elíptico $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}$, donde $c > 0$.

52. Dibuje la superficie de revolución generada al girar la tractriz

$$x = 3\ln\left(\frac{3 + \sqrt{9 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{9 - y^2}$$

alrededor del eje x.

53. Describa cómo dibujaría la superficie cilíndrica generada al girar la curva $x = f(y)$ del plano xy alrededor del eje y. En su descripción invente un ejemplo de una curva particular $x = f(y)$ e incluya la ecuación de la superficie cilíndrica obtenida.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 10

SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 10

1. Defina un *vector* (i) en el plano, y (ii) en el espacio tridimensional.
2. ¿Cómo se representan los vectores geométricamente? ¿Cómo determina cuándo dos representaciones denotan el mismo vector?
3. ¿Cómo se determina el *módulo* y la *dirección* de un vector en (i) V_2, y (ii) V_3? Invente un ejemplo para cada caso.
4. ¿Cómo se determina la *suma* y la *diferencia* de dos vectores en (i) V_2, y (ii) V_3? Invente un ejemplo para cada caso.
5. Interprete geométricamente la suma y la diferencia de dos vectores.
6. Defina el *producto* de un escalar c y un vector **A** en (i) V_2, y (ii) V_3. Invente un ejemplo para cada caso.
7. ¿Cuál es la relación entre $c\mathbf{A}$ y **A** si (i) $c > 0$, y (ii) $c < 0$? Invente un ejemplo para cada situación.
8. ¿Qué leyes algebraicas son satisfechas por las operaciones de adición algebraica y multiplicación por un escalar de cualesquiera vectores de V_2 y V_3?
9. ¿Cómo se expresa cualquier vector de (i) en V_2 en términos de los vectores **i** y **j**, y (ii) en V_3 en términos de los vectores **i**, **j** y **k**? Invente un ejemplo para cada caso.
10. ¿Por qué **i** y **j** forman una base para el espacio vectorial V_2, e **i**, **j** y **k** forman una base para el espacio vectorial V_3?
11. ¿Cómo se expresa un vector (i) en V_2 en términos de su módulo y *ángulo director*, y (ii) en V_3 en términos de su módulo y sus *cosenos directores*? Invente un ejemplo para cada situación.
12. Escriba una ecuación que exprese la relación que satisfacen los cosenos directores de cualquier vector de V_3.
13. ¿Cuál es la *fórmula para la distancia no dirigida* entre dos puntos de R^3? Invente un ejemplo.
14. ¿Cuáles son las *fórmulas para las coordenadas del punto medio* de un segmento de recta entre dos puntos de R^3? Invente un ejemplo.
15. Defina una *esfera*. ¿Cuál es la forma centro-radio de la ecuación de una esfera de radio r y centro (h, k, l)? Invente un ejemplo.
16. Defina el *producto punto* de dos vectores (i) en V_2, y (ii) en V_3? Invente un ejemplo para cada caso.
17. ¿Qué leyes algebraicas son satisfechas por el producto punto de dos vectores?
18. Defina el *ángulo entre dos vectores*.
19. ¿Cómo se utiliza el producto punto para calcular el ángulo entre dos vectores? Invente un ejemplo.
20. ¿Cómo se emplea el producto punto para determinar si dos vectores son *ortogonales*? Invente un ejemplo.
21. Defina la *proyección escalar* de un vector sobre otro. ¿Cuál es la fórmula para determinar la proyección escalar de un vector **B** sobre el vector **A**? Invente un ejemplo.
22. ¿Cuál es la fórmula para determinar el *vector proyección* del vector **B** sobre el vector **A**? Invente un ejemplo.
23. Invente un ejemplo que muestre cómo se emplean los vectores para calcular la *distancia de un punto P a una recta* que pasa por los puntos A y B en R^3.
24. Invente un ejemplo que ilustre cómo calcular el trabajo realizado por una fuerza **F** que desplaza un objeto de un punto A hasta el punto B si la dirección de **F** no coincide con la recta de movimiento de A a B.
25. Defina el *plano* que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que tiene a **N** como un vector normal. Escriba una ecuación de este plano si **N** es el vector $\langle a, b, c\rangle$. Invente un ejemplo.
26. Defina el *ángulo entre dos planos*. Invente un ejemplo.
27. Invente un ejemplo de (i) dos *planos paralelos*, y (ii) dos *planos perpendiculares*.
28. Invente un ejemplo que muestre cómo se utilizan los vectores para calcular la *distancia de un punto a un plano*.
29. Escriba las *ecuaciones paramétricas* de la recta que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela a la representación del vector $\langle a, b, c\rangle$. Escriba las *ecuaciones simétricas* de esta recta.
30. Invente un ejemplo que ilustre cómo obtener las ecuaciones simétricas de una recta que pasa por dos puntos de R^3.
31. Defina el *producto cruz* de dos vectores. Escriba la notación de determinates empleada como un recurso nemotécnico para recordar la fórmula del producto cruz. Invente un ejemplo.
32. ¿Qué leyes algebraicas son satisfechas por el producto cruz de dos vectores, y cuáles no?
33. Escriba tres productos cruz que contengan al vector **A** y que tengan como resultado al vector cero.
34. ¿A qué es igual el *triple producto escalar* de los tres vectores **A**, **B** y **C**? Invente un ejemplo.
35. ¿A qué es igual *el triple producto vectorial* de los tres vectores **A**, **B** y **C**? Invente un ejemplo.
36. Escriba la fórmula que permite expresar $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$ en términos de $\|\mathbf{A}\|$, $\|\mathbf{B}\|$, y el ángulo entre **A** y **B**.
37. Proporcione la interpretación geométrica de $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$. Invente un ejemplo.
38. ¿Cómo puede emplearse el producto cruz para determinar si dos vectores son paralelos? Invente un ejemplo.
39. Invente un ejemplo que muestre cómo puede emplearse el producto cruz para obtener la ecuación de un plano que pasa por tres puntos de R^3.

40. ¿En qué consiste la interpretación geométrica del triple producto escalar? Invente un ejemplo.
41. Defina el término *cilindro.*
42. Invente un ejemplo de una ecuación de un cilindro cuyas *regladuras* sean paralelas al **(i)** eje x, **(ii)** eje y, y **(iii)** eje z. Dibuje la superficie.
43. Invente un ejemplo de una ecuación de una *superficie de revolución* cuya *curva generatriz* esté en el plano xy y cuyo eje sea **(i)** el eje x, y **(ii)** el eje y. Dibuje la superficie.
44. Invente un ejemplo de una ecuación de un *elipsoide* y dibuje la superficie.
45. Invente un ejemplo de una ecuación de un *hiperboloide elíptico de una hoja* y dibuje la superficie.
46. Invente un ejemplo de una ecuación de un *hiperboloide elíptico de dos hojas* y dibuje la superficie.
47. Invente un ejemplo de una ecuación de un *paraboloide elíptico* y dibuje la superficie.
48. Invente un ejemplo de una ecuación de un *paraboloide hiperbólico* y dibuje la superficie.
49. Invente un ejemplo de una ecuación de un *cono elíptico* y dibuje la superficie.

▶ EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 10

En los ejercicios 1 a 18, considere $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ y $\mathbf{C} = 9\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$.

1. Calcule $3\mathbf{B} - 7\mathbf{A}$.
2. Obtenga $5\mathbf{B} - 3\mathbf{C}$.
3. Obtenga $\|3\mathbf{B} - 7\mathbf{A}\|$.
4. Calcule $\|5\mathbf{B} - 3\mathbf{C}\|$.
5. Calcule $\|3\mathbf{B}\| - \|7\mathbf{A}\|$.
6. Obtenga $\|5\mathbf{B}\| - \|3\mathbf{C}\|$.
7. Obtenga $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$.
8. Calcule $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.
9. Determine un vector unitario que tenga la misma dirección que $2\mathbf{A} + \mathbf{B}$.
10. Calcule el vector unitario ortogonal a **B**.
11. Encuentre los escalares h y k tales que $\mathbf{A} = h\mathbf{B} + k\mathbf{C}$.
12. Obtenga los escalares h y k tales que $h\mathbf{A} + k\mathbf{B} = -\mathbf{C}$.
13. Determine la proyección escalar de **A** sobre **B**.
14. Obtenga la proyección escalar de **C** sobre **A**.
15. Calcule el vector proyección de **A** sobre **B**.
16. Determine el vector proyección de **C** sobre **A**.
17. Obtenga la componente de **B** en la dirección de **A**.
18. Calcule $\cos\alpha$ si α es el ángulo entre **A** y **C**.

En los ejercicios 19 y 20, $\mathbf{A} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ *y* $\mathbf{B} = h\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

19. Determine h de modo que el ángulo entre **A** y **B** sea $\frac{2}{3}\pi$.
20. Demuestre que no existe h tal que el ángulo entre **A** y **B** sea $\frac{1}{3}\pi$.

En los ejercicios 21 a 30, $\mathbf{A} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{D} = 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ *y* $\mathbf{E} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

21. Obtenga $6\mathbf{C} + 4\mathbf{D} - \mathbf{E}$.
22. Calcule $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{C}$.
23. Calcule $\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$.
24. Obtenga$(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) - (\mathbf{D} \times \mathbf{E})$.
25. Obtenga $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| \; \|\mathbf{D} \times \mathbf{E}\|$.
26. Calcule $2\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + 3\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$.
27. Determine la proyección escalar de **A** sobre **B**.
28. Obtenga la proyección escalar de **C** sobre **D**.
29. Calcule el vector proyección de **E** sobre **C**.
30. Determine el vector proyección de **D** sobre **E**.

En los ejercicios 31 a 36, existe sólo una forma para obtener una expresión que tenga sentido al insertar paréntesis. Escriba los paréntesis y determine el vector o escalar indicado si $\mathbf{A} = \langle 3, -2, 4\rangle$, $\mathbf{B} = \langle -5, 7, 2\rangle$ y $\mathbf{C} = \langle 4, 6, -1\rangle$.

31. $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{C}$
32. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{BC}$
33. $\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$
34. $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{C}$
35. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C}$
36. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A}$
37. Dibuje la gráfica de $x = 3$ en R, R^2 y R^3.
38. Dibuje el conjunto de puntos que satisfacen las ecuaciones simultáneas $x = 6$ y $y = 3$ en R^2 y R^3.

En los ejercicios 39 a 48, describa en palabras el conjunto de puntos de R^3 *que satisfacen la ecuación o par de ecuaciones. Dibuje la gráfica.*

39. $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
40. $\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$
41. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
42. $y^2 - z^2 = 0$
43. $x = y$
44. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
45. $x^2 + y^2 = 9z$
46. $x^2 + y^2 = z^2$
47. $x^2 - y^2 = z^2$
48. $x^2 + z^2 = 4$
49. Dos fuerzas cuyas intensidades son de 50 lb y 70 lb forman un ángulo de 60° entre sí y se aplican a un objeto en el mismo punto. Calcule **(a)** la intensidad de la fuerza resultante, y **(b)** el ángulo que forman la resultante y la fuerza de 50 lb, con aproximación de grados.
50. Determine el ángulo entre dos fuerzas de 112 lb y 136 lb aplicadas a un objeto en el mismo punto si la fuerza resultante tiene una intensidad de 168 lb.
51. Una fuerza está representada por el vector **F** que tiene una intensidad de 30 lb y un ángulo director de $\frac{3}{4}\pi$ rad. Si la distancia se mide en pies, calcule el trabajo realizado por la fuerza al desplazar una partícula a lo largo de una recta que va del punto $(3, 6)$ al punto $(-2, 7)$.
52. El enfilamiento de un avión es de 107° y su velocidad al aire es de 210 mi/h. Si el viento sopla del oeste a 36 mi/h, ¿cuál es **(a)** la velocidad a tierra del avión, y **(b)** su curso?
53. Se dibuja una recta que pasa por el punto $(-3, 5, 1)$ y perpendicular al plano xz. Determine las coordenadas de

los puntos sobre esta recta que están a una distancia de 13 unidades del punto (−2, 0, 0).

54. Determine una ecuación de la esfera que tiene como un diámetro al segmento de recta cuyos extremos son (3, 5, −4) y (−1, 7, 4).

55. Obtenga una ecuación de la esfera concéntrica con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 6z + 10 = 0$ y que contiene al punto (−4, 2, 5).

56. Demuestre que los puntos (4, 1, −1), (2, 0, 1) y (4, 3, 0) son los vértices de un triángulo rectángulo, y calcule el área del triángulo.

57. Determine una curva generatriz y el eje para la superficie de revolución que tiene la ecuación $x^2 + z^2 = e^{4y}$.

58. Obtenga una ecuación de la superficie de revolución generada al girar la elipse $9x^2 + 4z^2 = 36$ del plano xz alrededor del eje x. Dibuje la superficie.

59. Determine el valor de c tal que los vectores $3\mathbf{i} + c\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ son ortogonales.

60. Demuestre que existen representaciones de los tres vectores $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, y $\mathbf{C} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, las cuales forman un triángulo.

61. Dados los puntos $A(5, 9, -3)$ y $B(-2, 4, -5)$, obtenga **(a)** los cosenos directores de $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$, y **(b)** el vector unitario que tiene la direccion de $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$.

62. Si $\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{D} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$, determine los escalares a, b y c tales que $a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = \mathbf{D}$.

63. Si $\mathbf{A} = \langle 7, -1, 5\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle -2, 3, 1\rangle$, determine **(a)** la proyección escalar de **B** sobre **A**, y **(b)** el vector proyección de **B** sobre **A**.

64. Obtenga una ecuación del plano que contenga los puntos (1, 7, −3) y (3, 1, 2) y que no intersecta al eje x.

65. Determine una ecuación del plano que pasa por los tres puntos (−1, 2, 1), (1, 4, 0) y (1, −1, 3) mediante dos métodos: **(a)** utilice el producto cruz; **(b)** sin emplear el producto cruz.

66. Obtenga una ecuación del plano que contiene al punto (7, −2, −5) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos (−3, 0, 4) y (3, 2, 1).

67. Calcule la distancia del origen al plano que pasa por el punto (−6, 3, −2) y tiene al vector $5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ como un vector normal.

68. Obtenga dos vectores unitarios ortogonales a $\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y cuyas representaciones sean paralelas al plano yz.

69. Determine la distancia del punto $P(4, 6, -4)$ a la recta que pasa por los dos puntos $A(2, 2, 1)$ y $B(4, 3, -1)$.

70. Calcule la distancia del plano $9x - 2y + 6z + 44 = 0$ al punto (−3, 2, 0).

71. Si θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, calcule $\cos\theta$ en dos formas: **(a)** emplee el producto punto; **(b)** utilice el producto cruz y una identidad trigonométrica.

72. Demuestre que las rectas $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-2}{2}$ y $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z-5}{1}$ son rectas oblicuas (o cruzantes), y calcule la distancia entre ellas.

73. Determine las ecuaciones simétricas y paramétricas de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a cada una de las rectas del ejercicio 72.

74. Obtenga las ecuaciones simétricas y paramétricas de la recta que pasa por los dos puntos (−3, 5, 2) y (1, −3, 4).

75. Demuestre que las rectas $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-5}{4}$ y $\dfrac{x+1}{-6} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{-8}$ son coincidentes.

76. Determine una ecuación del plano que contiene a la recta

$$\tfrac{1}{2}(x-3) = -(y+5) = \tfrac{1}{3}(z+2)$$

y al punto (5, 0, −4).

77. Calcule el área de la sección transversal del elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$$

en el plano $z = 4$.

78. Calcule el área del paralelogramo que tiene a las representaciones de posición de los vectores $2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $5\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$ como dos de sus lados.

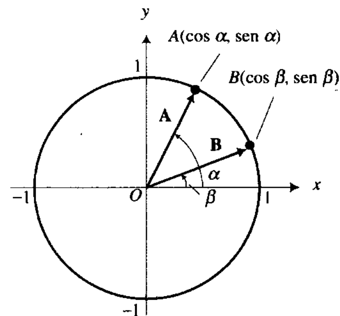
79. Calcule el volumen del paralelepípedo que tiene vértices en (1, 3, 0), (2, −1, 3), (−2, 2, −1) y (−1, 1, 2).

80. Demuestre mediante análisis vectorial que las diagonales de un paralelogramo se bisectan mutuamente.

En los ejercicios 81 y 82, considere

$$\mathbf{A} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \cos\beta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\beta\,\mathbf{j}$$

y refiérase a la figura adjunta.



81. Emplee el producto punto de **A** y **B** para demostrar que

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

82. Utilice el producto cruz de **A** y **B**, con o como la componente **k** de cada vector, para demostrar que

$$|\operatorname{sen}(\alpha - \beta)| = |\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta|$$

83. Si **A** es cualquier vector de V_3, demuestre que

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$$

84. Sean **A** y **B** vectores de V_3, y c_1, c_2 y c_3 los cosenos directores de **A**, y d_1, d_2 y d_3 los cosenos directores de **B**. Si

$$\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2} = \frac{c_3}{d_3}$$

demuestre que **A** y **B** son paralelos.

85. Si **A**, **B**, **C** y **D** son vectores de V_3, demuestre la **identidad de Lagrange**

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} & \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \end{vmatrix}$$

86. Considere un triángulo ABC, si los puntos D, E y F están sobre los lados AB, BC y AC, respectivamente, y

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{AD}) = \tfrac{1}{3}\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \qquad \mathbf{V}(\overrightarrow{BE}) = \tfrac{1}{3}\mathbf{V}(\overrightarrow{BC})$$
$$\mathbf{V}(\overrightarrow{CF}) = \tfrac{1}{3}\mathbf{V}(\overrightarrow{CA})$$

demuestre que $\mathbf{V}(\overrightarrow{AE}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{BF}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{CD}) = \mathbf{0}$.

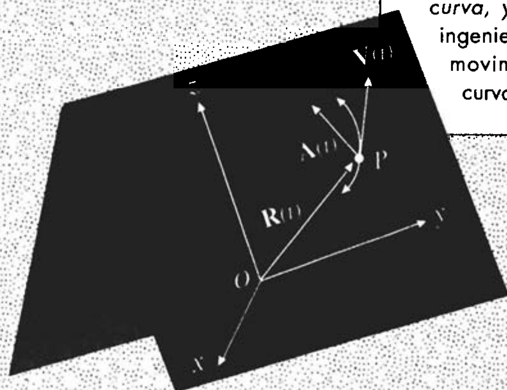
Capítulo
11

Funciones vectoriales

VISIÓN PRELIMINAR

Las *funciones vectoriales* son aquellas cuyo dominio es un conjunto de números reales tales que su contradominio es un conjunto de vectores. Estas funciones se definen en la sección 11.1, donde también se estudian sus gráficas. Las gráficas de estas funciones son curvas, las cuales también pueden representarse mediante ecuaciones paramétricas. El Cálculo de las funciones vectoriales, tratado en la sección 11.2, se refiere a las derivadas e integrales indefinidas de estas funciones, y se verá que las definiciones y teoremas son semejantes a las del Cálculo de funciones reales.

En las secciones restantes del capítulo se tratan aplicaciones de los vectores a la geometría, física e ingeniería. Las aplicaciones geométricas incluyen la *longitud de arco, vectores tangentes y normales a una curva, y curvatura*. En las aplicaciones de física e ingeniería se emplean los vectores para estudiar el movimiento de una partícula a lo largo de una curva, el cual se denomina *movimiento curvilíneo*.



11.1 FUNCIONES VECTORIALES Y CURVAS EN R^3

En la sección 9.1 se introdujeron las ecuaciones paramétricas al considerar una partícula que se mueve en un plano de modo que las coordenadas (x, y) de su posición en cualquier instante t están determinadas por las ecuaciones

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = g(t) \tag{1}$$

Esta idea se puede extender al espacio tridimensional, donde las coordenadas (x, y, z) de la posición de la partícula en cualquier tiempo t están dadas por las tres ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t) \tag{2}$$

Para cualquier posición de la partícula existe un vector y los puntos terminales de las representaciones de posición de estos vectores determinan una curva recorrida por la partícula. Esta idea nos conduce a considerar una función cuyo dominio es un conjunto de números reales tal que su contradomino es un conjunto de vectores. A esta función se le llama *función vectorial.*

11.1.1 Definición de función vectorial

Sean f, g y h funciones reales de la variable real t. Entonces se define la **función vectorial R** por medio de

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

donde t es cualquier número real del dominio común de f, g y h. En el plano, se define una **función vectorial R** mediante

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

donde t pertenece al dominio común de f y g.

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Sea **R** la función vectorial definida por

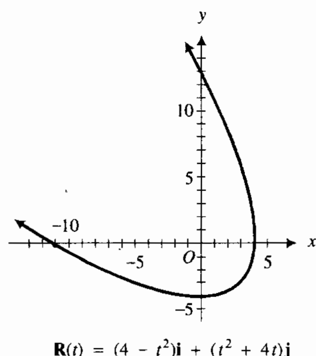
$$\mathbf{R}(t) = \sqrt{t-2}\,\mathbf{i} + (t-3)^{-1}\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k}$$

Si $f(t) = \sqrt{t-2}$, $g(t) = (t-3)^{-1}$ y $h(t) = \ln t$, entonces el dominio de **R** es el conjunto de valores de t para los cuales $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ están definidas. Como $f(t)$ está definida para $t \geq 2$, $g(t)$ está definida para todo número real diferente de 3, y $h(t)$ está definida para todos los números positivos, el dominio de **R** es $\{t \mid t \geq 2, t \neq 3\}$. ◀

La ecuación

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \tag{3}$$

se denomina **ecuación vectorial** la cual describe la curva C definida por las correspondientes ecuaciones paramétricas (2); esto es, una curva puede definirse por medio de una ecuación vectorial o por un conjunto de ecuaciones paramétricas. Si en (3), $h(t) = 0$ para todo t del dominio de **R**, entonces la curva C yace en el plano xy y está definida por las correspondientes ecuaciones paramétricas (1). Estas curvas se estudiaron en la sección 9.1.



$\mathbf{R}(t) = (4 - t^2)\mathbf{i} + (t^2 + 4t)\mathbf{j}$

FIGURA 1

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** La curva plana definida por la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = (4 - t^2)\mathbf{i} + (t^2 + 4t)\mathbf{j}$$

también puede definirse por las ecuaciones paramétricas

$$x = 4 - t^2 \quad \text{y} \quad y = t^2 + 4t$$

En el ejemplo 5 de la sección 9.1 se dibujó esta curva obteniéndose la gráfica mostrada en la figura 1. ◀

Una ecuación vectorial de una curva proporciona una dirección a la curva en cada punto. Esto es, si se piensa que la curva es descrita por una partícula, se puede considerar la dirección positiva a lo largo de la curva como la dirección en la que la partícula se mueve a medida que el parámetro t aumenta. En tal caso, t puede ser una medida del tiempo, de modo que al vector $\mathbf{R}(t)$ se le llama **vector de posición.**

Al eliminar t de las ecuaciones paramétricas (2) se obtienen dos ecuaciones en x, y y z, denominadas **ecuaciones cartesianas** de la curva C. La gráfica de cada ecuación cartesiana es una superficie, y C es la intersección de las dos superficies. Las ecuaciones de cualesquiera dos superficies que contienen a C pueden considerarse como las ecuaciones que definen a C.

 ***EJEMPLO 1*** Dibuje la curva que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k} \qquad 0 \le t \le 4\pi$$

Solución Las ecuaciones paramétricas de la curva son

$$x = 2\cos t \qquad y = 2\,\text{sen}\, t \qquad z = t$$

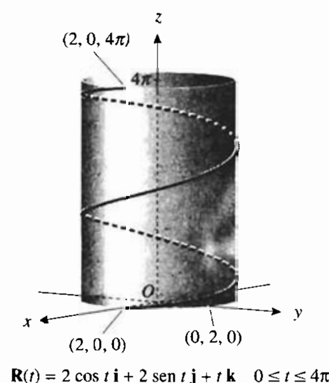
El parámetro t de las dos primeras ecuaciones se elimina al elevar al cuadrado los dos miembros de estas ecuaciones y sumar los miembros correspondientes, obteniéndose

$$x^2 + y^2 = 4\cos^2 t + 4\,\text{sen}^2\, t$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

Por tanto, la curva está completamente contenida en el cilindro circular recto cuya directriz es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ del plano xy y cuyas regladuras (o posiciones de su generatriz) son paralelas al eje z. La tabla 1 proporciona conjuntos de valores de x, y y z para valores específicos de t. La figura 2 muestra la curva. ◀

Tabla 1

t	x	y	z
0	2	0	0
$\frac{1}{2}\pi$	0	2	$\frac{1}{2}\pi$
π	-2	0	π
$\frac{3}{2}\pi$	0	-2	$\frac{3}{2}\pi$
2π	2	0	2π
$\frac{5}{2}\pi$	0	2	$\frac{5}{2}\pi$
3π	-2	0	3π
$\frac{7}{2}\pi$	0	-2	$\frac{7}{2}\pi$
4π	2	0	4π



$\mathbf{R}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} \quad 0 \le t \le 4\pi$

FIGURA 2

La curva del ejemplo 1 se denomina **hélice circular.** Una **hélice** más general tiene la ecuación vectorial

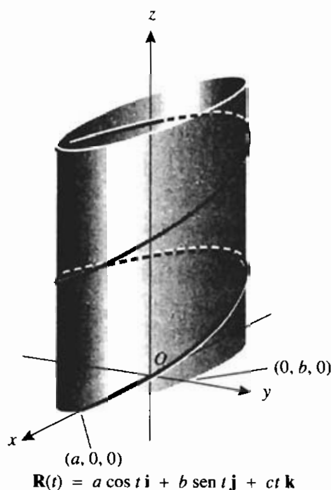
$$\mathbf{R}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + b\,\text{sen}\, t\,\mathbf{j} + ct\mathbf{k} \qquad \textbf{(4)}$$

y ecuaciones paramétricas

$$x = a\cos t \qquad y = b\,\text{sen}\, t \qquad z = ct$$

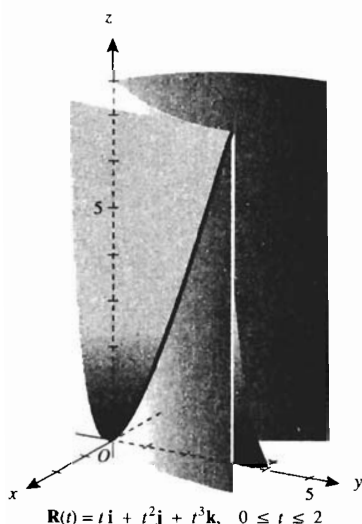
donde a, b y c con constantes diferentes de cero. Cuando $a = b$, la curva es una hélice circular. Para eliminar t de las dos primeras ecuaciones paramétricas se escriben dichas ecuaciones como

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{b^2} = \text{sen}^2\, t$$



$\mathbf{R}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + b\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$

FIGURA 3



$\mathbf{R}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k},\quad 0 \le t \le 2$

FIGURA 4

Al sumar los miembros correspondientes de estas dos ecuaciones se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por tanto, la curva definida por (4) está contenida completamente en el cilindro elíptico con regladuras paralelas al eje z y cuya directriz es una elipse del plano xy, y cuyas regladuras son paralelas al eje z como se muestra en la figura 3.

Una curva que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = at\mathbf{i} + bt^2\mathbf{j} + ct^3\mathbf{k}$$

donde a, b y c son constantes diferentes de cero, se denomina **cúbica alabeada,** un caso particular de esta ecuación se presenta en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 2 Dibuje la cúbica alabeada que tiene la ecuación vectorial

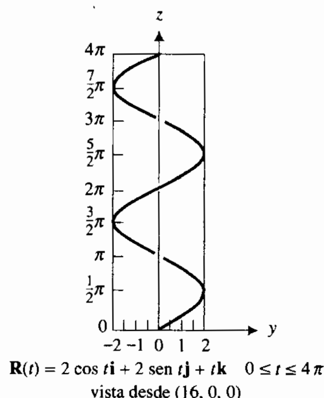
$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \qquad 0 \le t \le 2$$

Solución Las ecuaciones paramétricas de esta cúbica alabeada son

$$x = t \qquad y = t^2 \qquad z = t^3$$

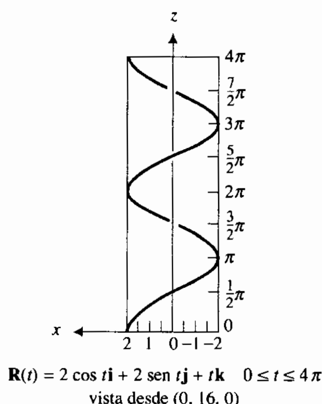
Al eliminar t de las dos primeras ecuaciones se obtiene $y = x^2$, que es la ecuación de un cilindro que tiene como directriz una parábola del plano xy y sus regladuras son paralelas al eje z. Si se elimina t de las ecuaciones primera y tercera se obtiene $z = x^3$, la cual es la ecuación de un cilindro con regladuras paralelas al eje y y cuya directriz yace en el plano xz. La cúbica alabeada es la intersección de los dos cilindros. La figura 4 muestra los dos cilindros y la cúbica alabeada de $t = 0$ a $t = 2$. ◀

La hélice y la cúbica alabeada de los dos ejemplos anteriores se dibujaron de manera bastante simple. Sin embargo, el dibujo de la mayoría de las curvas tridimensionales es mucho más complicada. Afortunadamente, en esta época tecnológica, puede recurrirse a las computadoras y programas graficadores para trazar estas curvas. Con frecuencia los programas graficadores (o *software* para graficar) permiten la elección de puntos de vista desde donde se observa la curva con diferentes perspectivas. Las figuras 5(a)–(c) muestran la hélice del ejemplo 1, generada por el software *Mathematica,* vista desde



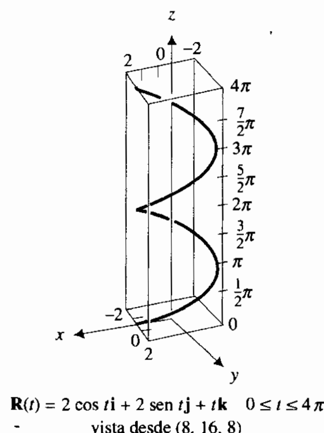
$\mathbf{R}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\,t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad 0 \le t \le 4\pi$
vista desde (16, 0, 0)

FIGURA 5a



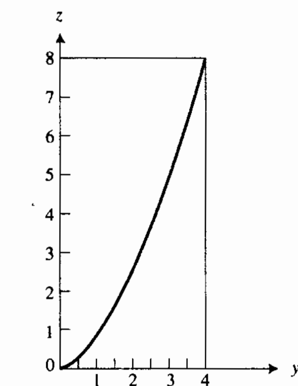
$\mathbf{R}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\,t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad 0 \le t \le 4\pi$
vista desde (0, 16, 0)

FIGURA 5b



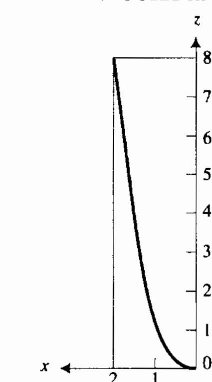
$\mathbf{R}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\,t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad 0 \le t \le 4\pi$
vista desde (8, 16, 8)

FIGURA 5c



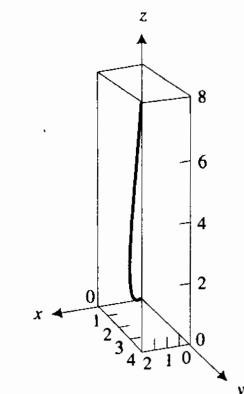
$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad 0 \le t \le 2\pi$
vista desde (16, 0, 0)

FIGURA 6a



$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad 0 \le t \le 2$
vista desde (0, 16, 0)

FIGURA 6b



$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad 0 \le t \le 2$
vista desde (8, 16, 8)

FIGURA 6c

tres puntos diferentes del espacio. Las figuras 6(a)–(c) muestran la cúbica alabeada del ejemplo 2, también generada por *Mathematica*, vista desde los mismos tres puntos de las figuras 5(a)–(c).

Se pueden realizar operaciones vectoriales con funciones vectoriales aplicando los procedimientos estudiados en el capítulo 10, y como se indica en la definición siguiente de estas operaciones.

11.1.2 Definición de las operaciones con funciones vectoriales

Dadas las funciones vectoriales **F** y **G** y las funciones reales *f* y *g*:

(i) la **suma** de **F** y **G**, denotada por **F** + **G**, es la función vectorial definida por

$$(\mathbf{F} + \mathbf{G})(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)$$

(ii) la **diferencia** de **F** y **G**, denotada por **F** − **G**, es la función vectorial definida por

$$(\mathbf{F} - \mathbf{G})(t) = \mathbf{F}(t) - \mathbf{G}(t)$$

(iii) el **producto punto** de **F** y **G**, denotado por **F** · **G**, es la función vectorial definida por

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{G}(t)$$

(iv) el **producto cruz** de **F** y **G**, denotado por **F** × **G**, es la función vectorial definida por

$$(\mathbf{F} \times \mathbf{G})(t) = \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t)$$

(v) el **producto de** $f(t)$ **por** $\mathbf{F}(t)$, denotado por $f\mathbf{F}$, es la función vectorial definida por

$$(f\mathbf{F})(t) = f(t)\mathbf{F}(t)$$

(vi) la **función compuesta** de **F** y g, denotada por $\mathbf{F} \circ g$, es la función vectorial definida por

$$(\mathbf{F} \circ g)(t) = \mathbf{F}(g(t))$$

▶ ***EJEMPLO 3*** Dada $\mathbf{F}(t) = \operatorname{sen} 2t\mathbf{i} + \cos 2t\mathbf{j} + \sqrt{t}\,\mathbf{k}$, $\mathbf{G}(t) = -\cos 2t\mathbf{i} + \operatorname{sen} 2t\mathbf{j} + \sqrt{t}\,\mathbf{k}$, y $f(t) = t^{3/2}$, calcule: **(a)** $(\mathbf{F} + \mathbf{G})(t)$; **(b)** $(\mathbf{F} - \mathbf{G})(t)$; **(c)** $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(t)$; **(d)** $(\mathbf{F} \times \mathbf{G})(t)$; **(e)** $(f\mathbf{F})(t)$; **(f)** $(\mathbf{G} \circ f)(t)$.

Solución

(a) $(\mathbf{F} + \mathbf{G})(t) = (\operatorname{sen} 2t - \cos 2t)\mathbf{i} + (\cos 2t + \operatorname{sen} 2t)\mathbf{j} + 2\sqrt{t}\,\mathbf{k}$

(b) $(\mathbf{F} - \mathbf{G})(t) = (\operatorname{sen} 2t + \cos 2t)\mathbf{i} + (\cos 2t - \operatorname{sen} 2t)\mathbf{j}$

(c) $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(t) = -\operatorname{sen} 2t \cos 2t + \operatorname{sen} 2t \cos 2t + \sqrt{t^2}$
$= t \qquad (\text{porque } t \ge 0)$

(d) $(\mathbf{F} \times \mathbf{G})(t) = \sqrt{t}\cos 2t\mathbf{i} - \sqrt{t}\cos 2t\mathbf{j} + \operatorname{sen}^2 2t\mathbf{k} + \cos^2 2t\mathbf{k} - \sqrt{t}\operatorname{sen} 2t\mathbf{i} - \sqrt{t}\operatorname{sen} 2t\mathbf{j}$
$= \sqrt{t}(\cos 2t - \operatorname{sen} 2t)\mathbf{i} - \sqrt{t}(\cos 2t + \operatorname{sen} 2t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$

(e) $(f\mathbf{F})(t) = t^{3/2} \operatorname{sen} 2t\mathbf{i} + t^{3/2} \cos 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

(f) $(\mathbf{G} \circ f)(t) = \mathbf{G}(f(t))$
$= -\cos 2t^{3/2}\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} 2t^{3/2}\, \mathbf{j} + t^{3/4}\, \mathbf{k}$ ◀

El límite de una función vectorial se define en términos de los límites de sus componentes reales.

11.1.3 Definición del límite de una función vectorial

Sea **R** una función vectorial cuyos valores de función están dados por

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Entonces el límite de $\mathbf{R}(t)$ cuando t tiende a a está definido por

$$\lim_{t \to a} \mathbf{R}(t) = [\lim_{t \to a} f(t)]\mathbf{i} + [\lim_{t \to a} g(t)]\mathbf{j} + [\lim_{t \to a} h(t)]\mathbf{k}$$

si $\lim_{t \to a} f(t)$, $\lim_{t \to a} g(t)$, y $\lim_{t \to a} h(t)$ existen.

Por supuesto, esta definición también se aplica a las funciones vectoriales del plano al considerar la componente **k** como cero.

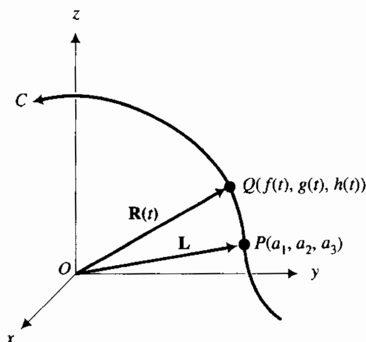


FIGURA 7

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Si $\mathbf{R}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 2e^t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$,

$$\lim_{t \to 0} \mathbf{R}(t) = (\lim_{t \to 0} \cos t)\mathbf{i} + (\lim_{t \to 0} 2e^t)\mathbf{j} + (\lim_{t \to 0} 3)\mathbf{k}$$
$$= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$ ◀

Considere la figura 7 a fin de obtener una interpretación geométrica de la definición 11.1.3, donde $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, $\lim_{t \to a} f(t) = a_1$, $\lim_{t \to a} g(t) = a_2$, $\lim_{t \to a} h(t) = a_3$, y $\mathbf{L} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$. La función vectorial **R** define la curva C, la cual contiene a los puntos $Q(f(t), g(t), h(t))$ y $P(a_1, a_2, a_3)$. Las representaciones de los vectores **R** y **L** son, respectivamente, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OP}$. Conforme t se aproxima a a, $\mathbf{R}(t)$ tiende a **L**, de modo que el punto Q se aproxima al punto P a lo largo de C. 0

Los límites de funciones vectoriales que corresponden a los teoremas de límites de funciones reales estudiados en el capítulo 1, pueden demostrarse a partir de la definición 11.1.3. Se le pedirá que demuestre algunos de estos teoremas de límites en los ejercicios.

11.1.4 Definición de continuidad de una función vectorial

La función vectorial **R** es continua en el número a si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes;

(i) $\mathbf{R}(a)$ existe;

(ii) $\lim_{t \to a} \mathbf{R}(t)$ existe;

(iii) $\lim_{t \to a} \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(a)$

De esta definición, una función vectorial es continua en el número a si y sólo si sus componentes reales son continuas en a.

EJEMPLO 4 Determine los números en los que la siguiente función vectorial es continua:

$$\mathbf{R}(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \ln t\mathbf{j} + \frac{t^2-1}{t-1}\mathbf{k}$$

Solución Puesto que sen t está definido para todos los números reales, ln t está definida sólo cuando $t > 0$, y $(t^2 - 1)/(t - 1)$ está definida en todo número real distinto de 1, el dominio de $\mathbf{R}$ es $\{t \mid t > 0 \text{ y } t \neq 1\}$. Si a es cualquier número del dominio de $\mathbf{R}$, entonces

$$\mathbf{R}(a) = \operatorname{sen} a\mathbf{i} + \ln a\mathbf{j} + (a+1)\mathbf{k}$$

$$\lim_{t\to a} \mathbf{R}(t) = \lim_{t\to a} \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \lim_{t\to a} \ln t\mathbf{j} + \lim_{t\to a} \frac{t^2-1}{t-1}\mathbf{k}$$

$$= \operatorname{sen} a\mathbf{i} + \ln a\mathbf{j} + (a+1)\mathbf{k}$$

Así, $\lim_{t\to a} \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(a)$, y $\mathbf{R}$ es continua en a.

Por tanto, la función vectorial $\mathbf{R}$ es continua en cada número de su dominio. ◀

EJERCICIOS 11.1

En los ejercicios 1 a 8, determine el dominio de la función vectorial.

1. $\mathbf{R}(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} + \sqrt{4-t}\mathbf{j}$
2. $\mathbf{R}(t) = (t^2+3)\mathbf{i} + \frac{1}{t-1}\mathbf{j}$
3. $\mathbf{R}(t) = (\operatorname{sen}^{-1} t)\mathbf{i} + \ln(t+1)\mathbf{j}$
4. $\mathbf{R}(t) = (\cos^{-1} t)\mathbf{i} + (\sec^{-1} t)\mathbf{j}$
5. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{t+2}\mathbf{i} + \sqrt{4-t}\mathbf{j} + \cot t\mathbf{k}$
6. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{t^2-9}\mathbf{i} + \ln|t-3|\mathbf{j} + (t^2+2t-8)\mathbf{k}$
7. $\mathbf{R}(t) = \ln|\operatorname{sen} t|\mathbf{i} + \sqrt{16-t^2}\mathbf{j} + \ln|t+4|\mathbf{k}$
8. $\mathbf{R}(t) = \tan t\mathbf{i} + \sqrt{4-t^2}\mathbf{j} + \frac{1}{2+t}\mathbf{k}$

En los ejercicios 9 a 12, calcule: (a) $(\mathbf{F}+\mathbf{G})(t)$; *(b)* $(\mathbf{F}-\mathbf{G})(t)$; *(c)* $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})(t)$; *(d)* $(\mathbf{F}\times\mathbf{G})(t)$.

9. $\mathbf{F}(t) = (t+1)\mathbf{i} + (t^2-1)\mathbf{j} + (t-1)\mathbf{k}$;
   $\mathbf{G}(t) = (t-1)\mathbf{i} + \mathbf{j} + (t+1)\mathbf{k}$
10. $\mathbf{F}(t) = (4-t^2)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - (4-t^2)\mathbf{k}$;
   $\mathbf{G}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^2-4)\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
11. $\mathbf{F}(t) = \cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$;
   $\mathbf{G}(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} - t\mathbf{k}$
12. $\mathbf{F}(t) = \sec t\mathbf{i} + \tan t\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$;
   $\mathbf{G}(t) = \sec t\mathbf{i} - \tan t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

En los ejercicios 13 a 16, calcule: (a) $(f\mathbf{F})(t)$; *(b)* $(f\mathbf{G})(t)$; (c) $(\mathbf{F}\circ g)(t)$; (d) $(\mathbf{G}\circ g)(t)$.

13. **F** y **G** son las funciones del ejercicio 9;
   $f(t) = t - 1$; $g(t) = t + 1$.
14. **F** y **G** son las funciones del ejercicio 10;
   $f(t) = 1/(2-t)$; $g(t) = 2 - t$.
15. **F** y **G** son las funciones del ejercicio 11;
   $f(t) = \operatorname{sen} t$; $g(t) = \operatorname{sen}^{-1} t$.
16. **F** y **G** son las funciones del ejercicio 12;
   $f(t) = \cos t$; $g(t) = \cos^{-1} t$.

En los ejercicios 17 a 24, calcule el límite indicado, si existe.

17. $\mathbf{R}(t) = (t-2)\mathbf{i} + \frac{t^2-4}{t-2}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $\lim_{t\to 2} \mathbf{R}(t)$
18. $\mathbf{R}(t) = \frac{t^2-1}{t+1}\mathbf{i} + \frac{t+1}{t-1}\mathbf{j} + |t+1|\mathbf{k}$; $\lim_{t\to -1} \mathbf{R}(t)$
19. $\mathbf{R}(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \frac{\operatorname{sen} t}{t}\mathbf{k}$; $\lim_{t\to 0} \mathbf{R}(t)$
20. $\mathbf{R}(t) = \frac{1-\cos t}{t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$; $\lim_{t\to 0} \mathbf{R}(t)$
21. $\mathbf{R}(t) = \frac{|t-2|}{t-2}\mathbf{i} + \frac{\operatorname{sen} \pi t}{t^2-1}\mathbf{j} + \frac{\tan \pi t}{t-1}\mathbf{k}$; $\lim_{t\to 1} \mathbf{R}(t)$
22. $\mathbf{R}(t) = \frac{1+\cos t}{1-\operatorname{sen} t}\mathbf{i} + \frac{1-\cos^2}{1-\cos t}\mathbf{j} + \frac{t^2}{\operatorname{sen} t}\mathbf{k}$; $\lim_{t\to 0} \mathbf{R}(t)$
23. $\mathbf{R}(t) = e^{t+1}\mathbf{i} + e^{1-t}\mathbf{j} + (1+t)^{1/t}\mathbf{k}$; $\lim_{t\to 0} \mathbf{R}(t)$
24. $\mathbf{R}(t) = \frac{\ln(t+1)}{t}\mathbf{i} + \operatorname{senh} t\mathbf{j} + \cosh t\mathbf{k}$; $\lim_{t\to 0} \mathbf{R}(t)$

En los ejercicios 25 a 30, determine los números para los que la función vectorial es continua.

25. $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + \ln(t-1)\mathbf{j} + \frac{1}{t-2}\mathbf{k}$
26. $\mathbf{R}(t) = (t-1)\mathbf{i} + \frac{1}{e^t-1}\mathbf{j} + \frac{|t-1|}{t-1}\mathbf{k}$
27. $\mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sec t\mathbf{j} + \tan t\mathbf{k}$
28. $\mathbf{R}(t) = \operatorname{sen} \pi t\mathbf{i} - \tan \pi t\mathbf{j} + \cot \pi t\mathbf{k}$

29. $\mathbf{R}(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{k} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

30. $\mathbf{R}(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\mathbf{i} + \dfrac{1 - \cos t}{t}\mathbf{j} + \dfrac{1 - e^t}{t}\mathbf{k} & \text{si } t \neq 0 \\ \mathbf{i} - \mathbf{k} & \text{si } t = 0 \end{cases}$

En los ejercicios 31 a 42, dibuje la gráfica de la función vectorial.

31. $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (t + 1)\mathbf{j}$ **32.** $\mathbf{R}(t) = \dfrac{4}{t^2}\mathbf{i} + \dfrac{4}{t}\mathbf{j}$

33. $\mathbf{R}(t) = (t - 2)\mathbf{i} + (t^2 + 4)\mathbf{j}$

34. $\mathbf{R}(t) = 3\cosh t\mathbf{i} + 5\operatorname{senh} t\mathbf{j}$

35. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + (6 - 4t)\mathbf{j} + (5 - 2t)\mathbf{k}$

36. $\mathbf{R}(t) = (t + 1)\mathbf{i} + (2t - 3)\mathbf{j} + (2t + 3)\mathbf{k}$

37. $\mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2\pi$

38. $\mathbf{R}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 4\pi$

39. $\mathbf{R}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 4\pi$

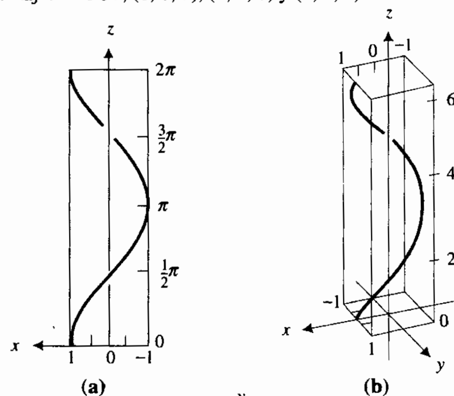
40. $\mathbf{R}(t) = 4\cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2\pi$

41. $\mathbf{R}(t) = 3t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2$

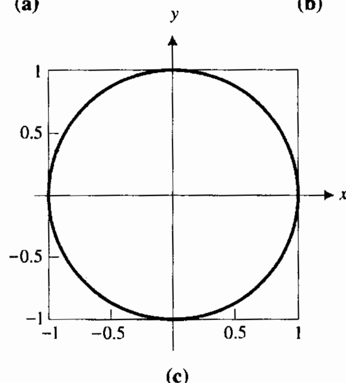
42. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{3}{2}t^3\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2$

En los ejercicios 43 a 46, las figuras (a)–(c) son gráficas, generadas en una computadora, de la curva del ejercicio indicado, vista desde tres puntos diferentes del espacio. Relacione la gráfica con uno de los puntos de vista dados.

43. Ejercicio 37; (0, 0, 8), (0, 8, 0) y (4, 8, 4).

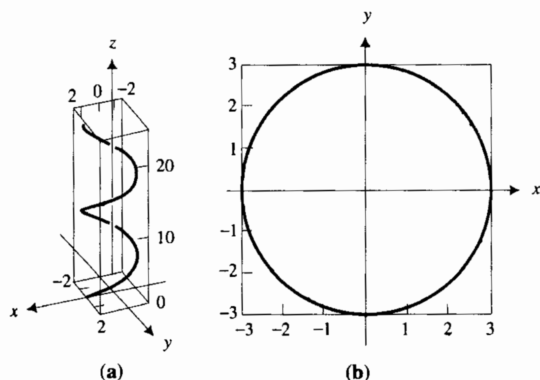


(a) **(b)**

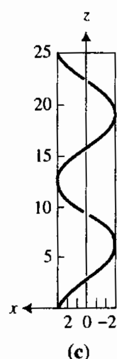


(c)

44. Ejercicio 38; (0, 0, 28), (0, 28, 0) y (14, 28, 14).

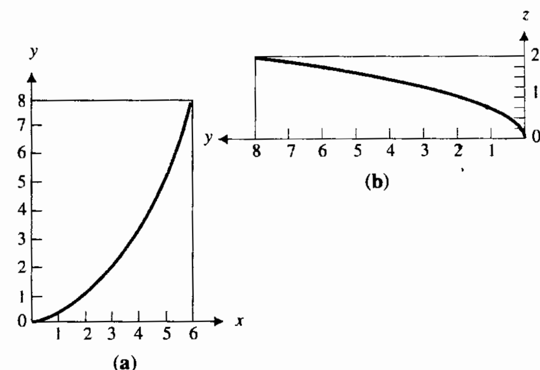


(a) **(b)**

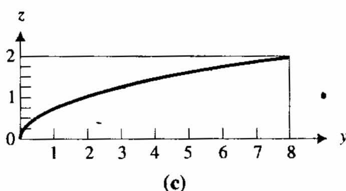


(c)

45. Ejercicio 41; (10, 0, 0), (−10, 0, 0) y (0, 0, 10).

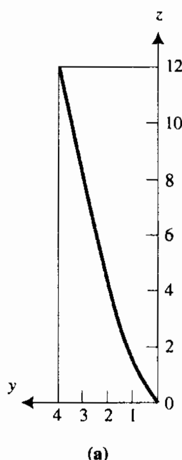


(a) **(b)**

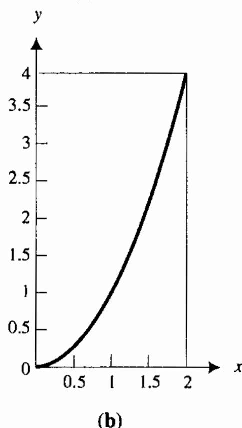


(c)

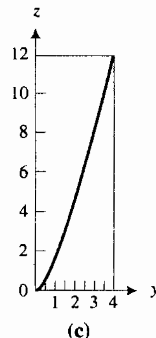
46. Ejercicio 42; (15, 0, 0), (−15, 0, 0) y (0, 0, 15).



(a)



(b)



(c)

En los ejercicios 47 a 49, demuestre el teorema de límites si $\mathbf{U}(t)$ *y* $\mathbf{V}(t)$ *son funciones vectoriales tales que* $\lim_{t \to a} \mathbf{U}(t)$ *y* $\lim_{t \to a} \mathbf{V}(t)$ *existen.*

47. $\lim_{t \to a} [\mathbf{U}(t) + \mathbf{V}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{U}(t) + \lim_{t \to a} \mathbf{V}(t)$

48. $\lim_{t \to a} [\mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{V}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{U}(t) \cdot \lim_{t \to a} \mathbf{V}(t)$

49. $\lim_{t \to a} [\mathbf{U}(t) \times \mathbf{V}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{U}(t) \times \lim_{t \to a} \mathbf{V}(t)$

50. Si f es una función real tal que $\lim_{t \to a} f(t)$ existe y $\mathbf{V}$ es una función vectorial tal que $\lim_{t \to a} \mathbf{V}(t)$ existe, demuestre que $\lim_{t \to a} f(t)\mathbf{V}(t) = [\lim_{t \to a} f(t)][\lim_{t \to a} \mathbf{V}(t)]$.

51. Demuestre que si la función vectorial $\mathbf{V}$ es continua en un número a, entonces $\|\mathbf{V}(t)\|$ es continua en a.

52. En lugar de la definición 11.1.3, el límite de una función vectorial puede definirse como sigue: el límite de $\mathbf{R}(t)$ cuando t tiende a a es el vector $\mathbf{L}$ si para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |t - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad \|\mathbf{R}(t) - \mathbf{L}\| < \epsilon$$

Sin emplear las palabras *límite*, *tiende* o *aproxima* y sin utilizar símbolos tales como ϵ y δ, exprese en palabras lo que esto significa.

11.2 CÁLCULO DE LAS FUNCIONES VECTORIALES

El estudio de curvas y superficies mediante el Cálculo constituyen los temas principales de un curso de *geometría diferencial*, de la cual se presentará una breve introducción en las secciones 11.3 y 11.4; mientras que en la sección 11.5, se aplicará el Cálculo al *movimiento curvilíneo*. En esta sección se prepara el terreno para estos temas.

Las definiciones de derivadas e integrales indefinidas de funciones vectoriales involucran las definiciones correspondientes para funciones reales, de igual manera en que se estudiaron en la sección 11.1 límites y continuidad de estas funciones. En la siguiente definición de derivada, la expresión

$$\frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t}$$

se utiliza para indicar la división de un vector entre un escalar y significa

$$\frac{1}{\Delta t}[\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)]$$

11.2.1 Definición de la derivada de una función vectorial

Si $\mathbf{R}$ es una función vectorial, entonces la **derivada** de $\mathbf{R}$ es una función vectorial, denotada por $\mathbf{R}'$ y definida por

$$\mathbf{R}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t}$$

si este límite existe.

La notación $D_t\mathbf{R}(t)$ se emplea en ocasiones en lugar de $\mathbf{R}'(t)$.

El teorema siguiente se deduce de la definición 11.2.1 y de la definición de la derivada de una función real.

11.2.2 Teorema

Si $\mathbf{R}$ es una función vectorial definida por

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

entonces

$$\mathbf{R}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

si $f'(t)$, $g'(t)$ y $h'(t)$ existen.

Demostración De la definición 11.2.1

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[f(t + \Delta t)\mathbf{i} + g(t + \Delta t)\mathbf{j} + h(t + \Delta t)\mathbf{k}] - [f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}]}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}\mathbf{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}\mathbf{j} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}\mathbf{k} \\
&= f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

■

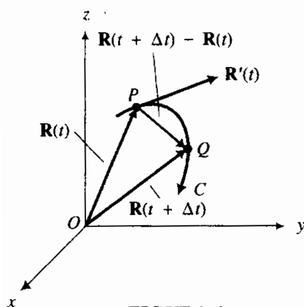


FIGURA 1

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Si $\mathbf{R}(t) = (2 + \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{R}'(t) = \cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$. ◀

Al considerar las representaciones de los vectores $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{R}(t + \Delta t)$ y $\mathbf{R}'(t)$ se obtiene una interpretación geométrica de la definición 11.2.1. Refiérase a la figura 1. La curva C es descrita por el punto terminal de la representación de posición de $\mathbf{R}(t)$ conforme t toma todos los valores del dominio de $\mathbf{R}$. Sea $\overrightarrow{OP}$ la representación de posición de $\mathbf{R}(t)$ y $\overrightarrow{OQ}$ la representación de posición de $\mathbf{R}(t + \Delta t)$. Entonces $\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$ es un vector para el cual $\overrightarrow{PQ}$ es una representación. Si el vector $\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$ se multiplica por el escalar $1/\Delta t$, se obtiene un vector que tiene la misma dirección y cuyo módulo es $1/|\Delta t|$ veces el módulo de $\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$. Conforme Δt se aproxima a cero, el punto Q se aproxima al punto P a lo largo de C, y el vector $[\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)]/\Delta t$ tiende a un vector que tiene una de sus representaciones tangente a la curva C en el punto P.

Observe que para vectores del plano donde

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

la dirección de $\mathbf{R}'(t)$ está dada por $\theta(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ donde $\tan\theta = g'(t)/f'(t)$; esto es, con $x = f(t)$ y $y = g(t)$

$$\tan\theta = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Las derivadas de orden superior de funciones vectoriales se definen de manera similar a las derivadas de orden superior para funciones reales. De este modo, si **R** es una función vectorial, la segunda derivada de **R**, denotada por $\mathbf{R}''(t)$, está dada por

$$\mathbf{R}''(t) = D_t[\mathbf{R}'(t)]$$

La notación $D_t^2\,\mathbf{R}(t)$ puede emplearse en lugar de $\mathbf{R}''(t)$. Al aplicar el teorema 11.2.2 a $\mathbf{R}'(t)$, se tiene

$$\mathbf{R}''(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k}$$

si $f''(t)$, $g''(t)$ y $h''(t)$ existen.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Si $\mathbf{R}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} - \frac{1}{t^2}\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{R}'(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} - \frac{1}{t^2}\mathbf{j} + \frac{2}{t^3}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}''(t) = -\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \frac{2}{t^3}\mathbf{j} - \frac{6}{t^4}\mathbf{k}$$ ◀

11.2.3 Definición de función vectorial diferenciable en un intervalo

Se dice que una función vectorial **R** es **diferenciable en un intervalo** si $\mathbf{R}'(t)$ existe para todos los valores de t del intervalo.

Los teoremas siguientes proporcionan fórmulas de diferenciación para funciones vectoriales. Las demostraciones se basan en el teorema 11.2.2 y los teoremas de diferenciación de funciones reales.

11.2.4 Teorema La derivada de la suma de dos funciones vectoriales

Si **R** y **Q** son dos funciones vectoriales diferenciables en un intervalo, entonces **R** + **Q** es diferenciable en el intervalo, y

$$D_t[\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t)] = D_t\mathbf{R}(t) + D_t\mathbf{Q}(t)$$

La demostración de este teorema se deja como ejercicio (consulte el ejercicio 29).

▶ ***EJEMPLO 1*** Verifique el teorema 11.2.4 si

$$\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

Solución

$$\begin{aligned}
D_t[\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t)] &= D_t([t^2\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}] + [\text{sen } t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}]) \\
&= D_t[(t^2 + \text{sen } t)\mathbf{i} + (t - 1 + \cos t)\mathbf{j}] \\
&= (2t + \cos t)\mathbf{i} + (1 - \text{sen } t)\mathbf{j} \\
D_t\mathbf{R}(t) + D_t\mathbf{Q}(t) &= D_t[t^2\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}] + D_t(\text{sen } t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}) \\
&= (2t\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (\cos t\mathbf{i} - \text{sen } t\mathbf{j}) \\
&= (2t + \cos t)\mathbf{i} + (1 - \text{sen } t)\mathbf{j}
\end{aligned}$$

Por tanto, $D_t[\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t)] = D_t\mathbf{R}(t) + D_t\mathbf{Q}(t)$. ◀

11.2.5 Teorema La derivada del producto punto de dos funciones vectoriales

Si **R** y **Q** son dos funciones vectoriales diferenciables en un intervalo, entonces **R** · **Q** es diferenciable en el intervalo, y

$$D_t[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)] = [D_t\mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot [D_t\mathbf{Q}(t)]$$

Demostración Se demostrará el teorema para vectores de V_2. La demostración para vectores de V_3 es, por supuesto, similar. Sean

$$\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}(t) = f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}$$

Entonces por el teorema 11.2.2,

$$\begin{aligned}
D_t\mathbf{R}(t) &= f_1'(t)\mathbf{i} + g_1'(t)\mathbf{j} \qquad D_t\mathbf{Q}(t) = f_2'(t)\mathbf{i} + g_2'(t)\mathbf{j} \\
\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) &= [f_1(t)][f_2(t)] + [g_1(t)][g_2(t)]
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
D_t[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)] &= [f_1'(t)][f_2(t)] + [f_1(t)][f_2'(t)] + [g_1'(t)][g_2(t)] + [g_1(t)][g_2'(t)] \\
&= \{[f_1'(t)][f_2(t)] + [g_1'(t)][g_2(t)]\} + \{[f_1(t)][f_2'(t)] + [g_1(t)][g_2'(t)]\} \\
&= [D_t\mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot [D_t\mathbf{Q}(t)]
\end{aligned}$$ ■

▶ ***EJEMPLO 2*** Verifique el teorema 11.2.5 para las funciones vectoriales del ejemplo 1.

Solución Las funciones son

$$\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}(t) = \text{sen } t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$$

Así, $\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) = t^2 \text{ sen } t + (t-1)\cos t$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
D_t[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)] &= 2t \text{ sen } t + t^2 \cos t + \cos t + (t-1)(-\text{sen } t) \\
&= (t+1)\text{ sen } t + (t^2 + 1)\cos t
\end{aligned} \tag{1}$$

Como $D_t\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $D_t\mathbf{Q}(t) = \cos t\mathbf{i} - \text{sen } t\mathbf{j}$, se tiene

$$\begin{aligned}
&[D_t\mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot [D_t\mathbf{Q}(t)] \\
&= (2t\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (\text{sen } t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}) + [t^2\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}] \cdot (\cos t\mathbf{i} - \text{sen } t\mathbf{j}) \\
&= (2t \text{ sen } t + \cos t) + [t^2 \cos t - (t-1)\text{ sen } t] \\
&= (t+1)\text{ sen } t + (t^2+1)\cos t
\end{aligned} \tag{2}$$

Al comparar (1) y (2) se observa que se cumple el teorema 11.2.5 para estas funciones. ◀

11.2.6 Teorema La derivada del producto de una función real y una función vectorial

Si **R** es una función vectorial diferenciable en un intervalo y f es una función real diferenciable en el intervalo, entonces

$$D_t\{[f(t)][\mathbf{R}(t)]\} = [D_t f(t)]\mathbf{R}(t) + f(t)\, D_t\mathbf{R}(t)$$

La demostración de este teorema se deja como ejercicio (vea el ejercicio 30).

El teorema siguiente que trata a la derivada del producto cruz de dos funciones vectoriales, es similar a la fórmula correspondiente para la derivada del producto de dos funciones reales; sin embargo, es importante mantener el orden correcto de las funciones vectoriales debido a que el producto cruz no es conmutativo.

11.2.7 Teorema La derivada del producto cruz de dos funciones vectoriales

Si **R** y **Q** son dos funciones vectoriales diferenciables, entonces

$$D_t[\mathbf{R}(t) \times \mathbf{Q}(t) = \mathbf{R}'(t) \times \mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t) \times \mathbf{Q}'(t)$$

para todos los valores de t para los cuales $\mathbf{R}'(t)$ y $\mathbf{Q}'(t)$ existen.

La demostración de este teorema se deja como ejercicio (consulte el ejercicio 31).

11.2.8 Teorema La regla de la cadena para funciones vectoriales

Suponga que **F** es una función vectorial, h es una función real y **G** es la función vectorial definida por $\mathbf{G}(t) = \mathbf{F}(h(t))$. Si $\phi = h(t)$ y $\dfrac{d\phi}{dt}$ y $D_\phi\mathbf{G}(t)$ existen, entonces $D_t\mathbf{G}(t)$ existe y está dada por

$$D_t\mathbf{G}(t) = [D_\phi\mathbf{G}(t)]\frac{d\phi}{dt}$$

La demostración, dejada como ejercicio (vea el ejercicio 32), se basa en el teorema 11.2.2 y la regla de la cadena para funciones reales.

EJEMPLO 3 Verifique el teorema 11.2.8 si las funciones **F** y h están definidas por

$$\mathbf{F}(\phi) = \phi^2\mathbf{i} + e^{\phi}\mathbf{j} + \ln\phi\,\mathbf{k} \quad \text{y} \quad h(t) = \operatorname{sen} t$$

Solución Con $\phi = h(t)$ y $\mathbf{G}(t) = \mathbf{F}(h(t))$

$$\phi = \operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad \mathbf{G}(t) = \operatorname{sen}^2 t\,\mathbf{i} + e^{\operatorname{sen} t}\mathbf{j} + \ln \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$$

Al calcular $D_t\mathbf{G}(t)$ mediante el teorema 11.2.2, se obtiene

$$D_t\,\mathbf{G}(t) = 2\operatorname{sen} t\cos t\,\mathbf{i} + e^{\operatorname{sen} t}\cos t\,\mathbf{j} + \cot t\,\mathbf{k} \qquad (3)$$

Ahora se calcula el miembro derecho de la ecuación del teorema 11.2.8. Puesto que $\mathbf{G}(t)$ también puede expresarse como $\phi^2\mathbf{i} + e^{\phi}\mathbf{j} + \ln \phi\mathbf{k}$, se tiene

$$D_\phi[\mathbf{G}(t)]\frac{d\phi}{dt} = \left(2\phi\mathbf{i} + e^{\phi}\mathbf{j} + \frac{1}{\phi}\mathbf{k}\right)\frac{d\phi}{dt}$$

Pero $\phi = \operatorname{sen} t$; de modo que

$$\begin{aligned} D_\phi[\mathbf{G}(t)]\frac{d\phi}{dt} &= \left(2\operatorname{sen} t\mathbf{i} + e^{\operatorname{sen} t}\mathbf{j} + \frac{1}{\operatorname{sen} t}\mathbf{k}\right)\cos t \\ &= 2\operatorname{sen} t\cos t\mathbf{i} + e^{\operatorname{sen} t}\cos t\mathbf{j} + \cot t\mathbf{k} \end{aligned}$$

De (3), el miembro derecho de esta ecuación es $D_t\mathbf{G}(t)$. Por tanto,

$$D_\phi[\mathbf{G}(t)]\frac{d\phi}{dt} = D_t\mathbf{G}(t)$$

lo cual verifica el teorema 11.2.8 para estas funciones. ◀

El teorema siguiente será empleado posteriormente.

11.2.9 Teorema

Si $\mathbf{R}$ es una función vectorial diferenciable en un intervalo y $\|\mathbf{R}(t)\|$ es constante para toda t del intervalo, entonces los vectores $\mathbf{R}(t)$ y $D_t\mathbf{R}(t)$ son ortogonales.

Demostración Sea $\|\mathbf{R}(t)\| = k$. Entonces por el teorema 10.3.3 (iii)

$$\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{R}(t) = k^2$$

Al diferenciar los dos miembros de esta ecuación con respecto a t y al aplicar el teorema 11.2.5 se obtiene

$$\begin{aligned} [D_t\mathbf{R}(t)]\cdot\mathbf{R}(t) + \mathbf{R}(t)\cdot[D_t\mathbf{R}(t)] &= 0 \\ 2\mathbf{R}(t)\cdot D_t\mathbf{R}(t) &= 0 \end{aligned}$$

Como el producto punto de $\mathbf{R}(t)$ y $D_t\mathbf{R}(t)$ es cero, se concluye, de la definición 10.3.7, que $\mathbf{R}(t)$ y $D_t\mathbf{R}(t)$ son ortogonales. ■

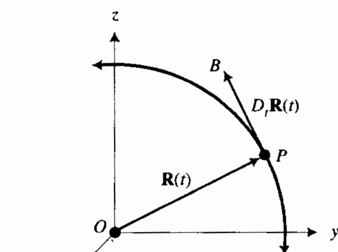


FIGURA 2

si es $\mathbb{R}^2$

Observe la figura 2 para la interpretación geométrica del teorema 11.2.9. Debido a que el vector $\mathbf{R}(t)$ tiene módulo constante k, la representación de posición $\overrightarrow{OP}$ de $\mathbf{R}(t)$ tiene su punto terminal P en la circunferencia con centro en el origen y radio k. Por esta razón la gráfica de $\mathbf{R}$ es esta circunferencia, un cuarto de la cual se muestra en la figura 2 junto con $\overrightarrow{OP}$ y la representación $\overrightarrow{PB}$ de $D_t\mathbf{R}(t)$. Como $D_t\mathbf{R}(t)$ y $\mathbf{R}(t)$ son ortogonales, entonces $\overrightarrow{OP}$ es perpendicular a $\overrightarrow{PB}$.

A continuación se definirá la integral indefinida (o antiderivada) de una función vectorial.

11.2.10 Definición de la integral indefinida de una función vectorial

Si $\mathbf{Q}$ es la función vectorial determinada por

$$\mathbf{Q}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

entonces la **integral indefinida de Q(*t*)** está definida por

$$\int \mathbf{Q}(t)\,dt = \mathbf{i}\int f(t)\,dt + \mathbf{j}\int g(t)\,dt + \mathbf{k}\int h(t)\,dt \qquad \textbf{(4)}$$

Esta definición es consistente con la definición de la integral indefinida de una función real debido a que si se obtiene la derivada en los dos miembros de (4) con respecto a t, resulta

$$\begin{aligned} D_t\int \mathbf{Q}(t)\,dt &= \mathbf{i}D_t\int f(t)\,dt + \mathbf{j}D_t\int g(t)\,dt + \mathbf{k}D_t\int h(t)\,dt \\ &= \mathbf{i}f(t) + \mathbf{j}g(t) + \mathbf{k}h(t) \end{aligned}$$

De cada una de las integrales indefinidas del miembro derecho de (4) se obtiene una constante escalar arbitraria. Cuando cada uno de estos escalares se multiplica por **i**, **j** o **k**, resulta de la suma un vector constante arbitrario. Así,

$$\int \mathbf{Q}(t)\,dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{C}$$

donde $D_t\mathbf{R}(t) = \mathbf{Q}(t)$ y **C** es un vector constante arbitrario.

EJEMPLO 4 Determine la función vectorial más general cuya derivada sea

$$\mathbf{Q}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - 3\cos t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$$

Solución Si $D_t\mathbf{R}(t) = \mathbf{Q}(t)$, entonces $\mathbf{R}(t) = \int \mathbf{Q}(t)\,dt$; esto es,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \mathbf{i}\int \operatorname{sen} t\,dt - 3\mathbf{j}\int \cos t\,dt + \mathbf{k}\int 2t\,dt \\ &= \mathbf{i}(-\cos t + C_1) - 3\mathbf{j}(\operatorname{sen} t + C_2) + \mathbf{k}(t^2 + C_3) \\ &= -\cos t\,\mathbf{i} - 3\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} + (C_1\mathbf{i} - 3C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}) \\ &= -\cos t\,\mathbf{i} - 3\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} + \mathbf{C} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Obtenga el vector **R**(*t*) para el cual

$$D_t\mathbf{R}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + e^{t}\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

Solución

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \mathbf{i}\int e^{-t}\,dt + \mathbf{j}\int e^{t}\,dt + \mathbf{k}\int 3\,dt \\ &= \mathbf{i}(-e^{-t} + C_1) + \mathbf{j}(e^{t} + C_2) + \mathbf{k}(3t + C_3) \end{aligned}$$

Como $\mathbf{R}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k} = \mathbf{i}(-1 + C_1) + \mathbf{j}(1 + C_2) + \mathbf{k}(C_3)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} C_1 - 1 &= 1 \qquad & C_2 + 1 &= 1 \qquad & C_3 &= 5 \\ C_1 &= 2 & C_2 &= 0 & & \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\mathbf{R}(t) = (-e^{-t} + 2)\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + (3t + 5)\mathbf{k}$$ ◀

En la sección 9.2 se estudió el teorema 9.2.3 el cual establece que si C es una curva plana cuyas ecuaciones paramétricas son $x = f(t)$ y $y = g(t)$, donde f' y g' son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si L unidades es la longitud de arco de C desde el punto $(f(a), g(a))$ hasta el punto $(f(b), g(b))$, entonces

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

Puesto que una ecuación vectorial de C es $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, esta ecuación puede escribirse como

$$L = \int_a^b \| \mathbf{R}'(t) \|\, dt \tag{5}$$

▶ ***EJEMPLO 6*** Calcule la longitud de arco descrito por el punto terminal de la representación de posición de $\mathbf{R}(t)$ conforme t se incrementa de 1 a 4 si

$$\mathbf{R}(t) = e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}'(t) &= (e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)\mathbf{j} \\
\| \mathbf{R}'(t) \| &= \sqrt{(e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t)^2 + (e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)^2} \\
&= \sqrt{e^{2t}}\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 2 \operatorname{sen} t \cos t + \cos^2 t + \cos^2 t - 2 \operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen}^2 t} \\
&= e^t\sqrt{2}
\end{aligned}$$

De la fórmula (5),

$$\begin{aligned}
L &= \int_1^4 \sqrt{2}\, e^t\, dt \\
&= \sqrt{2}\, e^t \Big]_1^4 \\
&= \sqrt{2}\,(e^4 - e)
\end{aligned}$$ ◀

La longitud de arco de una curva en el espacio tridimensional puede definirse exactamente como se definió la longitud de arco de una curva plana en la definición 9.2.1. Además, si C es la curva que tiene ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ o, equivalentemente, tiene la ecuación vectorial

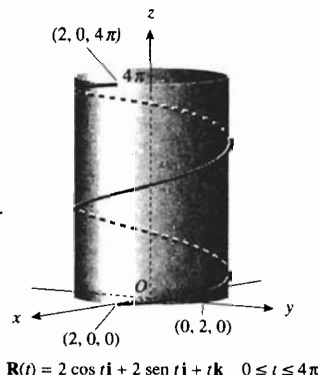
$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

entonces se puede demostrar, en la misma forma en que se probó el teorema 9.2.3, el teorema siguiente.

11.2.11 Teorema

Sea C la curva cuya ecuación vectorial es $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, y suponga que f', g' y h' son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces si L es la longitud de arco de C desde el punto $(f(a), g(a), h(a))$ hasta el punto $(f(b), g(b), h(b))$,

$$L = \int_a^b \|\mathbf{R}'(t)\|\, dt$$



$\mathbf{R}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad 0 \le t \le 4\pi$

FIGURA 3

▶ ***EJEMPLO 7*** Calcule la longitud de arco de la hélice circular del ejemplo 1 de la sección 11.1:

$$\mathbf{R}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

desde $t = 0$ hasta $t = 4\pi$.

Solución En la sección 11.1 se dibujó la hélice, la cual se muestra en la figura 3. De la ecuación vectorial dada,

$$\mathbf{R}'(t) = -2\operatorname{sen} t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

De modo que, del teorema 11.2.11,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{4\pi} \sqrt{(-2\operatorname{sen} t)^2 + (2\cos t)^2 + 1}\, dt \\ &= \int_0^{4\pi} \sqrt{4\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t + 1}\, dt \\ &= \int_0^{4\pi} \sqrt{5}\, dt \\ &= 4\pi\sqrt{5} \\ &\approx 28.10 \end{aligned}$$

◀

La integral definida del ejemplo anterior fue evaluada fácilmente, pero como se dijo en las discusiones sobre la longitud de arco, la mayoría de las veces sólo se puede aproximar el valor. Esta situación se presenta en los ejercicios 53 a 56, donde se le pedirá que emplee el procedimiento NINT en la graficadora a fin de obtener una aproximación de la longitud de un arco.

EJERCICIOS 11.2

En los ejercicios 1 a 10, calcule $\mathbf{R}'(t)$ *y* $\mathbf{R}''(t)$.

1. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}$
2. $\mathbf{R}(t) = (t^2 - 3)\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j}$
3. $\mathbf{R}(t) = \frac{t-1}{t+1}\mathbf{i} + \frac{t-2}{t}\mathbf{j}$
4. $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 4)^{-1}\mathbf{i} + \sqrt{1 - 5t}\,\mathbf{j}$
5. $\mathbf{R}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + \ln t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$
6. $\mathbf{R}(t) = \cos 2t\mathbf{i} + \tan t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
7. $\mathbf{R}(t) = \tan^{-1} t\mathbf{i} + \operatorname{sen}^{-1} t\mathbf{j} + \cos^{-1} t\mathbf{k}$
8. $\mathbf{R}(t) = (e^{3t} + 2)\mathbf{i} + 2e^{3t}\mathbf{j} + 3 \cdot 2^t\mathbf{k}$
9. $\mathbf{R}(t) = 5\operatorname{sen} 2t\mathbf{i} - \sec 4t\mathbf{j} + 4\cos 2t\mathbf{k}$
10. $\mathbf{R}(t) = \tan 3t\mathbf{i} + \ln \operatorname{sen} t\mathbf{j} - \frac{1}{t}\mathbf{k}$

En los ejercicios 11 a 14, obtenga $D_t\|\mathbf{R}(t)\|$.

11. $\mathbf{R}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + (2 - t)\mathbf{j}$
12. $\mathbf{R}(t) = (e^t + 1)\mathbf{i} + (e^t - 1)\mathbf{j}$

13. $\mathbf{R}(t) = \operatorname{sen} 3t\mathbf{i} + \cos 3t\mathbf{j} + 2e^{3t}\mathbf{k}$

14. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{t^2 + 1}\mathbf{i} + \sqrt{t^2 - 1}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

En los ejercicios 15 a 18, verifique el teorema 11.2.4 para las funciones vectoriales indicadas.

15. $\mathbf{R}(t) = (t^2 + e^t)\mathbf{i} + (t - e^{2t})\mathbf{j}$;
$\mathbf{Q}(t) = (t^3 + 2e^t)\mathbf{i} - (3t + e^{2t})\mathbf{j}$

16. $\mathbf{R}(t) = \cos 2t\mathbf{i} - \operatorname{sen} 2t\mathbf{j}$; $\mathbf{Q}(t) = \operatorname{sen}^2 t\mathbf{i} + \cos 2t\mathbf{j}$

17. $\mathbf{R}(t) = 2 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} - \operatorname{sen} 2t\mathbf{k}$;
$\mathbf{Q}(t) = \cos t\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \mathbf{k}$

18. $\mathbf{R}(t) = e^{3t}\mathbf{i} - 4e^{3t}\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$; $\mathbf{Q}(t) = e^t\mathbf{i} - e^t\mathbf{j} - 2e^{4t}\mathbf{k}$

En los ejercicios 19 a 22, verifique el teorema 11.2.5 para las funciones vectoriales del ejercicio indicado.

19. Ejercicio 15 **20.** Ejercicio 16

21. Ejercicio 17 **22.** Ejercicio 18

En los ejercicios 23 y 24, verifique el teorema 11.2.6 para las funciones dadas.

23. $f(t) = \cos 2t$; $\mathbf{R}$ es la función del ejercicio 9.

24. $f(t) = e^t$; $\mathbf{R}$ es la función del ejercicio 8.

En los ejercicios 25 y 26, verifique el teorema 11.2.7 para las funciones vectoriales dadas del ejercicio indicado.

25. Ejercicio 17 **26.** Ejercicio 18

En los ejercicios 27 y 28, verifique el teorema 11.2.8 para las funciones indicadas.

27. $\mathbf{F}(\phi) = \phi\mathbf{i} + \phi^2\mathbf{j} + \ln \phi\mathbf{k}$ y $h(t) = e^t$

28. $\mathbf{F}(\phi) = \operatorname{sen} \phi\mathbf{i} + \cos \phi\mathbf{j} + \phi\mathbf{k}$ y $h(t) = \operatorname{sen}^{-1} t$

29. Demuestre el teorema 11.2.4.

30. Demuestre el teorema 11.2.6.

31. Demuestre el teorema 11.2.7.

32. Demuestre el teorema 11.2.8.

En los ejercicios 33 a 40, obtenga la función vectorial más general cuya derivada tenga el valor de función indicado.

33. $\tan t\mathbf{i} - \frac{1}{t}\mathbf{j}$ **34.** $(t^2 - 9)\mathbf{i} + (2t - 5)\mathbf{j}$

35. $\ln t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ **36.** $\dfrac{1}{4 + t^2}\mathbf{i} - \dfrac{4}{1 - t^2}\mathbf{j}$

37. $e^{3t}\mathbf{i} + e^{-3t}\mathbf{j} - te^{3t}\mathbf{k}$ **38.** $3^t\mathbf{i} - 2^t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$

39. $\tan t\mathbf{i} + \sec t\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}$ **40.** $t \operatorname{sen} t\mathbf{i} - t \cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

41. Si $\mathbf{R}'(t) = t^2\mathbf{i} + \dfrac{1}{t - 2}\mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(3) = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$, calcule $\mathbf{R}(t)$.

42. Si $\mathbf{R}'(t) = \operatorname{sen}^2 t\mathbf{i} + 2\cos^2 t\mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(\pi) = \mathbf{0}$, calcule $\mathbf{R}(t)$.

43. Si $\mathbf{R}'(t) = e^t \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} - e^t\mathbf{k}$ y $\mathbf{R}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, calcule $\mathbf{R}(t)$.

44. Si $\mathbf{R}'(t) = \dfrac{1}{t + 1}\mathbf{i} - \tan t\mathbf{j} + \dfrac{t}{t^2 - 1}\mathbf{k}$ y $\mathbf{R}(0) = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, calcule $\mathbf{R}(t)$.

En los ejercicios 45 y 46 haga lo siguiente: (a) obtenga una ecuación cartesiana de la curva descrita por el punto terminal de la representación de posición de $\mathbf{R}'(t)$; *(b) calcule* $\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}'(t)$ *e interprete el resultado geométricamente.*

45. $\mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$

46. $\mathbf{R}(t) = \cosh t\mathbf{i} - \operatorname{senh} t\mathbf{j}$

En los ejercicios 47 y 48, si $\alpha(t)$ *es la medida en radianes del ángulo entre* $\mathbf{R}(t)$ *y* $\mathbf{Q}(t)$, *calcule* $D_t\alpha(t)$.

47. $\mathbf{R}(t) = 3e^{2t}\mathbf{i} - 4e^{2t}\mathbf{j}$ y $\mathbf{Q}(t) = 6e^{3t}\mathbf{j}$

48. $\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$ y $\mathbf{Q}(t) = 3t\mathbf{i}$

En los ejercicios 49 a 52, calcule la longitud exacta del arco desde t_1 *hasta* t_2 *de la curva que tiene la ecuación vectorial dada.*

49. $\mathbf{R}(t) = (t + 1)\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (1 - 2t)\mathbf{k}$; $t_1 = -1$; $t_2 = 2$

50. $\mathbf{R}(t) = \operatorname{sen} 2t\mathbf{i} + \cos 2t\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k}$; $t_1 = 0$; $t_2 = 1$

51. $\mathbf{R}(t) = 4t^{3/2}\mathbf{i} - 3 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 3 \cos t\mathbf{k}$; $t_1 = 0$; $t_2 = 2$

52. $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (t + \frac{1}{3}t^3)\mathbf{j} + (t - \frac{1}{3}t^3)\mathbf{k}$; $t_1 = 0$; $t_2 = 1$

En los ejercicios 53 a 56, utilice el procedimiento NINT *de la graficadora para obtener un valor aproximado, con cuatro dígitos significativos, de la longitud de arco de* t_1 *a* t_2 *de la curva que tiene la ecuación vectorial indicada.*

53. La cúbica alabeada $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$; $t_1 = 0$; $t_2 = 2$

54. $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}$; $t_1 = 1$; $t_2 = 2$

55. $\mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$; $t_1 = -1$; $t_2 = 1$

56. $\mathbf{R}(t) = \operatorname{sen} 2t\mathbf{i} + \cos 2t\mathbf{j} + t^{1/2}\mathbf{k}$; $t_1 = 0$; $t_2 = 4$

57. Suponga que $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}'$ son funciones vectoriales definidas en un intervalo y que $\mathbf{R}'$ es diferenciable en el intervalo. Demuestre que

$$D_t[\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}'(t)] = \|\mathbf{R}'(t)\|^2 + \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}''(t)$$

58. Si $\|\mathbf{R}(t)\| = h(t)$, demuestre que

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}'(t) = [h(t)][h'(t)]$$

59. Si la función vectorial $\mathbf{R}$ y la función real f son diferenciables en un intervalo y $f(t) \neq 0$ en el intervalo, demuestre que $\mathbf{R}/f$ es también diferenciable en el intervalo y

$$D_t = \left[\frac{\mathbf{R}(t)}{f(t)}\right] = \frac{f(t)\mathbf{R}'(t) - f'(t)\mathbf{R}(t)}{[f(t)]^2}$$

60. Demuestre que si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son vectores constantes y f y g son funciones integrables, entonces

$$\int [\mathbf{A}f(t) + \mathbf{B}g(t)]\, dt = \mathbf{A}\int f(t)\, dt + \mathbf{B}\int g(t)\, dt$$

Sugerencia: exprese $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en términos de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$.

61. Utilice el teorema 4.1.2 para funciones reales a fin de probar el teorema siguiente que corresponde a funciones vectoriales: si $\mathbf{R}$ y $\mathbf{Q}$ son dos funciones vectoriales ta-

les que $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{Q}'(t)$ para toda t en un intervalo I, entonces existe un vector constante $\mathbf{K}$ tal que $\mathbf{R}(t) = \mathbf{Q}(t) + \mathbf{K}$ para toda t en I.

62. Emplee el teorema del ejercicio 61 para demostrar el siguiente teorema que corresponde al teorema 4.1.3 para funciones reales: si $\mathbf{F}(t)$ es una antiderivada particular de $\mathbf{R}$ en el intervalo I, entonces cada antiderivada de $\mathbf{R}$ en I está dada por $\mathbf{F}(t) + \mathbf{C}$, donde $\mathbf{C}$ es un vector constante arbitrario.

63. Dé una definición de la *integral definida de una función vectorial* de manera semejante a la de integral indefinida. Después utilice el primer teorema fundamental del cálculo (4.7.1) para demostrar el siguiente teorema que corresponde a funciones vectoriales: si la función $\mathbf{R}$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y t es cualquier número de $[a, b]$, entonces

$$D_t \int_a^t \mathbf{R}(u)\, du = \mathbf{R}(t)$$

64. Utilice los teoremas de los ejercicios 62 y 63 para demostrar el teorema siguiente que corresponde al segundo teorema fundamental del cálculo (4.7.2): si la función $\mathbf{R}$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si $\mathbf{F}(t)$ es cualquier antiderivada de $\mathbf{R}$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b \mathbf{R}(t)\, dt = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)$$

11.3 VECTORES TANGENTE UNITARIO Y NORMAL UNITARIO, Y LONGITUD DE ARCO COMO PARÁMETRO

Ahora se asociarán a cada punto de una curva dos vectores, el *vector tangente unitario* y el *vector normal unitario*. Estos vectores aparecen en muchas aplicaciones de las funciones vectoriales, algunas de las cuales se tratarán en las dos secciones próximas. En esta sección y en las secciones siguientes de este capítulo, se supondrá que una curva tiene dirección (u orientación) determinada por los valores crecientes del parámetro.

11.3.1 Definición de vector tangente unitario

Si $\mathbf{R}(t)$ es el vector de posición de una curva C en un punto P de C el **vector tangente unitario** de C en P, denotado por $\mathbf{T}(t)$, es el vector unitario en la dirección de $D_t\mathbf{R}(t)$ si $D_t\mathbf{R}(t) \neq \mathbf{0}$.

Como el vector unitario en la dirección de $D_t\mathbf{R}(t)$ está dado por $D_t\mathbf{R}(t)/\|D_t\mathbf{R}(t)\|$, entonces

$$\mathbf{T}(t) = \frac{D_t\mathbf{R}(t)}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|} \qquad (1)$$

Del teorema 11.2.9, puesto que $\mathbf{T}(t)$ es un vector unitario, $D_t\mathbf{T}(t)$ debe ser ortogonal a $\mathbf{T}(t)$. Mientras que $D_t\mathbf{T}(t)$ no necesariamente es un vector unitario, el vector $D_t\mathbf{T}(t)/\|D_t\mathbf{T}(t)\|$ es unitario y tiene la misma dirección de $D_t\mathbf{T}(t)$. Por tanto, $D_t\mathbf{T}(t)/\|D_t\mathbf{T}(t)\|$ es un vector ortogonal a $\mathbf{T}(t)$, y se denomina *vector normal unitario*.

11.3.2 Definición de vector normal unitario

Si $\mathbf{T}(t)$ es el vector tangente unitario de la curva C en el punto P de C, el **vector normal unitario,** denotado por $\mathbf{N}(t)$, es el vector unitario en la dirección de $D_t\mathbf{T}(t)$.

De esta definición y de la discusión anterior,

$$\mathbf{N}(t) = \frac{D_t\mathbf{T}(t)}{\|D_t\mathbf{T}(t)\|} \qquad (2)$$

▶ EJEMPLO 1 Calcule $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ para la curva que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = (t^3 - 3t)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$$

Dibuje una porción de la curva que contenga al punto donde $t = 2$ y las representaciones de $\mathbf{T}(2)$ y $\mathbf{N}(2)$ cuyo punto inicial es el punto para el cual $t = 2$.

Solución

$$D_t\mathbf{R}(t) = (3t^2 - 3)\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} \qquad \|D_t\mathbf{R}(t)\| = \sqrt{(3t^2 - 3)^2 + 36t^2}$$
$$= \sqrt{9(t^4 + 2t^2 + 1)}$$
$$= 3(t^2 + 1)$$

De (1),

$$\mathbf{T}(t) = \frac{D_t\mathbf{R}(t)}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|}$$
$$= \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{j}$$

Al diferenciar $\mathbf{T}(t)$ con respecto a t se obtiene

$$D_t\mathbf{T}(t) = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2}\mathbf{i} + \frac{2 - 2t^2}{(t^2 + 1)^2}\mathbf{j}$$

Por tanto,

$$\|D_t\mathbf{T}(t)\| = \sqrt{\frac{16t^2}{(t^2 + 1)^4} + \frac{4 - 8t^2 + 4t^4}{(t^2 + 1)^4}}$$
$$= \sqrt{\frac{4 + 8t^2 + 4t^4}{(t^2 + 1)^4}}$$
$$= \sqrt{\frac{4(t^2 + 1)^2}{(t^2 + 1)^4}}$$
$$= \frac{2}{t^2 + 1}$$

De (2),

$$\mathbf{N}(t) = \frac{D_t\mathbf{T}(t)}{\|D_t\mathbf{T}(t)\|}$$
$$= \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}\mathbf{j}$$

Ahora se calcularán $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ para $t = 2$.

$$\mathbf{R}(2) = 2\mathbf{i} + 12\mathbf{j} \qquad \mathbf{T}(2) = \tfrac{3}{5}\mathbf{i} + \tfrac{4}{5}\mathbf{j} \qquad \mathbf{N}(2) = \tfrac{4}{5}\mathbf{i} - \tfrac{3}{5}\mathbf{j}$$

La curva y los vectores requeridos se muestran en la figura 1. ◀

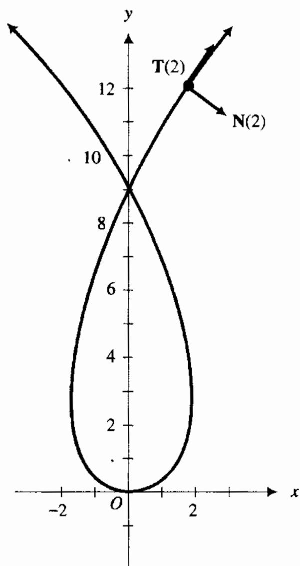


FIGURA 1

Debido a que los vectores tangente y normal unitarios son ortogonales, el ángulo entre ellos es $\frac{1}{2}\pi$. Por lo que del teorema 10.5.8, se tiene

$$\|\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)\| = \|\mathbf{T}(t)\|\,\|\mathbf{N}(t)\| \text{ sen } \tfrac{1}{2}\pi$$
$$= 1$$

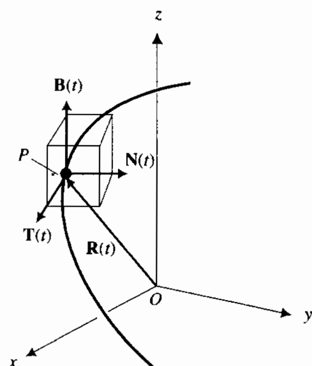


FIGURA 2

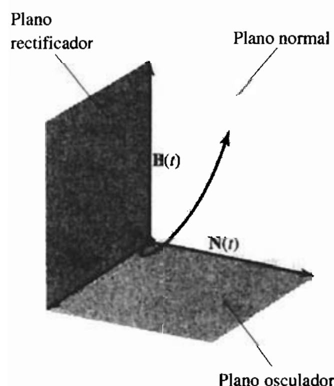


FIGURA 3

Por tanto, el producto cruz de $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ es un vector unitario y, por el teorema 10.5.10 es ortogonal tanto a $\mathbf{T}(t)$ como a $\mathbf{N}(t)$. Este vector, llamado **vector binormal unitario** y denotado por $\mathbf{B}(t)$, está definido por

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) \tag{3}$$

Los tres vectores unitarios mutuamente ortogonales $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ de una curva C reciben el nombre de **triedro móvil (local, intrínseco o de Frenet)** de C, el cual es importante en el estudio de desplazamientos en el espacio. Vea la figura 2. El triedro móvil también se conoce como **sistema de referencia de Frenet,** en honor al matemático francés **Jean-Frederic Frenet** (1816-1900). Los planos determinados por las representaciones de los tres vectores en un punto del espacio tienen nombres específicos. Como se indica en la figura 3, las representaciones de $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ en el punto P forman el **plano osculador,** las representaciones de $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ forman el **plano rectificador,** y las representaciones de $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ forman el **plano normal.**

▶ EJEMPLO 2 Obtenga el triedro móvil en cualquier punto de la hélice circular

$$\mathbf{R}(t) = a \cos t\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \qquad a > 0$$

Solución Con

$$D_t\mathbf{R}(t) = -a \operatorname{sen} t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \| D_t\mathbf{R}(t) \| = \sqrt{a^2 + 1}$$

se obtiene de (1)

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}(-a \operatorname{sen} t\mathbf{i} + a \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

Con

$$D_t\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}(-a \cos t\mathbf{i} - a \operatorname{sen} t\mathbf{j}) \quad \text{y} \quad \| D_t\mathbf{T}(t) \| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

se obtiene de (2)

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}(-a \cos t\mathbf{i} - a \operatorname{sen} t\mathbf{j})}{\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}}$$
$$= -\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j}$$

Al aplicar (3) resulta

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}(-a \operatorname{sen} t\mathbf{i} + a \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (-\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}(\operatorname{sen} t\mathbf{i} - \cos t\mathbf{j} + a\mathbf{k})$$ ◀

De la ecuación (1), el vector $D_t\mathbf{R}(t)$ puede expresarse como un escalar por el vector tangente unitario como sigue:

$$D_t\mathbf{R}(t) = \| D_t\mathbf{R}(t) \| \mathbf{T}(t) \tag{4}$$

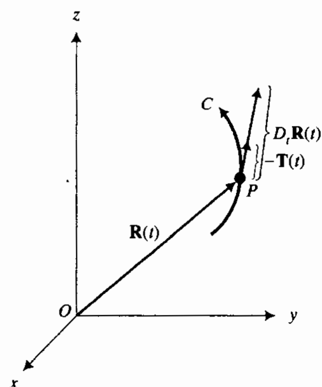


FIGURA 4

La figura 4 muestra una porción de la curva C junto con la representación de posición de $\mathbf{R}(t)$ y las representaciones de $\mathbf{T}(t)$ y $D_t\mathbf{R}(t)$ cuyos puntos iniciales están en el punto P de C.

Ahora se usará (4) para calcular $D_t^2\mathbf{R}(t)$. Al aplicar el teorema 11.2.6, se tiene

$$D_t^2\mathbf{R}(t) = (D_t\|D_t\mathbf{R}(t)\|)\mathbf{T}(t) + \|D_t\mathbf{R}(t)\|(D_t\mathbf{T}(t)) \tag{5}$$

De (2),

$$D_t\mathbf{T}(t) = \|D_t\mathbf{T}(t)\|\mathbf{N}(t)$$

Si se sustituye de esta ecuación en (5) resulta

$$D_t^2\mathbf{R}(t) = (D_t\|D_t\mathbf{R}(t)\|)\mathbf{T}(t) + (\|D_t\mathbf{R}(t)\|\,\|D_t\mathbf{T}(t)\|)\mathbf{N}(t) \tag{6}$$

Esta ecuación expresa el vector $D_t^2\mathbf{R}(t)$ como un escalar por el vector tangente unitario más un escalar por el vector normal unitario. El coeficiente de $\mathbf{T}(t)$ del miembro derecho de (6) es la componente del vector $D_t^2\mathbf{R}(t)$ en la dirección del vector tangente unitario, mientras que el coeficiente de $\mathbf{N}(t)$ es la componente de $D_t^2\mathbf{R}(t)$ en la dirección del vector normal unitario.

La figura 5 muestra la representación de posición de $\mathbf{R}(t)$ y la misma porción de la curva C que se muestra en la figura 4. También se muestran en la figura 5 las representaciones de los siguientes vectores, cuyos puntos iniciales están todos en el punto P de C:

$$D_t^2\mathbf{R}(t) \qquad \mathbf{T}(t) \qquad (D_t\|D_t\mathbf{R}(t)\|)\mathbf{T}(t) \qquad \mathbf{N}(t) \qquad (\|D_t\mathbf{R}(t)\|\,\|D_t\mathbf{T}(t)\|)\mathbf{N}(t)$$

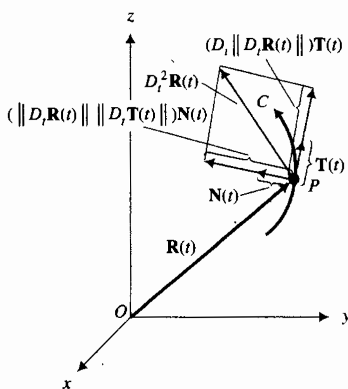


FIGURA 5

Observe que la representación del vector normal unitario $\mathbf{N}(t)$ está en el lado cóncavo de la curva.

En ocasiones, como en la siguiente sección donde se calcula la *curvatura*, es conveniente que el parámetro de una ecuación vectorial represente la longitud de arco. Por ejemplo, si una ecuación vectorial de la curva C es

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

entonces en lugar de t, puede emplearse como parámetro el número de unidades de la longitud de arco s desde un punto $P_0(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ de C, elegido arbitrariamente, al punto $P(f(t), g(t), h(t))$ de C. Considere que s aumenta conforme t crece, de modo que s es positivo si la longitud de arco se mide en la dirección de crecimiento de t y es negativa si se mide en la dirección opuesta. Por tanto, s es una distancia dirigida. A cada valor de s corresponde un solo punto P de C. En consecuencia, las coordenadas de P son funciones de s y s, a su vez, es una función de t, la cual, del teorema 11.2.11, está determinada por

$$s = \int_{t_0}^{t} \|D_u\mathbf{R}(u)\|\,du$$

Del primer teorema fundamental del Cálculo

$$\frac{ds}{dt} = \|D_t\mathbf{R}(t)\| \tag{7}$$

Al sustituir de (7) en (4) se obtiene

$$D_t\mathbf{R}(t) = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}(t) \tag{8}$$

Si el parámetro de la ecuación vectorial de C es s en lugar de t, se obtiene de esta ecuación, al considerar $t = s$ y observando que $ds/ds = 1$

$$D_s\mathbf{R}(s) = \mathbf{T}(s)$$

Este resultado se establece como teorema.

11.3.3 Teorema

Si la ecuación vectorial de una curva C es

$$\mathbf{R}(s) = f(s)\mathbf{i} + g(s)\mathbf{j} + h(s)\mathbf{k}$$

donde s unidades es la longitud de arco medida desde un punto particular P_0 de C hasta el punto P, entonces el vector tangente unitario de C en P está dado por

$$\mathbf{T}(s) = D_s\mathbf{R}(s)$$

si existe.

Como se indicó en las secciones 9.2 y 11.2, la mayoría de las veces la fórmula para calcular la longitud de arco conduce a una integral definida para la que la integral indefinida correspondiente no puede evaluarse en forma cerrada, lo cual significa que sólo puede aproximarse la longitud de arco mediante técnicas numéricas o empleando el procedimiento NINT en la graficadora. Problemas semejantes se presentan cuando se tiene una ecuación vectorial de una curva que contiene un parámetro t y se desea obtener una ecuación vectorial de la curva que tenga como parámetro la longitud de arco s. Esto es, generalmente no puede expresarse s en términos de t. Sin embargo, con frecuencia se puede calcular ds/dt a partir de la ecuación (7), la cual regularmente satisface los propósitos.

► ***EJEMPLO 3*** Dada la curva C cuya ecuación vectorial es

$$\mathbf{R}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

calcule ds/dt.

Solución De (7),

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \| D_t\mathbf{R}(t) \| \\ &= \| 3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \mathbf{k} \| \\ &= \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2 + 1} \\ &= \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}\end{aligned}$$ ◄

Observe que para la curva del ejemplo anterior, si se desea expresar s en términos de t a partir de la ecuación

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}$$

se necesita evaluar la integral $\int \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}\, dt$.

En ocasiones puede expresarse s en términos de t en un tiempo más o menos grande, como en el ejemplo siguiente, donde las componentes **i** y **j** son las mismas que en el ejemplo 3 pero la componente **k** es 2 en lugar de t.

EJEMPLO 4 Dado que una ecuación vectorial de la curva L es

$$\mathbf{R}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \qquad t \geq 0$$

determine una ecuación vectorial de L que tenga a s como parámetro, donde s unidades es la longitud de arco a partir del punto donde $t = 0$.

Solución Al derivar $\mathbf{R}(t)$ y calcular el módulo de $D_t\mathbf{R}(t)$ se tiene

$$\begin{aligned} D_t\mathbf{R}(t) &= 3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \\ \| D_t\mathbf{R}(t) \| &= \sqrt{9t^4 + 4t^2} \\ &= \sqrt{t^2}\sqrt{9t^2 + 4} \\ &= t\sqrt{9t^2 + 4} \qquad (\text{porque } t \geq 0) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= t\sqrt{9t^2 + 4} \\ s &= \int t\sqrt{9t^2 + 4}\,dt \\ &= \frac{1}{18}\int \sqrt{9t^2 + 4}\,(18t\,dt) \\ &= \tfrac{1}{27}(9t^2 + 4)^{3/2} + C \end{aligned}$$

Como $s = 0$ cuando $t = 0$, se obtiene $C = -\frac{8}{27}$. De modo que

$$s = \tfrac{1}{27}(9t^2 + 4)^{3/2} - \tfrac{8}{27}$$

Al resolver esta ecuación para t en términos de s se tiene

$$\begin{aligned} (9t^2 + 4)^{3/2} &= 27s + 8 \\ 9t^2 + 4 &= (27s + 8)^{2/3} \end{aligned}$$

Como $t \geq 0$,

$$t = \tfrac{1}{3}\sqrt{(27s + 8)^{2/3} - 4}$$

Si se sustituye este valor de t en la ecuación vectorial de L se obtiene

$$\mathbf{R}(s) = \tfrac{1}{27}[(27s + 8)^{2/3} - 4]^{3/2}\mathbf{i} + \tfrac{1}{9}[(27s + 8)^{2/3} - 4]\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$ ◀

Debido a que $D_s\mathbf{R}(s) = \mathbf{T}(s)$, y si $\mathbf{R}(s) = f(s)\mathbf{i} + g(s)\mathbf{j} + h(s)\mathbf{k}$,

$$\mathbf{T}(s) = f'(s)\mathbf{i} + g'(s)\mathbf{j} + h'(s)\mathbf{k}$$

Así, como $\mathbf{T}(t)$ es un vector unitario,

$$[f'(s)]^2 + [g'(s)]^2 + [h'(s)]^2 = 1 \qquad \textbf{(9)}$$

En el ejercicio 30 se le pedirá que utilice esta ecuación para verificar la respuesta del ejemplo 4.

EJERCICIOS 11.3

En los ejercicios 1 a 6, obtenga $\mathbf{T}(t)$ *y* $\mathbf{N}(t)$, *y en* $t = t_1$, *dibuje una porción de la curva y las representaciones de* $\mathbf{T}(t_1)$ *y* $\mathbf{N}(t_1)$ *que tienen punto inicial en* $t = t_1$.

1. $\mathbf{R}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\, t\mathbf{j};\ t_1 = \frac{1}{2}\pi$
2. $\mathbf{R}(t) = \cos 3t\mathbf{i} + \text{sen}\, 3t\mathbf{j};\ t_1 = \frac{1}{3}\pi$
3. $\mathbf{R}(t) = \ln \text{sen}\, t\mathbf{i} + t\mathbf{j},\ 0 < t < \pi;\ t_1 = \frac{1}{2}\pi$
4. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} - \ln\cos t\mathbf{j},\ -\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi;\ t_1 = 0$
5. $\mathbf{R}(t) = (\frac{1}{3}t^3 - t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j};\ t_1 = 2$
6. $\mathbf{R}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j};\ t_1 = 1$

En los ejercicios 7 a 10, calcule $\mathbf{T}(t)$ *y* $\mathbf{N}(t)$.

7. $\mathbf{R}(t) = (\text{sen}\, t - t\cos t)\mathbf{i} + (\cos t + t\,\text{sen}\, t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
8. $\mathbf{R}(t) = \text{sen}\, 3t\mathbf{i} - \cos 3t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$
9. $\mathbf{R}(t) = \mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k},\ t > 0$
10. $\mathbf{R}(t) = e^t\cos t\mathbf{i} + e^t\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$

En los ejercicios 11 a 14, determine el triedro móvil de la curva en $t = t_1$.

11. La curva del ejercicio 7; $t_1 = \frac{1}{2}\pi$.
12. La curva del ejercicio 8; $t_1 = \frac{1}{3}\pi$.
13. La curva del ejercicio 9; $t_1 = 1$.
14. La curva del ejercicio 10; $t_1 = 0$.

En los ejercicios 15 y 16, obtenga el triedro móvil en cualquier punto de la curva.

15. $\mathbf{R}(t) = \cos^3 t\mathbf{i} + \text{sen}^3 t\mathbf{j} + 2\mathbf{k},\ 0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$
16. $\mathbf{R}(t) = \cosh t\mathbf{i} + \text{senh}\, t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

En los ejercicios 17 a 22, obtenga ecuaciones de los planos osculador, rectificador y normal para la curva en $t = t_1$.

17. La curva de los ejercicios 7 y 11; $t_1 = \frac{1}{2}\pi$.
18. La curva de los ejercicios 10 y 14; $t_1 = 0$.
19. La curva de los ejercicios 9 y 13; $t_1 = 1$.
20. La curva de los ejercicios 8 y 12; $t_1 = \frac{1}{3}\pi$.
21. La curva del ejercicio 15; $t_1 = \frac{1}{4}\pi$.
22. La curva del ejercicio 16; $t_1 = 0$.
23. Utilice el resultado del ejemplo 2 para determinar el triedro móvil de la hélice circular
$$\mathbf{R}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$
en el punto donde $t = \frac{1}{2}\pi$. Después obtenga las ecuaciones de los planos osculador, rectificador y normal en ese punto.
24. Calcule el coseno del ángulo entre los vectores $\mathbf{R}(2)$ y $\mathbf{T}(2)$ para la curva $\mathbf{R}(t) = 3t^2\mathbf{i} + (t^3 - 3t)\mathbf{j}$.
25. Obtenga el coseno del ángulo entre los vectores $\mathbf{R}(\frac{1}{6}\pi)$ y $\mathbf{T}(\frac{1}{6}\pi)$ para la curva
$$\mathbf{R}(t) = 2\,\text{sen}\, t\mathbf{i} + \text{sen}\, 2t\mathbf{j} + \cos 3t\mathbf{k}.$$
26. Determine el coseno del ángulo entre el vector $\mathbf{j}$ y el vector tangente unitario en el punto donde $t = \pi$ de la curva $\mathbf{R}(t) = \cos 2t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\, 2t\mathbf{k}$.
27. Calcule la medida en radianes del ángulo entre los vectores $\mathbf{N}(1)$ y $D_t^2\mathbf{R}(1)$ para la curva $\mathbf{R}(t) = (4 - 3t^2)\mathbf{i} + (t^3 - 3t)\mathbf{j}$.

En los ejercicios 28 y 29, para la curva dada, exprese la longitud de arco s como una función de t, donde s se mide a partir del punto donde $t = 0$.

28. La cicloide $\mathbf{R}(t) = 2(t - \text{sen}\, t)\mathbf{i} + 2(1 - \cos t)\mathbf{j}$.
29. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^{3/2}\mathbf{j}$
30. Verifique la respuesta del ejemplo 4 empleando la ecuación (9).

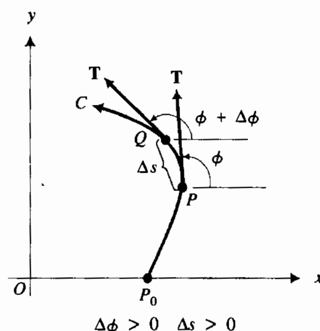
En los ejercicios 31 a 36, obtenga una ecuación vectorial de la curva que tiene la longitud de arco s como parámetro, donde s se mide a partir del punto donde $t = 0$. *Verifique la respuesta utilizando la ecuación (9).*

31. La curva del ejercicio 7.
32. La curva del ejercicio 8.
33. La curva del ejercicio 9.
34. La curva del ejercicio 10.
35. La curva del ejercicio 15.
36. La curva del ejercicio 16.
37. Demuestre que el vector tangente unitario de la hélice circular del ejemplo 2 forma un ángulo de medida constante, en radianes, con el vector unitario $\mathbf{k}$.
38. Demuestre que si una partícula se mueve sobre una recta, el vector normal unitario no está definido.

11.4 CURVATURA

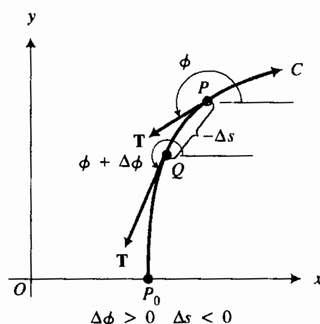
La *curvatura* es un concepto importante en el estudio de la geometría diferencial y del movimiento curvilíneo. Dicho concepto proporciona la tasa de variación (o cambio) de la dirección de una curva con respecto a la variación en su longitud.

El estudio de la curvatura se inicia con una curva plana C, y se considera que ϕ radianes es la medida del ángulo, medido en el sentido contrario al giro



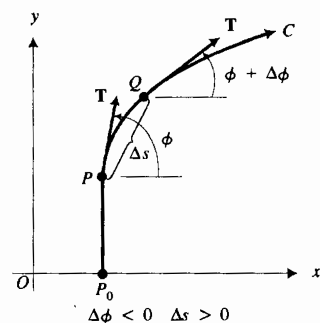
$\Delta\phi > 0 \quad \Delta s > 0$

FIGURA 1



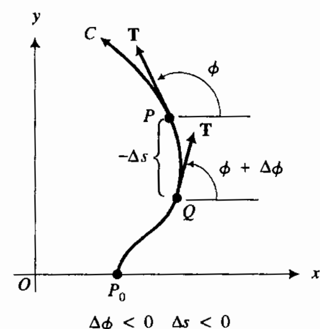
$\Delta\phi > 0 \quad \Delta s < 0$

FIGURA 2



$\Delta\phi < 0 \quad \Delta s > 0$

FIGURA 3



$\Delta\phi < 0 \quad \Delta s < 0$

FIGURA 4

de las manecillas del reloj, desde la dirección del eje x positivo hasta la dirección del vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ en el punto P de C. Refiérase a la figura 1 la cual muestra el ángulo ϕ y $\mathbf{T}(t)$, donde s unidades es la longitud de arco a partir de un punto P_0 de C hasta P. En el punto Q de C, la medida en radianes del ángulo que determina la dirección de $\mathbf{T}(t + \Delta t)$ es $\phi + \Delta\phi$, y $s + \Delta s$ unidades es la longitud de arco de P_0 a Q. En la figura 1, tanto $\Delta\phi$ como Δs son números positivos. Las figuras 2, 3 y 4 muestran la situación cuando al menos uno de estos números es negativo. En las cuatro figuras, la longitud de arco de P a Q es $|\Delta s|$ unidades, y la razón $|\Delta\phi/\Delta s|$ parece una buena medida de lo que intuitivamente se consideraría como la *curvatura promedio* a lo largo del arco PQ. De este modo, una definición adecuada para la curvatura de una curva plana sería el número $|d\phi/ds|$, el cual es el valor absoluto de la tasa de variación de ϕ con respecto a la medida de la longitud de arco a lo largo de la curva. Mientras que este número es consistente con la noción intuitiva de curvatura para una curva plana, tal definición no sería adecuada para la curvatura de una curva en el espacio tridimensional debido a que no se asocia un solo ángulo ϕ con el vector tangente unitario. A fin de llegar a una definición que se aplique tanto a curvas de R^2 como de R^3, se procederá a obtener una expresión para $|d\phi/ds|$ en R^2 que también tenga significado para R^3.

Refiérase a la figura 5 donde C es una curva en R^2. Primero se expresa $\mathbf{T}(t)$ en términos de ϕ. Como $\|\mathbf{T}(t)\| = 1$, de la ecuación (5) de la sección 10.1 se tiene

$$\mathbf{T}(t) = \cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j}$$

Al diferenciar esta ecuación con respecto a ϕ se obtiene

$$D_\phi\mathbf{T}(t) = -\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j} \tag{1}$$

Así,

$$\|D_\phi\mathbf{T}(t)\| = 1 \tag{2}$$

de modo que $D_\phi\mathbf{T}(t)$ es un vector unitario.

Ahora se obtendrá una expresión para $D_s\mathbf{T}(t)$, donde s unidades es la longitud de arco medida desde un punto de C elegido arbitrariamente hasta el punto P, y s se incrementa conforme t crece. De la regla de la cadena (teorema 11.2.8),

$$D_s\mathbf{T}(t) = D_\phi\mathbf{T}(t)\frac{d\phi}{ds}$$

$$\|D_s\mathbf{T}(t)\| = \left\|D_\phi\mathbf{T}(t)\frac{d\phi}{ds}\right\|$$

$$= \|D_\phi\mathbf{T}(t)\|\left|\frac{d\phi}{ds}\right|$$

Si en la ecuación anterior se reemplaza $\|D_\phi\mathbf{T}(t)\|$ por 1, de acuerdo con (2), se obtiene

$$\|D_s\mathbf{T}(t)\| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right| \tag{3}$$

Como $\|D_s\mathbf{T}(t)\|$ tiene significado para curvas en R^3 así como en R^2, se definirá lo que es la *curvatura* de una curva en un punto, y se definirá también el vector correspondiente o *vector curvatura*.

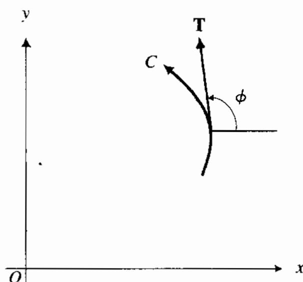


FIGURA 5

11.4.1 Definición de vector curvatura y curvatura

Si $\mathbf{T}(t)$ es el vector tangente unitario a una curva C en un punto P, s es la longitud de arco medida desde un punto P de C elegido arbitrariamente, y s crece conforme t se incrementa, entonces el **vector curvatura** de C en P, denotado por $\mathbf{K}(t)$, se define como

$$\mathbf{K}(t) = D_s\mathbf{T}(t)$$

La **curvatura** de C en P, denotada por $K(t)$, es el módulo del vector curvatura; esto es

$$K(t) = \| D_s\mathbf{T}(t) \|$$

Con el fin de obtener el vector curvatura para una curva particular conviene tener una fórmula que exprese el vector curvatura en términos de las derivadas con respecto a t. De la regla de la cadena,

$$D_t\mathbf{T}(t) = D_s\mathbf{T}(t)\frac{ds}{dt}$$

De la ecuación (7) de la sección 11.3, $\dfrac{ds}{dt} = \| D_t\mathbf{R}(t) \|$. Así,

$$D_t\mathbf{T}(t) = [D_s\mathbf{T}(t)]\, \| D_t\mathbf{R}(t) \|$$

$$D_s\mathbf{T}(t) = \frac{D_t\mathbf{T}(t)}{\| D_t\mathbf{R}(t) \|}$$

Al sustituir de esta ecuación en la fórmula para $\mathbf{K}(t)$ de la definición 11.4.1, se obtiene

$$\mathbf{K}(t) = \frac{D_t\mathbf{T}(t)}{\| D_t\mathbf{R}(t) \|} \tag{4}$$

Como $K(t) = \| \mathbf{K}(t) \|$, la curvatura está dada por

$$K(t) = \frac{\| D_t\mathbf{T}(t) \|}{\| D_t\mathbf{R}(t) \|} \tag{5}$$

▶ ***EJEMPLO 1*** Dada la circunferencia de radio a:

$$\mathbf{R}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\, t\,\mathbf{j} \qquad a > 0$$

determine el vector curvatura y la curvatura para cualquier valor de t.

Solución

$$D_t\mathbf{R}(t) = -a\,\text{sen}\, t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} \qquad \| D_t\mathbf{R}(t) \| = \sqrt{(-a\,\text{sen}\, t)^2 + (a\cos t)^2} = a$$

Por tanto,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{D_t\mathbf{R}(t)}{\| D_t\mathbf{R}(t) \|} = -\text{sen}\, t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} \qquad D_t\mathbf{T}(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \text{sen}\, t\,\mathbf{j}$$

$$\frac{D_t\mathbf{T}(t)}{\| D_t\mathbf{R}(t) \|} = -\frac{\cos t}{a}\,\mathbf{i} - \frac{\text{sen}\, t}{a}\,\mathbf{j}$$

En consecuencia, el vector curvatura y la curvatura están dadas por

$$\mathbf{K}(t) = -\frac{1}{a}\cos t\,\mathbf{i} - \frac{1}{a}\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} \qquad K(t) = \|\mathbf{K}(t)\|$$
$$= \frac{1}{a}$$ ◀

El resultado del ejemplo 1 afirma que la curvatura de una circunferencia es constante, lo cual es algo que se esperaba. Además, es el recíproco del radio.

▶ ***EJEMPLO 2*** Calcule la curvatura de la curva que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = t^{-1}\mathbf{i} + 2\ln t\,\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

Solución

$$D_t\mathbf{R}(t) = -t^{-2}\mathbf{i} + 2t^{-1}\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \qquad \|D_t\mathbf{R}(t)\| = \sqrt{(-t^{-2})^2 + (2t^{-1})^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{t^{-4} + 4t^{-2} + 4}$$
$$= t^{-2} + 2$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{D_t\mathbf{R}(t)}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|}$$
$$= \frac{-t^{-2}\mathbf{i} + 2t^{-1}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{t^{-2} + 2}$$
$$= \frac{-\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}}{1 + 2t^2}$$

$$D_t\mathbf{T}(t) = \frac{(1 + 2t^2)(2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}) - 4t(-\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k})}{(1 + 2t^2)^2}$$
$$= \frac{4t\mathbf{i} + (2 - 4t^2)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}}{(1 + 2t^2)^2}$$

$$\|D_t\mathbf{T}(t)\| = \frac{\sqrt{(4t)^2 + (2 - 4t^2)^2 + (4t)^2}}{(1 + 2t^2)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{4 + 16t^2 + 16t^4}}{(1 + 2t^2)^2}$$
$$= \frac{2\sqrt{(1 + 2t^2)^2}}{(1 + 2t^2)^2}$$
$$= \frac{2}{1 + 2t^2}$$

$$K(t) = \frac{\|D_t\mathbf{T}(t)\|}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|}$$
$$= \frac{\dfrac{2}{1 + 2t^2}}{t^{-2} + 2}$$
$$= \frac{2t^2}{(1 + 2t^2)^2}$$ ◀

Como puede verse en el ejemplo anterior, la determinación de la curvatura a partir de las fórmulas (4) y (5) puede ser larga y tediosa. El teorema

siguiente proporciona una fórmula más práctica para calcular la curvatura, la cual es más fácil aplicar que el procedimiento del ejemplo 2.

11.4.2 Teorema

Si $\mathbf{R}(t)$ es el vector de posición de la curva C, entonces la curvatura $K(t)$ de C está determinada por

$$K(t) = \frac{\|D_t\mathbf{R}(t) \times D_t^2\mathbf{R}(t)\|}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|}$$

La demostración de este teorema se deja como ejercicio (vea el ejercicio 56). Aunque el producto cruz no está definido para vectores bidimensionales, la fórmula del teorema también puede aplicarse a curvas en R^2 considerando la componente $\mathbf{k}$ como 0.

▶ *EJEMPLO 3* Aplique la fórmula del teorema 11.4.2 a fin de obtener la curvatura de la curva del ejemplo 2.

Solución Una ecuación vectorial de la curva es

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(t) &= t^{-1}\mathbf{i} + 2\ln t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} \\
D_t\mathbf{R}(t) &= -t^{-2}\mathbf{i} + 2t^{-1}\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \qquad \|D_t\mathbf{R}(t)\| = t^{-2} + 2 \\
D_t^2\mathbf{R}(t) &= 2t^{-3}\mathbf{i} - 2t^{-2}\mathbf{j} \\
D_t\mathbf{R}(t) \times D_t^2\mathbf{R}(t) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -t^{-2} & 2t^{-1} & 2 \\ 2t^{-3} & -2t^{-2} & 0 \end{vmatrix} \\
&= 4t^{-3}\mathbf{j} + 2t^{-4}\mathbf{k} - 4t^{-4}\mathbf{k} + 4t^{-2}\mathbf{i} \\
&= 4t^{-2}\mathbf{i} + 4t^{-3}\mathbf{j} - 2t^{-4}\mathbf{k} \\
\|D_t\mathbf{R}(t) \times D_t^2\mathbf{R}(t)\| &= \sqrt{16t^{-4} + 16t^{-6} + 4t^{-8}} \\
&= 2t^{-2}\sqrt{4 + 4t^{-2} + t^{-4}} \\
&= 2t^{-2}(2 + t^{-2})
\end{aligned}$$

De la fórmula del teorema 11.4.2,

$$\begin{aligned}
K(t) &= \frac{2t^{-2}(2 + t^{-2})}{(t^{-2} + 2)^3} \\
&= \frac{2t^{-2}}{(t^{-2} + 2)^2} \\
&= \frac{2t^2}{(1 + 2t^2)^2}
\end{aligned}$$

◀

Compare la solución del ejemplo anterior con la del ejemplo 2, lo cual debe convencerle de la ventaja obtenida al emplear el teorema 11.4.2.

Ahora suponga que la curva plana C tiene la ecuación vectorial $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ y que en un punto particular $P_0(f(t_0), g(t_0))$ la curvatura es $K(t_0) \neq 0$. Considere la circunferencia que tiene la curvatura constante $K(t_0)$, cuyo centro está en el lado cóncavo de C, y que es tangente a la curva C en P_0. Del ejemplo 1, el radio de esta circunferencia es $1/K(t_0)$. Esta circunferencia se denomina **circunferencia osculatriz** (o **circunferencia de curvatura**) de C en P_0, y su radio es el *radio de curvatura*, el cual se define formalmente a continuación.

11.4.3 Definición de radio de curvatura

Si $K(t_0)$ es la curvatura de la curva plana C en el punto P_0, donde $t = t_0$, y $K(t_0) \neq 0$, entonces el **radio de curvatura** de C en P_0, denotado por $\rho(t_0)$, se define como

$$\rho(t_0) = \frac{1}{K(t_0)}$$

EJEMPLO 4 Para la curva C que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$$

determine lo siguiente en el punto donde $t = 1$: **(a)** el vector tangente unitario; **(b)** la curvatura; **(c)** el radio de curvatura. Dibuje una porción de la curva, el vector tangente unitario y la circunferencia osculatriz para $t = 1$.

Solución

$$D_t\mathbf{R}(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \qquad \|D_t\mathbf{R}(t)\| = 2\sqrt{1 + t^2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{D_t\mathbf{R}(t)}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\mathbf{i} + \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\mathbf{j}$$

$$D_t\mathbf{T}(t) = -\frac{t}{(1 + t^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{1}{(1 + t^2)^{3/2}}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{K}(t) = \frac{D_t\mathbf{T}(t)}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|}$$

$$= -\frac{t}{2(1 + t^2)^2}\mathbf{i} + \frac{1}{2(1 + t^2)^2}\mathbf{j}$$

$$K(t) = \|\mathbf{K}(t)\|$$

$$= \sqrt{\frac{t^2}{4(1 + t^2)^4} + \frac{1}{4(1 + t^2)^4}}$$

$$= \frac{1}{2(1 + t^2)^{3/2}}$$

(a) $\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$ **(b)** $K(1) = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ **(c)** $\rho(1) = 4\sqrt{2}$

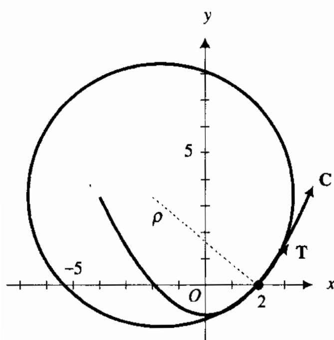


FIGURA 6

La figura 6 muestra una porción de la curva, el vector tangente unitario y la circunferencia osculatriz en $t = 1$. Para dibujar la curva se localizaron algunos puntos a partir de los valores de x y y proporcionados en la tabla 1 cuando t toma los valores −2, −1, 0, 1 y 2. También observe que la curva tiene una recta tangente horizontal en $t = 0$. ◀

Tabla 1

t	x	y
−2	−4	3
−1	−2	0
0	0	−1
1	2	0
2	4	3

Ahora se obtendrá una fórmula para calcular la curvatura de una curva plana a partir de las ecuaciones paramétricas de la curva:

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = g(t)$$

Como $K(t) = |d\phi/ds|$, primero se calcula $d\phi/ds$.

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

Con la suposición de que s se incrementa cuando t crece, $\frac{ds}{dt} > 0$. De modo que,

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} \tag{6}$$

Para calcular $\frac{d\phi}{dt}$, se observa que como ϕ es la medida en radianes del ángulo que indica la dirección del vector tangente unitario,

$$\tan \phi = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Al diferenciar implícitamente con respecto a t los dos miembros de esta ecuación se obtiene

$$\sec^2 \phi \frac{d\phi}{dt} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\sec^2\phi \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \tag{7}$$

Debido a que $\sec^2 \phi = 1 + \tan^2 \phi$, se tiene

$$\sec^2 \phi = 1 + \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

Si se sustituye esta expresión para $\sec^2 \phi$ en (7) resulta

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Al reemplazar de esta ecuación en (6), y como $K(t) = \left|\frac{d\phi}{ds}\right|$, se tiene

$$K(t) = \frac{\left|\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right|}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{8}$$

EJEMPLO 5 Calcule la curvatura de la curva C del ejemplo 4 empleando la fórmula (8).

Solución Las ecuaciones paramétricas para C son $x = 2t$ y $y = t^2 - 1$. En consecuencia,

$$\frac{dx}{dt} = 2 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{dy}{dt} = 2t \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 2$$

Por tanto, de (8),

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{|2(2) - 2t(0)|}{[(2)^2 + (2t)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{4}{(4 + 4t^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2(1 + t^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

◀

Suponga que la ecuación cartesiana de una curva se expresa en una de las formas $y = F(x)$ o $x = G(y)$. Se pueden emplear casos especiales de (8) para calcular la curvatura en tales situaciones.

Si $y = F(x)$ es una ecuación de la curva C, un conjunto de ecuaciones paramétricas de C es $x = t$ y $y = F(t)$. Entonces

$$\frac{dx}{dt} = 1 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Al sustituir en (8) se obtiene

$$K = \frac{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{9}$$

De manera semejante, si una ecuación de la curva C es $x = G(y)$,

$$K = \frac{\left|\dfrac{d^2x}{dy^2}\right|}{\left[1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2\right]^{3/2}}$$

EJEMPLO 6 Si la ecuación de la curva C es

$$y = \frac{1}{x}$$

calcule el radio de curvatura de C en el punto $(1, 1)$ y dibuje la curva y la circunferencia de osculatriz en $(1, 1)$.

Solución

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$$

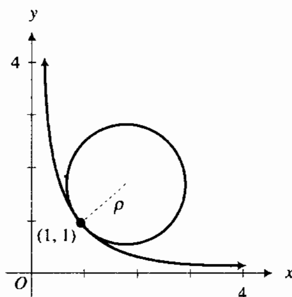


FIGURA 7

Se calcula K a partir de (9) y después se obtiene $\rho = 1/K$.

$$K = \frac{\left|\dfrac{2}{x^3}\right|}{\left[1 + \dfrac{1}{x^4}\right]^{3/2}} \qquad \rho = \frac{(x^4+1)^{3/2}}{2|x^3|}$$

$$= \frac{2|x^3|}{(x^4+1)^{3/2}}$$

Por tanto, en (1, 1), $\rho = \sqrt{2}$. La curva y la circunferencia osculatriz se muestran en la figura 7. ◀

EJERCICIOS 11.4

En los ejercicios 1 a 6, para la curva y t_1 del ejercicio indicado de la sección 11.3, calcule la curvatura K y el radio de curvatura ρ en el punto donde $t = t_1$. Utilice la fórmula (5) para obtener K. Dibuje una porción de la curva, el vector unitario tangente y la circunferencia osculatriz en $t = t_1$.

1. Ejercicio 1 **2.** Ejercicio 2 **3.** Ejercicio 3

4. Ejercicio 4 **5.** Ejercicio 5 **6.** Ejercicio 6

En los ejercicios 7 a 10, para los ejercicios indicados de la sección 11.3, calcule la curvatura K aplicando la fórmula (5).

7. Ejercicio 7 **8.** Ejercicio 8 **9.** Ejercicio 9

10. Ejercicio 10

En los ejercicios 11 a 14, utilice la fórmula del teorema 11.4.2 para obtener la curvatura de la curva del ejercicio indicado de esta sección.

11. Ejercicio 7 **12.** Ejercicio 8 **13.** Ejercicio 9

14. Ejercicio 10

En los ejercicios 15 y 16, aplique la fórmula del teorema 11.4.2 para calcular la curvatura de la curva en el punto indicado.

15. La cúbica alabeada $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$; el origen

16. $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}; t = 0$

En los ejercicios 17 y 18, obtenga la curvatura K empleando la fórmula (8). Después calcule K y ρ en el punto donde $t = t_1$, y dibuje una porción de la curva, el vector tangente unitario y la circunferencia osculatriz en $t = t_1$.

17. $x = \dfrac{1}{1+t}, y = \dfrac{1}{1-t}; t_1 = 0$

18. $x = e^t + e^{-t}, y = e^t - e^{-t}; t_1 = 0$

En los ejercicios 19 a 26, determine la curvatura K y el radio de curvatura ρ en el punto indicado. Dibuje una porción de la curva, una parte de la recta tangente y la circunferencia osculatriz en el punto dado.

19. $y = 2\sqrt{x}; (0, 0)$ **20.** $y^2 = x^3; (\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$

21. $y = e^x; (0, 1)$ **22.** $y = \ln x; (e, 1)$

23. $x = \operatorname{sen} y; (\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\pi)$ **24.** $4x^2 + 9y^2 = 36; (0, 2)$

25. $x = \sqrt{y-1}; (2, 5)$ **26.** $x = \tan y; (1, \frac{1}{4}\pi)$

En los ejercicios 27 a 34, calcule el radio de curvatura en cualquier punto de la curva dada.

27. $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ **28.** $y = \ln \sec x$

29. $4x^2 - 9y^2 = 16$ **30.** $x = \tan^{-1} y$

31. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$

32. $\mathbf{R}(t) = e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j}$

33. La cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t), y = a(1 - \cos t)$

34. La tractriz $x = t - a \tanh \dfrac{t}{a}, y = a \operatorname{sech} \dfrac{t}{a}$

En los ejercicios 35 a 38, obtenga un punto de la curva dada en el que la curvatura es un máximo absoluto.

35. $y = e^x$ **36.** $y = x^2 - 2x + 3$

37. $\mathbf{R}(t) = (2t - 3)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$ **38.** $y = \operatorname{sen} x$

39. El centro de la circunferencia osculatriz de la curva C en un punto P se denomina **centro de curvatura** en P. Demuestre que las coordenadas del centro de curvatura de C en $P(x, y)$ están dadas por

$$x_c = x - \frac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$$

$$y_c = y + \frac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$$

En los ejercicios 40 a 42, calcule la curvatura K, el radio de curvatura ρ y el centro de curvatura en el punto indicado. Dibuje la curva y la circunferencia osculatriz.

40. $y = \ln x; (1, 0)$ **41.** $y = x^4 - x^2; (0, 0)$

42. $y = \cos x; (\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$

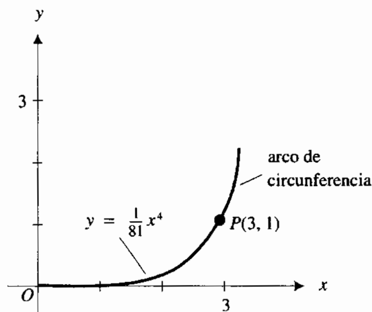
En los ejercicios 43 a 46, determine las coordenadas del centro de curvatura en cualquier punto.

43. $y^2 = 4px$ **44.** $y^3 = a^2x$

45. $\mathbf{R}(t) = a \cos t\,\mathbf{i} + b \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$

46. $\mathbf{R}(t) = a \cos^3 t\,\mathbf{i} + a \operatorname{sen}^3 t\,\mathbf{j}$

47. La figura adjunta muestra una rampa de salida curvada desde un camino recto y un sistema coordenado cartesiano rectangular dispuesto de modo que la rampa comienza en el origen y el camino está sobre el eje x. La rampa coincide con la gráfica de $y = \frac{1}{81}x^4$ desde el origen hasta el punto $P(3, 1)$, y después con la circunferencia osculatriz de esta gráfica en P. Determine el centro y radio de curvatura de la circunferencia.



48. Demuestre que la curvatura de una recta es cero en cada uno de sus puntos.

49. Obtenga una ecuación de la circunferencia osculatriz de la curva $y = e^x$ en el punto $(0, 1)$.

50. Si una ecuación polar de una curva es $r = F(\theta)$, demuestre que la curvatura K está dada por la fórmula

$$K = \frac{\left|r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\right)\right|}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}$$

En los ejercicios 51 a 54, calcule la curvatura K y el radio de curvatura ρ en el punto indicado. Utilice la fórmula del ejercicio 50 para determinar K.

51. $r = 4\cos 2\theta$; $\theta = \frac{1}{12}\pi$

52. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$; $\theta = 0$

53. $r = a\sec^2 \frac{1}{2}\theta$; $\theta = \frac{2}{3}\pi$

54. $r = a\theta$; $\theta = 1$

55. Demuestre que si $\mathbf{R}(t)$ es el vector de posición de la curva C, $K(t)$ es la curvatura de C en un punto P, y s unidades es la longitud de arco medida desde un punto P de C elegido arbitrariamente, entonces

$$D_s\mathbf{R}(t) \cdot D_s^3\,\mathbf{R}(t) = -[K(t)]^2$$

56. Demuestre el teorema 11.4.2.

57. Demuestre que la curvatura de la catenaria

$$y = a\cosh(x/a)$$

en cualquier punto (x, y) de la curva es a/y^2. Dibuje la circunferencia osculatriz en el punto $(0, a)$. Explique por qué la curvatura K es un máximo absoluto en $(0, a)$ sin referirse a $K'(x)$.

58. Demuestre que la curvatura de la hélice circular

$$\mathbf{R}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\operatorname{sen} t\mathbf{j} + bt\mathbf{k} \qquad a > 0, b > 0$$

es $a/(a^2 + b^2)$. *Sugerencia:* utilice la fórmula del teorema 11.4.2.

59. A partir del resultado del ejericicio 58, determine la curvatura máxima para la hélice de ese ejercicio para un valor fijo de b.

60. A partir del resultado del ejercicio 58, explique el efecto en la curvatura de la hélice si (i) b se incrementa para un valor fijo de a, y (ii) si a se disminuye para un valor fijo de b.

11.5 MOVIMIENTO CURVILÍNEO

En las discusiones anteriores acerca del movimiento de una partícula, éste se restringió al movimiento rectilíneo. Ahora se considerará el movimiento de una partícula a lo largo de una curva, denominado **movimiento curvilíneo.**

Suponga que C es la curva cuya ecuación vectorial es

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

donde t denota el tiempo. Conforme t varía, el punto terminal P de $\overrightarrow{OP}$ describe la curva C, de modo que la posición de una partícula, que se mueve a lo largo de C, en el tiempo t unidades es el punto $P(f(t), g(t), h(t))$. A continuación se definirán el *vector velocidad* y el *vector aceleración*.

11.5.1 Definición de velocidad y aceleración en el movimiento curvilíneo

Sea C la curva cuya ecuación vectorial es

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Si una partícula se mueve a lo largo de C de modo que su posición en cualquier tiempo t unidades es el punto $P(f(t), g(t), h(t))$, entonces el vector velocidad $\mathbf{V}(t)$ y el vector aceleración $\mathbf{A}(t)$ en el punto P se definen como

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t) \Leftrightarrow \mathbf{V}(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{R}''(t) \Leftrightarrow \mathbf{A}(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k} \Leftrightarrow \mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t)$$

donde $\mathbf{R}''(t)$ existe.

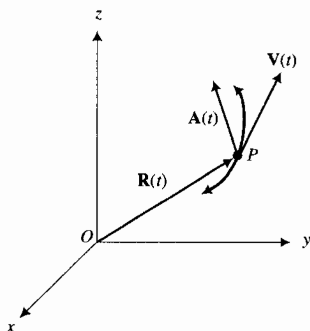


FIGURA 1

Puesto que la dirección de $\mathbf{R}'(t)$ en el punto P es la misma que la de la recta tangente a la curva en P, entonces el vector velocidad $\mathbf{V}(t)$ tiene esta dirección en P.

El módulo o intensidad (o también magnitud) del vector velocidad, $\|\mathbf{V}(t)\|$, es una medida de la **rapidez** de la partícula.

La figura 1 muestra las representaciones de los vectores velocidad y aceleración en el punto P de C.

EJEMPLO 1 Una partícula se mueve a lo largo de la curva plana que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = 4\cos\tfrac{1}{2}t\mathbf{i} + 4\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}t\mathbf{j}$$

Calcule la rapidez de la partícula y el módulo del vector aceleración de la partícula a los t segundos si la distancia se mide en centímetros. Dibuje la trayectoria de la partícula y las representaciones de los vectores velocidad y aceleración en el punto donde $t = \frac{1}{3}\pi$.

Solución Al calcular $\mathbf{V}(t)$ y $\mathbf{A}(t)$ se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(t) &= \mathbf{R}'(t) \\ &= -2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}t\mathbf{i} + 2\cos\tfrac{1}{2}t\mathbf{j} \\ \|\mathbf{V}(t)\| &= \sqrt{(-2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}t)^2 + (2\cos\tfrac{1}{2}t)^2} \\ &= \sqrt{4\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}t + 4\cos^2\tfrac{1}{2}t} \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(t) &= \mathbf{V}'(t) \\ &= -\cos\tfrac{1}{2}t\mathbf{i} - \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}t\mathbf{j} \\ \|\mathbf{A}(t)\| &= \sqrt{(-\cos\tfrac{1}{2}t)^2 + (-\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}t)^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

Por tanto, la rapidez de la partícula es constante e igual a 2 cm/s. El módulo del vector aceleración también es constante e igual a 1 cm/s^2.

Las ecuaciones paramétricas de C son

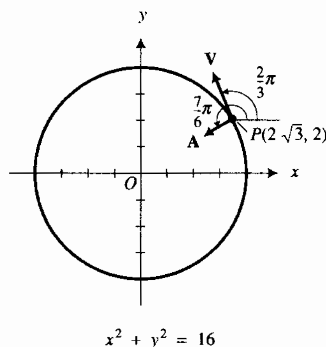
$$x = 4\cos\tfrac{1}{2}t \quad \text{y} \quad y = 4\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}t \qquad 0 \le t \le 4\pi$$

Al eliminar el parámetro t de estas ecuaciones se obtiene la ecuación cartesiana

$$x^2 + y^2 = 16$$

la cual es la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 4. Ahora se determinarán los vectores velocidad y aceleración en $t = \frac{1}{3}\pi$.

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\tfrac{1}{3}\pi) &= -2\operatorname{sen}\tfrac{1}{6}\pi\mathbf{i} + 2\cos\tfrac{1}{6}\pi\mathbf{j} \\ &= -\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathbf{A}(\tfrac{1}{3}\pi) &= -\cos\tfrac{1}{6}\pi\mathbf{i} - \operatorname{sen}\tfrac{1}{6}\pi\mathbf{j} \\ &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{i} - \tfrac{1}{2}\mathbf{j}\end{aligned}$$



$x^2 + y^2 = 16$

FIGURA 2

La dirección de $\mathbf{V}(\frac{1}{3}\pi)$ está determinada por

$$\tan \theta_1 = -\sqrt{3} \qquad \tfrac{1}{2}\pi < \theta_1 < \pi$$

y la dirección de $\mathbf{A}(\frac{1}{3}\pi)$ está dada por

$$\tan \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \pi < \theta_2 < \tfrac{3}{2}\pi$$

Así, $\theta_1 = \frac{2}{3}\pi$ y $\theta_2 = \frac{7}{6}\pi$. La figura 2 muestra la trayectoria de la partícula y las representaciones de los vectores velocidad y aceleración que tienen punto inicial para el cual $t = \frac{1}{3}\pi$. ◀

De manera semejante en que se simuló el movimiento rectilíneo, se puede simular el movimiento curvilíneo en el plano en la graficadora como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Para observar el movimiento de la partícula sobre la circunferencia del ejemplo 1, active la graficadora en modo paramétrico e introduzca las ecuaciones paramétricas de la circunferencia. Para el rectángulo de inspección de [−7.5, 7.5] por [−5, 5], considere $t_{\text{mín}} = 0$, $t_{\text{máx}} = 4\pi$ y $t_{\text{step}} = 0.1$. Oprima la tecla TRACE, después presione la tecla de *avance a la izquierda* y manténgala presionada hasta que el cursor esté en $t = 0$. Ahora presione la tecla de *avance a la derecha* y manténgala oprimida. El cursor representa la partícula que se desplaza a lo largo de la circunferencia. ◀

▶ ***EJEMPLO 2*** La posición de una partícula que se mueve en el plano, en el tiempo t unidades, está dada por la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = (t^2 + 2t + 1)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} \qquad 0 \le t \le 2$$

(a) Calcule $\mathbf{V}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\|\mathbf{V}(t)\|$ y $\|\mathbf{A}(t)\|$. **(b)** Determine los vectores velocidad y aceleración en $t = 1$. **(c)** Dibuje la trayectoria de la partícula e ilustre las representaciones de los vectores de velocidad y aceleración en de $t = 1$. **(d)** Simule el movimiento de la partícula en la graficadora. **(e)** Trace la trayectoria de la partícula en la graficadora activada en el modo punto.

Tabla 1

t	x	y
0	1	0
0.5	2.25	0.125
1	4	1
1.5	6.25	3.375
2	9	8

Solución

(a)

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t) = (2t + 2)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} \qquad \mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t) = 2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j}$$

$$\|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{(2t + 2)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 8t + 4} \qquad \|\mathbf{A}(t)\| = \sqrt{4 + 36t^2}$$

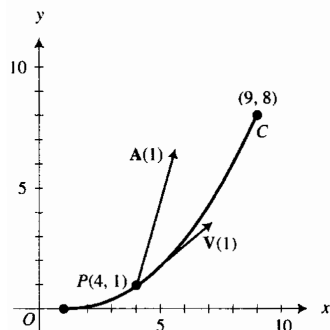
(b)

$$\|\mathbf{V}(1)\| = 5 \qquad \|\mathbf{A}(1)\| = \sqrt{40} \approx 6.32$$

(c) Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la partícula son

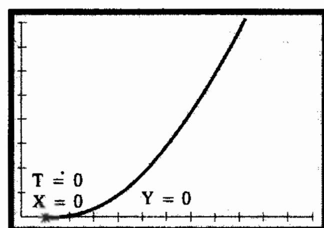
$$x = t^2 + 2t + 1 \qquad \text{y} \qquad y = t^3$$

Se localizan algunos puntos (x, y) de la trayectoria a partir de los valores de la tabla 1. Al considerar estos puntos y la continuidad de las componentes de $\mathbf{R}(t)$ se dibuja la trayectoria mostrada en la figura 3. Esta figura también muestra las representaciones de $\mathbf{V}(1)$ y $\mathbf{A}(1)$.



$\mathbf{R}(t) = (t^2 + 2t + 1)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} \quad 0 \le t \le 2$

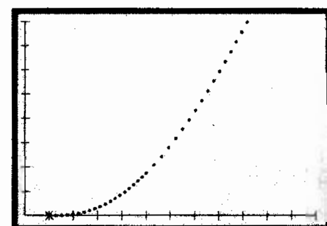
FIGURA 3



[0, 12] por [0, 8]

$x = t^2 + 2t + 1$ y $y = t^3$

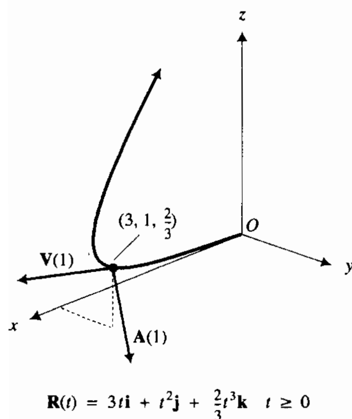
FIGURA 4



[0, 12] por [0, 8]

$x = t^2 + 2t + 1$ y $y = t^3$

FIGURA 5



$\mathbf{R}(t) = 3t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k} \quad t \geq 0$

FIGURA 6

(d) A fin de simular el movimiento en la graficadora, ésta se activa en modo paramétrico y se introducen las ecuaciones paramétricas del inciso (c). Para el rectángulo de inspección de [0, 12] por [0, 8] se consideran los valores $t_{\text{mín}} = 0$, $t_{\text{máx}} = 2$ y $t_{\text{step}} = 0.05$. Oprima la tecla TRACE, después presione la tecla *avance a la izquierda* y manténgala presionada hasta que el cursor esté en $t = 0$. La figura 4 muestra la pantalla de la graficadora como debe verse hasta este momento. Ahora presione la tecla *avance a la derecha* y observe la partícula, representada por el cursor, que se mueve a lo largo de la curva.

(e) La figura 5 muestra la pantalla de la graficadora activada en el modo punto con la misma ventana y los mismos valores de t y t_{step} del inciso (c). Observe que la distancia entre dos puntos sucesivos trazados se hace más grande a medida que t se incrementa, lo cual indica que la rapidez de la partícula se incrementa conforme t crece. ◀

▶ ***EJEMPLO 3*** Una partícula se mueve a lo largo de la curva que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = 3t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \tfrac{2}{3}t^3\mathbf{k} \qquad t \geq 0$$

Obtenga los vectores velocidad y aceleración así como la rapidez de la partícula en $t = 1$. Dibuje una porción de la curva que contenga al punto para el cual $t = 1$, y las representaciones de los vectores velocidad y aceleración en ese punto.

Solución Al calcular $\mathbf{V}(t)$ y $\mathbf{A}(t)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= D_t\mathbf{R}(t) & \mathbf{A}(t) &= D_t\mathbf{V}(t) \\ &= 3\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k} & &= 2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{9 + 4t^2 + 4t^4}$$

Así,

$$\mathbf{V}(1) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \qquad \mathbf{A}(1) = 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \qquad \|\mathbf{V}(1)\| = \sqrt{17}$$

Las ecuaciones paramétricas de la curva dada son

$$x = 3t \qquad y = t^2 \qquad z = \tfrac{2}{3}t^3$$

Puesto que $t \geq 0$, la partícula se desplaza del origen hacia arriba en el primer octante conforme t se incrementa. La porción de la curva en $t = 1$ y las representaciones de $\mathbf{V}(1)$ y $\mathbf{A}(1)$ se muestran en la figura 6. ◀

De la ecuación (8) de la sección 11.3, si $\mathbf{T}(t)$ es el vector tangente unitario en P, s es la longitud de arco de C, que parte de un punto fijo hasta P, y s se incrementa conforme t crece, entonces

$$D_t\mathbf{R}(t) = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}(t)$$

Como el miembro izquierdo de esta ecuación es el vector velocidad, se tiene

$$\mathbf{V}(t) = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}(t) \tag{1}$$

y por tanto,

$$\| \mathbf{V}(t) \| = \frac{ds}{dt} \tag{2}$$

esto es, la rapidez de una partícula es la tasa de variación de s con respecto a t. De (1) y (2),

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{V}(t)}{\|\mathbf{V}(t)\|}$$

La ecuación (1) expresa el vector velocidad como un escalar por el vector tangente unitario. El coeficiente de $\mathbf{T}(t)$, ds/dt, se denomina **componente tangencial del vector velocidad.** Ahora se expresará el vector aceleración en términos de un vector tangente a la dirección de movimiento y a un vector normal a esta dirección.

Si se sustituye $D_t{}^2\mathbf{R}(t)$ por $\mathbf{A}(t)$ en la ecuación (6) de la sección 11.3, se obtiene

$$\mathbf{A}(t) = (D_t \| D_t\mathbf{R}(t) \|)\, \mathbf{T}(t) + (\| D_t\mathbf{R}(t) \| \, \| D_t\mathbf{T}(t) \|)\mathbf{N}(t)$$

De la ecuación (5) de la sección 11.4, $\| D_t\mathbf{T}(t) \| = \| D_t\mathbf{R}(t) \| K(t)$. Al efectuar la sustitución de este valor, y reemplazar $\| D_t\mathbf{R}(t) \|$ por ds/dt en la ecuación anterior, se tiene

$$\mathbf{A}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}(t) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 K(t)\mathbf{N}(t) \tag{3}$$

La ecuación (3) expresa el vector aceleración como la suma de un escalar por el vector tangente unitario y un escalar por el vector normal unitario; esto es, $\mathbf{A}(t)$ se transforma en la suma de un vector tangente a la dirección de movimiento y un vector normal a esta dirección. El coeficiente de $\mathbf{T}(t)$ se llama **componente tangencial del vector aceleración** y se denota por $A_T(t)$, mientras que el coeficiente de $\mathbf{N}(t)$ se denomina **componente normal del vector aceleración** y se representa por $A_N(t)$. De esta manera,

$$\mathbf{A}(t) = A_T(t)\mathbf{T}(t) + A_N(t)\mathbf{N}(t) \tag{4}$$

donde

$$A_T(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \tag{5}$$

y

$$A_N(t) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 K(t) \quad \Leftrightarrow \quad A_N(t) = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho(t)} \tag{6}$$

Puede ocasionarse un cambio en el vector velocidad, $\mathbf{V}(t)$, mediante un cambio en su intensidad (módulo) o en su dirección. Como $\mathbf{A}(t) = D_t\mathbf{V}(t)$, la tasa de variación de $\mathbf{V}(t)$ con respecto a t es $\mathbf{A}(t)$. Observe en la ecuación (5) que $A_T(t)$ es la tasa de variación de la rapidez de la partícula; esto es, $A_T(t)$ está relacionado con la variación de la intensidad (módulo) de $\mathbf{V}(t)$. Debido a

que $A_N(t)$ involucra a la curvatura $K(t)$, $A_N(t)$ está relacionado con la variación de la dirección de $\mathbf{V}(t)$. Estos resultados son importantes en mecánica.

La segunda ley de Newton sobre el movimiento es

$$\mathbf{F} = m\mathbf{A} \tag{7}$$

donde **F** es el vector fuerza aplicado a un objeto que se mueve, m es la medida constante de la masa del objeto, y **A** es el vector aceleración del objeto. Al sustituir de (3) en (7) y considerando $v = ds/dt$, se tiene

$$\mathbf{F}(t) = m\frac{dv}{dt}\mathbf{T}(t) + mv^2K(t)\mathbf{N}(t)$$

Así, en el movimiento curvilíneo, la componente normal de **F** es

$$mv^2K(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{mv^2}{\rho(t)}$$

la cual es la intensidad (módulo) de la fuerza normal a la curva necesaria para mantener al objeto sobre la curva. Por ejemplo, si un automóvil se desplaza sobre una curva con una rapidez grande («alta velocidad»), entonces la fuerza normal ejercida por la carretera debe tener una intensidad grande para mantener al carro sobre la carretera. También, si la curva es muy cerrada, entonces el radio de curvatura es un número pequeño; por lo que otra vez la intensidad de la fuerza normal debe ser un número grande. En la construcción de una pista de carreras para automóviles, por ejemplo, la pista se inclina a fin de incrementar la intensidad de la fuerza normal.

De la ecuación (4),

$$\|A(t)\| = \sqrt{[A_T(t)]^2 + [A_N(t)]^2}$$

Si se resuelve está ecuación para $A_N(t)$, y observando en (6) que $A_N(t)$ es no negativa, se tiene

$$A_N(t) = \sqrt{\|\mathbf{A}(t)\|^2 - [A_T(t)]^2}$$

la cual es una fórmula conveniente para calcular $A_N(t)$.

EJEMPLO 4 Una partícula se mueve a lo largo de una curva que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{i} + (\tfrac{1}{3}t^3 - t)\mathbf{j} \qquad t \geq 0$$

Determine cada uno de los siguientes vectores: $\mathbf{V}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{T}(t)$, y $\mathbf{N}(t)$. También obtenga los escalares: $\|\mathbf{V}(t)\|$, $A_T(t)$, $A_N(t)$ y $K(t)$. Calcule los valores particulares cuando $t = 2$. Dibuje una porción de la curva que contenga al punto para el cual $t = 2$, y las representaciones de $\mathbf{V}(2)$, $\mathbf{A}(2)$, $A_T(2)\mathbf{T}(2)$ y $A_N(2)\mathbf{N}(2)$, cuyo inicial es el punto donde $t = 2$.

Solución Como $\mathbf{V}(t) = D_t\mathbf{R}(t)$ y $\mathbf{A}(t) = D_t\mathbf{V}(t)$,

$$\mathbf{V}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} \qquad \mathbf{A}(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

$$\|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{4t^2 + (t^2 - 1)^2} = \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} = t^2 + 1$$

$$\|\mathbf{A}(t)\| = \sqrt{4 + 4t^2} = 2\sqrt{1 + t^2}$$

Por tanto, $\frac{ds}{dt} = t^2 + 1$. En consecuencia

$$A_T(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \qquad A_N(t) = \sqrt{\|\mathbf{A}(t)\|^2 - [A_T(t)]^2}$$
$$= 2t \qquad = \sqrt{4 + 4t^2 - 4t^2}$$
$$= 2$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{V}(t)}{\|\mathbf{V}(t)\|}$$
$$= \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\mathbf{j}$$

Con el fin de calcular $\mathbf{N}(t)$ se emplea la fórmula siguiente, la cual se obtiene de (3):

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{(D_ts)^2 K(t)}[\mathbf{A}(t) - (D_t{}^2s)\mathbf{T}(t)] \quad \textbf{(8)}$$

$$\mathbf{A}(t) - (D_t{}^2s)\mathbf{T}(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - 2t\left(\frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{A}(t) - (D_t{}^2s)\mathbf{T}(t) = \frac{2}{t^2 + 1}[(1 - t^2)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}] \quad \textbf{(9)}$$

De (8), $\mathbf{N}(t)$ es igual a un escalar por el vector de (9). Como $\mathbf{N}(t)$ es un vector unitario, $\mathbf{N}(t)$ puede obtenerse al dividir el vector de (9) entre su módulo. Así,

$$\mathbf{N}(t) = \frac{(1 - t^2)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}}{\sqrt{(1 - t^2)^2 + (2t)^2}}$$
$$= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\mathbf{i} + \frac{2t}{1 + t^2}\mathbf{j}$$

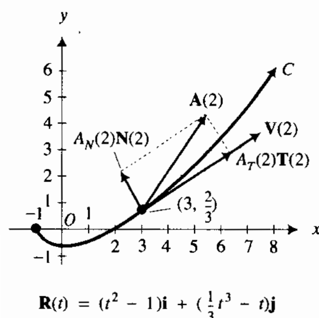
Ahora se calculará la curvatura $K(t)$ a partir de la primera ecuación de (6). Con $A_N(t) = 2$ y $D_ts = t^2 + 1$, se tiene

$$K(t) = \frac{2}{(t^2 + 1)^2}$$

Los vectores y escalares solicitados para $t = 2$ son los siguientes:

$$\mathbf{V}(2) = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \qquad \mathbf{A}(2) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$
$$\|\mathbf{V}(2)\| = 5 \qquad A_T(2) = 4$$
$$\mathbf{T}(2) = \tfrac{4}{5}\mathbf{i} + \tfrac{3}{5}\mathbf{j} \qquad \mathbf{N}(2) = -\tfrac{3}{5}\mathbf{i} + \tfrac{4}{5}\mathbf{j}$$
$$A_N(2) = 2 \qquad K(2) = \tfrac{2}{25}$$

La curva requerida y las representaciones de los vectores se muestran en la figura 7. ◀



$\mathbf{R}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{i} + (\frac{1}{3}t^3 - t)\mathbf{j}$

FIGURA 7

▶ **EJEMPLO 5** Una partícula se mueve a lo largo de una curva que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

Determine las componentes tangencial y normal del vector aceleración.

Solución Al calcular los vectores y escalares necesarios se obtiene

$$\mathbf{V}(t) = D_t\mathbf{R}(t) \qquad \mathbf{A}(t) = D_t\mathbf{V}(t)$$
$$= \mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad = e^t\mathbf{j}$$
$$\|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{2 + e^{2t}} \qquad \|\mathbf{A}(t)\| = e^t$$
$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2 + e^{2t}} \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{e^{2t}}{\sqrt{2 + e^{2t}}}$$

Por tanto,

$$A_T(t) = \frac{e^{2t}}{\sqrt{2 + e^{2t}}} \qquad A_N(t) = \sqrt{\|\mathbf{A}(t)\|^2 - [A_T(t)]^2}$$
$$= \sqrt{e^{2t} - \frac{e^{4t}}{2 + e^{2t}}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}\, e^t}{\sqrt{2 + e^{2t}}}$$ ◀

El estudio del movimiento curvilíneo se concluye con la discusión del movimiento de un proyectil. Suponga que el proyectil se desplaza en un plano vertical y que la única fuerza que actúa sobre el proyectil es su peso, dirigido hacia abajo con una intensidad de mg libras, donde m slugs es su masa y g pie por segundo cuadrado es la aceleración constante debida a la gravedad. No se considerará la fuerza ocasionada por la resistencia del aire, la cual, para cuerpos densos que se desplazan con rapidez pequeña, no ejerce un afecto notable.

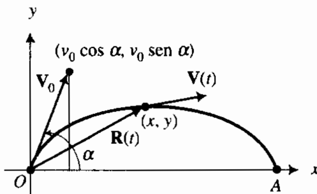


FIGURA 8

Suponga que un proyectil se dispara desde un cañón que tiene un ángulo de elevación de α radianes. Sea v_0 el número de pies por segundo la velocidad inicial o *velocidad de salida.* Los ejes coordenados se colocan de modo que el cañón esté ubicado en el origen. Refiérase a la figura 8. El vector de velocidad inicial, $\mathbf{V}_0$, del proyectil está determinado por

$$\mathbf{V}_0 = v_0 \cos \alpha \mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen} \alpha \mathbf{j} \tag{10}$$

Sean t segundos el tiempo que transcurre desde que el arma se disparó, x pies la distancia horizontal del proyectil desde el punto de partida a los t segundos, y y pies la distancia vertical del proyectil también desde su punto de partida a los t segundos. $\mathbf{R}(t)$ es el vector de posición, $\mathbf{V}(t)$ es el vector velocidad y $\mathbf{A}(t)$ es el vector aceleración del proyectil a los t segundos.

Como x y y son funciones de t, se escriben las componentes horizontal y vertical de $\mathbf{R}(t)$ como $x(t)$ y $y(t)$; así,

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

Si $\mathbf{F}$ representa la fuerza que actúa sobre el proyectil, entonces

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$$

De esta ecuación y la ecuación (7) (la segunda ley de Newton para el movimiento),

$$m\mathbf{A}(t) = -mg\mathbf{j}$$
$$\mathbf{A}(t) = -g\mathbf{j} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{V}'(t) = -g\mathbf{j}$$

Al integrar los dos miembros de esta ecuación con respecto a t, se obtiene

$$\mathbf{V}(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{C}_1$$

Como $\mathbf{V}(0) = \mathbf{V}_0$, entonces $\mathbf{C}_1 = \mathbf{V}_0$. Por tanto,

$$\mathbf{V}(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{V}_0 \Leftrightarrow \mathbf{R}'(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{V}_0$$

Si se integra otra vez, resulta

$$\mathbf{R}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{C}_2$$

Puesto que el proyectil parte del origen, $\mathbf{R}(0) = \mathbf{0}$; por lo que $\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$. De este modo,

$$\mathbf{R}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{V}_0 t$$

Con el valor de $\mathbf{V}_0$ de (10), esta ecuación se transforma en

$$\mathbf{R}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + (v_0 \cos \alpha\mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen} \alpha\mathbf{j})t$$

$$\mathbf{R}(t) = tv_0 \cos \alpha\mathbf{i} + (tv_0 \operatorname{sen} \alpha - \tfrac{1}{2}gt^2)\mathbf{j} \tag{11}$$

La ecuación (11) proporciona el vector de posición del proyectil a los t segundos. A partir de esta ecuación se puede estudiar el movimiento del proyectil. Generalmente, las cuestiones de interés son las siguientes:

1. ¿Cuál es el alcance del proyectil? El alcance es la distancia $|\overline{OA}|$ a lo largo del eje x (consulte la figura 8).
2. ¿Cuál es el tiempo total de recorrido, esto es, el tiempo que tarda el proyectil en ir de O a A?
3. ¿Cuál es la altura máxima del proyectil?
4. ¿Cuál es la ecuación cartesiana de la curva recorrida por el proyectil?
5. ¿Cuál es el vector velocidad del proyectil en el momento del impacto?

Estas cuestiones serán respondidas en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6 Se dispara un proyectil desde un cañón que tiene un ángulo de elevación de $\frac{1}{6}\pi$ rad, y su velocidad de salida es de 480 pie/s. Obtenga: **(a)** el vector de velocidad inicial; **(b)** el vector de posición $\mathbf{R}(t)$ y las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del proyectil; **(c)** el tiempo de recorrido del proyectil; **(d)** el alcance del proyectil; **(e)** la altura máxima alcanzada por el proyectil; **(f)** el vector velocidad y la rapidez en el momento del impacto; **(g)** el vector de posición, el vector velocidad y la rapidez a los 2 s; y **(h)** una ecuación cartesiana de la trayectoria del proyectil.

Solución

(a) De 10 con $v_0 = 480$ y $\alpha = \frac{1}{6}\pi$, el vector de velocidad inicial es

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_0 &= 480 \cos \tfrac{1}{6}\pi\mathbf{i} + 480 \operatorname{sen} \tfrac{1}{6}\pi\mathbf{j}\\ &= 240\sqrt{3}\mathbf{i} + 240\mathbf{j}\end{aligned}$$

(b) El vector de posición a los t segundos se puede obtener al aplicar (11); así,

$$\mathbf{R}(t) = 240\sqrt{3}t\mathbf{i} + (240t - \tfrac{1}{2}gt^2)\mathbf{j}$$

Si se considera $g = 32$ se tiene

$$\mathbf{R}(t) = 240\sqrt{3}t\mathbf{i} + (240t - 16t^2)\mathbf{j} \tag{12}$$

Si $(x(t), y(t))$ es la posición del proyectil a los t segundos, entonces

$$x(t) = 240\sqrt{3}t \qquad \text{y} \qquad y(t) = 240t - 16t^2 \tag{13}$$

(c) Con el propósito de calcular el tiempo de recorrido del proyectil, se debe obtener t cuando $y(t) = 0$. De esta manera, se considera $y(t) = 0$ en la segunda ecuación de (13):

$$\begin{aligned} 240t - 16t^2 &= 0 \\ t(240 - 16t) &= 0 \\ t = 0 \qquad t &= 15 \end{aligned}$$

El valor 0 para t se presenta cuando el proyectil se dispara. Como $y(15) = 0$, el tiempo de recorrido es de 15 s.

(d) Con el fin de obtener el alcance del proyectil se calcula $x(15)$. De la primera ecuación de (13), $x(15) = 3\,600\sqrt{3}$. En consecuencia, el alcance es de $3\,600\sqrt{3} \approx 6\,200$ pie.

(e) El proyectil alcanza su máxima altura cuando la componente vertical del vector velocidad es cero, esto es cuando $y'(t) = 0$. Al calcular $y'(t)$ de la segunda ecuación de (13) se tiene

$$y'(t) = 240 - 32t$$

Si se considera $y'(t) = 0$, se obtiene $t = 7.5$, el cual es la mitad del tiempo total de recorrido.

(f) Puesto que el tiempo total de recorrido es de 15 s, el vector velocidad en el momento del impacto es $\mathbf{V}(15)$. Con $\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t)$, se obtiene de (12)

$$\mathbf{V}(t) = 240\sqrt{3}\mathbf{i} + (240 - 32t)\mathbf{j} \tag{14}$$

Así,

$$\mathbf{V}(15) = 240\sqrt{3}\mathbf{i} - 240\mathbf{j}$$

Como $\|\mathbf{V}(15)\| = 480$, la rapidez en el momento del impacto es de 480 pie/s.

(g) De (12) y (14),

$$\mathbf{R}(2) = 480\sqrt{3}\mathbf{i} + 416\mathbf{j} \qquad \mathbf{V}(2) = 240\sqrt{3}\mathbf{i} + 176\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}(2)\| &= \sqrt{(240\sqrt{3})^2 + (176)^2} \\ &= 32\sqrt{199} \end{aligned}$$

Por tanto, a los 2 s la rapidez es de $32\sqrt{199}$ pie/s ≈ 450 pie/s.

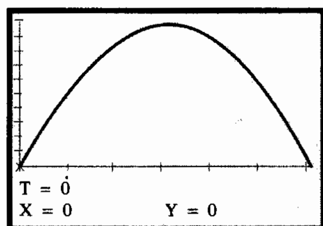
(h) A fin de obtener una ecuación cartesiana de la trayectoria del proyectil, se elimina el parámetro t de las ecuaciones paramétricas (13). Al sustituir el valor de t de la primera ecuación en la segunda se obtiene

$$y = 240\left(\frac{x}{240\sqrt{3}}\right) - 16\left(\frac{x}{240\sqrt{3}}\right)^2$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{10\,800}x^2$$

la cual es una ecuación de una parábola. ◀

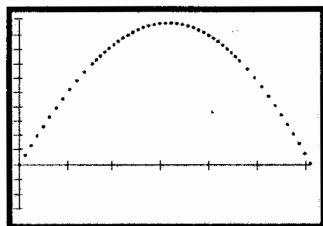
 ***EJEMPLO 7*** **(a)** A partir de las respuestas de los incisos (b)–(e) del ejemplo 6, trace la trayectoria del proyectil en la graficadora y simule el movimiento del proyectil. **(b)** Trace la trayectoria del proyectil en el modo punto.



[0, 6 300] por [−300, 1 000]

$x(t) = 240\sqrt{3}t$ y $y(t) = 240t - 16t^2$

FIGURA 9



[0, 6 300] por [−300, 1 000]

$x(t) = 240\sqrt{3}t$ y $y(t) = 240t - 16t^2$

FIGURA 10

Solución

(a) Con la graficadora en modo paramétrico, se introducen las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = 240\sqrt{3}t \quad \text{y} \quad y(t) = 240t - 16t^2$$

En el rectángulo de inspección de [0, 6 300] por [−300, 1 000], considere los parámetros $t_{\text{mín}} = 0$, $t_{\text{máx}} = 15$ y $t_{\text{step}} = 0.5$. Oprima la tecla TRACE. Después presione la tecla de *avance a la izquierda* y manténgala oprimida hasta que el cursor esté en $t = 0$. La figura 9 muestra la pantalla de la graficadora como debe verse hasta este momento. Ahora presione la tecla *avance a la derecha* y observe que la partícula, representada por el cursor, se mueve a lo largo de la curva.

(b) La figura 10 muestra la pantalla de la graficadora en modo paramétrico y en modo punto, con los mismos valores de t y t_{step} como en el inciso (a). Observe que la distancia entre dos puntos sucesivos trazados es más pequeña conforme t crece hasta 7.5, cuando el proyectil alcanza su altura máxima. Después, conforme t crece de 7.5 a 15, la distancia entre dos puntos sucesivos trazados se hace más grande. Estas observaciones indican que la rapidez del proyectil disminuye conforme se eleva desde su posición inicial hasta su altura máxima, esto es, cuando su rapidez es cero; después, cuando el proyectil desciende su rapidez crece hasta hacer contacto con el suelo. ◀

EJERCICIOS 11.5

En los ejercicios 1 a 10, la posición de una partícula, que se mueve en el plano xy, a las t unidades de tiempo está determinada por la ecuación vectorial. (a) Obtenga $\mathbf{V}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\|\mathbf{V}(t)\|$ *y* $\|\mathbf{A}(t)\|$. *(b) Determine los vectores velocidad y aceleración en* $t = t_1$. *(c) Dibuje la trayectoria de la partícula y las representaciones de los vectores velocidad y aceleración en* $t = t_1$. *(d) Simule el movimiento de la partícula en la graficadora. (e) Trace la trayectoria de la partícula en la graficadora en el modo punto.*

1. $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 4)\mathbf{i} + (t - 2)\mathbf{j};\ t_1 = 3$
2. $\mathbf{R}(t) = (1 + t)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j};\ t_1 = 1$
3. $\mathbf{R}(t) = 5\cos 2t\,\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{j};\ t_1 = \frac{1}{4}\pi$
4. $\mathbf{R}(t) = \frac{2}{t}\mathbf{i} - \frac{1}{4}t\mathbf{j};\ t_1 = 4$
5. $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j};\ t_1 = \ln 2$
6. $\mathbf{R}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + e^{3t}\mathbf{j};\ t_1 = 0$
7. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + \ln\sec t\,\mathbf{j};\ t_1 = \frac{1}{4}\pi$
8. $\mathbf{R}(t) = 2(1 - \cos t)\mathbf{i} + 2(1 - \text{sen}\,t)\mathbf{j};\ t_1 = \frac{5}{6}\pi$
9. $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 3t)\mathbf{i} + (1 - 3t^2)\mathbf{j};\ t_1 = \frac{1}{2}$
10. $\mathbf{R}(t) = \ln(t + 2)\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^2\mathbf{j};\ t_1 = 1$

En los ejercicios 11 a 16, la posición de una partícula, que se mueve en el espacio tridimensional, a las t unidades de tiempo está determinada por la ecuación vectorial. Obtenga los vectores velocidad y aceleración así como la rapidez de la partícula en $t = t_1$. *Dibuje una porción de la curva que contenga al punto donde* $t = t_1$, *y las representaciones de los vectores velocidad y aceleración en ese punto.*

11. $\mathbf{R}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k};\ t_1 = \frac{1}{2}\pi$
12. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k};\ t_1 = 2$
13. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 - 2t)\mathbf{j} + 2(t - 1)\mathbf{k};\ t_1 = 2$
14. $\mathbf{R}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 4\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + 2t\mathbf{k};\ t_1 = \frac{1}{2}\pi$
15. $\mathbf{R}(t) = e^t\cos t\,\mathbf{i} + e^t\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + e^t\mathbf{k};\ t_1 = 0$
16. $\mathbf{R}(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 1)^{-1}\mathbf{i} + \ln(1 + t^2)\mathbf{j} + \tan^{-1}t\,\mathbf{k};\ t_1 = 1$

En los ejercicios 17 a 20, una partícula se mueve en el plano xy de modo que se satisfacen la ecuación dada y las condiciones iniciales. Obtenga una ecuación vectorial de la trayectoria de la partícula.

17. $\mathbf{V}(t) = \dfrac{1}{(t - 1)^2}\mathbf{i} - (t + 1)\mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(0) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
18. $\mathbf{V}(t) = (2t - 1)\mathbf{i} + 3t^{-2}\mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(1) = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
19. $\mathbf{A}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + 2e^{2t}\mathbf{j}$, $\mathbf{V}(0) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(0) = 3\mathbf{j}$
20. $\mathbf{A}(t) = 2\cos 2t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{j}$, $\mathbf{V}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(0) = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$

En los ejercicios 21 a 24, una partícula se mueve en el espacio tridimensional de modo que la ecuación dada y las condiciones iniciales se satisfacen. Determine una ecuación de la trayectoria de la partícula.

21. $\mathbf{V}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 32t\mathbf{k}$ y $\mathbf{R}(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
22. $\mathbf{V}(t) = (t^2 + 2t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$ y $\mathbf{R}(0) = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
23. $\mathbf{A}(t) = 6t\mathbf{i} + 12t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{V}(0) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(0) = 4\mathbf{k}$
24. $\mathbf{A}(t) = -32\mathbf{k}$, $\mathbf{V}(0) = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(0) = 60\mathbf{k}$

En los ejercicios 25 a 30, una partícula se mueve a lo largo de la curva que tiene la ecuación vectorial dada. En cada

ejercicio determine los vectores $\mathbf{V}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{T}(t)$ *y* $\mathbf{N}(t)$, *y los escalares siguientes para un valor arbitrario de t:* $\|\mathbf{V}(t)\|$, $A_T(t)$, $A_N(t)$ *y* $K(t)$. *También obtenga los valores particulares cuando* $t = t_1$. *En* $t = t_1$, *dibuje una porción de la curva y representaciones de los vectores* $\mathbf{V}(t_1)$, $\mathbf{A}(t_1)$, $A_T(t_1)$, $\mathbf{T}(t_1)$ *y* $A_N(t_1)\mathbf{N}(t_1)$.

25. $\mathbf{R}(t) = (2t + 3)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}; t_1 = 2$

26. $\mathbf{R}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}; t_1 = 1$

27. $\mathbf{R}(t) = 5\cos 3t\mathbf{i} + 5\operatorname{sen} 3t\mathbf{j}; t_1 = \frac{1}{3}\pi$

28. $\mathbf{R}(t) = 3t^2\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j}; t_1 = 1$

29. $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}; t_1 = 0$

30. $\mathbf{R}(t) = \cos t^2\mathbf{i} + \operatorname{sen} t^2\mathbf{j}; t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

En los ejercicios 31 a 36, una partícula se mueve a lo largo de una curva que tiene la ecuación vectorial dada. Calcule las componentes tangencial y normal del vector aceleración y utilícelos para expresar $\mathbf{A}(t) = A_T(t)\mathbf{T}(t) + A_N(t)\mathbf{N}(t)$ *sin calcular* $\mathbf{T}(t)$ *ni* $\mathbf{N}(t)$.

31. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

32. $\mathbf{R}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k}$

33. $\mathbf{R}(t) = (\cos t + t\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - t\cos t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, t \geq 0$

34. $\mathbf{R}(t) = 2t^2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$

35. $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (\frac{1}{3}t^3 + t)\mathbf{j} + (\frac{1}{3}t^3 - t)\mathbf{k}$

36. $\mathbf{R}(t) = t\cos t\mathbf{i} + t\operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

37. Demuestre que si la rapidez de una partícula que está en movimiento es constante, entonces su vector aceleración siempre es ortogonal a su vector velocidad.

38. Una partícula se mueve a lo largo de una curva que tiene la ecuación vectorial $\mathbf{R}(t) = \tan t\mathbf{i} + \operatorname{senh} 2t\mathbf{j} + \operatorname{sech} t\mathbf{k}$. Demuestre que los vectores velocidad y aceleración son ortogonales en $t = 0$.

39. Una partícula se mueve a lo largo de la cúbica alabeada

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

Obtenga una ecuación del plano determinado por los vectores tangente unitario y normal unitario en el punto de la curva donde $t = 1$.

40. Demuestre que para la cúbica alabeada del ejercicio 39, si $t \neq 0$, entonces ningún par de los vectores $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ y $\mathbf{A}(t)$ son ortogonales.

En los ejercicios 41 y 42, se dispara un proyectil desde un cañón que tiene un ángulo de elevación de α *radianes, y su velocidad de salida es* v_0 *pie por segundo. Obtenga: (a) el vector de velocidad inicial; (b) el vector de posición* $\mathbf{R}(t)$ *y ecuaciones paramétricas de la trayectoria del proyectil; (c) el tiempo de recorrido del proyectil; (d) el alcance del proyectil; (e) la altura máxima que alcanza el proyectil; (f) el vector velocidad y la rapidez en el momento de impacto; (g) el vector de posición, el vector velocidad y la rapidez a los* t_1 *segundos; y (h) una ecuación cartesiana de la trayectoria del proyectil.*

41. $\alpha = \frac{1}{4}\pi; v_0 = 320; t_1 = 6$

42. $\alpha = \frac{1}{3}\pi; v_0 = 160; t_1 = 4$

En los ejercicios 43 y 44, haga lo siguiente: a partir de las respuestas de los incisos (b)–(e) del ejercicio indicado, trace la trayectoria del proyectil en la graficadora y simule el movimiento del proyectil; (b) trace la trayectoria del proyectil en modo punto; (c) dibuje lo que muestra la pantalla de la graficadora del inciso (b); (d) describa lo que observa en la pantalla de la graficadora del inciso (b) acerca de la rapidez del proyectil.

43. Ejercicio 41. **44.** Ejercicio 42.

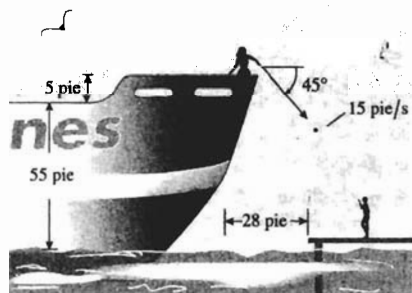
45. Se dispara un proyectil desde un cañón situado en la parte superior de un edificio de 96 pie de altura. El cañón forma un ángulo de 30° con la horizontal. Si la velocidad de salida es de 1 600 pie/s, calcule el tiempo de recorrido y la distancia desde la base del edificio hasta el punto donde caerá el proyectil.

46. La velocidad de salida de un arma es de 160 pie/s. ¿Con qué ángulo de elevación debe dispararse el arma a fin de que el proyectil impacte un objeto situado al mismo nivel del arma y a una distancia de 400 pie de ésta?

47. ¿Cual es la velocidad de salida de un cañón si un proyectil disparado desde éste tiene un alcance de 2 000 pie y alcanza una altura máxima de 1 000 pie?

48. Se lanza horizontalmente una pelota desde la parte superior de un risco de 256 pie de altura con una velocidad inicial de 50 pie/s. Calcule el tiempo de recorrido de la pelota y la distancia desde la base del risco hasta el punto donde caerá la pelota.

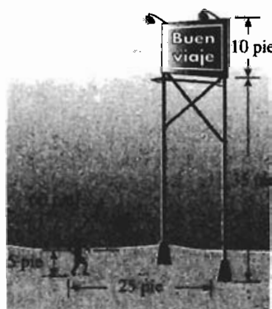
49. A medida que un barco se aleja de un muelle, una muchacha ubicaba en la cubierta del barco, a 55 pie por arriba del muelle, lanzó una piedra envuelta en una nota a un amigo que está en el muelle. El barco se hallaba a 28 pie del muelle en el momento en que la joven lanzó la piedra desde su mano, a 5 pie por arriba de la cubierta, hacia el muelle con una velocidad inicial de 15 pie/s y en un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. ¿Llegará la piedra al muelle, de modo que su amigo reciba la nota, o caerá al agua y se hundirá? Justifique su respuesta.



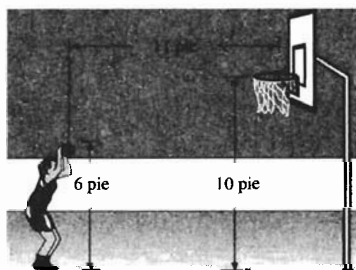
50. Responda la pregunta del ejercicio 49 suponiendo que la muchacha lanzó horizontalmente la piedra con una velocidad inicial de 15 pie/s.

51. Un niño apuesta a sus amigos que puede lanzar una pelota y pegarle a un anuncio que se encuentra a 25 pie de él. El anuncio tiene 10 pie de altura y su base está a 35 pie

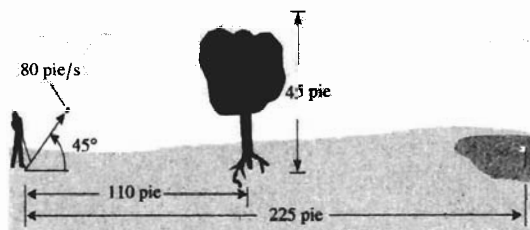
sobre el suelo. El niño lanza la pelota hacia el anuncio con una velocidad inicial de 60 pie/s y un ángulo de elevación de 60°. Si la mano del niño está a 5 pie del suelo, demuestre que el niño gana la apuesta y determine la dirección de la pelota en el momento del impacto.



52. Una basquetbolista debe efectuar un tiro libre en la canasta cuyo aro está a 10 pie del piso del gimnasio. Si la jugadora se encuentra a una distancia horizontal de 11 pie del centro de la canasta, determine el ángulo en que debe lanzar la pelota con una velocidad inicial de 25 pie/s si sus manos se encuentran a 6 pie por arriba del piso en el momento del tiro.



53. Un árbol de 45 pie de altura se encuentra entre un banderín y una pelota de golf, la cual está a 225 pie del banderín. El árbol se encuentra a 100 pie de la pelota. Un golfista golpea la pelota en dirección del banderín con una rapidez de 80 pie/s y un ángulo de 45°. Demuestre que la pelota no golpea el árbol, y determine a qué distancia del banderín cae la pelota.



54. Determine el ángulo de elevación de un cañón de modo que al dispararse se obtenga el máximo alcance para una velocidad de salida dada.

55. Una partícula se encuentra en el punto $(r, 0)$ de la circunferencia con centro en el origen y radio r, y se mueve sobre la circunferencia con una rapidez angular constante de ω radianes por segundo. Una ecuación de su trayectoria es

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{i}\, r \cos \omega t + \mathbf{j}\, r \operatorname{sen} \omega t$$

Esta ecuación describe el **movimiento circular uniforme.** **(a)** Demuestre que la rapidez de la partícula está determinada por $r\omega$. **(b)** Demuestre que si $\mathbf{A}(t)$ es el vector aceleración, entonces la dirección de $\mathbf{A}(t)$ es opuesta a la de $\mathbf{R}(t)$, además $\|\mathbf{A}(t)\| = r\omega^2$. **(c)** Calcule $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, $A_T(t)$ y $A_N(t)$. **(d)** ¿Cuál es el efecto sobre $A_N(t)$ si la rapidez angular se duplica?

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 11

▶ *SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 11*

1. ¿Qué es una *función vectorial* y en qué difiere de una *función real*?
2. ¿Cómo se utilizan las propiedades de las funciones reales en el estudio de las funciones vectoriales?
3. ¿En qué consiste la dependencia de las definiciones del límite y continuidad de una función vectorial de las definiciones correspondientes para una función real?
4. ¿Cómo se obtienen *ecuaciones cartesianas* de una curva en el espacio tridimensional a partir de su *ecuación vectorial*? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.
5. ¿En qué son semejantes o en que difieren las definiciones de la *derivada* e *integral indefinida* de una función vectorial y las definiciones correspondientes para funciones reales?
6. ¿Cómo se interpreta geométricamente la derivada de una función vectorial?
7. ¿En qué son semejantes o diferentes los teoremas de la derivada de la suma, producto punto y producto cruz de dos funciones vectoriales y los teoremas correspondientes para funciones reales? Invente ejemplos que ilustren la respuesta.
8. ¿Cuál es la *regla de la cadena para funciones vectoriales*? Invente un ejemplo que ilustre su aplicación.
9. ¿Qué puede concluirse acerca de una función vectorial y su derivada si el módulo de la función vectorial es constante?
10. ¿Cuál es la fórmula para la *longitud de arco de una curva* definida mediante una ecuación vectorial en el espacio tridimensional?

11. ¿Cuál es el *vector tangente unitario* $\mathbf{T}(t)$ de una curva C en un punto P de C si $\mathbf{R}(t)$ es el *vector de posición*? Establezca una fórmula para calcular $\mathbf{T}(t)$ a partir de $\mathbf{R}(t)$.

12. ¿Cuál es el *vector normal unitario* $\mathbf{N}(t)$ de una curva C en un punto P de C si $\mathbf{T}(t)$ es el vector tangente unitario? Establezca una fórmula para calcular $\mathbf{N}(t)$ a partir de $\mathbf{T}(t)$.

13. Exprese el *vector binormal unitario* de una curva C en un punto P de C en términos de los vectores tangente unitario y normal unitario.

14. ¿Cuáles son los planos *osculador, rectificador* y normal de una curva C en un punto P de C? ¿Cómo se obtienen ecuaciones de estos planos?

15. Si $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ es una ecuación vectorial de la curva C, ¿cómo obtendría una ecuación que contenga a t y el número de unidades de longitud de arco s a partir de un punto arbitrario de C hasta el punto $P(f(t), g(t), h(t))$? ¿Por qué no se puede resolver, generalmente, esta ecuación para s en términos de t? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

16. Si $\mathbf{R}(t)$ es el vector de posición de una curva C en el espacio tridimensional, defina la *curvatura* $K(t)$ de C en un punto de la curva.

17. Proporcione dos fórmulas para calcular la curvatura $K(t)$: (i) una en términos de $D_t\mathbf{R}(t)$ y $D_t\mathbf{T}(t)$; (ii) la otra en términos de $D_t\mathbf{R}(t)$ y $D_t z(t)$. ¿Cuál de estas fórmulas es más fácil de aplicar?

18. Defina el *radio de curvatura* y la *circunferencia osculatriz* para curvas en el plano xy.

19. Establezca una fórmula para calcular la curvatura de una curva plana definida por una ecuación de la forma $y = f(x)$.

20. Si una partícula se mueve a lo largo de la curva C que tiene la ecuación vectorial $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, defina los *vectores velocidad* y *aceleración* en un punto P de C. ¿Cuál es la *rapidez* de la partícula en P? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

21. Establezca una fórmula que exprese el vector aceleración como la suma de un vector tangente a la dirección de movimiento y de un vector normal a esta dirección.

22. Establezca las fórmulas *que proporcionan las componentes tangencial* y *normal* de la aceleración.

23. ¿Cuál es el vector de posición de un proyectil disparado desde un cañón que tiene un ángulo de elevación α y una velocidad de salida de v_0 pies por segundo? ¿Cómo determinaría la altura máxima, el tiempo de recorrido y el alcance del proyectil a partir de este vector? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

▶ EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 11

En los ejercicios 1 a 4, determine el dominio de la función vectorial.

1. $\mathbf{R}(t) = \dfrac{1}{t-3}\mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j}$

2. $\mathbf{R}(t) = \ln(t+1)\mathbf{i} + e^{1/t}\mathbf{j}$

3. $\mathbf{R}(t) = \ln|\cos t|\,\mathbf{i} + \sqrt{4t^2-1}\,\mathbf{j} + \sqrt{4-t^2}\,\mathbf{k}$

4. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{9-t^2}\,\mathbf{i} + \tan t\,\mathbf{j} + \dfrac{t}{t-1}\mathbf{k}$

En los ejercicios 5 a 8, calcule el límite indicado, si existe.

5. $\displaystyle \lim_{t\to 1}\left(\frac{1}{t+1}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{t}-1}{t-1}\mathbf{j}\right)$

6. $\displaystyle \lim_{t\to 0}\left(\cos t\,\mathbf{i} + \frac{\operatorname{sen} t}{t}\mathbf{j}\right)$

7. $\displaystyle \lim_{t\to 0^+}\left(e^{-1/t}\mathbf{i} + \frac{1-\cos t}{t}\mathbf{j} + \frac{\operatorname{sen}^{-1} t}{t}\mathbf{k}\right)$

8. $\displaystyle \lim_{t\to 4}\left(\frac{t^2-16}{t-4}\mathbf{i} + \frac{\tan^{-1}(t-4)}{t-4}\mathbf{j} + |t-4|\mathbf{k}\right)$

En los ejercicios 9 a 12, determine los números en los que la función vectorial es continua.

9. $\mathbf{R}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j} + \dfrac{1}{\sqrt{4-t}}\mathbf{k}$

10. $\mathbf{R}(t) = \ln|\cos t|\,\mathbf{i} + \dfrac{1}{|t|-1}\mathbf{j} + \sqrt{1-t^2}\,\mathbf{k}$

11. $\mathbf{R}(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(t-1)}{t-1}\mathbf{i} + \dfrac{t^2-1}{2(t-1)}\mathbf{j} + (t-1)\ln|t-1|\mathbf{K} & \text{si } t \neq 1 \\ (\mathbf{i}+\mathbf{j}) & \text{si } t = 1 \end{cases}$

12. $\mathbf{R}(t) = \begin{cases} (1+t)^{1/t}\mathbf{i} + e^{1+t}\mathbf{j} + \dfrac{e^{1-t}}{1-t}\mathbf{k} & \text{si } t \neq 0 \\ e(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) & \text{si } t = 0 \end{cases}$

En los ejercicios 13 a 16, dibuje la gráfica de la función vectorial.

13. $\mathbf{R}(t) = 2\sec t\,\mathbf{i} + 2\tan t\,\mathbf{j}$

14. $\mathbf{R}(t) = 2\sqrt{t}\,\mathbf{i} + (t+1)\mathbf{j}$

15. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t^3\mathbf{k}, 0 \le t \le 2$

16. $\mathbf{R}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}, 0 \le t \le 2\pi$

En los ejercicios 17 y 18, obtenga $\mathbf{R}'(t)$ *y* $\mathbf{R}''(t)$.

17. $\mathbf{R}(t) = \dfrac{1}{t^2+9}\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j} - \ln t\,\mathbf{k}$

18. $\mathbf{R}(t) = \dfrac{t}{t-1}\mathbf{i} - \dfrac{t+1}{t}\mathbf{j} + \dfrac{t+1}{t-1}\mathbf{k}$

En los ejercicios 19 y 20, calcule $D_t\|\mathbf{R}(t)\|$ *y* $\|D_t\mathbf{R}(t)\|$.

19. $\mathbf{R}(t) = 2(e^t-1)\mathbf{i} + 2(e^t+1)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$

20. $\mathbf{R}(t) = \cos 2t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{j} + 2^{t^2}\mathbf{k}$

21. Si $\mathbf{R}'(t) = \frac{1}{t+2}\mathbf{i} + \frac{1}{t^2+1}\mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(0) = \mathbf{j}$, obtenga $\mathbf{R}(t)$.

22. Si $\mathbf{R}'(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} + \frac{2\ln t}{t}\mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(1) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, obtenga $\mathbf{R}(t)$.

23. Si $\mathbf{R}'(t) = 2e^{t/2}\mathbf{i} - 2e^{-t/2}\mathbf{j} + 2\cosh\frac{t}{2}\mathbf{k}$ y $\mathbf{R}(2) = 2e\mathbf{i} - 2e^{-1}\mathbf{j} + \mathbf{k}$, obtenga $\mathbf{R}(t)$.

24. Si $\mathbf{R}'(t) = \cos^2 t\mathbf{i} + \cos 2t\mathbf{j} - 2\operatorname{sen} 2t\mathbf{k}$ y $\mathbf{R}(0) = \mathbf{i}$, obtenga $\mathbf{R}(t)$.

En los ejercicios 25 y 26, calcule la longitud de arco exacta de t_1 a t_2 de la curva que tiene la ecuación vectorial dada.

25. $\mathbf{R}(t) = t\cos t\mathbf{i} + t\operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $t_1 = 0$; $t_2 = \frac{1}{2}\pi$

26. $\mathbf{R}(t) = (2 - 3t)\mathbf{i} + (4t - 1)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$; $t_1 = 0$; $t_2 = \frac{5}{2}$

En los ejercicios 27 y 28, utilice el procedimiento NINT *de la graficadora para obtener un valor aproximado, con cuatro dígitos significativos, de la longitud de arco de t_1 a t_2 de la curva que tiene la ecuación vectorial dada.*

27. $\mathbf{R}(t) = \ln t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} - \frac{1}{t}\mathbf{k}$; $t_1 = 1$; $t_2 = 2$

28. $\mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + e^{2t}\mathbf{k}$; $t_1 = 0$; $t_2 = \frac{1}{2}\pi$

En los ejercicios 29 y 30, calcule $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$, y dibuje una porción de la curva que contenga al punto donde $t = t_1$, y las representaciones de $\mathbf{T}(t_1)$ y $\mathbf{N}(t_1)$ cuyo punto inicial es ese punto.

29. $\mathbf{R}(t) = \frac{1}{2}e^{2t}\mathbf{i} + t\mathbf{j}$; $t_1 = \ln 2$

30. $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j}$; $t_1 = 1$

En los ejercicios 31 a 34, calcule $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.

31. $\mathbf{R}(t) = \frac{1}{3}t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$

32. $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + 2e^{-t}\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$

33. $\mathbf{R}(t) = 3\operatorname{sen} 2t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + 3\cos 2t\mathbf{k}$

34. $\mathbf{R}(t) = 3(\cos t + t\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + 3(\operatorname{sen} t - t\cos t)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

En los ejercicios 35 a 38, determine el triedro móvil y ecuaciones de los planos osculador, rectificador y normal para la curva en $t = t_1$.

35. La curva del ejercicio 31; $t_1 = 1$

36. La curva del ejercicio 32; $t_1 = 0$

37. La curva del ejercicio 33; $t_1 = 0$

38. La curva del ejercicio 34; $t_1 = \frac{1}{2}\pi$

En los ejercicios 39 y 40, para la curva dada, exprese la longitud de arco s como una función de t, donde s se mide a partir del punto donde $t = 0$.

39. La curva del ejercicio 31

40. La curva del ejercicio 32

En los ejercicios 41 a 44, obtenga una ecuación vectorial de la curva que tiene a la longitud de arco s como paramétro, donde s se mide a partir del punto donde $t = 0$. Verifique la respuesta utilizando la ecuación (9) de la sección 11.3.

41. $\mathbf{R}(t) = 4t\mathbf{i} + \frac{1}{3}(2t + 1)^{3/2}\mathbf{j}$

42. La curva del ejercicio 30

43. La curva del ejercicio 33

44. La curva del ejercicio 34

En los ejercicios 45 y 46, para la curva y t_1 del ejercicio indicado, calcule la curvatura K y el radio de curvatura ρ en el punto donde $t = t_1$. Dibuje una porción de la curva, el vector tangente unitario y la circunferencia de osculatriz en $t = t_1$.

45. Ejercicio 29

46. Ejercicio 30

En los ejercicios 47 a 50, para la curva del ejercicio indicado, calcule la curvatura K.

47. Ejercicio 31

48. Ejercicio 32

49. Ejercicio 33

50. Ejercicio 34

51. Demuestre que la curvatura de la curva $y = \ln x$ en cualquier punto (x, y) es $x/(x^2 + 1)^{3/2}$. También demuestre que la curvatura máxima absoluta es $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, la cual ocurre en el punto $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\ln 2)$.

52. Calcule la curvatura en cualquier punto de la rama de la hipérbola definida por las ecuaciones paramétricas $x = a\cosh t$ y $y = b\operatorname{senh} t$.

53. Determine la curvatura y el radio de curvatura de la curva que tiene ecuaciones paramétricas $x = 3t^2$ y $y = t^3 - 3t$ en el punto donde $t = 2$.

54. Calcule la curvatura y el radio de curvatura de la curva $y = e^{-x}$ en el punto (0,1).

55. Determine el centro de curvatura para la curva del ejercicio 53 en el punto donde $t = 2$, y dibuje una porción de la curva y la circunferencia osculatriz en ese punto.

56. Determine el centro de curvatura para la curva del ejercicio 54 en el punto (0, 1), y dibuje una porción de la curva y la circunferencia osculatriz en ese punto.

En los ejercicios 57 y 58, la posición de una partícula que se mueve en el plano xy, a las t unidades de tiempo, está determinada por la ecuación vectorial dada. (a) Determine $\mathbf{V}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\|\mathbf{V}(t)\|$ y $\|\mathbf{A}(t)\|$. (b) Determine los vectores velocidad y aceleración en $t = 1$. (c) Dibuje la trayectoria de la partícula y las representaciones de los vectores velocidad y aceleración en $t = 1$. (d) Simule el movimiento de la partícula en la graficadora. (e) Trace la trayectoria de la partícula en la graficadora en modo punto.

57. $\mathbf{R}(t) = 3t\mathbf{i} + (4t - t^2)\mathbf{j}$

58. $\mathbf{R}(t) = 2e^t\mathbf{i} + 3e^{-t}\mathbf{j}$

En los ejercicios 59 y 60, una partícula se mueve a lo largo de la curva dada. Obtenga los vectores velocidad y aceleración, y así como la rapidez en el punto indicado. Dibuje una porción de la curva que contenga a ese punto, y las representaciones de los vectores velocidad y aceleración en el punto mencionado.

59. La curva del ejercicio 25 en $t = \frac{1}{2}\pi$.

60. La curva del ejercicio 26 en $t = \frac{1}{2}$.

En los ejercicios 61 y 62, una partícula se mueve en el plano xy de modo que la ecuación y las condiciones iniciales se satisfacen. Obtenga una ecuación vectorial de la trayectoria de la partícula.

61. $\mathbf{V}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(0) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

62. $\mathbf{A}(t) = t^2\mathbf{i} - t^{-2}\mathbf{j}$, $\mathbf{V}(1) = \mathbf{j}$, y $\mathbf{R}(1) = \frac{1}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$

En los ejercicios 63 a 66, una partícula se mueve en el espacio tridimensional de modo que la ecuación y las condiciones iniciales se satisfacen. Obtenga una ecuación vectorial de la trayectoria de la partícula.

63. $\mathbf{V}(t) = -2 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{i} + \mathbf{k}, \mathbf{R}(0) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

64. $\mathbf{V}(t) = e^t\mathbf{i} - e^t\mathbf{j} - 8e^{4t}\mathbf{k}, \mathbf{R}(0) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

65. $\mathbf{A}(t) = 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{V}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{k}, \mathbf{R}(1) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

66. $\mathbf{A}(t) = 4\mathbf{i} + 12t^2\mathbf{j}, \mathbf{V}(\frac{1}{2}) = 2\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k},$
$\mathbf{R}(\frac{1}{2}) = \mathbf{i} + \frac{1}{16}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los ejercicios 67 y 68, una partícula se mueve a lo largo de la curva del ejercicio indicado. En cada ejercicio, obtenga los vectores $\mathbf{V}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{T}(t)$ *y* $\mathbf{N}(t)$, *y los escalares siguientes para un valor arbitrario:* $\|\mathbf{V}(t)\|$, $A_T(t)$, $A_N(t)$ *y* $K(t)$. *También calcule los valores particulares cuando* $t = 1$. *En* $t = 1$, *dibuje una porción de la curva y las representaciones de los vectores* $\mathbf{V}(1)$, $\mathbf{A}(1)$, $A_T(1)\mathbf{T}(1)$ y $A_N(1)\mathbf{N}(1)$.

67. Ejercicio 57 **68.** Ejercicio 58

En los ejercicios 69 y 70, una partícula se mueve a lo largo de la curva que tiene la ecuación vectorial dada. Calcule las componentes tangencial y normal del vector aceleración y utilícelas para escribir $\mathbf{A}(t) = A_T(t)\mathbf{T}(t) + A_N(t)\mathbf{N}(t)$ *sin calcular* $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.

69. $\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$

70. $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

En los ejercicios 71 y 72, obtenga (a) los vectores velocidad y aceleración, (b) la rapidez, y (c) las componentes tangencial y normal del vector aceleración.

71. $\mathbf{R}(t) = \cosh 2t\mathbf{i} + \operatorname{senh} 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}$

72. $\mathbf{R}(t) = (2\tan^{-1}t - t)\mathbf{i} + \ln(1 + t^2)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

73. Se dispara un proyectil desde un arma con un ángulo de elevación de 30° y una velocidad de salida de 150 pie/s. Calcule: **(a)** el vector de posición $\mathbf{R}(t)$; **(b)** el alcance del proyectil; **(c)** la altura máxima; **(d)** la rapidez en el momento de impacto.

74. Para el proyectil del ejercicio 73, **(a)** trace la trayectoria del proyectil en la graficadora y simule el movimiento del proyectil; **(b)** trace la trayectoria del proyectil en el modo punto; **(c)** con relación al inciso (b), dibuje lo que observa en la graficadora; **(d)** con relación inciso (b), describa lo que muestra la pantalla de la graficadora acerca de la rapidez del proyectil.

75. Si se dispara un proyectil con un ángulo de elevación de 40°, determine la velocidad de salida mínima para que el proyectil tenga un alcance de 300 pie por lo menos.

76. Obtenga una fórmula para calcular la altura máxima alcanzada por un proyectil disparado desde un arma con una velocidad de salida de v_0 pies por segundo y un ángulo de elevación de α radianes.

77. En un juego de béisbol un espectador, sentado en una grada a 20 pie sobre el campo, atrapó una pelota que cayó en su lugar. Después lanzó la pelota desde su asiento hacia el campo con un ángulo de depresión de 25° y con una velocidad inicial de 24 pie/s. **(a)** ¿Cuánto tardará la pelota en golpear el piso? **(b)** ¿Cuál es la distancia del punto del suelo, directamente debajo de su asiento, hasta el punto del campo donde caerá la pelota?

78. Responda las preguntas del ejercicio 77 suponiendo que el espectador lanza horizontalmente la pelota con una rapidez de 24 pie/s.

79. Si una partícula se mueve en el plano xy de modo que su vector velocidad siempre es ortogonal a su vector de posición, demuestre que la trayectoria de la partícula es una circunferencia con su centro en el origen.

80. Si una partícula se mueve a lo largo de una curva, ¿bajo qué condiciones el vector aceleración y el vector tangente unitario tendrán la misma dirección o direcciones opuestas?

81. Los vectores **V**, **A** y **N** son, respectivamente, los vectores velocidad, aceleración y normal unitario para el movimiento curvilíneo de una partícula. Demuestre que si $\|(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})\mathbf{A} - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{A})\mathbf{V}\| \neq 0$, entonces

$$\mathbf{N} = \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})\mathbf{A} - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{A})\mathbf{V}}{\|(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})\mathbf{A} - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{A})\mathbf{V}\|}$$

82. Si **R**, **Q** y **W** son tres funciones vectoriales cuyas derivadas con respecto a t existen, demuestre que

$$D_t[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) \times \mathbf{W}(t)] = D_t\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) \times \mathbf{W}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot D_t\mathbf{Q}(t) \times \mathbf{W}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) \times D_t\mathbf{R}(t)$$

Capítulo 12

Cálculo diferencial de funciones de más de una variable

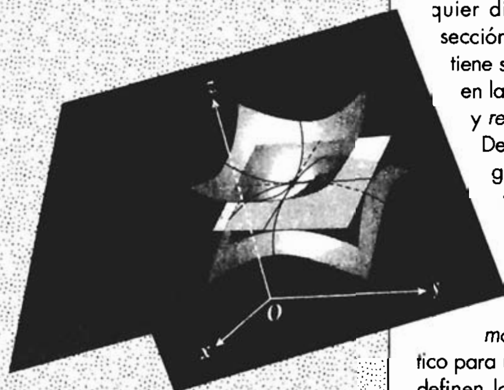
VISIÓN PRELIMINAR

En la sección 12.1 se extiende el concepto de función de una variable real al de *función de varias variables*, y en la siguiente sección se amplían los conceptos de *límite y continuidad* para funciones de varias variables. La mayor parte de las discusiones de estas dos secciones se refieren a funciones de dos y tres variables; no obstante, se presentan las definiciones para funciones de *n* variables y después se presentan las aplicaciones de estas definiciones para funciones de dos y tres variables. También se muestra que cuando cada una de estas definiciones se aplica a una función de una variable, se obtiene la definición dada anteriormente.

El estudio de la diferenciación de funciones de varias variables se inicia en la sección 12.3, donde se definen las *derivadas parciales* de dichas funciones. Luego, en la sección 12.4, se trata la *diferenciabilidad* de estas funciones así como la *diferencial total*. La versión para varias variables de la regla de la cadena se presenta en la sección 12.5. Las aplicaciones de la diferenciación de las secciones 12.3 a 12.5 tratan acerca de la obtención de tasas de variación y sobre el cálculo de aproximaciones.

Mientras que las derivadas parciales de una función con respecto a *x* y *y* miden las tasas de variación de la función en las direcciones de los ejes *x* y *y*, respectivamente, las *derivadas direccionales*, definidas en la sección 12.6, proporcionan las tasas de variación de estas funciones en cualquier dirección. El *gradiente*, también definido en la sección 12.6, indica la dirección en la que la función tiene su mayor tasa de variación. Este concepto se aplica en la sección 12.7 en el estudio de los *planos tangentes* y *rectas normales a las superficies*.

De la misma forma en que las derivadas primera y segunda se utilizan para determinar los máximos y mínimos de funciones de una variable, en la sección 12.8 se muestra cómo las derivadas parciales permiten obtener los valores extremos de funciones de dos variables. Las aplicaciones de esta sección incluyen el *método de mínimos cuadrados* que proporciona un modelo matemático para un conjunto de datos dados. En la sección 12.9, se definen los *multiplicadores de Lagrange* para calcular los *extremos de una función sujeta a una restricción*.



12.1 FUNCIONES DE MÁS DE UNA VARIABLE

Ahora se generalizará la noción de función a funciones de más de una variable independiente. Estas funciones se presentan con frecuencia en situaciones prácticas. Por ejemplo, el área de la superficie del cuerpo de una persona depende del peso y de la estatura de la persona. El volumen de un cilindro circular recto depende de su radio y de su altura. De acuerdo con la ley de los gases ideales, el volumen ocupado por un gas es directamente proporcional a su temperatura e inversamente proporcional a su presión. El precio de venta de un artículo particular puede depender de su costo de producción, del costo de materiales y de los gastos generales.

Con el fin de extender el concepto de función a funciones de cualquier número de variables, primero se considerará el espacio númerico n-dimensional. Del mismo modo en que se denotó un punto de R mediante un número real x, un punto de R^2 por medio de un par ordenado de números reales (x, y), y un punto de R^3 mediante una terna ordenada de números reales (x, y, z), un punto del espacio n-dimensional R^n se representa por medio de una n-ada (léase "eneada") o n-upla ordenada de números reales denotada por $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. En particular, si $n = 1$, $P = x$; si $n = 2$, $P = (x, y)$; si $n = 3$, $P = (x, y, z)$; si $n = 6$, $P = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.

12.1.1 Definición del espacio numérico n-dimensional

El conjunto de todas las n-adas ordenadas de números reales se denomina **espacio numérico n-dimensional** y se denota por R^n. Cada n-ada ordenada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se llama **punto** del espacio numérico n-dimensional.

12.1.2 Definición de función de n variables

Una **función de n variables** es un conjunto de pares ordenados de la forma (P, w) en el que dos pares ordenados distintos cualesquiera no tienen el mismo primer elemento. P es un punto del espacio numérico n-dimensional y w es un número real. El conjunto de todos los puntos P admisibles recibe el nombre de **dominio** de la función, y el conjunto de todos los valores resultantes de w se denomina **contradominio** de la función.

De esta definición, el dominio de una función de n variables es un conjunto de puntos de R^n y su contradominio es un conjunto de números de R. Cuando $n = 1$, se tiene una función de una variable; de modo que el dominio es un conjunto de puntos de R o, equivalentemente, un conjunto de números reales. En consecuencia, la definición 1.1.1 es un caso especial de la definición 12.1.2. Si $n = 2$, se tiene una función de dos variables, y el dominio es un conjunto de puntos de R^2 o, equivalentemente, un conjunto de pares ordenados de números reales (x, y).

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Sea la función f, de las dos variables x y y, el conjunto de todos los pares ordenados de la forma (P, z) tales que

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

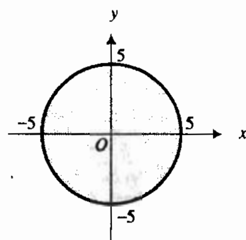


FIGURA 1

El dominio de f es el conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$. Este es el conjunto de puntos del plano xy sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ y la región interior limitada por esta circunferencia. La figura 1 muestra el dominio de f como una región sombreada de R^2.

Debido a que $z = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$, entonces $0 \leq z \leq 5$; por tanto el contradominio de f es el conjunto de números reales del intervalo cerrado $[0, 5]$. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** La función g de las variables x y y es el conjunto de todos los pares ordenados de la forma (P, z) tales que

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$$

El dominio de g es el conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 25\}$. Éste es el conjunto de puntos de la región exterior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. La figura 2 muestra el dominio como una región sombreada de R^2. ◀

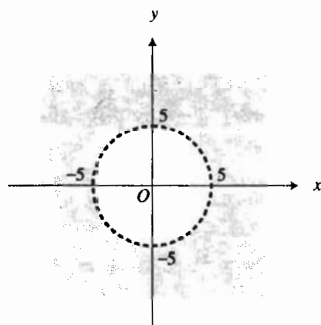


FIGURA 2

Si f es una función de n variables, entonces de acuerdo con la definición 12.1.2, f es un conjunto de pares ordenados de la forma (P, w), donde $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es un punto de R^n y w es un número real. El valor particular de w que corresponde a un punto P se denota mediante el símbolo $f(P)$ o $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. En particular, si $n = 2$ y $P = (x, y)$, se puede representar el valor de función como $f(P)$ o como $f(x, y)$. De manera semejante, si $n = 3$ y $P = (x, y, z)$, el valor de función se representa como $f(P)$ o como $f(x, y, z)$. Observe que si $n = 1$, $P = x$; en consecuencia, si f es una función de una variable, $f(P) = f(x)$. Por tanto, esta notación es consistente con la notación para valores de función de una variable.

Una función f de n variables puede definirse por la ecuación

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se denominan **variables independientes** y w se llama **variable dependiente.**

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Sea f la función del ejemplo ilustrativo 1; es decir,

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(3, -4) &= \sqrt{25 - 3^2 - (-4)^2} \\ &= \sqrt{25 - 9 - 16} \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(-2, 1) &= \sqrt{25 - (-2)^2 - 1^2} \\ &= \sqrt{25 - 4 - 1} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(u, 3v) &= \sqrt{25 - u^2 - (3v)^2} \\ &= \sqrt{25 - u^2 - 9v^2} \end{aligned}$$ ◀

▶ ***EJEMPLO 1*** Sea g la función definida por

$$g(x, y, z) = x^3 - 4yz^2$$

Obtenga: **(a)** $g(1, 3, -2)$; **(b)** $g(2a, -4b, 3c)$; **(c)** $g(x^2, y^2, z^2)$; **(d)** $g(y, z, -x)$.

Solución

(a) $g(1, 3, -2) = 1^3 - 4(3)(-2)^2$
$= 1 - 48$
$= -47$

(b) $g(2a, -4b, 3c) = (2a)^3 - 4(-4b)(3c)^2$
$= 8a^3 + 144bc^2$

(c) $g(x^2, y^2, z^2) = (x^2)^3 - 4y^2(z^2)^2$
$= x^6 - 4y^2z^4$

(d) $g(y, z, -x) = y^3 - 4z(-x)^2$
$= y^3 - 4x^2z$ ◀

12.1.3 Definición de función compuesta de dos variables

Si f es una función de una variable y g es una función de dos variables, entonces la **función compuesta** $f \circ g$ es la función de dos variables definida por

$$(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$$

y el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los puntos (x, y) del dominio de g tales que $g(x, y)$ pertenece al dominio de f.

▶ ***EJEMPLO 2*** Dadas $f(t) = \ln t$ y $g(x, y) = x^2 + y$, calcule $h(x, y)$ si $h = f \circ g$, y determine el dominio de h.

Solución

$$\begin{aligned} h(x, y) &= (f \circ g)(x, y) \\ &= f(g(x, y)) \\ &= f(x^2 + y) \\ &= \ln(x^2 + y) \end{aligned}$$

El dominio de g es el conjunto de todos los puntos de R^2, y el dominio de f es el intervalo $(0, +\infty)$. Por tanto, el dominio de h es el conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y > 0\}$. ◀

La definición 12.1.3 puede extenderse a una función compuesta de n variables como se muestra a continuación.

12.1.4 Definición de función compuesta de n variables

Si f es una función de una variable y g es una función de n variables, entonces la **función compuesta** $f \circ g$ es la función de n variables definida por

$$(f \circ g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(g(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

y el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ del dominio de g tales que $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pertenece al dominio de f.

▶ **EJEMPLO 3** Dadas

$$F(x) = \operatorname{sen}^{-1} x \quad \text{y} \quad G(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$$

obtenga la función $F \circ G$ y su dominio.

Solución

$$\begin{aligned}(F \circ G)(x, y, z) &= F(G(x, y, z)) \\ &= F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}) \\ &= \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}\end{aligned}$$

El dominio de G es el conjunto $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 - 4 \geq 0\}$, y el dominio de F es el intervalo $[-1, 1]$. Por tanto, el dominio de $F \circ G$ es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) de R^3 tales que $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 - 4 \leq 1$, o, equivalentemente, $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 5$. ◀

Una **función polinomial** de las variables x y y es una función f tal que $f(x, y)$ es la suma de términos de la forma $cx^n y^m$, donde c es un número real y n y m son números enteros no negativos. El **grado** de una función polinomial está determinado por la mayor suma de los exponentes de x y y que se tiene en los términos de la función.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4**

(a) La función f definida por

$$f(x, y) = x^3 + 2x^2y^2 - y^3$$

es una función polinomial de grado 4 debido a que el término de mayor grado es $2x^2y^2$

(b) Si

$$g(x, y) = 6x^3y^2 - 5xy^3 + 7x^2y - 2x^2 + y + 4$$

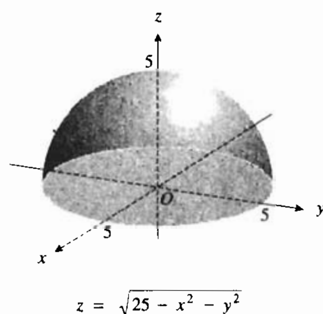
entonces g es una función polinomial de grado 5. ◀

La gráfica de una función f de una variable consiste del conjunto de puntos (x, y) de R^2 para los cuales $y = f(x)$. De manera similar, la gráfica de una función de dos variables es un conjunto de puntos de R^3.

12.1.5 Definición de la gráfica de una función de dos variables

Si f es una función de dos variables, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) de R^3 para los cuales (x, y) es un punto del dominio de f y $z = f(x, y)$.

En consecuencia, la gráfica de una función f de dos variables es una superficie que consta de todos los puntos del espacio tridimensional cuyas coordenadas cartesianas están determinadas por las ternas ordenadas de números reales (x, y, z). Como el dominio de f es un conjunto de puntos del plano xy, y puesto que cada par ordenado (x, y) del dominio de f corresponde a sólo un valor de z, ninguna recta perpendicular al plano xy puede intersectar a la gráfica de f en más de un punto.



$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

FIGURA 3

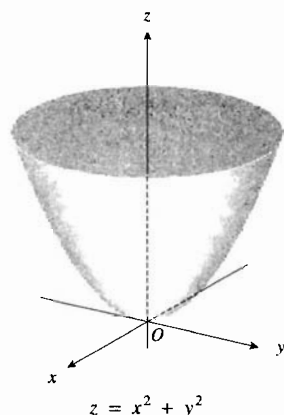
EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 La función f del ejemplo ilustrativo 1 es el conjunto de todos los pares ordenados de la forma (P, z) tales que

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Por tanto, la gráfica de f es la semiesfera en el plano xy y por arriba de éste cuyo centro es el origen y tiene radio 5. Esta semiesfera se muestra en la figura 3. ◀

EJEMPLO 4 Dibuje la gráfica de la función definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

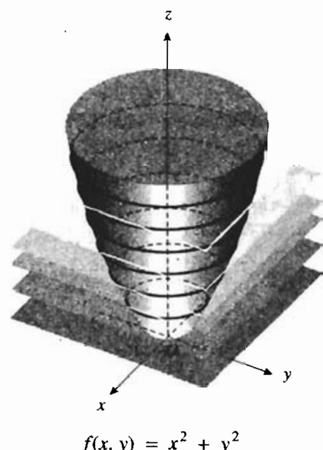


$z = x^2 + y^2$

FIGURA 4

Solución La gráfica de f es la superficie que tiene la ecuación $z = x^2 + y^2$. La traza de la superficie en el plano xy se obtiene al utilizar la ecuación $z = 0$ simultáneamente con la ecuación de la superficie. Al hacerlo resulta $x^2 + y^2 = 0$, la cual representa al origen. Las trazas en los planos xz y yz se obtienen al emplear las ecuaciones $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente, junto con la ecuación $z = x^2 + y^2$. Estas trazas son las parábolas $z = x^2$ y $z = y^2$. La sección transversal en el plano $z = k$, paralelo al plano xy, es una circunferencia con su centro en el eje z y radio $\sqrt{k}$. Con esta información se obtiene la gráfica requerida, la cual se muestra en la figura 4 y que es un paraboloide circular. ◀

Otro método útil para representar geométricamente una función de dos variables es semejante al de representación de un relieve tridimensional por medio de un mapa topográfico bidimensional. Suponga que la superficie $z = f(x, y)$ se intersecta con el plano $z = k$, y que la curva de intersección se proyecta sobre el plano xy. Esta curva proyectada tiene a $f(x, y) = k$ como una ecuación, y la curva se denomina **curva de nivel** (o **de contorno**) de la función f en k. Cada punto de la curva de nivel corresponde a sólo un punto de la superficie que se encuentra a k unidades sobre ella si k es positivo, o a k unidades debajo de ella si k es negativo. Al considerar diferentes valores para la constante k se obtiene un conjunto de curvas de nivel llamado **mapa de contornos.** El conjunto de todos los valores posibles de k es el contradominio de la función f, y cada curva de nivel, $f(x, y) = k$, del mapa de contornos consiste de los puntos (x, y) del dominio de f que tienen un valor de función igual a k.



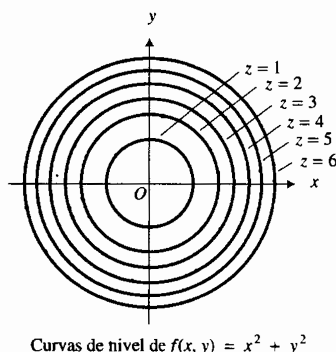
$f(x, y) = x^2 + y^2$

FIGURA 5

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 La figura 5 muestra la gráfica de la función del ejemplo 4 definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

junto con las curvas de intersección de esta superficie con los planos $z = k$, donde k es igual a 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Estas curvas son circunferencias con centros en el eje z y radio $\sqrt{k}$. La figura 6 presenta las curvas proyectadas sobre el plano xy. Las circunferencias proyectadas, las cuales son curvas de nivel de la función f, representan una vista de las circunferencias de la figura 5 que se obtiene al mirar la superficie hacia abajo desde un punto del eje z. ◀



Curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 + y^2$

FIGURA 6

Un mapa de contornos de $z = f(x, y)$ muestra la variación de z con respecto a x y y en el plano xy al considerar las curvas de nivel. Los valores de z cambian más rápidamente cuando las curvas de nivel se encuentran más cercanas entre sí que cuando están más apartadas; esto es, cuando las curvas de nivel se hallan muy próximas entre sí la superficie es escarpada, y cuando las curvas de nivel están separadas la elevación de la superficie, relativa al plano xy, cambia gradualmente. Observe esta situación en la figura 6 para las curvas de nivel de la superficie de la figura 5.

En un mapa topográfico bidimensional de un relieve, se obtiene una noción general de su inclinación al considerar el espacio entre sus curvas de nivel. También en uno de estos mapas, si se sigue la trayectoria de una curva de nivel, la elevación o altura permanece constante.

EJEMPLO 5 Sea f la función definida por

$$f(x, y) = 8 - x^2 - 2y$$

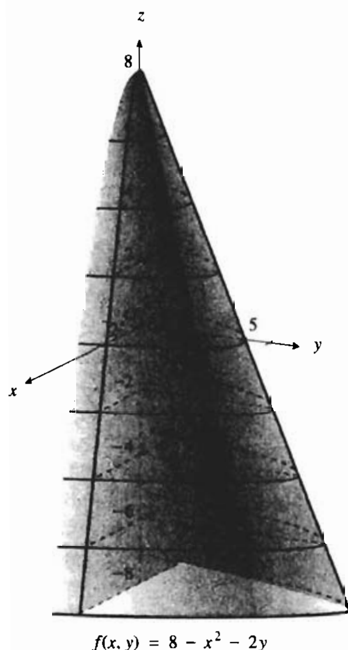
Dibuje la gráfica de f y un mapa de contornos de f que muestre las curvas en intervalos constantes de 2 unidades a partir de 8 y descendiendo hasta -8.

Solución La gráfica de f, mostrada en la figura 7, es la superficie

$$z = 8 - x^2 - 2y$$

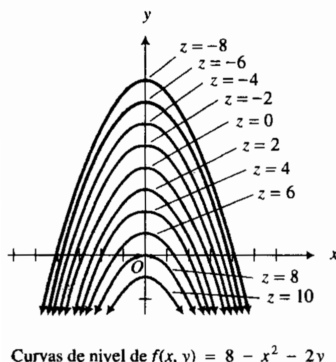
Al considerar $z = 0$ se obtiene la traza en el plano xy, la cual es la parábola $x^2 = -2(y - 4)$. Si se considera $y = 0$ y $x = 0$, se obtienen las trazas en los planos xz y yz, las cuales son, respectivamente, la parábola $x^2 = -(z - 8)$ y la recta $2y + z = 8$. La sección transversal de la superficie obtenida en el plano $z = k$ es una parábola que tiene su vértice en la recta $2y + z = 8$ del plano yz y abre a la izquierda. Las secciones transversales para z igual a 8, 6, 4, 2, 0, –2, –4, –6 y –8 se muestran en la figura.

Las curvas de nivel de f son las parábolas $x^2 = -2(y - 4 + \frac{1}{2}k)$. El mapa de contornos de f junto con las curvas de nivel requeridas se presentan en la figura 8. ◀



$f(x, y) = 8 - x^2 - 2y$

FIGURA 7

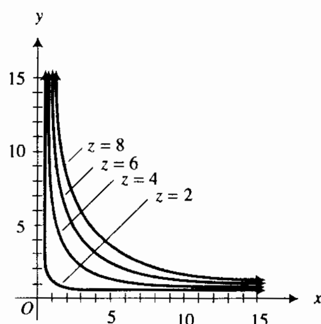


Curvas de nivel de $f(x, y) = 8 - x^2 - 2y$

FIGURA 8

A fin de ilustrar la aplicación de las curvas de nivel, suponga que la temperatura en cualquier punto de una placa metálica plana está dada por la función f; es decir, si T grados es la temperatura, entonces en el punto (x, y), $T = f(x, y)$. Por tanto, las curvas de nivel que tienen ecuaciones de la forma $f(x, y) = k$, donde k es una constante, son curvas sobre las que la temperatura es constante. Estas curvas de nivel se denominan **isotermas.** Además, si V volts proporcionan el potencial eléctrico en cualquier punto (x, y) del plano xy, y $V = f(x, y)$, entonces las curvas de nivel reciben el nombre de **curvas equipotenciales** debido a que el potencial eléctrico en cada punto de una de estas curvas es el mismo.

Como aplicación de las curvas de nivel en economía, considere la productividad (o salida) que depende de varios insumos (o entradas) en una empresa. Entre los insumos pueden considerarse el número de máquinas empleadas en la producción, el número de horas-persona disponibles, el monto de capital de trabajo, la cantidad de material empleado así como el área de terreno disponible. Suponga que las cantidades de las entradas están dadas por x y y, y que la cantidad de salida está representada por z, donde $z = f(x, y)$. Esta función se denomina **función de producción,** y las curvas de nivel de la forma $f(x, y) = k$, donde k es una constante, se llaman **curvas de producción constante.**



Curvas de nivel de $f(x, y) = 2x^{1/2}y^{1/2}$

FIGURA 9

EJEMPLO 6 Sea f la función de producción para la cual

$$f(x, y) = 2x^{1/2}y^{1/2}$$

Dibuje un mapa de contornos de f que muestre las curvas de producción constante en 8, 6, 4 y 2.

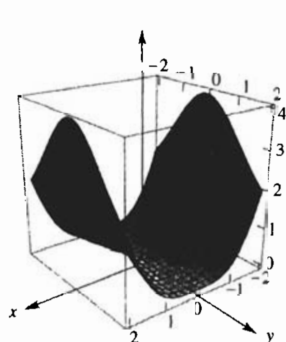
Solución El mapa de contornos consiste de las curvas de intersección de la superficie

$$z = 2x^{1/2}y^{1/2} \tag{1}$$

con los planos $z = k$, donde k es igual a 8, 6, 4 y 2. Al sustituir $z = 8$ en (1) se obtiene $4 = x^{1/2}y^{1/2}$ o, equivalentemente,

$$xy = 16 \qquad x > 0 \quad \text{y} \quad y > 0 \tag{2}$$

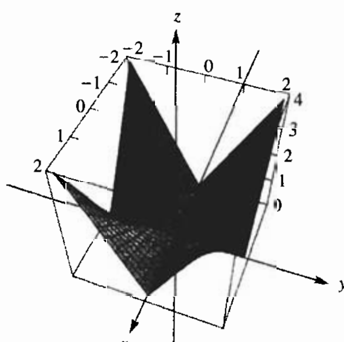
La curva del plano xy representada por (2) es una rama de una hipérbola contenida en el primer cuadrante. También se obtiene una rama de una hipérbola en el primer cuadrante con cada uno de los números 6, 4 y 2. Estas son las curvas de producción constante y se muestran en la figura 9. ◀



[−2, 2] por [−2, 2] por [0, 4]

$f(x, y) = \dfrac{x^4}{x^2 + y^2}$

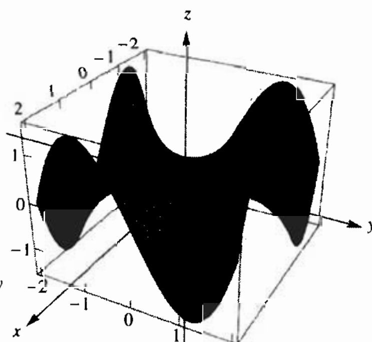
FIGURA 10a



[−2, 2] por [−2, 2] por [0, 4]

$f(x, y) = |xy|$

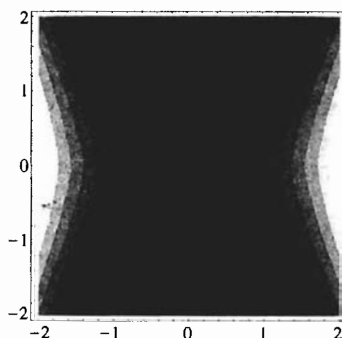
FIGURA 11a



[−2, 2] por [−2, 2] por [−1.5, 1.5]

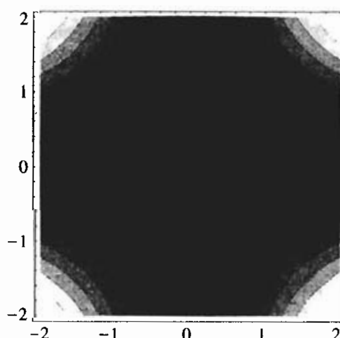
$f(x, y) = \frac{1}{4}xy(y^2 - x^2)$

FIGURA 12a



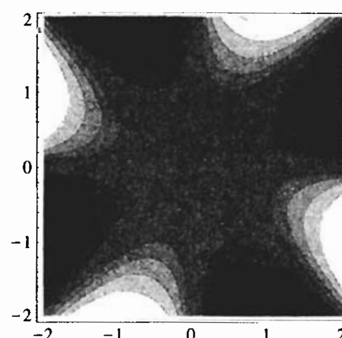
Curvas de nivel de $f(x, y) = \dfrac{x^4}{x^2 + y^2}$

FIGURA 10b



Curvas de nivel de $f(x, y) = |xy|$

FIGURA 11b

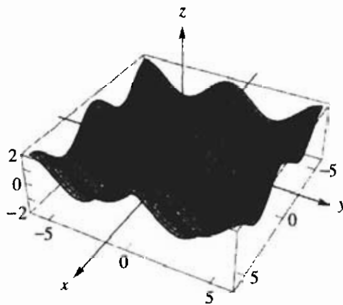


Curvas de nivel de $f(x, y) = \frac{1}{4}xy(y^2 - x^2)$

FIGURA 12b

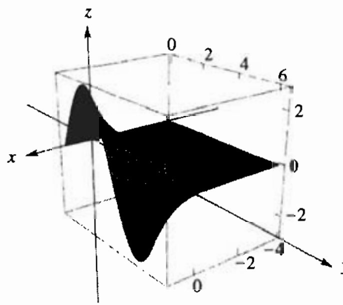
En los ejemplos y ejemplos ilustrativos anteriores se emplearon funciones cuyas gráficas y curvas de nivel se dibujaron con relativa facilidad. Los programas de **gráficos por computadora** pueden emplearse para trazar superficies más complicadas. Estos programas muestran generalmente trazas de la superficie en planos paralelos a los planos coordenados y permiten, con frecuencia, elegir la ubicación de quien las ve de modo que la superficie se puede observar con diferentes perspectivas. Por lo regular, los programas requieren que se estipule una **caja de inspección.** Dicha caja corresponde al *rectángulo* (o *ventana*) *de inspeción* que se elige al trazar curvas bidimensionales en una graficadora. La caja de inspección, denotada como $[x_{\text{mín}}, x_{\text{máx}}]$ por $[y_{\text{mín}}, y_{\text{máx}}]$ por $[z_{\text{mín}}, z_{\text{máx}}]$, es el conjunto de puntos de R^3 para los cuales $x_{\text{mín}} \leq x \leq x_{\text{máx}}$, $y_{\text{mín}} \leq y \leq y_{\text{máx}}$, y $z_{\text{mín}} \leq z \leq z_{\text{máx}}$.

Las gráficas por computadora de este texto fueron generadas por el software *Mathematica*. Las figuras que representan estas gráficas muestran la superficie en la caja de inspección indicada debajo de la figura. La mayoría de las gráficas ubican a quien las mira en el primer octante de un sistema coordenado derecho. Se han considerado diferentes tonalidades para resaltar la apariencia tridimensional de las figuras. Las partes (a) de las figuras 10 a 15 muestran las gráficas trazadas en una computadora de las superficies definidas por algunas funciones de dos variables particulares; las partes (b) de las figuras mencionadas muestran las gráficas por computadora de algunas de las curvas de nivel correspondientes. En los ejercicios 51 a 54 se muestran otras gráficas realizadas en una computadora, y se le pedirá que relacione una función con una superficie y un conjunto de curvas de nivel.



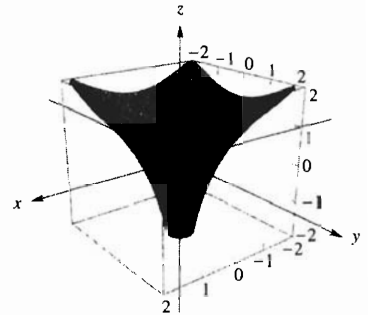
$[-6, 6]$ por $[-6, 6]$ por $[-2, 2]$
$f(x, y) = \cos x + \cos y$

FIGURA 13a



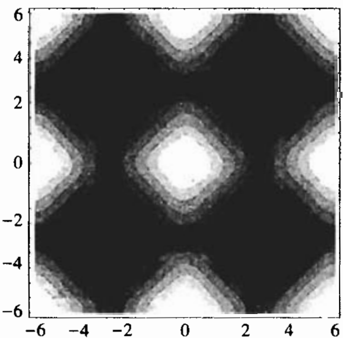
$[-4, 1]$ por $[0, 6.5]$ por $[-3, 3]$
$f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$

FIGURA 14a



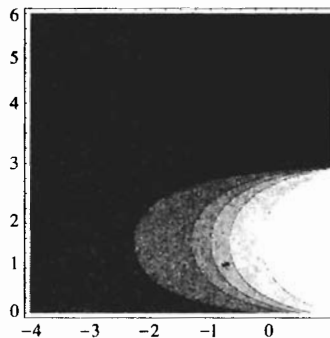
$[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

FIGURA 15a



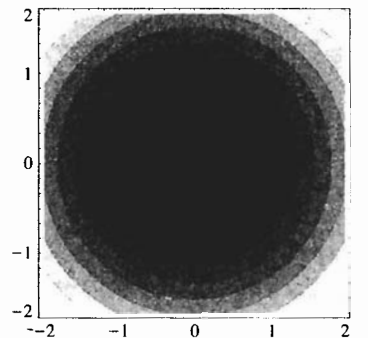
Curvas de nivel de $f(x, y) = \cos x + \cos y$

FIGURA 13b



Curvas de nivel de $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$

FIGURA 14b



Curvas de nivel de $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

FIGURA 15b

La definición siguiente extiende la noción de gráfica de una función a la de gráfica de una función de n variables.

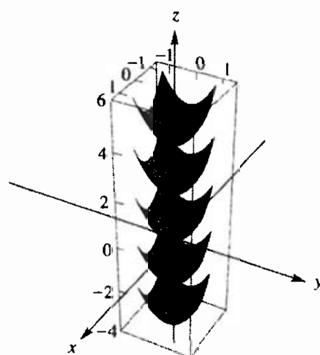
12.1.6 Definición de la gráfica de una función de *n* variables

Si f es una función de n variables, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de todos los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n, w)$ de R^{n+1} para los cuales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es un punto del dominio de f y $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Las funciones de tres variables tienen *superficies de nivel*, concepto análogo al de curvas de nivel para funciones de dos variables. Si f es una función cuyo dominio es un conjunto de puntos de R^3, entonces si k es un número del contradominio de f, la gráfica de la ecuación

$$f(x, y, z) = k$$

es una **superficie de nivel** de f en k. Cada superficie en el espacio tridimensional puede considerarse como una superficie de nivel de alguna función de tres variables.



[-1.5, 1.5] por [-1.5, 1.5] por [-4, 6]

Superficie del nivel de $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$

FIGURA 16

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7 Si la función g está definida por

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

entonces el paraboloide circular $z = x^2 + y^2$, mostrado en la figura 4, es la superficie de nivel de g en 0. La superficie de nivel de g en el número k tiene la ecuación $z + k = x^2 + y^2$, un paraboloide circular cuyo vértice es el punto $(0, 0, -k)$ sobre el eje z. La figura 16 muestra las superficies de nivel para k igual a $-4, -2, 0, 2$ y 4. ◀

EJEMPLO 7 La función f está definida por

$$f(x, y, z) = x + 2y + 4z$$

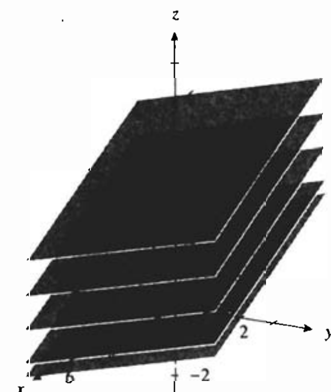
Dibuje las superficies de nivel de f para los siguientes valores de k: 16, 12, 8, 4 y 2.

Solución Una ecuación de la superficie de nivel de f en k es

$$x + 2y + 4z = k$$

cuya gráfica es un plano. Para los valores dados de k se tienen los planos paralelos siguientes:

$$x + 2y + 4z = 16$$
$$x + 2y + 4z = 12$$
$$x + 2y + 4z = 8$$
$$x + 2y + 4z = 4$$
$$x + 2y + 4z = 2$$



Curvas de nivel de $f(x, y, z) = x + 2y + 4z$

FIGURA 17

Estos planos se muestran en la figura 17. ◀

EJEMPLO 8 La función f está definida por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

Describa las superficies de nivel de f para **(a)** $k = 4$, **(b)** $k = -4$, y **(c)** $k = 0$.

Solución

(a) La superficie de nivel para $k = 4$ tiene la ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 = 4$$

Esta superficie, un hiperboloide de una hoja cuyo eje es el eje z, se muestra en la figura 18.

(b) La superficie de nivel para $k = -4$ tiene la ecuación

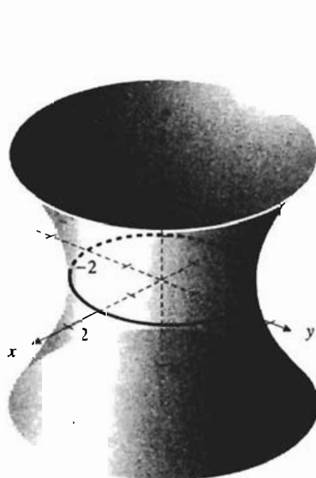
$$x^2 + y^2 - z^2 = -4 \iff -x^2 - y^2 + z^2 = 4$$

Esta superficie es un hiperboloide de dos hojas cuyo eje es el eje z, y se presenta en la figura 19.

(c) La superficie de nivel para $k = 0$ tiene la ecuación

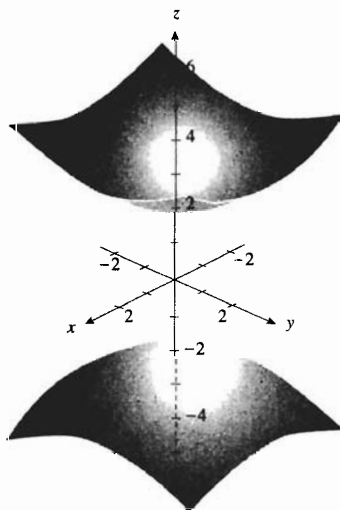
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

Esta superficie, un cono cuyo eje es el eje z, se muestra en la figura 20. ◀



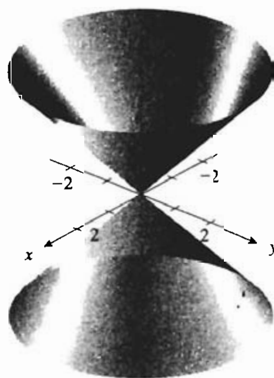
$x^2 + y^2 - z^2 = 4$

FIGURA 18



$z^2 - x^2 - y^2 = 4$

FIGURA 19



$x^2 + y^2 + z^2 = 0$

FIGURA 20

EJERCICIOS 12.1

1. Sea f la función de las dos variables x y y el conjunto de pares ordenados de la forma (P, z) tales que

$$z = \frac{x + y}{x - y} \iff f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$$

Obtenga: **(a)** $f(-3, 4)$; **(b)** $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$; **(c)** $f(x + 1, y - 1)$; **(d)** $f(-x, y) - f(x, -y)$.

2. Sea g la función de las dos variables x y y el conjunto de pares ordenados de la forma (P, z) tales que

$$z = \sqrt{x^2 - y} \iff g(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$$

Calcule: **(a)** $g(3, 5)$; **(b)** $g(-4, -9)$; **(c)** $g(x + 2, 4x + 4)$; **(d)** $g\left(\frac{1}{x}, \frac{-3}{x^2}\right)$.

3. Sea g la función de las tres variables x, y y z el conjunto de pares ordenados de la forma (P, w) tales que

$$w = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad g(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$$

Obtenga: **(a)** $g(1, -1, -1)$; **(b)** $g(-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$; **(c)** $g(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}z)$; **(d)** $[g(x, y, z)]^2 - [g(x + 2, y + 2, z)]^2$.

4. Sea f la función de las tres variables x, y y z el conjunto de pares ordenados de la forma (P, w) tales que

$$w = \frac{4}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$$
$$\Leftrightarrow \quad f(x, y, z) = \frac{4}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$$

Calcule: **(a)** $f(1, 2, 3)$; **(b)** $f(2, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$; **(c)** $f\left(-\frac{2}{x}, \frac{2}{x}, -\frac{1}{x}\right)$; **(d)** $f(x + 2, 1, x - 2)$.

En los ejercicios 5 a 20, determine el dominio de f y dibújelo como una región de R^2. Utilice curvas punteadas para indicar cualquier parte de la frontera que no pertenezca al dominio y curvas continuas para indicar las partes de la frontera que pertenezcan al dominio.

5. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$ **6.** $f(x, y) = \dfrac{4}{4 - x^2 - y^2}$

7. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

8. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 4y^2}$

9. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$

10. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4y^2 + 16}$

11. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

12. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 16}$

13. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

14. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}}$

15. $f(x, y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$ **16.** $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

17. $f(x, y) = \cos^{-1}(x - y)$ **18.** $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$

19. $f(x, y) = \ln(xy - 1)$ **20.** $f(x, y) = \operatorname{sen}^{-1}(x + y)$

En los ejercicios 21 a 28, determine el dominio de f y represéntelo como una región de R^3.

21. $f(x, y, z) = \dfrac{x + y + z}{x - y - z}$ **22.** $f(x, y, z) = \dfrac{z}{x^2 - y}$

23. $f(x, y, z) = \sqrt{16 - x^2 - 4y^2 - z^2}$

24. $f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$

25. $f(x, y, z) = \operatorname{sen}^{-1} x + \operatorname{sen}^{-1} y + \operatorname{sen}^{-1} z$

26. $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + \ln z$

27. $f(x, y, z) = \ln(4 - x^2 - y^2) + |z|$

28. $f(x, y, z) = xz \cos^{-1}(y^2 - 1)$

En los ejercicios 29 a 36, determine el dominio de f y dibuje su gráfica.

29. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

30. $f(x, y) = 6 - 2x + 2y$

31. $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$

32. $f(x, y) = \sqrt{100 - 25x^2 - 4y^2}$

33. $f(x, y) = x^2 - y^2$ **34.** $f(x, y) = 144 - 9x^2 - 16y^2$

35. $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ **36.** $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

En los ejercicios 37 a 46, dibuje un mapa de contornos de f que muestre las curvas de nivel para los números indicados.

37. La función del ejercicio 29 para 0, 1, 2, 3 y 4.

38. La función del ejercicio 30 para 10, 6, 2, 0, −2, −6 y −10.

39. La función del ejercicio 31 para 16, 12, 7, 0, −9 y −20.

40. La función del ejercicio 32 para 0, 2, 4, 6, 8 y 10.

41. La función del ejercicio 33 para 16, 9, 4, 0, −4, −9 y −16.

42. La función del ejercicio 36 para 10, 8, 6, 5 y 0.

43. $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ para 8, 6, 4, 2, y 0

44. $f(x, y) = (x - 3)/(y + 2)$ para 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 0, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, −1, −2 y −4.

45. $f(x, y) = e^{xy}$ para 1, 2, e, 4, $\frac{1}{2}$, e^{-1} y $\frac{1}{4}$.

46. $f(x, y) = \ln xy$ para 0, 1, 2, 4, −1, −2 y −4.

47. Sean $f(x, y) = x - y$, $g(t) = \sqrt{t}$, $h(s) = s^2$. Calcule **(a)** $(g \circ f)(5, 1)$; **(b)** $f(h(3), g(9))$; **(c)** $f(g(x), h(y))$; **(d)** $g((h \circ f)(x, y))$; **(e)** $(g \circ h)(f(x, y))$.

48. Sean $f(x, y) = x/y^2$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \sqrt{x}$. Calcule **(a)** $(h \circ f)(2, 1)$; **(b)** $f(g(2), h(4))$; **(c)** $f(g(\sqrt{x}), h(x^2))$; **(d)** $h((g \circ f)(x, y))$; **(e)** $(h \circ g)(f(x, y))$.

En los ejercicios 49 y 50, calcule $h(x, y)$ si $h = f \circ g$; también determine el dominio de h.

49. $f(t) = \operatorname{sen}^{-1} t$; $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

50. $f(t) = e^t$; $g(x, y) = y \ln x$

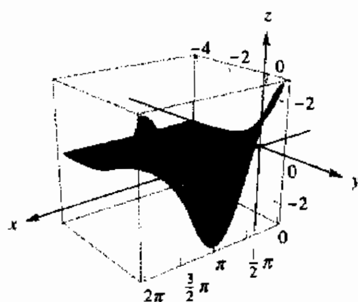
En los ejercicios 51 a 54, relacione la función con una de las superficies (a)–(d) y con uno de los mapas de contorno (i)–(iv). En los mapas de contorno, el eje x es horizontal, el eje y es vertical, el color negro representa los valores de función más pequeños, y el blanco representa los valores de función más grandes.

51. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$

52. $f(x, y) = \ln|x + y|$

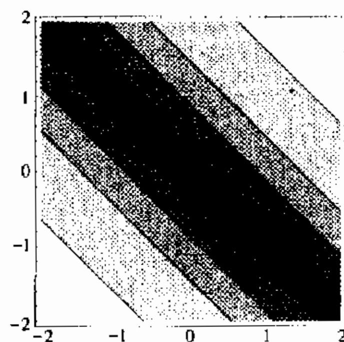
53. $f(x, y) = e^y \cos x$

54. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \cos y$

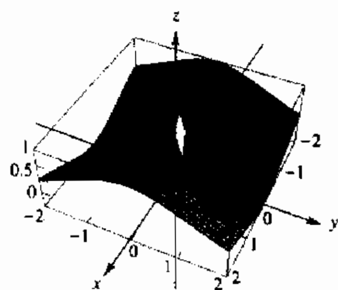


$[0, 2\pi]$ por $[-4, 1]$ por $[-3, 3]$

(a)

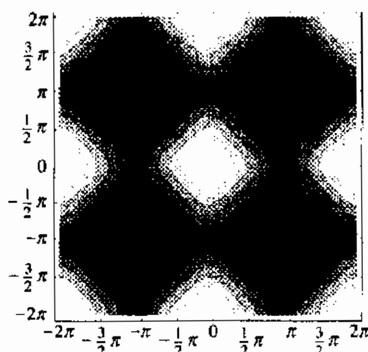


(i)

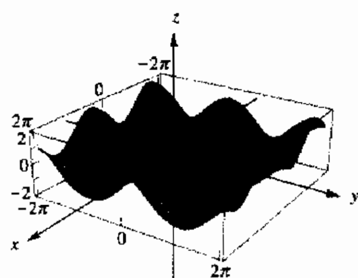


$[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ por $[0, 1]$

(b)

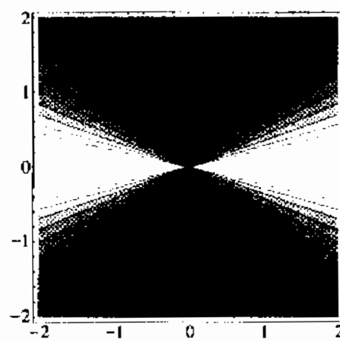


(ii)

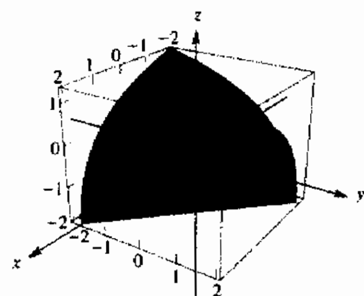


$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-2, 2]$

(c)

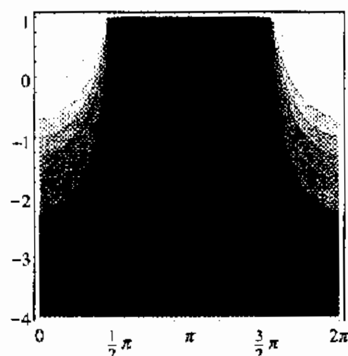


(iii)



$[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ por $[-2, 1.5]$

(d)



(iv)

55. Se elabora una caja rectangular cerrada con tres tipos de materiales de modo que contenga un volumen 16 pie^3. El material para la tapa y el fondo cuesta \$0.18 por pie cuadrado, el material para las partes delantera y trasera cuesta \$0.16 por pie cuadrado, y el material para las otras dos caras cuesta \$0.12 por pie cuadrado. **(a)** Obtenga un modelo matemático que exprese el costo total del material como una función de las dimensiones las partes delantera y trasera. Determine el dominio de la función. **(b)** ¿Cuál es el costo del material si las dimensiones de las partes delantera y trasera son 2 pie y 4 pie, donde 4 pie es la altura de la caja?

56. Se elabora una caja rectangular sin tapa con un costo de material de \$10. El material para el fondo cuesta \$0.15 por pie cuadrado y el material para los lados cuesta \$0.30 por pie cuadrado. **(a)** Obtenga un modelo matemático que exprese el volumen de la caja como una función de las dimensiones del fondo. Determine el dominio de la función. **(b)** ¿Cuál es volumen de la caja si el fondo es un cuadrado cuyo lado mide 3 pie?

57. Un sólido rectangular del primer octante, con tres caras en los ejes planos coordenados, tiene un vértice en el origen y el vértice opuesto en el punto (x, y, z) en el plano $x + 3y + 2z = 6$. **(a)** Obtenga un modelo matemático que exprese el volumen del sólido como una función de las dimensiones de la base. Determine el dominio de la función. **(b)** ¿Cuál es el volumen si la base es un cuadrado de lado 1.25 unidades?

58. **(a)** Obtenga un modelo matemático que exprese el área total de la superficie del sólido del ejercicio 57 como una función de las dimensiones de la base. Determine el dominio de la función. **(b)** ¿Cúal es el área total de la superficie si la base es un cuadrado de lado 1.25 unidades?

59. El potencial eléctrico en un punto (x, y) es $V(x, y)$ volts y $V(x, y) = 4/\sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Dibuje las curvas equipotenciales de V para 16, 12, 8 y 4.

60. La función de producción f para cierto artículo está definida por $f(x, y) = 4x^{1/3}y^{2/3}$, donde x y y son las cantidades de dos insumos. Dibuje un mapa de contornos de f que muestre las curvas de producción constantes para 16, 12, 8, 4 y 2.

61. Suponga que f es la función de producción de cierto artículo, donde $f(x, y)$ unidades se producen cuando se emplean x máquinas y y horas-persona están disponibles. Si $f(x, y) = 6xy$, dibuje un mapa de contornos de f que muestre las curvas de producción constante para 30, 24, 18, 12 y 6.

62. $T(x, y)$ grados es la temperatura en un punto (x, y) de una placa metálica plana, donde $T(x, y) = 4x^2 + 2y^2$. Dibuje un mapa de contornos de T que muestre las isotermas para 12, 18, 4, 1 y 0.

63. La presión de un gas en el punto (x, y, z) del espacio tridimensional es $P(x, y, z)$ atmósferas, donde

$$P(x, y, z) = 4e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

Describa las superficies de nivel, denominadas **superficies isobáricas,** de P para 4, 2, 1 y $\frac{1}{2}$.

64. El potencial eléctrico en un punto (x, y, z) del espacio tridimensional es $V(x, y, z)$ volts, donde

$$V(x, y, z) = \frac{8}{\sqrt{16x^2 + 4y^2 + z^2}}$$

Las superficies de nivel de V se llaman **superficies equipotenciales.** Describa estas superficies para 4, 2, 1 y $\frac{1}{2}$.

12.2 LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE MÁS DE UNA VARIABLE

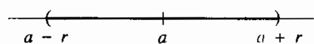
La definición del límite de una función de una variable involucra la distancia entre dos puntos de la recta numérica real. El límite de una función de más de una variable también implica la distancia entre dos puntos; por lo que se inicia el estudio de estos límites con la definición de distancia entre dos puntos de R^n.

En R la distancia entre dos puntos es el valor absoluto de la diferencia de dos números reales. Esto es, $|x - a|$ es la distancia entre los puntos x y a de la recta numérica real. En R^2 la distancia entre los puntos $P(x, y)$ y $P_0(x_0, y_0)$ está dada por la expresión $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. En R^3 la distancia entre los puntos $P(x, y, z)$ y $P_0(x_0, y_0, z_0)$ está determinada por $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$. En R^n la distancia entre dos puntos se define de manera análoga.

12.2.1 Definición de la distancia entre dos puntos de R^n

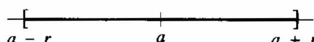
Si $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ son dos puntos de R^n, entonces la **distancia entre P y A,** denotada por $\|P - A\|$, está determinada por

$$\|P - A\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}$$



Bola abierta $B(a; r)$ en R

FIGURA 1



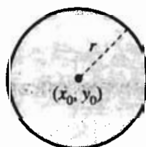
Bola cerrada $B[a; r]$ en R

FIGURA 2



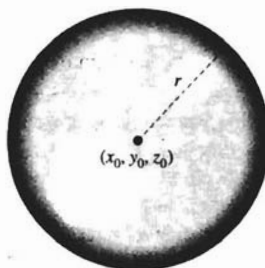
Bola abierta $B((x_0, y_0); r)$ en R^2

FIGURA 3



Bola cerrada $B[(x_0, y_0); r]$ en R^2

FIGURA 4



Bola abierta $B((x_0, y_0, z_0); r)$ en R^3

FIGURA 5

El símbolo $\|P - A\|$ representa un número no negativo y se lee como "la distancia entre P y A".

En R, R^2 y R^3, la fórmula de la definición 12.2.1 se transforma, respectivamente, en

$$\|x - a\| = |x - a|$$
$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$
$$\|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

12.2.2 Definición de bola abierta en R^n

Si A es un punto de R^n y r es un número positivo, entonces la **bola abierta** $B(A; r)$ es el conjunto de todos los puntos P de R^n tales que $\|P - A\| < r$.

12.2.3 Definición de bola cerrada en R^n

Si A es un punto de R^n y r es un número positivo, entonces la **bola cerrada** $B[A; r]$ es el conjunto de todos los puntos P de R^n tales que $\|P - A\| \leq r$.

Con el fin de ilustrar estas definiciones, se muestra lo que ellas significan en R, R^2 y R^3. En primer lugar, si a es un punto de R, entonces la bola abierta $B(a; r)$ es el conjunto de todos los puntos x de R tales que

$$|x - a| < r$$

El conjunto de puntos que satisface esta ecuación es el conjunto de todos los puntos del intervalo abierto $(a - r, a + r)$; de modo que la bola abierta $B(a; r)$ en R (refiérase a la figura 1) es simplemente el intervalo abierto cuyo punto medio es a y cuyos extremos son $a - r$ y $a + r$. La bola cerrada $B[a; r]$ en R (figura 2) es el intervalo cerrado $[a - r, a + r]$.

Si (x_0, y_0) es un punto de R^2, entonces la bola abierta $B((x_0, y_0); r)$ es el conjunto de todos los puntos (x, y) de R^2 tales que

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$$

Por lo que la bola abierta $B((x_0, y_0); r)$ en R^2 (figura 3) consta de todos los puntos de la región interior limitada por la circunferencia que tiene su centro en (x_0, y_0) y radio r. En ocasiones se llama *disco abierto* a una bola abierta de R^2. La bola cerrada, o *disco cerrado*, $B[(x_0, y_0); r]$ de R^2 (figura 4) es el conjunto de todos los puntos de la bola abierta $B((x_0, y_0); r)$ y la circunferencia con centro en (x_0, y_0) y radio r.

Si (x_0, y_0, z_0) es un punto de R^3, entonces la bola abierta $B((x_0, y_0, z_0); r)$ es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) de R^3 tales que

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r$$

Por tanto, la bola abierta $B((x_0, y_0, z_0); r)$ en R^3 (figura 5) consiste de todos los puntos de la región interior limitada por la esfera que tiene centro en (x_0, y_0, z_0) y radio r. Similarmente, la bola cerrada $B[(x_0, y_0, z_0); r]$ de R^3 (figura 6) consiste de todos los puntos de la bola abierta $B((x_0, y_0, z_0); r)$ así como de los puntos de la esfera que tiene centro en (x_0, y_0, z_0) y radio r.



Bola cerrada $B[(x_0, y_0, z_0); r]$ en R^3

FIGURA 6

12.2.4 Definición del límite de una función de *n* variables

Sea f una función de n variables definida en alguna bola abierta $B(A; r)$, excepto posiblemente en el punto A. Entonces, el **límite de $f(P)$ conforme P tiende a A es L,** lo cual se denota por

$$\lim_{P \to A} f(P) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar que tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < \|P - A\| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(P) - L| < \epsilon$$

Si en la definición anterior f es una función de una variable, $A = a$ pertenece a R y $P = x$, entonces la definición establece lo siguiente: si f está definida en algún intervalo abierto centrado en a, excepto posiblemente en a, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar que tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Por lo que la definición de límite de una función de una variable (1.5.1) es un caso especial de la definición 12.2.4.

La definición del límite de una función de dos variables es el caso especial de la definición 12.2.4 en donde A es el punto (x_0, y_0) y P es el punto (x, y).

12.2.5 Definición del límite de una función de dos variables

Sea f la función de dos variables definida en algún disco abierto $B((x_0, y_0); r)$, excepto posiblemente en (x_0, y_0). Entonces el **límite de $f(x, y)$ conforme (x, y) tiende a (x_0, y_0) es L,** lo que se denota por

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar que tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \text{ entonces } |f(x, y) - L| < \epsilon$$

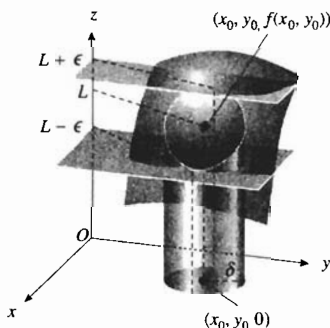


FIGURA 7

En palabras, esta definición establece que los valores de función $f(x, y)$ se aproximan al límite L conforme el punto (x, y) tiende al punto (x_0, y_0) si el valor absoluto de la diferencia entre $f(x, y)$ y L puede hacerse arbitrariamente pequeña al considerar el punto (x, y) suficientemente cercano a (x_0, y_0) pero sin llegar a ser (x_0, y_0). En la definición nada se dice acerca del valor de la función en el punto (x_0, y_0), es decir, no es necesario que la función esté definida en (x_0, y_0) para que $\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ exista.

En la figura 7 se presenta una interpretación geométrica de la definición 12.2.5. En esta figura se muestra la porción de la superficie que tiene

ecuación $z = f(x, y)$ y que se encuentra por arriba del disco $B((x_0, y_0); \delta)$. Se observa que $f(x, y)$, en el eje z, estará entre $L - \epsilon$ y $L + \epsilon$ siempre que el punto (x, y) del plano xy esté en el disco abierto $B((x_0, y_0); \delta)$. Otra forma de establecer esto consiste en que $f(x, y)$ en el eje z puede forzarse a que esté entre $L - \epsilon$ y $L + \epsilon$ al restringir el punto (x, y) del plano xy al disco abierto $B((x_0, y_0); \delta)$.

 **EJEMPLO 1** Utilice la definición 12.2.5 para demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} (2x + 3y) = 11$$

Solución El primer requisito de la definición es que $2x + 3y$ debe estar definido en algún disco abierto que tenga su centro en el punto $(1, 3)$, excepto posiblemente en $(1, 3)$. Como $2x + 3y$ está definida en cada punto (x, y), entonces cualquier disco abierto centrado en $(1, 3)$ satisfará este requisito. Ahora, debe demostrarse que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta \quad \text{entonces} \quad |(2x + 3y) - 11| < \epsilon \qquad \textbf{(1)}$$

De la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} |2x + 3y - 11| &= |2x - 2 + 3y - 9| \\ &\leq 2|x - 1| + 3|y - 3| \end{aligned}$$

Debido a que

$$|x - 1| \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} \quad \text{y} \quad |y - 3| \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

se deduce que

$$\text{si} \quad 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta \quad \text{entonces} \quad 2|x - 1| + 3|y - 3| < 2\delta + 3\delta$$

Esta proposición muestra que una elección adecuada para δ es $5\delta = \epsilon$, esto es, $\delta = \frac{1}{5}\epsilon$. Con esta δ se tiene el argumento siguiente:

$$\begin{aligned} & 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta \\ \Rightarrow \quad & |x - 1| < \delta \text{ y } |y - 3| < \delta \\ \Rightarrow \quad & 2|x - 1| + 3|y - 3| < 5\delta \\ \Rightarrow \quad & |2(x - 1) + 3(y - 3)| < 5(\tfrac{1}{5}\epsilon) \\ \Rightarrow \quad & |2x + 3y - 11| < \epsilon \end{aligned}$$

De este modo, se ha probado que para cualquier $\epsilon > 0$ se elige $\delta = \frac{1}{5}\epsilon$ a fin de que la proposición (1) sea verdadera. Esto demuestra que $\lim_{(x,y)\to(1,3)} (2x + 3y) = 11$. ◀

Los teoremas de límites de la sección 1.5 y sus demostraciones, con pequeñas modificaciones, se aplican a funciones de más de una variable. Por ejemplo, en correspondencia con el teorema de límites 1 de la sección 1.5 se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (mx + ny + d) = ma + nb + d$$

y la demostración es una generalización de la demostración del ejemplo 1. A partir de aquí se utilizarán los teoremas de límites sin volver a establecerlos ni demostrarlos.

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Al aplicar los teoremas de límites acerca de sumas y productos se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(-2,1)} (x^3 + 2x^2y - y^2 + 2) = (-2)^3 + 2(-2)^2(1) - (1)^2 + 2$$
$$= 1$$

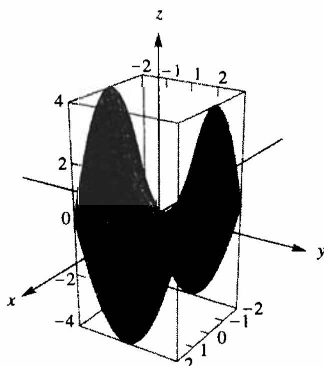
◀

 **EJEMPLO 2** Calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ si

$$f(x, y) = \frac{y^4 - x^4}{y^2 + x^2}$$

Solución

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4 - x^4}{y^2 + x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2 - x^2)(y^2 + x^2)}{y^2 + x^2}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 - x^2$$
$$= 0$$



[−2, 2] por [−2, 2] por [−4, 4]

$f(x, y) = \dfrac{y^4 - x^4}{y^2 + x^2}$

FIGURA 8

La gráfica de f, mostrada en la figura 8, es el paraboloide hiperbólico

$$z = y^2 - x^2$$

sin considerar el origen. La gráfica apoya la respuesta. ◀

El teorema siguiente trata acerca del límite de una función compuesta de dos variables, el cual es análogo al teorema 1.9.1 para funciones de una variable y su demostración es semejante.

12.2.6 Teorema

Si g es una función de dos variables y $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = b$, y además f es una función de una variable que es continua en b, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f \circ g)(x, y) = f(b)$$
$$\Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x, y)) = f\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y)\right)$$

 **EJEMPLO 3** Utilice el teorema 12.2.6 a fin de calcular $\lim_{(x,y)\to(-2,1)} \ln(xy - 1)$.

Solución Sea g la función tal que $g(x, y) = xy - 1$ y sea f la función para la cual $f(t) = \ln t$.

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} (xy - 1) = 1$$

y como f es continua en 1, del teorema 12.2.6,

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \ln(xy - 1) = \ln\left(\lim_{(x,y)\to(2,1)} (xy - 1)\right)$$
$$= \ln 1$$
$$= 0$$

◀

A continuación se presentará el concepto de *punto de acumulación* el cual se necesita para continuar el estudio de límites de funciones de dos variables.

12.2.7 Definición de punto de acumulación

Un punto P_0 es un **punto de acumulación** de un conjunto S de puntos de R^n si toda bola abierta $B(P_0; r)$ contiene un número infinito de puntos de S.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Si S es el conjunto de todos los puntos de R^2 del lado positivo del eje x, entonces el origen es un punto de acumulación de S debido a que, sin importar que tan pequeño se tome el valor de r, cada disco abierto que tenga su centro en el origen y radio r contendrá un número infinito de puntos de S. Este es un ejemplo de un conjunto que tiene un punto de acumulación para el cual el punto de acumulación no es un punto del conjunto. Cualquier punto de este conjunto S también es un punto de acumulación de S. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Si S es el conjunto de todos los puntos de R^2 para los que sus coordenadas cartesianas son números enteros positivos, entonces este conjunto no tiene puntos de acumulación. Esto se ve al considerar el punto (m, n), donde m y n son números enteros positivos. De este modo, un disco abierto que tenga su centro en (m, n) y radio menor que 1 no contendrá ningún punto de S diferente de (m, n); por tanto, no se satisface la definición 12.2.7 (consulte la figura 9). ◀

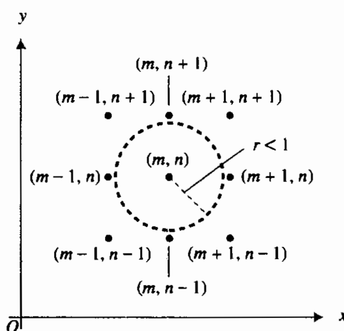


FIGURA 9

Ahora se considerará el límite de una función de dos variables conforme un punto (x, y) tiende a un punto (x_0, y_0), donde (x, y) se restringe a un conjunto específico de puntos.

12.2.8 Definición del límite de una función de dos variables a través de un conjunto específico

Sea f una función definida en un conjunto de puntos S en R^2, y sea (x_0, y_0) un punto de acumulación de S. Entonces el **límite de $f(x, y)$ conforme (x, y) tiende a (x_0, y_0) en S es L**, lo que se denota por

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\((x,y)\text{ en } S)}} f(x, y) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar que tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < \|(x, y) - (x_0 - y_0)\| < \delta \text{ entonces } |f(x, y) - L| < \epsilon$$

donde (x, y) pertenece a S.

En algunos casos el límite de la definición anterior se transforma en el límite de una función de una sola variable. Por ejemplo, considere $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$. Entonces si S_1 es el conjunto de todos los puntos del lado positivo del eje x,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\((x,y)\text{ en } S_1)}} f(x, y) = \lim_{x\to 0^+} f(x, 0)$$

Si S_2 es el conjunto de todos los puntos del lado negativo del eje y,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\((x,y) \text{ en } S_2)}} f(x, y) = \lim_{y\to 0^-} f(0, y)$$

Si S_3 es el conjunto de todos los puntos del eje x,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\((x,y) \text{ en } S_3)}} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, 0)$$

Si S_4 es el conjunto de todos los puntos de la parábola $y = x^2$,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\((x,y) \text{ en } S_4)}} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, x^2)$$

12.2.9 Teorema

Suponga que la función f está definida para todos los puntos de un disco abierto centrado en (x_0, y_0), excepto posiblemente en (x_0, y_0), y que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

Entonces, si S es cualquier conjunto de puntos de R^2 que tiene a (x_0, y_0) como un punto de acumulación,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\((x,y) \text{ en } S)}} f(x, y)$$

existe y siempre tiene el valor L.

Demostración Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$, entonces, por la definición 12.2.5, para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x, y) - L| < \epsilon$$

La proposición anterior será verdadera si además se restringe (x, y) debido al requisito de que (x, y) pertenezca a un conjunto S, donde S es cualquier conjunto de puntos que tenga a (x_0, y_0) como un punto de acumulación. Por tanto, por la definición 12.2.8,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\((x,y) \text{ en } S)}} f(x, y) = L$$

y L no depende del conjunto S a través del cual (x, y) se aproxima a (x_0, y_0). Esto demuestra el teorema. ■

El teorema siguiente se obtiene como consecuencia inmediata del teorema 12.2.9.

12.2.10 Teorema

Si la función f tiene límites diferentes conforme (x, y) se aproxima a (x_0, y_0) a través de dos conjuntos diferentes de puntos que tienen a (x_0, y_0) como un punto de acumulación, entonces $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ no existe.

Demostración Suponga que S_1 y S_2 son dos conjuntos de puntos de R^2 diferentes que tienen a (x_0, y_0) como un punto de acumulación, y sean

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\((x,y)\text{ en } S_1)}} f(x, y) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\((x,y)\text{ en } S_2)}} f(x, y) = L_2$$

Ahora suponga que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ existe. Entonces, por el teorema 12.2.9, L_1 debe ser igual a L_2; pero por hipótesis $L_1 \neq L_2$, de modo que se tiene una contradicción. Por tanto, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ no existe. ■

EJEMPLO 4 Sea

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

ejercicio N°11

Utilice el teorema 12.2.10 para demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ no existe.

Solución La función f está definida en todos los puntos de R^2 excepto en (0, 0). Sean S_1 el conjunto de todos los puntos del eje x y S_2 el conjunto de todos los puntos del eje y. Entonces

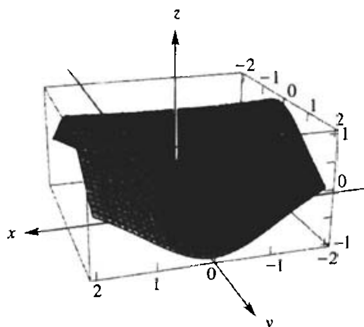
$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\((x,y)\text{ en } S_1)}} f(x, y) &= \lim_{x\to 0} f(x, 0) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} 1 \\ &= 1\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\((x,y)\text{ en } S_2)}} f(x, y) &= \lim_{y\to 0} f(0, y) \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} \\ &= \lim_{y\to 0} (-1) \\ &= -1\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\((x,y)\text{ en } S_1)}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\((x,y)\text{ en } S_2)}} f(x, y)$$

se concluye, por el teorema 12.2.10, que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ no existe.

La figura 10 muestra la gráfica de f. Observe en la figura que conforme (x, y) se aproxima a (0, 0) a lo largo del eje x, parece que $f(x, y)$ tiende a 1, y conforme (x, y) se aproxima a (0, 0) a lo largo del eje y, parece que $f(x, y)$ tiende a -1. Estas observaciones apoyan la respuesta. ◀



[−2, 2] por [−2, 2] por [−2, 2]

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

FIGURA 10

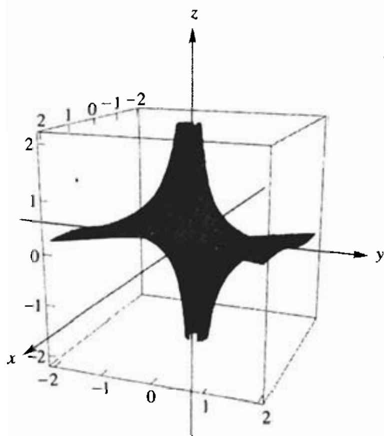
EJEMPLO 5 Demuestre que no existe el límite siguiente:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Solución La expresión $x/(x^2 + y^2)$ está definida para todos los puntos de R^2 excepto (0, 0). Sea S el conjunto de puntos del eje x positivo. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\((x,y)\text{ en } S)}} \frac{x}{x^2 + y^2} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

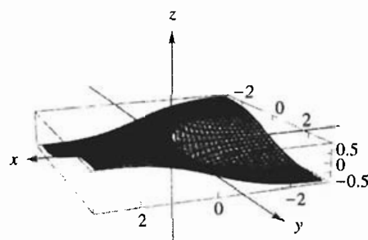
Por tanto, el límite no existe.



[−2, 2] por [−2, 2] por [−2.2, 2.2]

$f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

FIGURA 11



[−2.6, 2.6] por [−2.6, 2.6] por [−0.5, 0.5]

$f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

FIGURA 12

La figura 11 muestra la gráfica de la función cuyos valores son $x/(x^2 + y^2)$. Observe que conforme (x, y) se aproxima al origen a lo largo del eje x positivo, parece que los valores de función crecen sin límite, lo cual apoya la respuesta. ◀

▶ EJEMPLO 6 Dada

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ si existe.

Solución La función está definida para todos los puntos de R^2 excepto (0, 0). Sean S_1 el conjunto de todos los puntos del eje x, y S_2 el conjunto de todos los puntos de la recta $y = x$. Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\((x,y)\text{ en } S_1)}} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2 + 0} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\((x,y)\text{ en } S_2)}} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \lim_{x\to 0} \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

Como

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\((x,y)\text{ en } S_1)}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\((x,y)\text{ en } S_2)}} f(x, y)$$

entonces, por el teorema 12.2.10, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ no existe.

La figura 12 muestra la gráfica de f, la cual apoya el hecho de que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ no existe. ◀

▶ EJEMPLO 7 Dada

$$f(x, y) = \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Ejercicio 38.

calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ si existe.

Solución La función está definida para todos los puntos de R^2 excepto (0, 0). Sea S_1 el conjunto de todos los puntos de cualquier recta que pase por el origen; esto es, para cualquier punto (x, y) de S_1, $y = mx$. Sea S_2 el conjunto de todos los puntos de la parábola $y = x^2$. Entonces

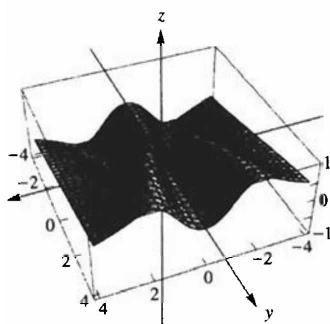
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\((x,y)\text{ en } S_1)}} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{2mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2mx}{x^2 + m^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\((x,y)\text{ en } S_2)}} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{x^4 + x^4} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Debido a que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\((x,y)\text{ en } S_1)}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\((x,y)\text{ en } S_2)}} f(x, y)$$

entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ no existe.



$[-4, 4]$ por $[-4, 4]$ por $[-1, 1]$

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

FIGURA 13

La figura 13, la cual muestra la gráfica de f, apoya el hecho de que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ no existe. ◀

EJEMPLO 8 Sea

$$f(x, y) = \frac{x^4 + 2x^2 + 2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$$

Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ si existe.

Solución La función está definida en todos los puntos de R^2 excepto en $(0, 0)$. Sea S_1 el conjunto de todos los puntos de cualquier recta que pase por el origen; de modo que si $f(x, y)$ es un punto de S_1, entonces $y = mx$. Sea S_2 el conjunto de todos los puntos de la parábola $y = x^2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\((x,y)\text{ en } S_1)}} f(x, y) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + 2x^2 + 2m^2x^2 + m^4x^4}{x^2 + m^2x^2}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^4(1 + m^4) + 2x^2(1 + m^2)}{x^2(1 + m^2)}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1 + m^4) + 2(1 + m^2)}{1 + m^2}\\
&= 2\\
\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\((x,y)\text{ en } S_2)}} f(x, y) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + 2x^2 + 2x^4 + x^8}{x^2 + x^4}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^8 + 3x^4 + 2x^2}{x^2 + x^4}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^6 + 3x^2 + 2}{1 + x^2}\\
&= 2
\end{aligned}$$

Aunque se obtiene el mismo límite 2 si (x, y) se aproxima a $(0, 0)$ a lo largo de cualquier recta que pase por el origen así como por la parábola $y = x^2$, no se puede concluir que el límite exista y sea igual a 2, no obstante se puede esperar que este sea el caso. Cualquier disco abierto centrado en el origen satisface el primer requisito de la definición 12.2.5. Si puede probarse que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{entonces} \quad \left|\frac{x^4 + 2x^2 + 2y^2 + y^4}{x^2 + y^2} - 2\right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{entonces} \quad \left|\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}\right| < \epsilon \qquad \textbf{(2)}$$

entonces se habrá demostrado que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 2$.

Como $x^2 \leq x^2 + y^2$ y $y^2 \leq x^2 + y^2$,

$$\left|\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}\right| \leq \frac{(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = 2(x^2 + y^2)$$

De modo que se tiene una elección adecuada para δ al despejarla de $2\delta^2 = \epsilon$; así, $\delta = \sqrt{\epsilon/2}$. Con esta δ se tiene el argumento siguiente:

$$\begin{aligned}
&0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta\\
\Rightarrow\ &2(x^2 + y^2) < 2\delta^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} < 2\delta^2$$

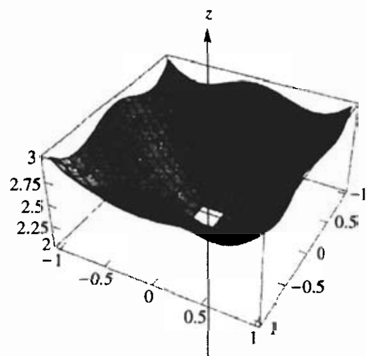
$$\Rightarrow \quad \frac{(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} < 2 \cdot \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right| < \epsilon$$

Así, si $\delta = \sqrt{\epsilon/2}$, entonces la proposición (2) se cumple y de este modo se ha demostrado que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 2.$$

La figura 14 muestra la gráfica de f y apoya el hecho de que el límite es 2. ◀



$[-1, 1]$ por $[-1, 1]$ por $[2, 3]$

$$f(x, y) = \frac{x^4 + 2x^2 + 2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$$

FIGURA 14

A continuación se definirá la continuidad de una función de n variables en un punto de R^n. Observe que la definición 1.8.1 de la continuidad de una función de una variable en un número a es un caso especial de la siguiente definición.

12.2.11 Definición de continuidad de una función de n variables

Suponga que f es una función de n variables y que A es un punto de R^n. Se dice que f es **continua** en el punto A si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

(i) $f(A)$ existe;
(ii) $\lim_{P\to A} f(P)$ existe;
(iii) $\lim_{P\to A} f(P) = f(A)$.

Si una o más de estas tres condiciones no se cumple para el punto A, entonces se dice que f es **discontinua** en A.

Si f es una función de dos variables, A es el punto (x_0, y_0) y P es el punto (x, y), entonces la definición 12.2.11 se transforma en la definición siguiente.

12.2.12 Definición de continuidad de una función de dos variables

Se dice que la función f de dos variables x y y es **continua** en el punto (x_0, y_0) si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

(i) $f(x_0, y_0)$ existe;
(ii) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ existe;
(iii) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

EJEMPLO 9 Determine si la función g es continua en (0, 0) si

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + 2x^2 + 2y^2 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solución Se verificarán las tres condiciones de la definición 12.2.12 para el punto (0, 0).

(i) $g(0, 0) = 2$. Por tanto, se cumple la condición (1).

(ii) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + 2x^2 + 2y^2 + y^4}{x^2 + y^2} = 2$$

Este hecho se demostró en el ejemplo 8.

(iii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = g(0, 0)$

Por tanto, g es continua en (0, 0). ◀

EJEMPLO 10 Determine si la función h es continua en (0, 0) si

$$h(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solución Al verificar las condiciones de la definición 12..2.12 se tiene:

(i) $h(0, 0) = 0$. Por tanto, se cumple la condición (i).

(ii) Cuando $(x, y) \neq (0, 0)$, $h(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$. En el ejemplo 6, se mostró que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy/(x^2 + y^2)$ no existe; en consecuencia, que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x, y)$ no existe. Por tanto, no se cumple la condición (ii).

Así, h es discontinua en (0, 0). ◀

Si una función f de dos variables es discontinua en un punto (x_0, y_0) pero $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe, entonces se dice que f tiene una **discontinuidad removible** (o **eliminable**) en (x_0, y_0) debido a que si se redefine f en (x_0, y_0) de modo que

$$f(x_0, y_0) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$$

entonces la nueva función es continua en (x_0, y_0). Si una discontinuidad no es removible, entonces se denomina **discontinuidad esencial.**

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

(a) Si $f(x, y) = (x^4 + 2x^2 + 2y^2 + y^4)/(x^2 + y^2)$, entonces f es discontinua en (0, 0) ya que $f(0, 0)$ no está definido. Sin embargo, en el ejemplo 8, se probó que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 2$. Por tanto la discontinuidad es removible al redefinir $f(0, 0)$ como 2. Refiérase al ejemplo 9.

(b) Considere $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$. Entonces f es discontinua en (0, 0) debido a que $f(0, 0)$ no está definido. En el ejemplo 6, se mostró que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ no existe. Por tanto, la discontinuidad es esencial. ◀

Los teoremas que tratan acerca de la continuidad para funciones de una variable pueden extenderse a funciones de dos variables.

12.2.13 Teorema

Si f y g son dos funciones continuas en el punto (x_0, y_0), entonces

(i) $f + g$ **es continua en** (x_0, y_0);
(ii) $f - g$ **es continua en** (x_0, y_0);
(iii) fg **es continua en** (x_0, y_0);
(iv) f/g **es continua en** (x_0, y_0), **considerando que** $g(x_0, y_0) \neq 0$.

La demostración de este teorema es análoga a la demostración del teorema correspondiente (1.8.2) para funciones de una variable.

12.2.14 Teorema

Una función polinomial de dos variables es continua en cada punto de R^2.

Demostración Toda función polinomial es la suma de productos de funciones definidas por $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$ y $h(x, y) = c$, donde c es un número real. Puesto que f, g y h son continuas en cada punto de R^2, el teorema se deduce mediante aplicaciones repetidas de los incisos (i) y (iii) del teorema 12.2.13. ∎

12.2.15 Teorema

Una función racional de dos variables es continua en cada punto de su dominio.

Demostración Una función racional es el cociente de dos funciones polinomiales f y g que son continuas en cada punto de R^2, según el teorema 12.2.14. Si (x_0, y_0) es cualquier punto del dominio de f/g, entonces $g(x_0, y_0) \neq 0$; de modo que por el inciso (iv) del teorema 12.2.13, f/g es continua en ese punto. ∎

▶ ***EJEMPLO 11*** Determine todos los puntos en los que f es continua si

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

Solución La función f está definida en todos los puntos de R^2. Por tanto, se cumple la condición (i) de la definición 12.2.12 para cada punto (x_0, y_0).

Considere los puntos (x_0, y_0) si ${x_0}^2 + {y_0}^2 \neq 1$.

Si ${x_0}^2 + {y_0}^2 < 1$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x^2 + y^2) \\ &= {x_0}^2 + {y_0}^2 \\ &= f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Si ${x_0}^2 + {y_0}^2 > 1$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 0 \\ &= 0 \\ &= f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Así, f es continua en todos los puntos (x_0, y_0) para los que ${x_0}^2 + {y_0}^2 \neq 1$.

Con el fin de determinar la continuidad de f en los puntos (x_0, y_0) para los cuales $x_0^2 + y_0^2 = 1$, se considera $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ para estos puntos.

Sean S_1 el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $x^2 + y^2 \leq 1$, y S_2 el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $x^2 + y^2 > 1$. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\text{ en } S_1}} f(x, y) &= \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\text{ en } S_1}} (x^2 + y^2)\\ &= x_0^2 + y_0^2\\ &= 1\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\text{ en } S_2}} f(x, y) &= \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\text{ en } S_2}} 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\text{ en } S_1}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\text{ en } S_2}} f(x, y)$$

se concluye que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ no existe. En consecuencia, f es discontinua en todos los puntos (x_0, y_0) para los cuales $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

De esta manera se ha demostrado que f es continua para todos los puntos de R^2 excepto para aquellos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. ◀

12.2.16 Definición de continuidad en una bola abierta

La función f de n variables es **continua en una bola abierta** si es continua en cada punto de la bola abierta.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 A partir de los resultados del ejemplo 11, la función de ese ejemplo es continua en cada disco abierto que no contenga ningún punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. ◀

El teorema siguiente, análogo al teorema 1.9.2, afirma que una función continua de una función continua es continua.

12.2.17 Teorema

Suponga que f es una función de una variable y que g es una función de dos variables tal que g es continua en (x_0, y_0) y f es continua en $g(x_0, y_0)$. Entonces la función compuesta $f \circ g$ es continua en (x_0, y_0).

La demostración de este teorema es semejante a la del teorema 1.9.2.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 Sea h la función del ejemplo 3:

$$h(x, y) = \ln(xy - 1)$$

Si $g(x, y) = xy - 1$, g es continua en todos los puntos de R^2. La función logarítmica natural es continua en su dominio completo, el cual es el conjunto de todos los números reales positivos. De modo que si f es la función definida por $f(t) = \ln t$, entonces f es continua para todo $t > 0$. Por tanto, la función h es la función compuesta $f \circ g$ y, por el teorema 12.2.17, es continua en todos los puntos (x, y) de R^2 para los cuales $xy - 1 > 0$. ◀

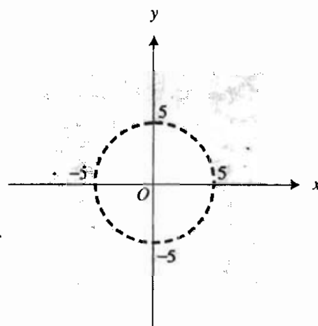


FIGURA 15

EJEMPLO 12 Determine todos los puntos en los que f es continua si

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$$

Solución El dominio de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) de R^2 para los cuales $x^2 + y^2 - 25 > 0$. Estos son los puntos de la región exterior limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ como se muestra en la figura 15. La función f es el cociente de las funciones g y h para las que

$$g(x, y) = 1 \qquad h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 25}$$

Como g es una función constante, es continua en cada punto de R^2. Del teorema 12.2.17, h es continua en todos los puntos de R^2 que satisfacen la desigualdad $x^2 + y^2 > 25$. Por tanto, por el teorema 12.2.13(iv), f es continua en todos los puntos de su dominio. ◀

EJERCICIOS 12.2

En los ejercicios 1 a 6, evalúe el límite mediante los teoremas de límites.

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} (3x^2 + xy - 2y^2)$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,4)} (5x^2 - 2xy + y^2)$
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{3x - 2y}{x + 4y}$
4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,4)} y\sqrt[3]{x^3 + 2y}$
5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^4 - (y - 1)^4}{x^2 + (y - 1)^2}$
6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x - 1)^{4/3} - (y - 1)^{4/3}}{(x - 1)^{2/3} + (y - 1)^{2/3}}$

En los ejercicios 7 a 10, establezca el límite determinando una $\delta > 0$ para cualquier $\epsilon > 0$ tal que se cumpla la definición 12.2.5.

7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,2)} (3x - 4y) = 1$
8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,1)} (5x + 4y) = -6$
9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,3)} (3x - 2y) = -9$
10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,4)} (5x - 3y) = -2$

En los ejercicios 11 a 16, demuestre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ no existe.

11. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
12. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$
13. $f(x, y) = \dfrac{x^4y^4}{(x^2 + y^4)^3}$
14. $f(x, y) = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$
15. $f(x, y) = \dfrac{x^9y}{(x^6 + y^2)^2}$
16. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4 + y^4}$

En los ejercicios 17 a 20, demuestre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe.

17. $f(x, y) = \dfrac{x^2y + xy^2}{x^2 + y^2}$
18. $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$
19. $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
20. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + 2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

En los ejercicios 21 a 24, determine si el límite existe.

21. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$
22. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^4 + y^4}$
23. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2}$
24. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3 + y^3}$

En los ejercicios 25 a 28, muestre la aplicación del teorema 12.2.6 para calcular el límite.

25. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \tan^{-1}\frac{y}{x}$
26. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\ln 3,\ln 2)} e^{x-y}$
27. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,2)} \sqrt{\frac{1}{3x - 4y}}$
28. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,3)} [[5x + \tfrac{1}{2}y^2]]$

En los ejercicios 29 a 52, determine todos los puntos en los que la función es continua.

29. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y - 1}$
30. $F(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$
31. $h(x, y) = \operatorname{sen}\dfrac{y}{x}$
32. $f(x, y) = \ln xy^2$
33. $f(x, y) = \dfrac{4x^2y + 3y^2}{2x - y}$
34. $g(x, y) = \dfrac{5xy^2 + 2y}{16 - x^2 - 4y^2}$
35. $g(x, y) = \ln(25 - x^2 - y^2)$
36. $f(x, y) = \cos^{-1}(x + y)$
37. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   Sugerencia: consulte el ejercicio 19.

38. $h(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Sugerencia: refiérase al ejercicio 7.

39. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x + y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

40. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

41. $G(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x| + |y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

42. $F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{|x^3| + |y^3|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

43. $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$

44. $f(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2 - 4}}$

45. $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}}$

46. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$

47. $f(x, y) = \sec^{-1}(xy)$

48. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 9) - \ln(1 - x^2 - y^2)$

49. $f(x, y) = \operatorname{sen}^{-1}(x + y) + \ln(xy)$

50. $f(x, y) = \operatorname{sen}^{-1}(xy)$

51. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x + y)}{x + y} & \text{si } x + y \neq 0 \\ 1 & \text{si } x + y = 0 \end{cases}$

52. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ x - y & \text{si } x = y \end{cases}$

En los ejercicios 53 a 59, la función es discontinua en el origen debido a que $f(0, 0)$ no existe. Determine si la discontinuidad es removible o esencial. Si la discontinuidad es removible, redefina $f(0, 0)$ de modo que la nueva función sea continua en $(0, 0)$.

53. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2}$

54. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

55. $f(x, y) = (x + y) \operatorname{sen} \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

56. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$

57. $f(x, y) = \dfrac{x^3y^2}{x^6 + y^4}$

58. $f(x, y) = \dfrac{2y^2 - 3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

59. $f(x, y) = \dfrac{x^3 - 4xy^2}{x^2 + y^2}$

60. (**a**) Dé una definición, semejante a la definición 12.2.5, del límite de una función de tres variables conforme un punto (x, y, z) tiende al punto (x_0, y_0, z_0). (**b**) Proporcione una definición, similar a la definición 12.2.8, del límite de una función de tres variables conforme un punto (x, y, z) se aproxima del punto (x_0, y_0, z_0) a través de un conjunto específico S de puntos de R^3.

61. (**a**) Enuncie un teorema semejante al teorema 12.2.9 para una función f de tres variables. (**b**) Establezca un teorema similar al teorema 12.2.10 para una función f de tres variables.

En los ejercicios 62 a 65, use las definiciones y teoremas de los ejercicios 60 y 61 para probar que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z)$ no existe.

62. $f(x, y, z) = \dfrac{x^3 + yx^2}{x^4 + y^2 + z^4}$

63. $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

64. $f(x, y, z) = \dfrac{x^4 + yx^3 + z^2x^2}{x^4 + y^4 + z^4}$

65. $f(x, y, z) = \dfrac{x^2y^2z^2}{x^6 + y^6 + z^6}$

En los ejercicios 66 y 67, utilice la definición del ejercicio 60(a) para demostrar que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z)$ existe.

66. $f(x, y, z) = \dfrac{y^3 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

67. $f(x, y, z) = \dfrac{xy + xz + yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

68. (**a**) Dé una definición, semejante a la definición 12.2.12, de continuidad en un punto para una función de tres variables: (**b**) Establezca teoremas para las funciones de tres variables similares a los teoremas 12.2.13 y 12.2.17.

En los ejercicios 69 a 72, utilice la definición y los teoremas del ejercicio 68 para determinar todos los puntos en los que la función es continua.

69. $f(x, y, z) = \dfrac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}}$

70. $f(x, y, z) = \ln(36 - 4x^2 - y^2 - 9z^2)$

71. $f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{3xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

72. $f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xz - y^2}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

73. La función G está definida por

$$G(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{si } x^2 + 4y^2 \leq 5 \\ 3 & \text{si } x^2 + 4y^2 > 5 \end{cases}$$

Demuestre que G es continua en todos los puntos (x, y) de R^2 excepto en aquellos de la elipse $x^2 + 4y^2 = 5$.

74. La función F está definida por

$$F(x, y) = \begin{cases} x^2 - 3y^2 & \text{si } x^2 - 3y^2 \leq 1 \\ 2 & \text{si } x^2 - 3y^2 > 1 \end{cases}$$

Demuestre que F es continua en todos los puntos (x, y) de R^2 excepto en aquellos de la hipérbola $x^2 - 3y^2 = 1$.

75. Suponga que f y g son funciones de dos variables que satisfacen las condiciones siguientes:

(i) $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$; $g(tx, ty) = t^n g(x, y)$ para alguna n y para toda t;

(ii) $g(1, 1) \neq 0$ y $g(1, 0) \neq 0$;

(iii) $g(1, 1) \cdot f(1, 0) \neq g(1, 0) \cdot f(1, 1)$.

Demuestre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}$ no existe.

12.3 DERIVADAS PARCIALES

La diferenciación de funciones de valor real de n variables se reduce al caso de una dimensión al considerar una función de n variables como una función de una variable mientras que las demás se mantienen fijas. Esto conduce al concepto de *derivada parcial**. Primero se considerarán las derivadas parciales de una función de dos variables.

12.3.1 Definición de derivada parcial de una función de dos variables

Sea f una función de las variables x y y. La **derivada parcial de f con respecto a x** es la función, denotada por $D_1 f$, tal que su valor en cualquier punto (x, y) del dominio de f está dado por

$$D_1 f(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

si este límite existe. De manera semejante, la **derivada parcial de f con respecto a y** es la función, denotada por $D_2 f$, tal que su valor en cualquier punto (x, y) del dominio de f está dado por

$$D_2 f(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

si existe este límite.

El proceso para calcular una derivada parcial se denomina **diferenciación parcial.**

$D_1 f$, que se lee "D sub 1 de f", denota la función que es la derivada parcial de f con respecto a la primera variable. $D_1 f(x, y)$, que se lee "D sub 1 de f de x y y", denota el valor de la función $D_1 f$ en el punto (x, y). Otras notaciones para $D_1 f$ son f_1, f_x, y $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.** Además, se tienen las notaciones $f_1(x, y)$, $f_x(x, y)$ y $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ para $D_1 f(x, y)$. De manera semejante, las notaciones para $D_2 f$ son f_2, f_y, y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$; y para $D_2 f(x, y)$ son $f_2(x, y)$,

* **Nota.** El autor utiliza la notación de Cauchy (con la letra D) para la derivada parcial empleando un subíndice numérico (1 a 2) para indicar la variable (x o y) con respecto a la cual se deriva. También se utiliza en otros libros como subíndice más específico la propia letra: x o y. Así en vez de D_1 o D_2 se escribe D_x o D_y, y el contexto indica que se trata de derivadas parciales. Para distinguir mejor podría usarse en tal caso la letra D con subíndices x o y, o bien 1 o 2.

** **Nota.** Esta simbología recibe el nombre de *notación de Jacobi*. La ∂ se llama *"de"* de *Jacobi* y se utiliza en forma análoga a la *"de"* de Leibnitz, aunque no corresponde al concepto de diferencial.

$f_y(x, y)$ y $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$. Si $z = f(x, y)$, entonces se puede expresar $D_1 f(x, y)$ como $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Una derivada parcial no puede considerarse como la razón de ∂z y ∂x puesto que ninguno de estos símbolos tiene significado por separado. Anteriormente se dijo que la notación $\dfrac{dy}{dx}$ puede considerarse como el cociente de dos diferenciales cuando y es una función de la variable x, pero no existe una interpretación similar para $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

▶ *EJEMPLO 1* Aplique la definición de derivada parcial para calcular $D_1 f(x, y)$ y $D_2 f(x, y)$ si

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2$$

Solución

$$\begin{aligned}
D_1 f(x, y) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x)y + y^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2xy - 2y\Delta x + y^2 - 3x^2 + 2xy - y^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2y\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x - 2y) \\
&= 6x - 2y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 f(x, y) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x^2 - 2x(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x^2 - 2xy - 2x\Delta y + y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2 - 3x^2 + 2xy - y^2}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-2x\Delta y + 2y\Delta y + (\Delta y)^2}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} (-2x + 2y + \Delta y) \\
&= -2x + 2y
\end{aligned}$$

◀

Si (x_0, y_0) es un punto particular del dominio de f, entonces

$$D_1 f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

si este límite existe, y

$$D_2 f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \tag{2}$$

si existe este límite.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Se aplicará la fórmula (1) a fin de calcular $D_1f(3, -2)$ para la función f del ejemplo 1.

$$\begin{aligned} D_1f(3, -2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3 + \Delta x, -2) - f(3, -2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(3 + \Delta x)^2 - 2(3 + \Delta x)(-2) + (-2)^2 - (27 + 12 + 4)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{27 + 18\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 + 4\Delta x + 4 - 43}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (18 + 3\Delta x + 4) \\ &= 22 \end{aligned}$$

◀

Las siguientes son fórmulas alternativas de (1) y (2) para $D_1f(x_0, y_0)$ y $D_2f(x_0, y_0)$:

$$D_1f(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \tag{3}$$

si este límite existe, y

$$D_2f(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \tag{4}$$

si existe este límite.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Se aplicará la fórmula (3) con el objeto de calcular $D_1f(3, -2)$ para la función f del ejemplo 1.

$$\begin{aligned} D_1f(3, -2) &= \lim_{x \to 3} \frac{f(x, -2) - f(3, -2)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{3x^2 + 4x + 4 - 43}{x - 3} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{3x^2 + 4x - 39}{x - 3} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{(3x + 13)(x - 3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \to 3} (3x + 13) \\ &= 22 \end{aligned}$$

◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** En el ejemplo 1 se probó que

$$D_1f(x, y) = 6x - 2y$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} D_1f(3, -2) &= 18 + 4 \\ &= 22 \end{aligned}$$

Este resultado concuerda con los resultados de los ejemplos ilustrativos 1 y 2. ◀

Al comparar la definición de derivada parcial (12.3.1) con la definición de derivada común (2.1.3), se observa que $D_1 f(x, y)$ es la derivada ordinaria de f si se supone que f es una función sólo de la variable x (esto es, y se toma como una constante), y $D_2 f(x, y)$ es la derivada ordinaria de f si f se piensa como una función sólo de la variable y (mientras que x se considera constante). De modo que los resultados del ejemplo 1 pueden obtenerse más fácilmente al aplicar los teoremas de diferenciación ordinaria si y se toma como constante cuando se calcula $D_1 f(x, y)$, y si x se considera constante cuando se obtiene $D_2 f(x, y)$. El ejemplo siguiente ilustra esto.

EJEMPLO 2 Calcule $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ si

$$f(x, y) = 3x^3 - 4x^2y + 3xy^2 + \operatorname{sen} xy^2$$

Solución Si se considera f como una función de x y se toma como constante a y, entonces se obtiene

$$f_x(x, y) = 9x^2 - 8xy + 3y^2 + y^2 \cos xy^2$$

Al considerar f como una función sólo de y y se tiene a x como constante resulta

$$f_y(x, y) = -4x^2 + 6xy + 2xy \cos xy^2$$ ◀

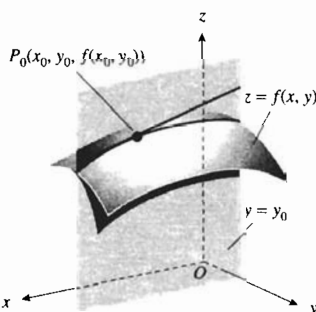


FIGURA 1

Las interpretaciones geométricas de las derivadas parciales de una función de dos variables son semejantes a la de una función de una variable. La gráfica de una función f de dos variables es una superficie que tiene ecuación $z = f(x, y)$. Si y se considera como constante (digamos, $y = y_0$), entonces $z = f(x, y_0)$ es una ecuación de la traza de esta superficie en el plano $y = y_0$. La curva puede representarse mediante las dos ecuaciones

$$y = y_0 \quad \text{y} \quad z = f(x, y) \tag{5}$$

debido a que la curva es la intersección de estas dos superficies.

Entonces, $D_1 f(x_0, y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva representada por las ecuaciones (5) en el punto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ del plano $y = y_0$. De manera análoga, $D_2 f(x_0, y_0)$ representa la pendiente de la recta tangente a la curva que tiene ecuaciones

$$x = x_0 \quad \text{y} \quad z = f(x, y)$$

en el punto P_0 del plano $x = x_0$. Las figuras 1 y 2 muestran una porción de la curva y de la recta tangente.

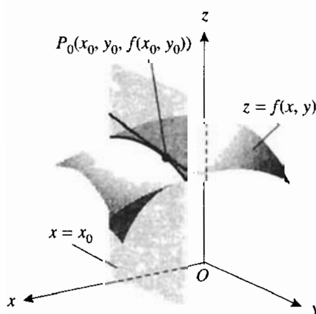


FIGURA 2

EJEMPLO 3 Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie

$$z = \tfrac{1}{2}\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}$$

con el plano $y = 2$ en el punto $(2, 2, \sqrt{3})$.

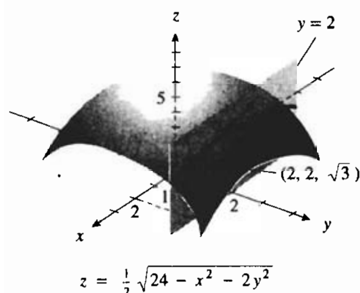


FIGURA 3

Solución La figura 3 muestra la curva de intersección de la superficie y del plano, así como la recta tangente. La pendiente requerida es el valor de $\frac{\partial z}{\partial x}$ en el punto (2, 2, $\sqrt{3}$). Así,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{2\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}}$$

De modo qué en (2, 2, $\sqrt{3}$),

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2}{2\sqrt{12}} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

◀

Cuando se calcula una derivada parcial en un punto particular, en ocasiones es necesario aplicar las fórmulas (1) a (4) como se muestra en el ejemplo siguiente.

▶ ***EJEMPLO 4*** Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

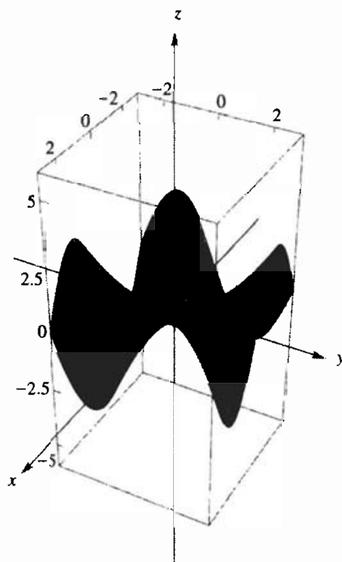
Demuestre que $f_1(0, 0) = 0$ y que $f_2(0, 0) = 0$.

Solución Se calculará $f_1(0, 0)$ a partir de (3) con $y_0 = 0$, y $f_2(0, 0)$ a partir de (4) con $x_0 = 0$.

$$f_1(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

$$f_2(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y} = \lim_{y \to 0} 0 = 0$$

◀



[−2.5, 2.5] por [−2.5, 2.5] por [−6, 6]

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

FIGURA 4

La figura 4, que muestra la superficie definida por la función del ejemplo 4, apoya el hecho de que $f_1(0, 0)$ y $f_2(0, 0)$ son iguales a cero. La intersección del plano $y = 0$ y la superficie es el eje x, y $f_1(0, 0)$ es la pendiente del eje x en el plano xz, la cual, por supuesto, es cero. De manera similar, $f_2(0, 0)$ es la pendiente del eje y en el plano yz, la cual también es cero.

▶ ***EJEMPLO 5*** Para la función del ejemplo 4, demuestre que: **(a)** $f_1(0, y) = -y$ para toda y; **(b)** $f_2(x, 0) = x$ para toda x.

Solución

(a) Si $y \neq 0$, de (3),

$$f_1(0, y) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{x}$$

(b) Si $x \neq 0$, de (4),

$$f_2(x, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{y}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \qquad\qquad = \lim_{y \to 0} \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$= -\frac{y^3}{y^2} \qquad\qquad = \frac{x^3}{x^2}$$

$$= -y \qquad\qquad = x$$

(a) Como $f_1(0, y) = -y$ si $y \neq 0$ y, del ejemplo 4, $f_1(0, 0) = 0$, se concluye que $f_1(0, y) = -y$ para toda y.

(b) Puesto que $f_2(x, 0) = x$ si $x \neq 0$ y, del ejemplo 4, $f_2(0, 0) = 0$, se infiere que $f_2(x, 0) = x$ para toda x. ◀

Debido a que toda derivada es una medida de una tasa de variación, una derivada parcial se puede interpretar de la misma manera. Si f es una función de las dos variables x y y, la derivada parcial de f con respecto a x en el punto $P_0(x_0, y_0)$ proporciona la tasa de variación instantánea, en P_0, de $f(x, y)$ por unidad de variación de x (x varía y y se mantiene fija en y_0). De manera semejante, la derivada parcial de f con respecto a y en P_0 proporciona la tasa de variación instantánea, en P_0, de $f(x, y)$ por unidad de variación de y.

▶ ***EJEMPLO 6*** De acuerdo con la *ley del gas ideal* para un gas confinado, si P atmósferas es la presión, V litros es el volumen y T grados es la temperatura absoluta en la escala Kelvin, se tiene la fórmula

$$PV = kT \qquad (6)$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Suponga que el volumen de un gas de cierto recipiente es de 12 litros y que la temperatura es de 290°K, con $k = 0.6$. **(a)** Calcule la tasa de variación instantánea de P por unidad de variación de T si V permanece fijo en 12. **(b)** Utilice el resultado del inciso (a) para aproximar la variación de la presión si la temperatura se incrementa a 295°K. **(c)** Calcule la tasa de variación instantánea de V por unidad de variación de P si T permanece fija en 290°K. **(d)** Suponga que la temperatura se mantiene constante. Utilice el resultado del inciso (c) para calcular la variación aproximada del volumen necesario para producir la misma variación en la presión que se obtuvo en el inciso (b).

Solución Al sustituir V por 12, T por 290 y k por 0.6, se obtiene $P = 14.5$.

(a) Si se resuelve (6) para P cuando $k = 0.6$ resulta

$$P = \frac{0.6T}{V}$$

La tasa de variación instantánea de P por unidad de variación de T, si V se mantiene constante, es $\frac{\partial P}{\partial T}$, esto es

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{0.6}{V}$$

Cuando $T = 290$ y $V = 12$, $\frac{\partial P}{\partial T} = 0.05$, lo cual es la respuesta requerida.

(b) Del resultado del inciso (a), cuando T se incrementa en 5 unidades (de 290 a 295) y V permanece fijo, un incremento aproximado de P es $5(0.05) = 0.25$.

Conclusión: Si la temperatura se incrementa de 290°K a 295°K, entonces el incremento de la presión es aproximadamente 0.25 atm.

(c) Al resolver (6) para V cuando $k = 0.6$, se obtiene

$$V = \frac{0.6V}{P}$$

La tasa de variación instantánea de V por unidad de variación de P, si T permanece fijo, es $\frac{\partial V}{\partial P}$ de modo que

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{0.6T}{P^2}$$

Cuando $T = 290$ y $P = 14.5$,

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{0.6(290)}{(14.5)^2}$$
$$= -0.83$$

la cual es la tasa de variación instantánea de V por unidad de variación de P cuando $T = 290$ y $P = 14.5$ si T permanece fija en 290.

(d) Si P se incrementa en 0.25 y T permanece fija, entonces del resultado del inciso (c) la variación de V debe ser aproximadamente.

$$(0.25)(-0.83) = -0.21$$

Conclusión: El volumen debe disminuirse aproximadamente en 0.21 litros para que la presión aumente de 14.5 atm a 14.75 atm. ◀

A continuación se extenderá el concepto de derivada parcial a funciones de n variables.

12.3.2 Definición de derivada parcial de una función de n variables

Sea $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$ un punto de R^n, y sea f una función de las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Entonces la derivada parcial de f con respecto a x_k es la función, denotada por $D_k f$, tal que su valor de función en cualquier punto P del dominio de f está dado por

$$D_k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2 \ldots, x_n)}{\Delta x_k}$$

si este límite existe.

En particular, si f es una función de las tres variables x, y y z, entonces las derivadas parciales de f están determinadas por

$$D_1 f(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$D_2 f(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$D_3 f(x, y, z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

si estos límites existen.

EJEMPLO 7 Dada $f(x, y, z) = x^2y + yz^2 + z^3$, verifique que

$$x f_1(x, y, z) + y f_2(x, y, z) + z f_3(x, y, z) = 3 f(x, y, z)$$

Solución Si se mantienen y y z constantes resulta

$$f_1(x, y, z) = 2xy$$

Al considerar x y z constantes se obtiene

$$f_2(x, y, z) = x^2 + z^2$$

Cuando x y y se consideran constantes se tiene

$$f_3(x, y, z) = 2yz + 3z^2$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} xf_1(x, y, z) + yf_2(x, y, z) + zf_3(x, y, z) &= x(2xy) + y(x^2 + z^2) + z(2yz + 3z^2) \\ &= 2x^2y + x^2y + yz^2 + 2yz^2 + 3z^3 \\ &= 3(x^2y + yz^2 + z^3) \\ &= 3f(x, y, z) \end{aligned}$$

Si f es una función de dos variables, entonces, en general, $D_1 f$ y $D_2 f$ también son funciones de dos variables, y si las derivadas parciales de estas funciones existen, se denominan **segundas derivadas parciales** de f. En constraste, $D_1 f$ y $D_2 f$ reciben el nombre de **primeras derivadas parciales** de f. Existen cuatro segundas derivadas parciales de una función de dos variables. Si f es una función de las dos variables x y y, las notaciones

$$D_2(D_1 f) \qquad D_{12} f \qquad f_{12} \qquad f_{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

expresan la segunda derivada parcial de f que se obtiene al derivar parcialmente f con respecto a x y después derivar parcialmente el resultado con respecto a y. Esta segunda derivada parcial está definida por

$$f_{12}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_1(x, y + \Delta y) - f_1(x, y)}{\Delta y} \tag{7}$$

si este límite existe. Las notaciones

$$D_1(D_1 f) \qquad D_{11} f \qquad f_{11} \qquad f_{xx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

representan la segunda derivada parcial de f que se obtiene al derivar parcialmente dos veces con respecto a x, y se define como

$$f_{11}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x + \Delta x, y) - f_1(x, y)}{\Delta x} \tag{8}$$

si existe este límite. Las otras segundas derivadas parciales están definidas de manera análoga,

$$f_{21}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_2(x + \Delta x, y) - f_2(x, y)}{\Delta x} \tag{9}$$

$$f_{22}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_2(x, y + \Delta y) - f_2(x, y)}{\Delta y} \tag{10}$$

si estos límites existen.

Las definiciones de las derivadas parciales de orden superior son similares. Existen diferentes notaciones para una derivada parcial específica. Por ejemplo,

$$D_{112}f \qquad f_{112} \qquad f_{xxy} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x\,\partial x} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2}$$

representan la tercera derivada parcial de f que se obtiene al derivar parcialmente dos veces con respecto a x y después una vez con respecto a y. En la notación de subíndice, el orden de la derivación parcial es de izquierda a derecha; en cambio, en la notación $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x\,\partial x}$, el orden se considera de derecha a izquierda.

▶ EJEMPLO 8 Sea

$$f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + \ln xy$$

Calcule: **(a)** $D_{11}f(x, y)$; **(b)** $D_{12}f(x, y)$; **(c)** $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$

Solución

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= e^x \operatorname{sen} y + \frac{1}{xy}(y) \\ &= e^x \operatorname{sen} y + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

(a) $D_{11}f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y - \dfrac{1}{x^2}$ **(b)** $D_{12}f(x, y) = e^x \cos y$

(c) A fin de calcular $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}$, se deriva parcialmente dos veces con respecto a y y después una vez con respecto a x. Así, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y + \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \operatorname{sen} y - \frac{1}{y^2} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2} = -e^x \operatorname{sen} y$$ ◀

Las derivadas parciales de orden superior de una función de n variables se definen de manera análoga a las definiciones de las derivadas parciales de orden superior para una función de dos variables. Si f es una función de n variables, entonces pueden tenerse n^2 segundas derivadas parciales de f en un punto particular. Esto es, para una función de tres variables, si todas las segundas derivadas parciales existen, entonces se tienen nueve de estas derivadas: f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, y f_{33}.

▶ EJEMPLO 9 Calcule $D_{132}f(x, y, z)$ si

$$f(x, y, z) = \operatorname{sen}(xy + 2z)$$

Solución

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y, z) &= y \cos(xy + 2z) \\ D_{13} f(x, y, z) &= -2y \operatorname{sen}(xy + 2z) \\ D_{132} f(x, y, z) &= -2 \operatorname{sen}(xy + 2z) - 2xy \cos(xy + 2z) \end{aligned}$$ ◀

EJEMPLO 10 Sea

$$f(x, y) = x^3y - y\cosh xy$$

Calcule: **(a)** $f_{xy}(x, y)$; **(b)** $f_{yx}(x, y)$.

Solución

(a)
$$f_x(x, y) = 3x^2y - y^2 \operatorname{senh} xy$$
$$f_{xy}(x, y) = 3x^2 - 2y \operatorname{senh} xy - xy^2 \cosh xy$$

(b)
$$f_y(x, y) = x^3 - \cosh xy - xy \operatorname{senh} xy$$
$$\begin{aligned} f_{yx}(x, y) &= 3x^2 - y \operatorname{senh} xy - y \operatorname{senh} xy - xy^2 \cosh xy \\ &= 3x^2 - 2y \operatorname{senh} xy - xy^2 \cosh xy \end{aligned}$$

Observe en el ejemplo 10 que las derivadas parciales "mixtas" $f_{xy}(x, y)$ y $f_{yx}(x, y)$ son iguales. De modo que para esta función particular, cuando se calcula la segunda derivada parcial con respecto a x y después con respecto a y, el orden de derivación no importa. Esta condición se cumple para muchas otras funciones. Sin embargo, el ejemplo siguiente muestra que esto no siempre es verdad.

EJEMPLO 11 Calcule $f_{12}(0, 0)$ y $f_{21}(0, 0)$ si

$$f(x, y) = \begin{cases} (xy)\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solución En el ejemplo 5, se demostró que para esta función

$$f_1(0, y) = -y \qquad \text{para toda } y \tag{11}$$

y

$$f_2(x, 0) = x \qquad \text{para toda } x \tag{12}$$

De (7),

$$f_{12}(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_1(0, 0 + \Delta y) - f_1(0, 0)}{\Delta y}$$

y de (11), $f_1(0, \Delta y) = -\Delta y$ y $f_1(0, 0) = 0$; de modo que

$$\begin{aligned} f_{12}(0, 0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} (-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

De (9),

$$f_{21}(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_2(0 + \Delta x, 0) - f_2(0, 0)}{\Delta x}$$

Sin embargo, de (12), $f_2(\Delta x, 0) = \Delta x$ y $f_2(0, 0) = 0$. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
f_{21}(0,0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

◀

Para la función del ejemplo 11 las derivadas parciales mixtas $f_{12}(x, y)$ y $f_{21}(x, y)$ no son iguales en $(0, 0)$. Un conjunto de condiciones para que $f_{12}(x_0, y_0)$ y $f_{21}(x_0, y_0)$ sean iguales se da en el teorema 12.3.3, el cual se presenta a continuación. La función del ejemplo 11 no satisface las hipótesis de este teorema ya que f_{12} y f_{21} son discontinuas en $(0, 0)$. Se deja como ejercicio demostrar esto (refiérase al ejercicio 64).

12.3.3 Teorema

Suponga que f es una función de las variables x y y, que está definida en el disco abierto $B((x_0, y_0); r)$ y que f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} están definidas en B. Además, suponga que f_{xy} y f_{yx} son continuas en B. Entonces

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Pág 1247

La demostración de este teorema se presenta en el suplemento de esta sección.

Como un resultado del teorema 12.3.3 se tiene que si la función f de dos variables tiene derivadas parciales continuas en algún disco abierto, entonces el orden de derivación parcial puede cambiarse sin afectar el resultado; esto es,

$$
\begin{aligned}
&D_{112}f = D_{121}f = D_{211}f \\
&D_{1122}f = D_{1212}f = D_{1221}f = D_{2112}f = D_{2121}f = D_{2211}f
\end{aligned}
$$

etcétera. En particular, suponiendo que todas las derivadas parciales son continuas en algún disco abierto, se puede demostrar que $D_{211}f = D_{112}f$ al aplicar el teorema 12.3.3 de manera repetida. Al hacer esto se obtiene

$$
\begin{aligned}
D_{211}f &= D_1(D_{21}f) = D_1(D_{12}f) = D_1[D_2(D_1f)] = D_2[D_1(D_1f)] \\
&= D_2(D_{11}f) = D_{112}f
\end{aligned}
$$

EJERCICIOS 12.3

En los ejercicios 1 a 6, aplique la definición 12.3.1 a fin de calcular la derivada parcial.

1. $f(x, y) = 6x + 3y - 7;\ D_1f(x, y)$
2. $f(x, y) = 4x^2 - 3xy;\ D_1f(x, y)$
3. $f(x, y) = 3xy + 6x - y^2;\ D_2f(x, y)$
4. $f(x, y) = xy^2 - 5y + 6;\ D_2f(x, y)$
5. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2};\ f_x(x, y)$
6. $f(x, y) = \dfrac{x + 2y}{x^2 - y};\ f_y(x, y)$

En los ejercicios 7 a 10, aplique la definición 12.3.2 para determinar la derivada parcial.

7. $f(x, y, z) = x^2y - 3xy^2 + 2yz;\ D_2f(x, y, z)$
8. $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2;\ D_1f(x, y, z)$
9. $f(x, y, z, r, t) = xyr + yzt + yrt + zrt;\ f_r(x, y, z, r, t)$
10. $f(r, s, t, u, v, w) = 3r^2st + st^2v - 2tuv^2 - tvw + 3uw^2;\ f_v(r, s, t, u, v, w)$
11. Sea $f(x, y) = x^2 - 9y^2$. Calcule $D_1f(2, 1)$ al aplicar **(a)** la fórmula (1); **(b)** la fórmula (3); **(c)** la definición 12.3.1 y después sustituir x y y por 2 y 1, respectivamente.
12. Para la función del ejercicio 11, calcule $D_2f(2, 1)$ mediante la aplicación de **(a)** la fórmula (2); **(b)** la fórmula (4); **(c)** la definición 12.3.1 y después reemplazando x y y por 2 y 1, respectivamente.

En los ejercicios 13 a 24, calcule la derivada parcial considerando todas las variables, excepto una, como constantes y aplicando los teoremas para la derivación ordinaria.

13. $f(x, y) = 4y^3 + \sqrt{x^2 + y^2}\,;\, D_1 f(x, y)$

14. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{\sqrt{y^2 - x^2}};\, D_2 f(x, y)$

15. $f(\theta, \phi) = \operatorname{sen} 3\theta \cos 2\phi;\, f_\phi(\theta, \phi)$

16. $f(r, \theta) = r^2 \cos\theta - 2r\tan\theta;\, f_\phi(r, \theta)$

17. $z = e^{y/x} \ln \dfrac{x^2}{y};\, \dfrac{\partial z}{\partial y}$

18. $r = e^{-\theta}\cos(\theta + \phi);\, \dfrac{\partial r}{\partial \theta}$

19. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2};\, \dfrac{\partial u}{\partial z}$

20. $u = \tan^{-1}(xyzw);\, \dfrac{\partial u}{\partial w}$

21. $f(x, y, z) = 4xyz + \ln(2xyz);\, f_3(x, y, z)$

22. $f(x, y, z) = e^{xy}\operatorname{senh} 2z - e^{xy}\cosh 2z;\, f_z(x, y, z)$

23. $f(x, y, z) = e^{xyz} + \tan^{-1};\, f_y(x, y, z)$

24. $f(r, \theta, \phi) = 4r^2 \operatorname{sen}\theta + 5e^r \cos\theta \operatorname{sen}\phi - 2\cos\phi;$ $f_2(r, \theta, \phi)$

25. Si $f(r, \theta) = r\tan\theta - r^2 \operatorname{sen}\theta$, calcule **(a)** $f_1(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$; **(b)** $f_2(3, \pi)$.

26. Si $f(x, y, z) = e^{xy^2} + \ln(y + z)$, calcule **(a)** $f_1(3, 0, 17)$; **(b)** $f_2(1, 0, 2)$; **(c)** $f_3(0, 0, 1)$.

En los ejercicios 27 y 28, calcule $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$.

27. $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y \ln \operatorname{sen} t\, dt$ **28.** $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y e^{\cos t}\, dt$

En los ejercicios 29 a 38 haga lo siguiente: (a) calcule $D_{11}f(x, y)$; (b) obtenga $D_{22}f(x, y)$; (c) pruebe que $D_{12}f(x, y)$ y $D_{21}f(x, y)$ son iguales.

29. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y} - \dfrac{y}{x^2}$

30. $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2y + xy^2$

31. $f(x, y) = e^{2x}\operatorname{sen} y$

32. $f(x, y) = e^{-x/y} + \ln\dfrac{y}{x}$

33. $f(x, y) = (x^2 + y^2)\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

34. $f(x, y) = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{3y}{x^2}$

35. $f(x, y) = 4x\operatorname{senh} y + 3y\cosh x$

36. $f(x, y) = x\cos y - ye^x$

37. $f(x, y) = e^x\cos y + \tan^{-1} x \cdot \ln y$

38. $f(x, y) = 3x\cosh y - \operatorname{sen}^{-1} e^x$

Pág. 362 1er Th. Fundam. del Cálculo

Estudiar su gráfica

En los ejercicios 39 a 46, calcule las derivadas parciales indicadas.

39. $f(x, y) = 2x^3y + 5x^2y^2 - 3xy^2$; **(a)** $f_{121}(x, y)$; **(b)** $f_{211}(x, y)$

40. $G(x, y) = 3x^3y^2 + 5x^2y^3 + 2x$; **(a)** $G_{yyx}(x, y)$; **(b)** $G_{yxy}(x, y)$

41. $f(x, y, z) = ye^x + ze^y + e^z$; **(a)** $f_{xz}(x, y, z)$; **(b)** $f_{yz}(x, y, z)$

42. $g(x, y, z) = \operatorname{sen}(xyz)$; **(a)** $g_{23}(x, y, z)$; **(b)** $g_{12}(x, y, z)$

43. $f(w, z) = w^2 \cos e^z$; **(a)** $f_{121}(w, z)$; **(b)** $f_{212}(w, z)$

44. $f(u, v) = \ln\cos(u - v)$; **(a)** $f_{uuv}(u, v)$; **(b)** $f_{vuv}(u, v)$

45. $g(r, s, t) = \ln(r^2 + 4s^2 - 5t^2)$; **(a)** $g_{132}(r, s, t)$; **(b)** $g_{122}(r, s, t)$

46. $f(x, y, z) = \tan^{-1}(3xyz)$; **(a)** $f_{113}(x, y, z)$; **(b)** $f_{123}(x, y, z)$

47. Sea $u = \operatorname{sen}\dfrac{r}{t} + \ln\dfrac{t}{r}$. Verifique que $t\dfrac{\partial u}{\partial t} + r\dfrac{\partial u}{\partial r} = 0$.

48. Sea $w = x^2y + y^2z + z^2x$. Verifique que

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (x + y + z)^2$$

En los ejercicios 49 a 52, demuestre que $u(x, y)$ satisface la ecuación $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, la cual se conoce como **ecuación de Laplace** *en R^2.*

49. $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

50. $u(x, y) = \tan^{-1}\dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$

51. $u(x, y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

52. $u(x, y) = e^x\operatorname{sen} y + e^y\cos x$

53. La ecuación de Laplace en R^3 es

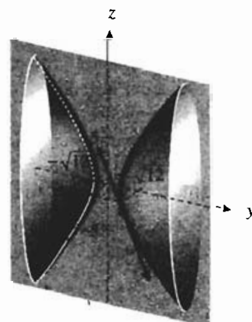
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Pruebe que la función $u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ satisface esta ecuación.

54. Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie

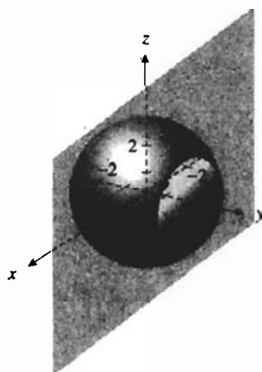
$$36x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0$$

con el plano $x = 1$ en el punto $(1, \sqrt{12}, -3)$. Interprete esta pendiente como una derivada parcial.



55. Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^2 + y^2$ con el plano $y = 1$ en el punto (2, 1, 5). Dibuje la curva e interprete esta pendiente como una derivada parcial.

56. Determine ecuaciones de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con el plano $y = 2$ en el punto (1, 2, 2).



57. La temperatura en cualquier punto (x, y) de una placa delgada es T grados, donde $T = 54 - \frac{2}{3}x^2 - 4y^2$. Si la distancia se mide en centímetros, calcule la tasa de variación de la temperatura con respecto a la distancia recorrida a lo largo de la placa en las direcciones positivas de los ejes x y y, respectivamente, en el punto (3, 1).

58. Emplee la ley del gas ideal para una gas confinado (consulte el ejemplo 6) a fin de demostrar que

$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

59. Si V dólares es el valor actual de una anualidad ordinaria de pagos iguales de \$100 por año para t años a una tasa de interés de $100i$ porciento anual, entonces

$$V = 100\left[\frac{1 - (1 + i)^{-t}}{i}\right]$$

(a) Calcule la tasa de variación instantánea de V por unidad de variación de i si t permanece fija en 8. **(b)** Utilice el resultado del inciso (a) para calcular la variación aproximada del valor actual si la tasa de interés varía de 6 a 7 porciento y el tiempo permanece fijo en 8 años. **(c)** Determine la tasa de variación instantánea de V por unidad de variación de t si i permanece fija en 0.06. **(d)** Utilice el resultado del inciso (c) para calcular la variación aproximada del valor actual si el tiempo se disminuye de 8 a 7 años y la tasa de interés permanece fija en 6 porciento.

60. Suponga que $10\,000x$ dólares es el inventario de un almacén que tiene y empleados, P dólares es la utilidad semanal del almacén, y

$$P = 3000 + 240y + 20y(x - 2y) - 10(x - 12)^2$$

donde $15 \le x \le 25$ y $5 \le y \le 12$. Actualmente, el inventario es de \$180 000 y hay 8 empleados. **(a)** Calcule la tasa de variación instantánea de P por unidad de variación de x si y permanece fija en 8. **(b)** Utilice el resultado del inciso (a) para obtener la variación aproximada de la utilidad semanal si el inventario varía de \$180 000 a \$200 000 y el número de empleados permanece fijo en 8. **(c)** Determine la tasa de variación instantánea de P por unidad de variación de y si x permanece fija en 18. **(d)** Utilice el resultado del inciso (c) para calcular la variación aproximada de la utilidad semanal si el número de empleados se incrementa de 8 a 10 y el inventario permanece fijo en \$180 000.

Hugo **61.** Sea $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Calcule **(a)** $f_1(0, 0)$; **(b)** $f_2(0, 0)$.

Camilo **62.** Sea $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy}{x + y} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Calcule **(a)** $f_1(0, y)$ si $y \neq 0$; **(b)** $f_1(0, 0)$.

63. Para la función del ejercicio 62 calcule **(a)** $f_2(x, 0)$ si $x \neq 0$; **(b)** $f_2(0, 0)$.

64. Para la función del ejemplo 11, demuestre que f_{12} es discontinua en (0, 0), y en consecuencia, que la hipótesis del teorema 12.3.3 no se satisface si $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

En los ejercicios 65 a 67, calcule $f_{12}(0, 0)$ y $f_{21}(0, 0)$, si existen.

65. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

66. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

67. $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \tan^{-1} \dfrac{y}{x} - y^2 \tan^{-1} \dfrac{x}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

68. Demuestre que si f es una función de dos variables y todas las derivadas parciales de f, incluso las de cuarto orden, son continuas en algún disco abierto, entonces

$$D_{1122}f = D_{2121}f$$

69. Si S metros cuadrados es el área de la superficie del cuerpo de una persona, entonces una fórmula que proporciona el valor aproximado de S es

$$S = 2W^{0.4}H^{0.7}$$

donde W kilogramos es el peso de una persona y H metros es la altura de la persona. Calcule $\dfrac{\partial S}{\partial W}$ y $\dfrac{\partial S}{\partial H}$ cuando $W = 70$ y $H = 1.8$, e interprete los resultados.

12.4 DIFERENCIABILIDAD Y DIFERENCIAL TOTAL

Se definirá la *diferenciabilidad* de funciones de más de una variable por medio de una ecuación que involucra el incremento de una función. A fin de motivar esta definición, primero se obtiene una representación del incremento de una función de una variable que es semejante al presentado en la definición (12.4.2) de diferenciabilidad.

Recuerde de la sección 2.1 que si f es una función diferenciable de x y $y = f(x)$, entonces

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

donde Δx y Δy son los incrementos de x y y, y

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Cuando $|\Delta x|$ es pequeño y $\Delta x \neq 0$, $\Delta y/\Delta x$ difiere de $f'(x)$ por un número pequeño que depende de Δx, el cual se denota por ϵ. Así,

$$\epsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \qquad \text{si } \Delta x \neq 0$$

donde ϵ es una función de Δx. De esta ecuación se obtiene

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \epsilon\,\Delta x$$

donde ϵ es una función de Δx y $\epsilon \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$.

De lo anterior se deduce que si la función f es diferenciable en x_0, entonces el incremento de f en x_0, denotado por $\Delta f(x_0)$, está determinado por

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + \epsilon\,\Delta x \qquad \text{donde} \lim_{\Delta x \to 0} \epsilon = 0$$

En el caso de las funciones de dos o más variables, se utiliza una ecuación semejante a la anterior a fin de definir la diferenciabilidad de una función, y de la definición se establecen criterios con el propósito de determinar la diferenciabilidad de una función en un punto. A continuación se presentan los detalles para una función de dos variables y se inicia con la definición de *incremento* de una función de este tipo.

12.4.1 Definición de incremento de una función de dos variables

Si f es una función de las variables x y y, entonces el incremento de f en el punto (x_0, y_0), denotado por $\Delta f(x_0, y_0)$, está dado por

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

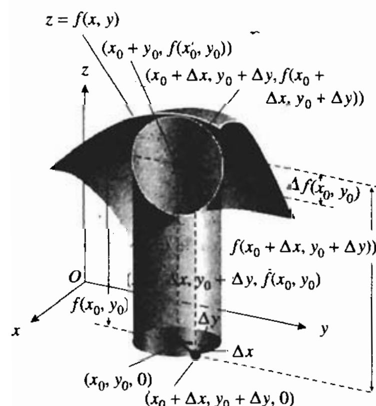


FIGURA 1

La figura 1 ilustra esta definición para una función continua en un disco abierto que contiene los puntos (x_0, y_0) y $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. También la figura muestra una porción de la superficie $z = f(x, y)$. Se observa que $\Delta f(x_0, y_0) = \overline{QR}$, donde Q es el punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, f(x_0, y_0))$ y R es el punto que tiene coordenadas $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y))$.



EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Para la función f definida por

$$f(x, y) = 3x - xy^2$$

se calculará el incremento de f en cualquier punto (x_0, y_0).

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= 3(x_0 + \Delta x) - (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)^2 - (3x_0 - x_0 y_0{}^2) \\ &= 3x_0 + 3\Delta x - x_0 y_0{}^2 - y_0{}^2\Delta x - 2x_0 y_0\Delta y - 2y_0\Delta x\Delta y - x_0(\Delta y)^2 - \Delta x(\Delta y)^2 - 3x_0 + x_0 y_0{}^2 \\ &= 3\Delta x - y_0{}^2\Delta x - 2x_0 y_0\Delta y - 2y_0\Delta x\Delta y - x_0(\Delta y)^2 - \Delta x(\Delta y)^2\end{aligned}$$

◀

12.4.2 Definición de función diferenciable de dos variables

Si f es una función de las variables x y y, y el incremento de f en (x_0, y_0) puede escribirse como

$$\Delta f(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0)\Delta x + D_2 f(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 son funciones de Δx y Δy, tales que $\epsilon_1 \to 0$ y $\epsilon_2 \to 0$ conforme $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).



EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Se utilizará la definición 12.4.2 para demostrar que la función del ejemplo ilustrativo 1 es diferenciable en todos los puntos de R^2. Se debe probar que para todo punto (x_0, y_0) de R^2 se pueden determinar ϵ_1 y ϵ_2, tales que

$$\Delta f(x_0, y_0) - D_1 f(x_0, y_0)\Delta x - D_2 f(x_0, y_0)\Delta y = \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

y $\epsilon_1 \to 0$ y $\epsilon_2 \to 0$ conforme $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Como $f(x, y) = 3x - xy^2$, entonces

$$D_1 f(x_0, y_0) = 3 - y_0{}^2 \quad \text{y} \quad D_2 f(x_0, y_0) = -2x_0 y_0$$

Con estos valores y el valor de $\Delta f(x_0, y_0)$ del ejemplo ilustrativo 1, se obtiene

$$\Delta f(x_0, y_0) - D_1 f(x_0, y_0)\Delta x - D_2 f(x_0, y_0)\Delta y = -x_0(\Delta y)^2 - 2y_0\Delta x\Delta y - \Delta x(\Delta y)^2$$

El miembro derecho de la ecuación anterior puede expresarse en las siguientes formas:

(a) $[-2y_0\Delta y - (\Delta y)^2]\Delta x + (-x_0\Delta y)\Delta y$
(b) $(-2y_0\Delta y)\Delta x + (-\Delta x\Delta y - x_0\Delta y)\Delta y$
(c) $[-(\Delta y)^2]\Delta x + (-2y_0\Delta x - x_0\Delta y)\Delta y$
(d) $0 \cdot \Delta x + [-2y_0\Delta x - \Delta x\Delta y - x_0\Delta y]\Delta y$

Por lo que existen al menos cuatro pares posibles de valores de ϵ_1 y ϵ_2:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= -2y_0\Delta y - (\Delta y)^2 & \text{y} \quad \epsilon_2 &= -x_0\Delta y \\ \epsilon_1 &= -2y_0\Delta y & \text{y} \quad \epsilon_2 &= -\Delta x\Delta y - x_0\Delta y \\ \epsilon_1 &= -(\Delta y)^2 & \text{y} \quad \epsilon_2 &= -2y_0\Delta x - x_0\Delta y \\ \epsilon_1 &= 0 & \text{y} \quad \epsilon_2 &= -2y_0\Delta x - \Delta x\Delta y - x_0\Delta y\end{aligned}$$

Para cada par,

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \epsilon_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \epsilon_2 = 0$$

Observe que sólo es necesario determinar un par de valores de ϵ_1 y ϵ_2. ◀

El teorema siguiente afirma que para una función de dos variables, la diferenciabilidad implica la continuidad, de igual manera que para una función de una variable.

12.4.3 Teorema

Si una función f de dos variables es diferenciable en un punto, entonces es continua en ese punto.

Demostración Si f es diferenciable en el punto (x_0, y_0), entonces, de la definición 12.4.2, se tiene

$$\begin{aligned} &f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &\qquad = D_1 f(x_0, y_0)\,\Delta x + D_2 f(x_0, y_0)\,\Delta y + \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y \end{aligned}$$

donde $\epsilon_1 \to 0$ y $\epsilon_2 \to 0$ conforme $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} &f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\ &\qquad = f(x_0, y_0) + D_1 f(x_0, y_0)\,\Delta x + D_2 f(x_0, y_0)\,\Delta y + \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y \end{aligned}$$

Al tomar el límite en los dos miembros de la ecuación anterior conforme $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ se obtiene

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \tag{1}$$

Si se considera $x_0 + \Delta x = x$ y $y_0 + \Delta y = y$, entonces "$(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$" equivale a que "$(x, y) \to (x_0, y_0)$". Así, de (1),

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

lo cual demuestra que f es continua en (x_0, y_0). ■

Se dijo que para una función f de una variable, la existencia de la derivada de f en un número implica la diferenciabilidad y, por tanto, continuidad en ese número. Sin embargo, como lo muestran los ejemplos siguientes, para una función de dos variables la existencia de las derivadas parciales en un punto no implica la diferenciabilidad en ese punto.

 **EJEMPLO 1** Dada

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

demuestre que $D_1 f(0, 0)$ y $D_2 f(0, 0)$ existen y que, sin embargo, f no es diferenciable en $(0, 0)$.

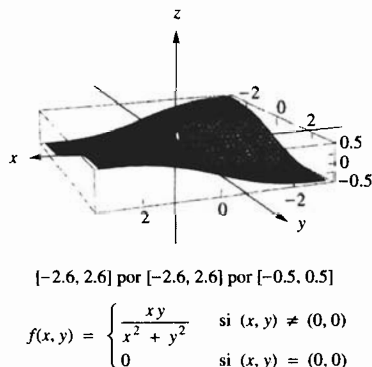
Solución

$$D_1f(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} \qquad D_2f(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} \qquad = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}$$

$$= \lim_{x\to 0} 0 \qquad = \lim_{y\to 0} 0$$

$$= 0 \qquad = 0$$



$[-2.6, 2.6]$ por $[-2.6, 2.6]$ por $[-0.5, 0.5]$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

FIGURA 2

Por tanto $D_1f(0,0)$ y $D_2f(0,0)$ existen.

En el ejemplo 6 de la sección 12.2 se demostró que para esta función $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe; en consecuencia, f no es continua en $(0,0)$. Como f no es continua en $(0,0)$, entonces, por el teorema 12.4.3, f no es diferenciable en $(0,0)$.

En la figura 2 se muestra una porción de la gráfica de esta función. Las derivadas parciales en el origen existen aunque la función no es continua en el origen, esto se debe a que $D_1f(0,0)$ y $D_2f(0,0)$ dependen sólo del comportamiento de $f(x,y)$ a lo largo de los ejes x y y, mientras que la continuidad de f en $(0,0)$ depende del comportamiento de f en un disco abierto que tenga su centro en el origen. ◀

Aunque la existencia de las derivadas parciales de una función de dos variables en un punto no garantiza la diferenciabilidad en ese punto, existen condiciones adicionales que se le piden a la función que proporcionan tal garantía. Estas condiciones se enuncian en el teorema siguiente, cuya demostración se presenta en el suplemento de esta sección.

12.4.4 Teorema

Sea f una función de x y y tal que D_1f y D_2f existen en un disco abierto $B(P_0, r)$, donde P_0 es el punto (x_0, y_0). Si D_1f y D_2f son continuas en P_0, entonces f es diferenciable en P_0.

Este teorema es mucho más fácil de aplicar que la definición 12.4.2 para demostrar la diferenciabilidad de una función de dos variables. Por ejemplo, debido a que las derivadas parciales de cualquier función polinomial son también funciones polinomiales, y como estas funciones son continuas en cualquier punto de su dominio, el teorema 12.4.4 establece que las funciones polinomiales son diferenciables en cualquier punto de su dominio.

▶ ***EJEMPLO 2*** Utilice el teorema 12.4.4 para demostrar que la función definida por

$$f(x,y) = xe^y - y\ln x$$

es diferenciable en su dominio.

Solución El dominio de f es el conjunto de todos los puntos de R^2 para los cuales $x > 0$. Al calcular las derivadas parciales se obtiene

$$D_1f(x,y) = e^y - \frac{y}{x} \qquad D_2f(x,y) = xe^y - \ln x$$

Como $D_1 f$ y $D_2 f$ son continuas en todos los puntos de R^2 para los cuales $x > 0$, entonces, por el teorema 12.4.4, f es diferenciable en todos los puntos de su dominio. ◀

En el ejemplo 5 al final de esta sección, se muestra cómo el teorema 12.4.4 puede aplicarse para probar que una función particular definida a trozos es diferenciable.

Si una función satisface las hipótesis del teorema 12.4.4 en un punto, entonces se dice que es **continuamente diferenciable** en el punto. Aunque la diferenciabilidad continua en un punto es una condición suficiente para demostrar que una función es diferenciable en un punto, no es una condición necesaria. Esto es, es posible que una función sea diferenciable en un punto aunque sus derivadas parciales no sean continuas en ese punto. En los ejemplos 42 a 45 se presentan ejemplos de este tipo de funciones.

La ecuación de la definición 12.4.2 es

$$\Delta f(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0)\,\Delta x + D_2 f(x_0, y_0)\,\Delta y + \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y \quad (2)$$

La expresión formada por los dos primeros términos del miembro derecho de esta ecuación se denomina *parte principal* de $\Delta f(x_0, y_0)$ o *diferencial total* de f en (x_0, y_0).

12.4.5 Definición de la diferencial total de una función de dos variables

Si f es una función de las variables x y y, y si f es diferenciable en (x, y), entonces la **diferencial total** de f es la función df que tiene valores de función determinados por

$$df(x, y, \Delta x, \Delta y) = D_1 f(x, y)\,\Delta x + D_2 f(x, y)\,\Delta y$$

Observe que df es una función de las cuatro variables x, y, Δx y Δy. Si $z = f(x, y)$, en ocasiones se emplea dz en lugar de $df(x, y, \Delta x, \Delta y)$, y se escribe

$$dz = D_1 f(x, y)\,\Delta x + D_2 f(x, y)\,\Delta y \quad (3)$$

Si en (3), $f(x, y) = x$, entonces $z = x$, $D_1 f(x, y) = 1$ y $D_2 f(x, y) = 0$; de modo que (3) proporciona $dz = \Delta x$. Puesto que $z = x$, para esta función $dx = \Delta x$. De manera semejante, si se considera $f(x, y) = y$, entonces $z = y$, $D_1 f(x, y) = 0$ y $D_2 f(x, y) = 1$; por lo que de (3) se obtiene $dz = \Delta y$. Como $z = y$, entonces para esta función $dy = \Delta y$. En consecuencia, se definen las diferenciales de las variables independientes como $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$. Entonces (3) se puede expresar como

$$dz = D_1 f(x, y)\,dx + D_2 f(x, y)\,dy \quad (4)$$

y en el punto (x_0, y_0),

$$dz = D_1 f(x_0, y_0)\,dx + D_2 f(x_0, y_0)\,dy \quad (5)$$

En (2), sea $\Delta z = \Delta f(x_0, y_0)$, $dx = \Delta x$, y $dy = \Delta y$. Entonces

$$\Delta z = D_1 f(x_0, y_0)\,dx + D_2 f(x_0, y_0)\,dy + \epsilon_1\,dx + \epsilon_2\,dy$$

Al comparar esta ecuación y (5), se observa que cuando dx (es decir, Δx) y dy (esto es, Δy) están cercanos a cero, y como ϵ_1 y ϵ_2 también estarán cerca de cero, entonces dz es una aproximación para Δz.

La ecuación (4) con la notación $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ se transforma en

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{6}$$

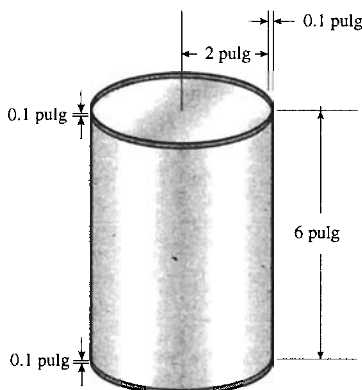


FIGURA 3

EJEMPLO 3 Un envase metálico cerrado tiene la forma de cilindro circular recto 6 pulg, de altura interior, de 2 pulg de radio interior y de 0.1 pulg de grosor. Si el costo del metal es de 40 centavos por pulgada cúbica, aproxime mediante diferenciales el costo total del metal empleado en la elaboración del envase.

Solución La figura 3 muestra el envase. Si V pulgadas cúbicas es el volumen de un cilindro circular recto que tiene un radio de r pulgadas y una altura de h pulgadas, entonces

$$V = \pi r^2 h$$

El volumen exacto del metal empleado en el envase es la diferencia entre los volúmenes de dos cilindros circulares rectos para los cuales $r = 2.1$, $h = 6.2$ y $r = 2$ y $h = 6$, respectivamente. El incremento ΔV proporciona el volumen exacto del metal, pero como únicamente se desea un valor aproximado, se calcula dV. De (6),

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh$$
$$= 2\pi rh\,dr + \pi r^2\,dh$$

Con $r = 2, h = 6, dr = 0.1$ y $dh = 0.2$,

$$dV = 2\pi(2)(6)(0.1) + \pi(2)^2\,(0.2)$$
$$= 3.2\pi$$

De este modo, $\Delta V \approx 3.2\pi$, por lo que el metal empleado en el envase es aproximadamente 3.2π pulg^3. Puesto que el costo del metal es de 40 centavos por pulgada cúbica, entonces el número aproximado de centavos del costo aproximado es $128\pi \approx 402$.

Conclusión: El costo aproximado del metal empleado en el envase es $4.02. ◀

Ahora se extenderán los conceptos de diferenciabilidad y de diferencial total para funciones de n variables.

12.4.6 Definición de incremento de una función de *n* variables

Si f es una función de las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y $\overline{P}$ es el punto $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$, entonces el **incremento de** f en $\overline{P}$ está determinado por

$$\Delta f(\overline{P}) = f(\overline{x}_1 + \Delta x_1, \overline{x}_2 + \Delta x_2, \ldots, \overline{x}_n + \Delta x_n) - f(\overline{P})$$

12.4.7 Definición de función diferenciable de n variables

Si f es una función de las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y el incremento de f en el punto $\overline{P}$ puede escribirse como

$$\Delta f(\overline{P}) = D_1 f(\overline{P})\,\Delta x_1 + D_2 f(\overline{P})\,\Delta x_2 + \ldots + D_n f(\overline{P})\,\Delta x_n + \epsilon_1\,\Delta x_1 + \epsilon_2\,\Delta x_2 + \ldots + \epsilon_n\,\Delta x_n$$

donde $\epsilon_1 \to 0, \epsilon_2 \to 0, \ldots, \epsilon_n \to 0$, conforme

$$(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) \to (0, 0, \ldots, 0),$$

entonces se dice que f es **diferenciable** en $\overline{P}$.

De igual manera que con el teorema 12.4.4, se puede demostrar que las condiciones suficientes para que una función de n variables sea diferenciable en un punto $\overline{P}$ son que las derivadas parciales $D_1 f, D_2 f, \ldots, D_n f$ existan en una bola abierta $B(\overline{P}; r)$ y que sean continuas en $\overline{P}$. Como en el caso de las funciones de dos variables, para las funciones de n variables la diferenciabilidad implica la continuidad. Sin embargo, la existencia de las derivadas parciales $D_1 f, D_2 f, \ldots, D_n f$ en un punto no implica la diferenciabilidad de la función en ese punto.

12.4.8 Definición de la diferencial total de una función de n variables

Si f es una función de las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y f es diferenciable en P, entonces la **diferencial total** de f es la función df que tiene valores de función determinados por

$$df(P, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) = D_1 f(P)\,\Delta x_1 + D_2 f(P)\,\Delta x_2 + \ldots + D_n f(P)\,\Delta x_n$$

Si se considera $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se definen $dx_1 = \Delta x_1$, $dx_2 = \Delta x_2, \ldots, dx_n = \Delta x_n$, y además se usa la notación $\dfrac{\partial w}{\partial x_i}$ en lugar de $D_1 f(P)$, se puede expresar la ecuación de la definición 12.4.8 como

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\,dx_n \qquad (7)$$

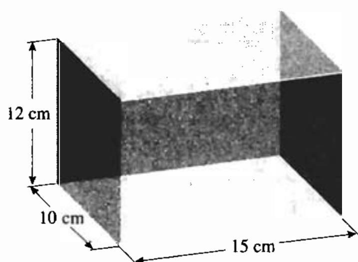


FIGURA 4

EJEMPLO 4 Las dimensiones de una caja son 10 cm, 12 cm y 15 cm, con un posible error de 0.02 en cada medición. (**a**) Aproxime mediante diferenciales el máximo error si el volumen de la caja se calcula a partir de estas medidas. (**b**) Aproxime también el error relativo.

Solución La figura 4 muestra la caja.

(**a**) Si V centímetros cúbicos es el volumen de la caja cuyas dimensiones son x, y y z centímetros, entonces su volumen es

$$V = xyz$$

El valor exacto del error se de ΔV; sin embargo, se empleará dV como una aproximación de ΔV. De (7), para tres variables independientes

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz \\ &= yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz \end{aligned}$$

De la información dada $|\Delta x| \leq 0.02$, $|\Delta y| \leq 0.02$ y $|\Delta z| \leq 0.02$. Para determinar el máximo error del volumen se consideran los errores máximos de las tres mediciones. Por lo que tomando $dx = 0.02$, $dy = 0.02$, $dz = 0.02$, $x = 10$, $y = 12$ y $z = 15$, se obtiene

$$\begin{aligned} dV &= (12)(15)(0.02) + (10)(15)(0.02) + (10)(12)(0.02) \\ &= 9 \end{aligned}$$

Así, $\Delta V \approx 9$.

Conclusión: El mayor error posible al calcular el volumen de la caja a partir de las medidas dadas es aproximadamente 9 cm^3.

(b) El error relativo se obtiene al dividir el error entre el valor real. Por tanto, el error relativo al calcular el volumen de la caja a partir de las mediciones dadas es $\Delta V/V \approx dV/V$. Como $dV/V = 9/1800$, entonces

$$\frac{\Delta V}{V} \approx 0.005$$

Conclusión: El error aproximado en porcentaje es de 0.5%. ◀

▶ ***EJEMPLO 5*** Dada

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

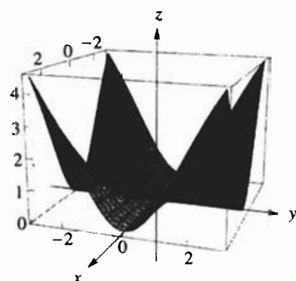
utilice el teorema 12.4.4 para demostrar que f es diferenciable en (0, 0).

Solución Para calcular $D_1 f$, se considerarán dos casos: $(x, y) = (0, 0)$ y $(x, y) \neq (0, 0)$. Si $(x, y) = (0, 0)$, entonces

$$\begin{aligned} D_1 f(0, 0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si $(x, y) \neq (0, 0)$, entonces $f(x, y) = x^2y^2/(x^2 + y^2)$. A fin de calcular $D_1 f(x, y)$ se utiliza el teorema para la derivada ordinaria de un cociente y se considera y como constante.

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= \frac{2xy^2(x^2 + y^2) - 2x(x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$



[−3, 3] por [−3, 3] por [0, 4.3]

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

FIGURA 5

Por tanto, la función $D_1 f$ está definida por

$$D_1 f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

De la misma forma se obtiene la función $D_2 f$, definida por

$$D_2 f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Tanto $D_1 f$ como $D_2 f$ existen en todo disco abierto que tenga su centro en el origen. Queda por demostrar que $D_1 f$ y $D_2 f$ son continuas en (0, 0).

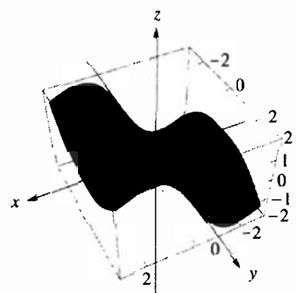
Como $D_1 f(0, 0) = 0$, entonces $D_1 f$ será continua en (0, 0) si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_1 f(x, y) = 0$$

Por tanto, debe probarse que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{entonces} \quad \left|\frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}\right| < \epsilon \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}\right| &= \left|\frac{2|x|y^4}{(x^2 + y^2)^2}\right| \\ &\leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}(\sqrt{x^2 + y^2})^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= 2\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$



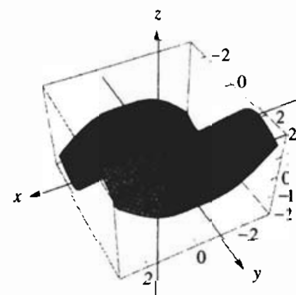
[−3, 3] por [−3, 3] por [−2, 2]

$$D_1 f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

FIGURA 6

De modo que una elección adecuada para δ es $2\delta = \epsilon$, esto es, $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$. Con esta δ se tiene el argumento siguiente:

$$\begin{aligned} & 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{y} \quad \delta = \tfrac{1}{2}\epsilon \\ \Rightarrow \quad & 2\sqrt{x^2 + y^2} < 2(\tfrac{1}{2}\epsilon) \\ \Rightarrow \quad & \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}(\sqrt{x^2 + y^2})^4}{(x^2 + y^2)^2} < \epsilon \\ \Rightarrow \quad & \frac{2|x|y^4}{(x^2 + y^2)^2} < \epsilon \\ \Rightarrow \quad & \left|\frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}\right| < \epsilon \end{aligned}$$



[−3, 3] por [−3, 3] por [−2, 2]

$$D_2 f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

FIGURA 7

Por tanto, se ha demostrado que se cumple (8). En consecuencia, $D_1 f$ es continua en (0, 0). En la misma forma puede probarse que que $D_2 f$ es continua en (0, 0). Por lo que se concluye, por el teorema 12.4.4, que f es diferenciable en (0, 0).

Las figuras 5, 6 y 7 muestran gráficas generadas en computadora de f, $D_1 f$ y $D_2 f$, las cuales apoyan los resultados de este ejemplo. ◀

EJERCICIOS 12.4

1. Si $f(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^2$, calcule: (**a**) $\Delta f(1, 4)$, el incremento de f en $(1, 4)$; (**b**) $\Delta f(1, 4)$ cuando $\Delta x = 0.03$ y $\Delta y = -0.02$; (**c**) $df(1, 4, \Delta x, \Delta y)$, la diferencial total de f en $(1, 4)$; (**d**) $df(1, 4, 0.03, -0.02)$.

2. Si $f(x, y) = 2x^2 + 5xy + 4y^2$, calcule: (**a**) $\Delta f(2, -1)$, el incremento de f en $(2, -1)$; (**b**) $\Delta f(2, -1)$ cuando $\Delta x = -0.01$ y $\Delta y = 0.02$; (**c**) $df(2, -1, \Delta x, \Delta y)$, la diferencia total de f en $(2, -1)$; (**d**) $df(2, -1, -0.01, 0.02)$.

3. Si $g(x, y) = xye^{xy}$, calcule: (**a**) $\Delta g(2, -4)$, el incremento de g en $(2, -4)$; (**b**) $\Delta g(2, -4)$ cuando $\Delta x = -0.1$ y $\Delta y = 0.2$; (**c**) $dg(2, -4, \Delta x, \Delta y)$, la diferencial total de g en $(2, -4)$; (**d**) $dg(2, -4, -0.1, 0.2)$.

4. Si $h(x, y) = (x + y)/(x - y)$, calcule: (**a**) $\Delta h(3, 0)$, el incremento de h en $(3, 0)$; (**b**) $\Delta h(3, 0)$ cuando $\Delta x = 0.04$ y $\Delta y = 0.03$; (**c**) $dh(3, 0, \Delta x, \Delta y)$, la diferencial total de h en $(3, 0)$; (**d**) $dh(3, 0, 0.04, 0.03)$.

5. Si $F(x, y, z) = xy + \ln(yz)$, calcule: (**a**) $\Delta F(4, 1, 5)$, el incremento de F en $(4, 1, 5)$; (**b**) $\Delta F(4, 1, 5)$ cuando $\Delta x = 0.02$. $\Delta y = 0.04$, y $\Delta z = -0.03$; (**c**) $dF(4, 1, 5, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, la diferencial total de F en $(4, 1, 5)$; (**d**) $dF(4, 1, 5, 0.02, 0.04, -0.03)$.

6. Si $G(x, y, z) = x^2y + 2xyz - z^3$, calcule: (**a**) $\Delta G(-3, 0, 2)$ el incremento de G en $(-3, 0, 2)$; (**b**) $\Delta G(-3, 0, 2)$ cuando $\Delta x = 0.01, \Delta y = 0.03$ y $\Delta z = -0.01$; (**c**) $dG(-3, 0, 2, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, la diferencial total de G en $(-3, 0, 2)$; (**d**) $dG(-3, 0, 2, 0.01, 0.03, -0.01)$.

En los ejercicios 7 a 14, calcule la diferencial total dw.

7. $w = 4x^3 - xy^2 + 3y - 7$

8. $w = y \tan x^2 - 2xy$

9. $w = x \cos y - y \operatorname{sen} x$

10. $w = xe^{2y} + e^{-y}$

11. $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

12. $w = \dfrac{xyz}{x + y + z}$

13. $w = x \tan^{-1} z - \dfrac{y^2}{z}$

14. $w = e^{yz} + \cos xz$

En los ejercicios 15 a 18, demuestre que f es diferenciable en todos los puntos de su dominio realizando lo siguiente: (a) calcule $\Delta f(x_0, y_0)$; (b) determine ϵ_1 y ϵ_2 de modo que se cumpla la ecuación (2); (c) demuestre que las ϵ_1 y ϵ_2 determinadas en el inciso (b) tienden a cero conforme $(\Delta_x, \Delta_y) \to (0, 0)$.

15. $f(x, y) = x^2y - 2xy$

16. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$

17. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y}$

18. $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$

En los ejercicios 19 a 26, utilice el teorema 12.4.4 para demostrar que la función es diferenciable en todos los puntos de su dominio.

19. $g(x, y) = 2x^4 - 3x^2y^2 + x^{-2}y^{-2}$

20. $f(x, y) = \dfrac{3x - 4y}{x^2 + 8y}$

21. $f(x, y) = 3 \ln xy + 5 \operatorname{sen} x$

22. $f(x, y) = \operatorname{sen} \dfrac{y}{x} + \cos \dfrac{x}{y}$

23. $h(x, y) = \tan^{-1}(x + y) + \dfrac{1}{x - y}$

24. $g(x, y) = y \ln x - \dfrac{x}{y}$

25. $f(x, y) = ye^{3x} - xe^{-3y}$

26. $f(x, y) = e^{2x} \operatorname{sen} y + e^{-2x} \cos y$

27. Sea $f(x, y) = \begin{cases} x + y - 2 & \text{si } x = 1 \text{ o } y = 1 \\ 2 & \text{si } x \neq 1 \text{ y } y \neq 1 \end{cases}$

Demuestre que $D_1 f(1, 1)$ y $D_2 f(1, 1)$ existen y que f no es diferenciable en $(1, 1)$.

28. Sea $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Demuestre que $D_1 f(0, 0)$ y $D_2 f(0, 0)$ existen y que $D_1 f$ y $D_2 f$ no son continuas en $(0, 0)$.

En los ejercicios 29 y 30, demuestre que $D_1 f(0, 0)$ y $D_2 f(0, 0)$ existen y que f no es diferenciable en $(0, 0)$.

29. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y^2}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

30. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

En los ejercicios 31 y 32, demuestre que f es diferenciable en todos los puntos de R^3 haciendo lo siguiente: (a) calcule $\Delta f(x_0, y_0, z_0)$; (b) determine ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 tales que se cumpla la ecuación de la definición 12.4.7; (c) demuestre que las ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 determinadas en el inciso (b) tienden a cero conforme $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ se aproxima a $(0, 0, 0)$.

31. $f(x, y, z) = xy - xz + z^2$

32. $f(x, y, z) = 2x^2z - 3yz^2$

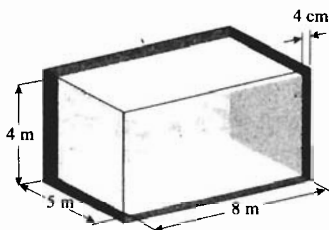
En los ejercicios 33 y 34, demuestre que $D_1 f(0, 0, 0)$, $D_2 f(0, 0, 0)$ y $D_3 f(0, 0, 0)$ existen y que f no es diferenciable en $(0, 0, 0)$.

33. $f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xy^2z}{x^4 + y^4 + z^4} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

34. $f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{3yz}{x^4 + y^2 + z^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

35. Un contenedor tiene la forma de un sólido rectangular y tiene una longitud interior de 8 m, un ancho interior de 5 m, una altura interior de 4 m y un espesor de 4 cm. Em-

plee la diferencial total para aproximar la cantidad de material necesario para construir el contenedor.



36. Utilice la diferencial total para calcular aproximadamente el mayor error al determinar el área de un triángulo rectángulo a partir de las longitudes de los catetos si ellos miden 6 cm y 8 cm, respectivamente, con un error posible de 0.1 cm para cada medición. También obtenga aproximadamente el error relativo.

37. Determine aproximadamente, utilizando la diferencial total, el mayor error al calcular la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo del ejercicio 36 a partir de las mediciones dadas. También obtenga aproximadamente el error relativo.

38. Si la ley del gas ideal (vea el ejemplo 6 de la sección 12.3) se emplea para calcular P cuando se proporcionan T y V, pero existe un error de 0.3% en la medición de T y un error de 0.8% en la medición de V, calcule aproximadamente el mayor error relativo al calcular P.

39. La gravedad específica s de un objeto está determinada por la fórmula

$$s = \frac{A}{A - W}$$

donde A libras es el peso del objeto en el aire y W libras es el peso del objeto en el agua. Si el peso de un objeto en el aire es de 20 lb con un error posible de 0.01 lb y su peso en el agua es de 12 lb, con un error posible de 0.02 lb, calcule aproximadamente el mayor error posible al determinar s a partir de estas medidas. También calcule el mayor error relativo posible.

40. Se elabora una caja sin tapa de un trozo de madera de $\frac{2}{3}$ pulg de espesor. La longitud interior será de 6 pie, el ancho interior será de 3 pie, la profundidad interior será de 4 pie. Utilice la diferencial total para calcular la cantidad aproximada de madera que se empleará en la caja.

41. Una compañía tiene un contrato para la elaboración de 10 000 cajas de madera cerradas cuyas dimensiones serán de 3 m, 4 m y 5 m. El costo de la madera que se empleará es de \$3 por metro cuadrado. Si las máquinas que se emplearán para cortar las piezas de madera tienen un error posible de 0.5 cm en cada dimensión, calcule aproximadamente, utilizando la diferencial total, el mayor error posible en la estimación del costo de la madera.

En los ejercicios 42 a 45, demuestre que la función puede ser diferenciable en un punto aunque no sea continuamente diferencible en ese punto. En consecuencia, las condiciones del teorema 12.4.4 son suficientes pero no necesarias. La función f de este ejercicio está definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

42. Determine $\Delta f(0, 0)$.

43. Calcule $D_1 f(x, y)$ y $D_2 f(x, y)$.

44. Demuestre que f es diferenciable en $(0, 0)$ utilizando la definición 12.4.2 y el resultado de los ejercicios 42 y 43.

45. Demuestre que $D_1 f$ y $D_2 f$ no son continuas en $(0, 0)$.

46. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La gráfica de esta función se muestra en la figura 4 de la sección 12.3. Demuestre que f es diferenciable en $(0, 0)$ empleando el teorema 12.4.4.

47. Sea

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xyz^2}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Demuestre que f es diferenciable en $(0, 0, 0)$.

12.5 REGLA DE LA CADENA PARA FUNCIONES DE MÁS DE UNA VARIABLE

Recuerde que con la notación de Leibniz la regla de la cadena para una función de una variable se expresa como sigue: Si y es una función de u y $\dfrac{dy}{du}$ existe, y si u es una función de x y $\dfrac{du}{dx}$ existe, entonces y es una función de x y $\dfrac{dy}{dx}$ existe y está determinada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ahora se considerará la regla de la cadena para una función de dos variables, donde cada una de estas variables es también una función de dos variables.

12.5.1 Teorema La regla de la cadena

Si u es una función diferenciable de x y y, definida por $u = f(x, y)$, donde $x = F(r, s)$ y $y = G(r, s)$, y $\dfrac{\partial x}{\partial r}, \dfrac{\partial x}{\partial s}, \dfrac{\partial y}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial y}{\partial s}$ existen, entonces u es una función de r y s, y además

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

La demostración de este teorema se deja para el final de la sección, de modo que primero se verán algunos ejemplos y ejemplos ilustrativos con el fin de que se familiarice con el enunciado de la regla de la cadena.

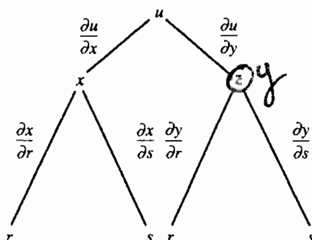


FIGURA 1

La regla de la cadena para funciones de una variable se recuerda fácilmente al considerar una derivada ordinaria como el cociente de dos diferenciales, pero no se tiene una interpretación similar para derivadas parciales. Sin embargo, un recurso nemotécnico conveniente para recordar la regla de la cadena consiste en un diagrama de árbol con ramas que parten de una variable a otra, como se muestra en la figura 1. Puesto que u es una función de x y y, coloque u en la cima del árbol y dibuje ramas para x y y. Después, como x es una función de r y s, dibuje ramas desde x hacia r y s. De manera semejante, dibuje ramas a partir de y hacia r y s. Observe que cada variable depende de las variables que se encuentran debajo de ella. A lo largo de estas ramas escriba la derivada parcial que corresponde a las variables específicas.

Con el fin de obtener la ecuación para $\partial u/\partial r$, se consideran los caminos a lo largo de las ramas de u a r. Se tienen dos de tales caminos, cada uno con un par de ramas. Sume los productos de las derivadas parciales asociadas con las ramas de cada camino, de modo que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

la cual es la primera ecuación del teorema 12.5.1. La segunda ecuación del teorema puede obtenerse en la misma forma considerando los dos caminos a lo largo de las ramas de u a s.

EJEMPLO 1 Sean

$$u = x^2 + y^3 \qquad x = re^s \qquad y = re^{-s}$$

Aplique la regla de la cadena para calcular $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial s}$.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= 2x(e^s) + 3y^2(e^{-s})\\ &= 2(re^s)(e^s) + 3(re^{-s})^2(e^{-s})\\ &= 2re^{2s} + 3r^2e^{-3s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= 2x(re^s) + 3y^2(-re^{-s})\\ &= 2(re^s)(re^s) + 3(re^{-s})^2(-re^{-s})\\ &= 2r^2e^{2s} - 3r^3e^{-3s}\end{aligned}$$

◀

Un problema particular de notación surge cuando se considera u como una función de x y y, y después como función de r y s. Si $u = f(x, y)$, $x = F(r, s)$ y $y = G(r, s)$, entonces $u = f(F(r, s), G(r, s))$. Observe que $u \neq f(r, s)$.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** En el ejemplo 1

$$\begin{aligned} u &= f(x, y) & x &= F(r, s) & y &= G(r, s) \\ &= x^2 + y^3 & &= re^s & &= re^{-s} \end{aligned}$$

De modo que,

$$\begin{aligned} u &= f(F(r, s), G(r, s)) \qquad \text{y} \qquad f(r, s) = r^2 + s^3 \\ &= r^2e^{2s} + r^3e^{-3s} \end{aligned}$$

Esto es, $u \neq f(r, s)$. ◀

El propósito del ejemplo 1 es mostrar la aplicación de la regla de la cadena. Se pudieron haber obtenido las derivadas parciales de manera más simple al sustituir las expresiones para x y y en la expresión para u antes de haber diferenciado, como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Del ejemplo 1, como se mostró en el ejemplo ilustrativo 1, $u = r^2e^{2s} + r^3e^{-3s}$. Al calcular las derivadas parciales de esta expresión se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2re^{2s} + 3r^2e^{-3s} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= r^2(2e^{2s}) + r^3(-3e^{-3s}) \\ &= 2r^2e^{2s} - 3r^3e^{-3s} \end{aligned}$$

lo cual es acorde con los resultados del ejemplo 1. ◀

Ahora suponga que u es una función diferenciable de las variables x y y, y que también x y y son funciones diferenciables de la variable t. Entonces u también es una función de la variable t. En consecuencia, la fórmula de la regla de la cadena, con derivadas ordinarias en lugar de derivadas parciales, se transforma en

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

La derivada ordinaria du/dt dada por esta fórmula se denomina **derivada total** de u con respecto a t.

▶ ***EJEMPLO 2*** Sean

$$y = 2wz + z^2 \qquad w = e^x \qquad z = \cos x$$

Calcule la derivada total $\dfrac{dy}{dx}$ aplicando la regla de la cadena.

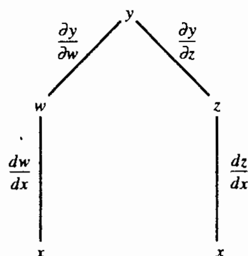


FIGURA 2

Solución De la regla de la cadena, empleando el diagrama de árbol de la figura 2, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{dz}{dx}\\ &= 2z(e^x) + (2w + 2z)(-\operatorname{sen} x)\\ &= 2(\cos x)(e^x) + (2e^x + 2\cos x)(-\operatorname{sen} x)\\ &= 2e^x\cos x - 2e^x \operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} x\cos x\end{aligned}$$

◀

En el enunciado del teorema 12.5.1, u es la variable dependiente, r y s son las variables independientes, y x y y reciben el nombre de **variables intermedias.** A continuación se extenderá la regla de la cadena a n variables intermedias y m variables independientes.

12.5.2 Teorema La regla de la cadena general

Suponga que u es una función diferenciable de las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y que cada una de estas variables es a su vez una función de las m variables $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Suponga además que cada una de las derivadas parciales $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m)$ existe.

Entonces u es una función de $y_1, y_2, \ldots, y_m$, y

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_1}\\ \frac{\partial u}{\partial y_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_2}\\ &\vdots\\ \frac{\partial u}{\partial y_m} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_m} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_m} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_m}\end{aligned}$$

La demostración de este teorema es una extensión de la demostración del teorema 12.5.1.

Observe que en la regla de la cadena general existen tantos términos en el miembro derecho de cada ecuación como el número de variables intermedias.

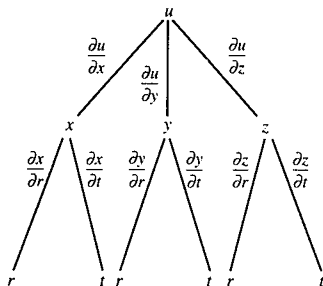
Si u es una función diferenciable de las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y cada x_i es una función de la variable t, entonces u es una función de t y la derivada total de u con respecto a t está determinada por

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

▶ ***EJEMPLO 3*** Sean

$$u = x^2 + yz \qquad x = r\operatorname{sen} t \qquad y = r\cos t \qquad z = r\operatorname{sen}^2 t$$

Calcule $\frac{\partial u}{\partial r}$ y $\frac{\partial u}{\partial t}$ aplicando la regla de la cadena.

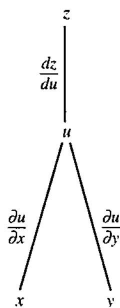

FIGURA 3

Solución De la regla de la cadena, empleando el diagrama de árbol de la figura 3, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}\\
&= 2x(\operatorname{sen} t) + z(\cos t) + y(\operatorname{sen}^2 t)\\
&= 2(r \operatorname{sen} t) + (\operatorname{sen} t) + (r \operatorname{sen}^2 t)(\cos t) + (r \cos t)(\operatorname{sen}^2 t)\\
&= 2r \operatorname{sen}^2 t + r \operatorname{sen}^2 t \cos t + r \operatorname{sen}^2 t \cos t\\
&= 2r \operatorname{sen}^2 t + 2r \operatorname{sen}^2 t \cos t\\
&= 2r \operatorname{sen}^2 t(1 + \cos t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\\
&= 2x(r \cos t) + z(-r \operatorname{sen} t) + y(2r \operatorname{sen} t \cos t)\\
&= 2(r \operatorname{sen} t)(r \cos t) + (r \operatorname{sen}^2 t)(-r \operatorname{sen} t) + (r \cos t)(2r \operatorname{sen} t \cos t)\\
&= 2r^2 \operatorname{sen} t \cos t - r^2 \operatorname{sen}^3 t + 2r^2 \operatorname{sen} t \cos^2 t\\
&= r^2 \operatorname{sen} t\,(2 \cos t + 2 \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)
\end{aligned}$$

◀


FIGURA 4

EJEMPLO 4 Si f es una función diferenciable y a y b son constantes, demuestre que $z = f(\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}ay^3)$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$ay^2 \frac{\partial z}{\partial x} + bx \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Solución Sea $u = \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}ay^3$. Se desea probar que $z = f(u)$ satisface la ecuación dada. De la regla de la cadena, utilizando el diagrama de árbol de la figura 4, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y}\\
&= f'(u)(bx) & &= f'(u)(-ay^2)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
ay^2 \frac{\partial z}{\partial x} + bx \frac{\partial z}{\partial y} &= ay^2[f'(u)(bx)] + bx[f'(u)(-ay^2)]\\
&= 0
\end{aligned}$$

lo cual es lo que se deseaba demostrar. ◀

En el ejemplo siguiente se emplea la regla de la cadena en una aplicación que trata sobre tasas relacionadas.

EJEMPLO 5 Utilice la ley del gas ideal (vea el ejemplo 6 de la sección 12.3) con $k = 0.8$ para obtener la tasa a la que la temperatura varía en el instante en que el volumen del gas es de 15 litros y el gas está bajo una presión de 12 atm si el volumen se incrementa a la tasa de 0.1 litro/min y la presión disminuye a la tasa de 0.2 atm/min.

Solución Sean t minutos el tiempo que han transcurrido desde que el volumen del gas comenzó a incrementarse. Sean T grados Kelvin la temperatura, P atmósferas la presión y V litros el volumen a los t minutos. De la ley del gas ideal,

$$PV = 0.8T$$
$$T = 1.25PV$$

En el instante dado, $P = 12$, $V = 15$, $\frac{dP}{dt} = -0.2$, y $\frac{dV}{dt} = 0.1$. Al aplicar la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial P}\frac{dP}{dt} + \frac{\partial T}{\partial V}\frac{dV}{dt}\\ &= 1.25\,V\frac{dP}{dt} + 1.25P\frac{dV}{dt}\\ &= 1.25(15)(-0.2) + 1.25(12)(0.1)\\ &= -2.25\end{aligned}$$

Conclusión: La temperatura disminuye a la tasa de 2.25°K/min en el instante indicado. ◀

Ahora se aplicará la regla de la cadena para demostrar un teorema que proporciona una fórmula para calcular la derivada de una función definida implícitamente.

12.5.3 Teorema

Si f es una función diferenciable de la variable x tal que $y = f(x)$ y f está definida implícitamente por la ecuación $F(x, y) = 0$, y si F es diferenciable y $F_y(x, y) \neq 0$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

Demostración Sea

$$w = F(x, y) \quad \text{donde} \quad y = f(x)$$

De la regla de la cadena,

$$\frac{dw}{dx} = F_x(x, y)\frac{dx}{dx} + F_y(x, y)\frac{dy}{dx} \tag{1}$$

Debido a que $w = F(x, f(x))$ para toda x del dominio de f y por hipótesis $F(x, f(x)) = 0$, entonces $dw/dx = 0$. Además, $dx/dx = 1$. Por tanto, de (1)

$$0 = F_x(x, y)(1) + F_y(x, y)\frac{dy}{dx}$$

Puesto que $F_y(x, y) \neq 0$, al resolver esta ecuación para dy/dx se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

■

 **EJEMPLO 6** Calcule dy/dx si

$$x\cos y + y\cos x - 1 = 0$$

Solución Sea $F(x, y) = x\cos y + y\cos x - 1$. Entonces

$$F_x(x, y) = \cos y - y\,\mathrm{sen}\,x \qquad F_y(x, y) = -x\,\mathrm{sen}\,y + \cos x$$

Del teorema 12.5.3,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos y - y \operatorname{sen} x}{-x \operatorname{sen} y + \cos x}$$
$$= -\frac{y \operatorname{sen} x - \cos y}{\cos x - x \operatorname{sen} y}$$

◀

Compare la solución del ejemplo anterior con la del ejemplo 4 de la sección 2.9, donde se obtuvo la misma expresión para dy/dx mediante diferenciación implícita.

Ahora considere una ecuación en las tres variables x, y y z, y suponga que la ecuación define implícitamente a z como una o más funciones diferenciables de x y y. Por medio del teorema siguiente, análogo al teorema 12.5.3, se pueden calcular $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ sin resolver la ecuación para z.

12.5.4 Teorema

Si f es una función diferenciable de x y y tal que $z = f(x, y)$ y f está definida implícitamente por la ecuación $F(x, y, z) = 0$, y si F es diferenciable y $F_z(x, y, z) \neq 0$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$$

Demostración Sea

$$w = F(x, y, z) \qquad \text{donde} \qquad z = f(x, y)$$

De la regla de la cadena,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = F_x(x, y, z)\frac{\partial x}{\partial x} + F_y(x, y, z)\frac{\partial y}{\partial x} + F_z(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} \qquad (2)$$

Debido a que $w = F(x, y, f(x, y))$ para todos los puntos (x, y) del dominio de f, y por hipótesis $F(x, y, f(x, y)) = 0$, entonces $\partial w/\partial x = 0$. Como y es constante cuando se calcula la derivada parcial con respecto a x, entonces $\partial y/\partial x = 0$. Además, $\partial x/\partial x = 1$. Por tanto, de (2),

$$0 = F_x(x, y, z)(1) + F_y(x, y, z)(0) + F_z(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x}$$

Puesto que $F_z(x, y, z) \neq 0$, al resolver esta ecuación para $\partial z/\partial x$ se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$$

La fórmula para $\partial z/\partial y$ se obtiene en la misma forma al calcular $\partial w/\partial y$ mediante la regla de la cadena. ■

▶ ***EJEMPLO 7*** Calcule $\partial z/x$ y $\partial z/y$ si

$$4z^3 + 3xz^2 - xyz - 2xy^2 + 7 = 0$$

Solución Sea $F(x, y, z) = 4z^3 + 3xz^2 - xyz - 2xy^2 + 7 = 0$. Entonces

$$F_x(x, y, z) = 3z^2 - yz - 2y^2 \qquad F_y(x, y, z) = -xz - 4xy$$
$$F_z(x, y, z) = 12z^2 + 6xz - xy$$

Del teorema 12.5.4,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3z^2 - yz - 2y}{12z^2 + 6xz - xy} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-xz - 4xy}{12z^2 + 6xz - xy}$$ ◀

Se concluye esta sección con la demostración de la regla de la cadena enunciada en el teorema 12.5.1.

Demostración del teorema 12.5.1 Se probará el teorema para $\partial u/\partial r$. La demostración para $\partial u/\partial s$ es similar.

Si se mantiene s fija y r varía por una cantidad Δr, entonces x varía por una cantidad Δx y y varía por una cantidad Δy. De este modo,

$$\Delta x = F(r + \Delta r, s) - F(r, s) \tag{3}$$

y

$$\Delta y = G(r + \Delta r, s) - G(r, s) \tag{4}$$

Como f es diferenciable, entonces

$$\Delta f(x, y) = D_1 f(x, y)\, \Delta x + D_2 f(x, y)\, \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \tag{5}$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 tienden a cero conforme $(\Delta x, \Delta y)$ se aproxima a $(0, 0)$. Además, se requiere que $\epsilon_1 = 0$ y $\epsilon_2 = 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$. Se pide este requisito a fin de que ϵ_1 y ϵ_2, los cuales son funciones de Δx y Δy, sean continuas en $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$.

Si en (5) se sustituyen $\Delta f(x, y)$ por Δu, $D_1 f(x, y)$ por $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $D_2 f(x, y)$ por $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ y si se dividen los dos miembros entre $\Delta r\,(\Delta r \neq 0)$, se obtiene

$$\frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta r} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta r} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta r}$$

Al tomar el límite en ambos miembros de la ecuación anterior cuando Δr tiende a cero se tiene

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial x} \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial u}{\partial y} \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta r} + \left(\lim_{\Delta r \to 0} \epsilon_1\right) \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \left(\lim_{\Delta r \to 0} \epsilon_2\right) \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta r} \tag{6}$$

Puesto que u es una función de x y y, y tanto x como y son funciones de r y s, entonces u es una función de r y s. Como s se mantuvo fija y r varía por una cantidad Δr, resulta

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{u(r + \Delta r, s) - u(r, s)}{\Delta r}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r} \tag{7}$$

Así mismo,

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} = \frac{\partial x}{\partial r} \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta r} = \frac{\partial y}{\partial r} \tag{8}$$

Debido a que $\dfrac{\partial x}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial y}{\partial r}$ existen, F y G son continuas con respecto a la variable r. (*Nota:* la existencia de las derivadas parciales de una función no implican la continuidad con respecto a todas las variables simultáneamente, como se dijo en la sección anterior, pero con funciones de una sola variable sí implica la continuidad con respecto a cada una de las variables por separado.) En consecuencia, de (3),

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta r \to 0} \Delta x &= \lim_{\Delta r \to 0} [F(r + \Delta r, s) - F(r, s)] \\ &= F(r, s) - F(r, s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y de (4),

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta r \to 0} \Delta y &= \lim_{\Delta r \to 0} [G(r + \Delta r, s) - G(r, s)] \\ &= G(r, s) - G(r, s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, conforme Δr tiende a cero, Δx y Δy también tienden a cero, y como ϵ_1 y ϵ_2 se aproximan a cero cuando $(\Delta x, \Delta y)$ tiende a $(0, 0)$, se puede concluir que

$$\lim_{\Delta r \to 0} \epsilon_1 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta r \to 0} \epsilon_2 = 0 \tag{9}$$

Ahora bien, es posible que para ciertos valores de Δr, $\Delta x = 0$ y $\Delta y = 0$. Como en tal caso se pidió que $\epsilon_1 = 0$ y $\epsilon_2 = 0$, los límites de (9) también son cero. Al sustituir de (7), (8) y (9) en (6) se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

lo cual es lo que se deseaba demostrar. ■

EJERCICIOS 12.5

En los ejercicios 1 a 6, calcule la derivada parcial indicada por medio de dos métodos: (a) utilice la regla de la cadena; (b) realice las sustituciones para x y y antes de derivar.

1. $u = x^2 - y^2; x = 3r - s; y = r + 2s; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}$
2. $u = 3x - 4y^2; x = 5pq; y = 3p^2 - 2q; \frac{\partial u}{\partial p}; \frac{\partial u}{\partial q}$
3. $u = 3x^2 + xy - 2y^2 + 3x - y; x = 2r - 3s;$ $y = r + s; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}$
4. $u = x^2 + y^2; x = \cosh r \cos t; y = \operatorname{senh} r \operatorname{sen} t; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial t}$
5. $u = e^{y/x}; x = 2r \cos t; y = 4r \operatorname{sen} t; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial t}$
6. $V = \pi x^2 y; x = \cos z \operatorname{sen} t; y = z^2 e^t; \frac{\partial V}{\partial z}; \frac{\partial u}{\partial t}$

En los ejercicios 7 a 14, obtenga la derivada parcial indicada utilizando la regla de la cadena.

7. $u = x^2 + xy; x = r^2 + s^2; y = 3r - 2s; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}$
8. $u = xy + xz + yz; x = rs; y = r^2 - s^2;$ $z = (r - s)^2; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}$
9. $u = \operatorname{sen}^{-1}(3x + y); x = r^2 e^s; y = \operatorname{sen} rs; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}$
10. $u = \operatorname{sen}(xy); x = 2ze^t; y = t^2 e^{-z}; \frac{\partial u}{\partial t}; \frac{\partial u}{\partial z}$
11. $u = \cosh \frac{y}{x}; x = 3r^2 s; y = 6se^r; \frac{\partial u}{\partial t}; \frac{\partial u}{\partial s}$
12. $u = xe^{-y}; x = \tan^{-1}(rst); y = \ln(3rs + 5st); \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}; \frac{\partial u}{\partial t}$
13. $u = x^2 + y^2 + z^2; x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta; y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta;$ $z = r \cos \phi; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial \phi}; \frac{\partial u}{\partial \theta}$
14. $u = x^2 yz; x = \frac{r}{s}; y = re^s; z = re^{-s}; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}$

En los ejercicios 15 a 18, determine la derivada total $\frac{du}{dt}$ mediante dos métodos: (a) emplee la regla de la cadena; (b) efectúe las sustituciones para x, y y z antes de derivar.

15. $u = ye^x + xe^y; x = \cos t; y = \operatorname{sen} t$
16. $u = \ln xy + y^2; x = e^t; y = e^{-t}$
17. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; x = \tan t; y = \cos t; z = \operatorname{sen} t;$ $0 < t < \frac{1}{2}\pi$
18. $u = \frac{t + e^x}{y - e^t}; x = 3 \operatorname{sen} t; y = \ln t$

En los ejercicios 19 a 22, calcule la derivada total $\frac{du}{dt}$ por medio de la regla de la cadena; no exprese u como una función de t antes de derivar.

19. $u = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right); x = \ln t; y = e^t$

20. $u = xy + xz + yz; x = t\cos t; y = t \operatorname{sen} t; z = t$

21. $u = \frac{x+t}{y+t}; x = \ln t; y = \ln\frac{1}{t}$

22. $u = \ln(x^2 + y^2 + t^2); x = t \operatorname{sen} t; y = \cos t$

En los ejercicios 23 a 26, obtenga $\frac{dy}{dx}$ mediante el teorema 12.5.3. Compare la solución con la del ejercicio indicado de la sección 2.9.

23. $x^3 + y^3 = 8xy$; ejercicio 19.

24. $2x^3y + 3xy^3 = 5$; ejercicio 24.

25. $x \operatorname{sen} y + y\cos x = 1$; ejercicio 31.

26. $\cos(x + y) = y \operatorname{sen} x$; ejercicio 32.

En los ejercicios 27 a 30, suponga que la ecuación define z como una función diferenciable de x y y. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ mediante dos métodos: (a) Use el teorema 12.5.4; (b) derive implícitamente.

27. $3x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 4xz - 15 = 0$

28. $z = (x^2 + y^2) \operatorname{sen} xz$

29. $ye^{xyz}\cos 3xz = 5$

30. $ze^{yz} + 2xe^{xz} - 4e^{xy} = 3$

31. Si f es una función diferenciable de la variable u, considere $u = bx - ay$ y demuestre que $z = f(bx - ay)$ satisface la ecuación $a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$, donde a y b son constantes.

32. Si f es una función diferenciable de las variables u y v, considere $u = x - y$ y $v = y - x$; demuestre que $z = f(x - y, y - x)$ satisface la ecuación $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

33. Suponga que f es una función diferenciable de x y y, y que $u = f(x, y)$. Entonces si $x = \cosh v \cos w$ y $y = \operatorname{senh} v \operatorname{sen} w$, exprese $\frac{\partial u}{\partial v}$ y $\frac{\partial u}{\partial w}$ en términos de $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$.

34. Sean $u = e^y \cos x$, $x = 2t$, $y = t^2$. Calcule $\frac{d^2u}{dt^2}$ en dos formas: **(a)** primero exprese u en términos de t; **(b)** utilice la regla de la cadena.

35. Sean $u = 3xy - 4y^2$, $x = 2se^r$, $y = re^{-s}$. Calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ en dos formas: **(a)** primero exprese u en términos de r y s; **(b)** emplee la regla de la cadena.

36. Para u, x y y dadas como en el ejercicio 35, calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial r}$ en dos formas: **(a)** primero exprese u en términos de r y s; **(b)** utilice la regla de la cadena.

37. Sean $u = 9x^2 + 4y^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$. Calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ en dos formas: **(a)** primero exprese u en términos de r y θ; **(b)** emplee la regla de la cadena.

38. Para u, x y y dadas como en el ejercicio 37, calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ en dos formas: **(a)** primero exprese u en términos de r y θ; **(b)** use la regla de la cadena.

39. Para u, x y y dadas como en el ejercicio 37, calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}$ en dos formas: **(a)** primero exprese u en términos de r y θ; **(b)** utilice la regla de la cadena.

40. Suponga que f es una función diferenciable de x, y y z, y que $u = f(x, y, z)$. Entonces si $x = r \operatorname{sen}\phi\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$, y $z = r\cos\phi$, exprese $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial \phi}$, y $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ en términos de $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, y $\frac{\partial u}{\partial z}$.

41. Si $u = f(x, y)$ y $v = g(x, y)$, entonces las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

se denominan **ecuaciones de Cauchy-Riemann.** Demuestre que las ecuaciones de Cauchy-Riemann son satisfechas si

$$u = \tfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) \quad \text{y} \quad v = \tan^{-1}\frac{y}{x}.$$

42. Suponga que f y g son funciones diferenciables de x y y, y que $u = f(x, y)$ y $v = g(x, y)$. Demuestre que si se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (vea ejercicio 41) y si $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

43. En un instante dado, la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo es de 10 cm y crece a la tasa de 1 cm/min, y la longitud del otro cateto es de 12 cm y decrece a una tasa de 2 cm/min. Calcule la tasa de variación de la medida del ángulo agudo opuesto al cateto de 12 cm en ese instante.

44. Se introduce agua en un tanque que tiene forma de cilindro circular recto a una tasa de $\frac{4}{5}\pi\ \text{m}^3/\text{min}$. El tanque se ensancha de modo que, aun cuando conserva su forma cilíndrica, su radio se incrementa a una tasa de 0.2 cm/min. ¿Qué tan rápido sube la superficie del agua cuando el radio es de 2 m y el volumen del agua en el tanque es de $20\pi\ \text{m}^3$?

45. La altura de un cilindro circular recto disminuye a la tasa de 10 cm/min y el radio se incrementa a la tasa de 4 cm/min. Obtenga la tasa de variación del volumen en el instante en que la altura es de 50 cm y el radio de 16 cm.

46. La altura de un cono circular recto se incrementa a la tasa de 40 cm/min y el radio disminuye a la tasa de 15 cm/min. Calcule la tasa de variación del volumen en el instante en que la altura es de 200 cm y el radio es de 60 cm.

47. Una cantidad de gas obedece la ley del gas ideal (vea el ejemplo 6 de la sección 12.3) con $k = 1.2$, y el gas está encerrado en un recipiente que se calienta a una tasa de 3°K/min. Si

en el instante en que la temperatura es de 300°K, la presión es de 6 atm y decrece a la tasa de 0.1 atm/min, calcule la tasa de variación del volumen en ese instante.

48. Una pared de retención forma un ángulo de $\frac{2}{3}\pi$ rad con el suelo. Una escalera de 20 pie de longitud está recargada contra la pared y su parte superior se desliza hacia abajo sobre la pared a una tasa de 3 pie/s. ¿Qué tan rápido varía el área del triángulo formado por la escalera, la pared y el piso cuando la escalera forma un ángulo de $\frac{1}{6}\pi$ rad con el suelo?

49. Un kilomol de un gas real obedece la ecuación de *Van der Waals*: si P, V y T son, respectivamente, las medidas de la presión, el volumen y la temperatura absoluta, entonces

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

donde R es la constante universal de los gases, y a y b son constantes que dependen del gas particular. Si β es el coeficiente de la expansión del volumen y κ es el coeficiente de compresibilidad, entonces

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right) \quad \text{y} \quad \kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)$$

Demuestre que $\dfrac{\partial \beta}{\partial P} = -\dfrac{\partial \kappa}{\partial T}$.

50. De la ecuación de Van der Waals y β y κ dadas como en el ejercicio 49, demuestre que

$$\beta = \frac{RV^2(V - b)}{RTV^3 - 2a(V - b)^2} \quad \text{y} \quad \kappa = \frac{V^2(V - b)^2}{RTV^3 - 2a(V - b)^2}$$

Para un gas ideal, $a = 0$ y $b = 0$. ¿Cuáles son las expresiones de β y κ para un gas ideal?

51. Si f es una función diferenciable de x y y, y $u = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, demuestre que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\text{sen}\,\theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\text{sen}\,\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

52. Suponga que $u = f(x, y)$ y $v = g(x, y)$, y que f, g y sus primeras y segundas derivadas parciales son continuas. Demuestre que si u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (vea el ejercicio 41), entonces también satisfacen la ecuación de Laplace (refiérase a los ejercicios 49 a 52 de la sección 12.3).

12.6 DERIVADAS DIRECCIONALES Y GRADIENTES

Se ha visto cómo las derivadas parciales de una función caracterizan la tasa de variación de la función a lo largo de rectas paralelas a los ejes coordenados. Esto es, si f es una función de las variables x y y, la derivada parcial $f_x(x, y)$ describe la tasa de variación de f en la dirección del eje x, y $f_y(x, y)$ describe la tasa de variación de f en la dirección del eje y. A continuación se generalizará la definición de derivada parcial para obtener la tasa de variación de una función con respecto a cualquier dirección. Esto conduce a la noción de *derivada direccional.*

Para indicar una dirección, se utiliza el concepto de vector unitario **U** que forma un ángulo de medida θ radianes con la parte positiva del eje x, de modo que

$$\mathbf{U} = \cos\theta\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\mathbf{j}$$

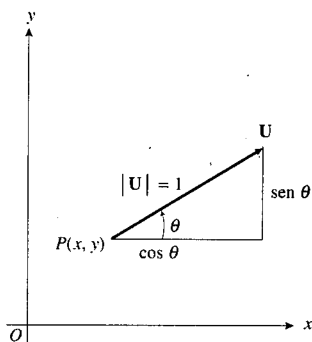


FIGURA 1

La figura 1 muestra la representación de **U** cuyo punto inicial es $P(x, y)$ en el plano xy. Si f es una función de x y y, entonces la tasa de variación de los valores de función $f(x, y)$ con respecto a la dirección del vector unitario **U** está determinada por la *derivada direccional.*

12.6.1 Definición de derivada direccional de una función de dos variables

Sea f una función de las dos variables x y y. Si **U** es el vector unitario $\cos\theta\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\mathbf{j}$, entonces la **derivada direccional** de f en la dirección de **U**, denotada por $D_{\mathbf{U}}f$, está determinada por

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\,\text{sen}\,\theta) - f(x, y)}{h}$$

si este límite existe.

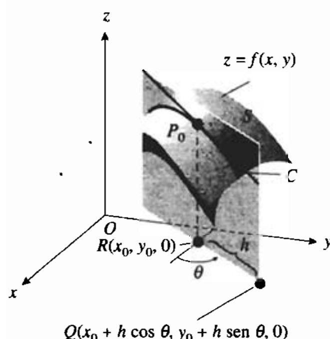


FIGURA 2

La interpretación geométrica de la derivada direccional se ilustra en la figura 2. Una ecuación de la superficie S de la figura es $z = f(x, y)$. El punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ se encuentra sobre la superficie y los puntos $R(x_0, y_0, 0)$ y $Q(x_0 + h\cos\theta, y_0 + h \operatorname{sen}\theta, 0)$ están en el plano xy. El plano que pasa por R y Q, paralelo al eje z, forma un ángulo de θ radianes con la dirección positiva del eje x. Este plano intersecta la superficie S en la curva C. La derivada direccional $D_{\mathbf{U}}f$, evaluada en el punto P_0, es la pendiente de la recta tangente a la curva C en P_0 en el plano que pasa por R, Q y P_0.

Si $\mathbf{U} = \mathbf{i}$, entonces $\cos\theta = 1$ y $\operatorname{sen}\theta = 0$, y de la definición 12.6.1,

$$D_{\mathbf{i}}f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h},$$

la cual es la derivada parcial de f con respecto a x.

Si $\mathbf{U} = \mathbf{j}$, entonces $\cos\theta = 0$ y $\operatorname{sen}\theta = 1$, y

$$D_{\mathbf{j}}f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

la cual es la derivada parcial de f con respecto a y.

De este modo, f_x y f_y son casos especiales de la derivada direccional en las direcciones de los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, respectivamente.

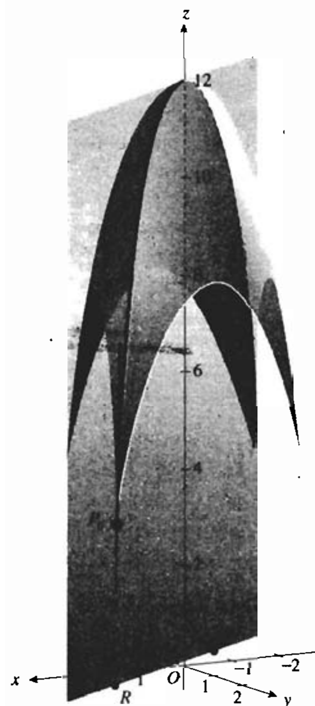


FIGURA 3

EJEMPLO 1 Aplique la definición 12.6.1 para calcular $D_{\mathbf{U}}f(x, y)$ si $f(x, y) = 12 - x^2 - 4y^2$ y $\mathbf{U}$ es el vector unitario en la dirección $\frac{1}{6}\pi$.

Solución Como $\mathbf{U} = \cos\frac{1}{6}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{1}{6}\pi\mathbf{j}$, $\mathbf{U} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$, entonces

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{U}}f(x, y) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}h, y + \frac{1}{2}h) - f(x, y)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{12 - (x + \frac{1}{2}\sqrt{3}h)^2 - 4(y + \frac{1}{2}h)^2 - (12 - x^2 - 4y^2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{12 - x^2 - \sqrt{3}hx - \frac{3}{4}h^2 - 4y^2 - 4hy - h^2 - 12 + x^2 + 4y^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-\sqrt{3}hx - \frac{7}{4}h^2 - 4hy}{h} \\
&= \lim_{h \to 0}(-\sqrt{3}x - \tfrac{7}{4}h - 4y) \\
&= -\sqrt{3}x - 4y
\end{aligned}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Para la función f y el vector unitario $\mathbf{U}$ del ejemplo 1,

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{U}}f(2, 1) &= -2\sqrt{3} - 4 \\
&\approx -7.464
\end{aligned}$$

La figura 3 muestra la interpretación geométrica de esta derivada direccional. La curva C es la intersección de la superficie

$$z = 12 - x^2 - 4y^2$$

con el plano que pasa por $R(2, 1, 0)$, $Q(2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}h, 1 + \frac{1}{2}h, 0)$ y $P_0(2, 1, 4)$. El valor -7.464 de la derivada direccional es la pendiente de la recta tangente a la curva C en P_0 en el plano definido por R, Q y P_0. ◀

Ahora se obtendrá una fórmula que permite calcular una derivada direccional de manera más breve que empleando la definición. Sea g la función de la variable t, con x, y y θ fijos, de modo que

$$g(t) = f(x + t\cos\theta, y + t\,\text{sen}\,\theta) \tag{1}$$

y sea $\mathbf{U} = \cos\theta\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\mathbf{j}$. Entonces, por la definición de derivada ordinaria, se tiene

$$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + (0 + h)\cos\theta, y + (0 + h)\,\text{sen}\,\theta) - f(x + 0\cos\theta, y + 0\,\text{sen}\,\theta)}{h}$$

$$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h\cos\theta, y + h\,\text{sen}\,\theta) - f(x, y)}{h}$$

Como el miembro derecho de la ecuación anterior es $D_{\mathbf{U}}f(x, y)$, entonces

$$g'(0) = D_{\mathbf{U}}f(x, y) \tag{2}$$

Ahora se obtendrá $g'(t)$ aplicando la regla de la cadena al miembro derecho de (1), obteniéndose

$$g'(t) = f_1(x + t\cos\theta, y + t\,\text{sen}\,\theta)\frac{\partial(x + t\cos\theta)}{\partial t} + f_2(x + t\cos\theta, y + t\,\text{sen}\,\theta)\frac{\partial(y + t\,\text{sen}\,\theta)}{\partial t}$$

$$= f_1(x + t\cos\theta, y + t\,\text{sen}\,\theta)\cos\theta + f_2(x + t\cos\theta, y + t\,\text{sen}\,\theta)\,\text{sen}\,\theta$$

Por tanto,

$$g'(0) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\,\text{sen}\,\theta$$

De esta ecuación y de (2) se tiene el teorema siguiente.

12.6.2 Teorema

Si f es una función diferenciable de x y y, y $\mathbf{U} = \cos\theta\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\mathbf{j}$, entonces

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\,\text{sen}\,\theta$$

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Se aplicará el teorema 12.6.2 para calcular $D_{\mathbf{U}}f$ para la función y el vector unitario del ejemplo 1.

$$f(x, y) = 12 - x^2 - 4y^2 \qquad \mathbf{U} = \cos\tfrac{1}{6}\pi\mathbf{i} + \text{sen}\,\tfrac{1}{6}\pi\mathbf{j}$$

Entonces

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{U}}f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\tfrac{1}{6}\pi + f_y(x, y)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{6}\pi \\ &= -2x(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}) - 8y(\tfrac{1}{2}) \\ &= -\sqrt{3}x - 4y \end{aligned}$$

lo cual es acorde con el resultado del ejemplo 1. ◀

La derivada direccional puede expresarse como el producto punto de dos vectores. Como

$$f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\,\text{sen}\,\theta = (\cos\theta\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\mathbf{j}) \cdot [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}]$$

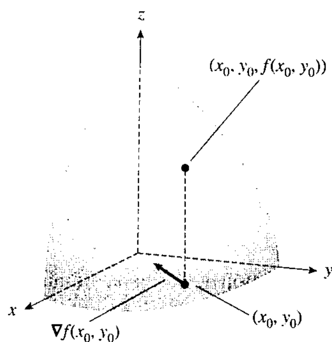


FIGURA 4

entonces, por el teorema 12.6.2

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = (\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}) \cdot [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}] \tag{3}$$

La función vectorial del miembro derecho de (3) es una función importante, y se denomina *gradiente* de la función f de las dos variables x y y. El símbolo para el gradiente de f es ∇f, donde ∇ es la letra griega delta mayúscula invertida y se lee "del". En ocasiones se emplea la abreviación *grad f*.

12.6.3 Definición del gradiente de una función de dos variables

Si f es una función de las dos variables x y y, y f_x y f_y existen, entonces el **gradiente** de f, denotado por ∇f (léase "del f"), está definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

A fin de representar el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ en el plano xy, se toma el punto inicial en (x_0, y_0). Refiérase la figura 4.

De la definición 12.6.3, la ecuación (3) puede escribirse como

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = \mathbf{U} \cdot \nabla f(x, y) \tag{4}$$

Por tanto, cualquier derivada direccional de una función diferenciable puede obtenerse mediante el producto punto del gradiente y un vector unitario de la dirección deseada. Esta fórmula es la que más conviene emplear al calcular una derivada direccional.

▶ EJEMPLO 2 Si

$$f(x, y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$$

(a) Determine el gradiente de f en $R(4, 3)$. **(b)** Utilice el gradiente para calcular la derivada direccional de f en R en la dirección de R a $Q(5, 6)$. **(c)** Dibuje las representaciones de los vectores $\nabla f(4, 3)$ y $\mathbf{V}(\overrightarrow{RQ})$ que tienen su punto inicial en R.

Solución

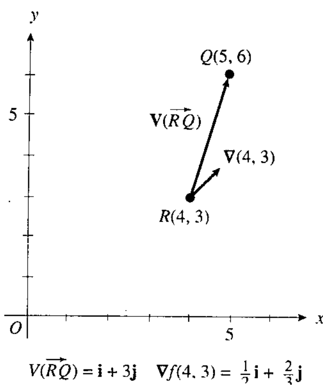


FIGURA 5

(a) Como $f_x(x, y) = x/8$ y $f_y(x, y) = 2y/9$, entonces

$$\nabla f(x, y) = \frac{x}{8}\mathbf{i} + \frac{2y}{9}\mathbf{j} \qquad \nabla f(4, 3) = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j}$$

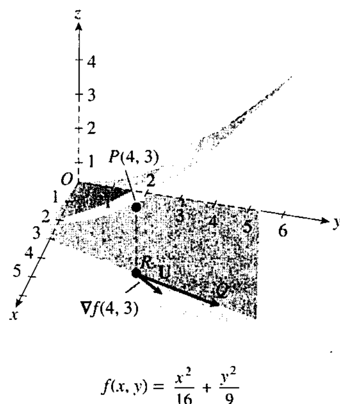
(b) El vector en la dirección de $R(4, 3)$ a $Q(5, 6)$ es

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\overrightarrow{RQ}) &= (5 - 4)\mathbf{i} + (6 - 3)\mathbf{j}\\ &= \mathbf{i} + 3\mathbf{j}\end{aligned}$$

El vector unitario $\mathbf{U}$ en la dirección de $\mathbf{V}$ es $\mathbf{V}(\overrightarrow{RQ})/\|\mathbf{V}(\overrightarrow{RQ})\|$:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{j}$$

Se calculará $D_{\mathbf{U}}f(4, 3)$ mediante el producto punto de $\mathbf{U}$ por $\nabla f(4, 3)$:



$$f(x, y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$$

FIGURA 6

$$D_{\mathbf{U}}f(4, 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j}\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{10}}$$
$$= \frac{5}{2\sqrt{10}} \approx 0.79$$

(c) Las representaciones de $\nabla f(4, 3)$ y $\mathbf{V}(\overrightarrow{RQ})$ se muestran en la figura 5. ◀

La gráfica de la función f del ejemplo 2 es un paraboloide elíptico. La figura 6 muestra esta superficie, el gradiente de f en R, el vector unitario $\mathbf{U}$ en la dirección de $\mathbf{V}(\overrightarrow{RQ})$, y el plano que pasa por R, Q y el punto $P(4, 3, 2)$ del paraboloide. $D_{\mathbf{U}}f(4, 3)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto P de la curva de intersección del plano con el paraboloide.

De (4), se puede concluir que si $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$, entonces $D_{\mathbf{U}}f(x_0, y_0) = 0$ para cualquier $\mathbf{U}$. Si $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces de (4) y del teorema 10.3.5 y si α es la medida en radianes del ángulo entre los dos vectores $\mathbf{U}$ y $\nabla f(x_0, y_0)$, entonces

$$D_{\mathbf{U}}f(x_0, y_0) = \mathbf{U} \cdot \nabla f(x_0, y_0)$$
$$= \|\mathbf{U}\| \, \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos \alpha$$
$$= \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos \alpha$$

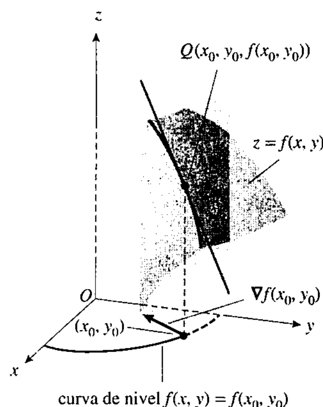


FIGURA 7

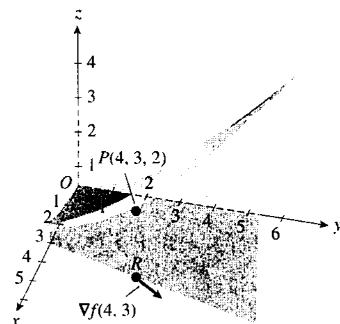
De esta ecuación, el valor máximo de $D_{\mathbf{U}}f(x_0, y_0)$ ocurre cuando $\cos \alpha = 1$; es decir, cuando $\alpha = 0$ o, equivalentemente, cuando $\mathbf{U}$ está en la dirección de $\nabla f(x_0, y_0)$. El valor máximo de $D_{\mathbf{U}}f(x_0, y_0)$ es $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$. De manera similar, el valor mínimo de $D_{\mathbf{U}}f(x_0, y_0)$ se presenta cuando $\cos \alpha = -1$; esto es, cuando $\alpha = \pi$ o, equivalentemente, cuando la dirección de $\mathbf{U}$ es opuesta a la de $\nabla f(x_0, y_0)$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{U}}f(x_0, y_0)$ es $-\|\nabla f(x_0, y_0)\|$. El teorema siguiente resume estos resultados.

12.6.4 Teorema

Sea f una función de dos variables y diferenciable en (x_0, y_0), donde $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$. Sea $\mathbf{U}$ cualquier vector unitario, tal que $D_{\mathbf{U}}f(x_0, y_0)$ es una función de $\mathbf{U}$.

(i) El valor máximo de $D_{\mathbf{U}}f(x_0, y_0)$ es $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$. Este valor máximo se obtiene cuando la dirección de $\mathbf{U}$ es la de $\nabla f(x_0, y_0)$.

(ii) El valor mínimo de $D_{\mathbf{U}}f(x_0, y_0)$ es $-\|\nabla f(x_0, y_0)\|$. Este valor mínimo se alcanza cuando la dirección de $\mathbf{U}$ es la opuesta de la dirección de $\nabla f(x_0, y_0)$.



$$f(x, y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$$

FIGURA 8

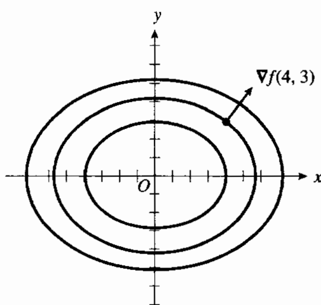
El inciso (i) de este teorema afirma que si $z = f(x, y)$, entonces la tasa máxima de crecimiento de z en (x_0, y_0) ocurre en la dirección de $\nabla f(x_0, y_0)$, como se muestra en la figura 7. De este modo, $\nabla f(x_0, y_0)$ apunta en la dirección de *máxima inclinación*. Este hecho sugiere el nombre de *gradiente*; esto es, el grado de mayor inclinación es en la dirección del gradiente.

En el ejemplo ilustrativo siguiente se interpreta el teorema 12.6.4 en términos geométricos para una función particular.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Refiérase a la figura 8 que muestra el paraboloide elíptico definido por la función f del ejemplo 2, de este modo,

$$z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$$

La figura también muestra el punto $R(4, 3)$ del plano xy, el punto $P(4, 3, 2)$ del paraboloide y el vector gradiente $\nabla f(4, 3)$ en el plano xy. La máxima tasa de crecimiento de z en el punto P ocurre en la dirección de $\nabla f(4, 3)$. De manera similar, la tasa mínima de crecimiento o, equivalentemente, la tasa máxima de decrecimiento, de z en P ocurre en la dirección de $-\nabla f(4, 3)$. ◀



Curvas de nivel de $f(x, y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$

FIGURA 9

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** En la figura 9 se muestra un mapa de contornos que presenta las curvas de nivel de la función del ejemplo 2 y del ejemplo ilustrativo 3 para 1, 2 y 3. Estas curvas de nivel son elipses. La figura también muestra la representación de $\nabla f(4, 3)$ cuyo punto inicial es $(4, 3)$ y apunta en la dirección de máxima inclinación. ◀

▶ ***EJEMPLO 3*** Dada

$$f(x, y) = 2x^2 - y^2 + 3x - y$$

calcule el valor máximo de $D_U f$ en el punto donde $x = 1$ y $y = -2$.

Solución Como $f_x(x, y) = 4x + 3$ y $f_y(x, y) = -2y - 1$, entonces

$$\nabla f(x, y) = (4x + 3)\mathbf{i} + (-2y - 1)\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \nabla f(1, -2) = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

Por lo que el valor máximo de $D_U f$ en $(1, -2)$ es

$$\begin{aligned} \| \nabla f(1, -2) \| &= \sqrt{49 + 9} \\ &= \sqrt{58} \end{aligned}$$

Este resultado indica que la gráfica de f está muy inclinada en el punto $(1, -2, 3)$ de la superficie. ◀

▶ ***EJEMPLO 4*** La temperatura en cualquier punto (x, y) de una placa rectangular situada en el plano xy está determinada por

$$T(x, y) = x^2 + y^2$$

(a) Calcule la tasa de variación de la temperatura en el punto $(3, 4)$ en la dirección que forma un ángulo de $\frac{1}{3}\pi$ rad con la parte positiva del eje x. **(b)** Determine el ángulo de la dirección en la que la tasa de variación de la temperatura en el punto $(-3, 1)$ es un máximo.

Solución

(a) Se desea calcular $D_U T(x, y)$, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \cos \tfrac{1}{3}\pi \mathbf{i} + \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\pi \mathbf{j} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j} \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} \nabla T(x, y) &= T_x(x, y)\mathbf{i} + T_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} D_U T(x, y) &= \mathbf{U} \cdot \nabla T(x, y) \\ &= (\tfrac{1}{2}\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}) \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}) \\ &= x + \sqrt{3}\, y \end{aligned}$$

Así,

$$D_{\mathbf{U}}T(3, 4) = 3 + 4\sqrt{3}$$
$$\approx 9.93$$

<u>**Conclusión:**</u> En el punto (3, 4) la temperatura crece aproximadamente a la tasa de 9.93 unidades por unidad de variación en la distancia medida en la dirección de **U**.

(b) $D_{\mathbf{U}}T(-3, 1)$ es un máximo cuando **U** está en la dirección de $\nabla T(-3, 1)$. Como $\nabla T(-3, 1) = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, entonces la medida en radianes del ángulo que indica la dirección de $\nabla T(-3, 1)$ es θ, donde $\tan \theta = -\frac{1}{3}$. De esta manera, $\theta = \pi - \tan^{-1} \frac{1}{3} \approx 2.82$.

<u>**Conclusión:**</u> La tasa de variación de la temperatura en el punto (−3, 1) es un máximo en la dirección que forma aproximadamente un ángulo de 2.82 rad con la parte positiva del eje x. ◀

La definición siguiente extiende el concepto de derivada direccional para funciones de tres variables, de modo que proporcione la tasa de variación de los valores de función $f(x, y, z)$ con respecto a la distancia medida en la dirección de un vector unitario $\mathbf{U} = \cos \alpha\mathbf{i} + \cos \beta\mathbf{j} + \cos \gamma\mathbf{k}$ del espacio tridimensional.

12.6.5 Definición de derivada direccional de una función de tres variables

Suponga que f es una función de las tres variables x, y y z. Si **U** es el vector unitario $\cos \alpha\mathbf{i} + \cos \beta\mathbf{j} + \cos \gamma\mathbf{k}$, entonces la **derivada direccional** de f en la dirección de **U**, denotada por $D_{\mathbf{U}}f$, está dada por

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\cos \alpha, y + h\cos \beta, z + h\cos \gamma) - f(x, y, z)}{h}$$

si este límite existe.

El teorema siguiente, el cual proporciona un método para calcular una derivada direccional de una función de tres variables, se prueba de manera semejante a la demostración del teorema 12.6.2, el cual es el teorema correspondiente para funciones de dos variables.

12.6.6 Teorema

Si f es una función diferenciable de x, y y z, y

$$\mathbf{U} = \cos \alpha\mathbf{i} + \cos \beta\mathbf{j} + \cos \gamma\mathbf{k}$$

entonces

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\cos \alpha + f_y(x, y, z)\cos \beta + f_z(x, y, z)\cos \gamma$$

▶ ***EJEMPLO 5*** Dada

$$f(x, y, z) = 3x^2 + xy - 2y^2 - yz + z^2$$

calcule la tasa de variación de $f(x, y, z)$ en $(1, -2, -1)$ en la dirección del vector $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solución El vector unitario en la dirección de $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ es

$$\mathbf{U} = \tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{2}{3}\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}\mathbf{k}$$

Del teorema 12.6.6,

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y, z) = \tfrac{2}{3}(6x + y) - \tfrac{2}{3}(x - 4y - z) - \tfrac{1}{3}(-y + 2z)$$

Por tanto, la tasa de variación de $f(x, y, z)$ en $(1, -2, -1)$ en la dirección de $\mathbf{U}$ está determinada por

$$D_{\mathbf{U}}f(1, -2, -1) = \tfrac{2}{3}(4) - \tfrac{2}{3}(10) - \tfrac{1}{3}(0)$$
$$= -4$$

◀

12.6.7 Definición del gradiente de una función de tres variables

Si f es una función de las tres variables x, y y z, y las primeras derivadas parciales f_x, f_y y f_z existen, entonces el **gradiente** de f, denotado por ∇f, está definido por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

Al igual que para las funciones de dos variables, si $\mathbf{U}$ es un vector unitario, entonces de la definición anterior y del teorema 12.6.6 se tiene

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y, z) = \mathbf{U} \cdot \nabla f(x, y, z)$$

El teorema 12.6.4(i) puede extenderse para funciones de tres variables, de modo que la derivada direccional es un máximo cuando $\mathbf{U}$ está en la dirección del gradiente, y es igual al módulo del gradiente. Se tiene un comentario similar para el inciso (ii) del teorema 12.6.4.

En física se puede aplicar el gradiente en algunos problemas relacionados con la conducción de calor y electricidad. Suponga, por ejemplo, que la función f está definida por la ecuación $w = f(x, y, z)$. La superficie de nivel de f para la constante k está determinada por la ecuación

$$f(x, y, z) = k$$

Si w grados es la temperatura en el punto (x, y, z), entonces todos los puntos de esta curva de nivel tienen la misma temperatura de k grados, por lo que esta superficie se denomina **superficie isoterma.** Si w volts es el potencial eléctrico en un punto (x, y, z), entonces todos los puntos de la superficie están al mismo potencial, por lo que la superficie recibe el nombre de **superficie equipotencial.** En el caso de una superficie isoterma, el gradiente proporciona la dirección de la máxima tasa de variación de la temperatura, y para una superficie equipotencial, el gradiente indica la dirección de la máxima tasa de variación del potencial.

▶ ***EJEMPLO 6*** Suponga que $V(x, y, z)$ volts es el potencial eléctrico en cualquier punto (x, y, z) del espacio tridimensional y que

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

(a) Calcule la tasa de variación de V en el punto $(2, 2, -1)$ en la dirección del vector $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. **(b)** Determine la dirección de la máxima tasa de variación de V en $(2, 2, -1)$.

Solución

(a) Un vector unitario en la dirección de $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ es

$$\mathbf{U} = \tfrac{2}{7}\mathbf{i} - \tfrac{3}{7}\mathbf{j} + \tfrac{6}{7}\mathbf{k}$$

Se desea calcular $D_{\mathbf{U}}V(2, 2, -1)$.

$$\begin{aligned}\nabla V(x, y, z) &= V_x(x, y, z)\mathbf{i} + V_y(x, y, z)\mathbf{j} + V_z(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{k}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{U}}V(2, 2, -1) &= \mathbf{U} \cdot \nabla V(2, 2, -1) \\ &= (\tfrac{2}{7}\mathbf{i} - \tfrac{3}{7}\mathbf{j} + \tfrac{6}{7}\mathbf{k}) \cdot (-\tfrac{2}{27}\mathbf{i} - \tfrac{2}{27}\mathbf{j} + \tfrac{1}{27}\mathbf{k}) \\ &= -\tfrac{4}{189} + \tfrac{6}{189} + \tfrac{6}{189} \\ &= \tfrac{8}{189} \\ &\approx 0.042\end{aligned}$$

<u>Conclusión:</u> En $(2, 2, -1)$, el potencial crece aproximadamente a la tasa de 0.042 volt por unidad de variación en la distancia medida en la dirección de U.

(b) $\nabla V(2, 2, -1) = (-\tfrac{2}{27}\mathbf{i} - \tfrac{2}{27}\mathbf{j} + \tfrac{1}{27}\mathbf{k})$. Un vector unitario en la dirección de $\nabla V(2, 2, -1)$ es

$$\begin{aligned}\frac{\nabla V(2, 2\ -1)}{\|\nabla V(2, 2, -1)\|} &= \frac{-\tfrac{2}{27}\mathbf{i} - \tfrac{2}{27}\mathbf{j} + \tfrac{1}{27}\mathbf{k}}{\tfrac{3}{27}} \\ &= -\tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{2}{3}\mathbf{j} + \tfrac{1}{3}\mathbf{k}\end{aligned}$$

Los cosenos directores de este vector son $-\tfrac{2}{3}$, $-\tfrac{2}{3}$ y $\tfrac{1}{3}$, los cuales proporcionan la dirección de la máxima tasa de variación de V en $(2, 2, -1)$. ◀

EJERCICIOS 12.6

En los ejercicios 1 a 6, calcule la derivada direccional de la función en la dirección del vector unitario $\mathbf{U}$ *empleando la definición 12.6.1 o la definición 12.6.5, y después verifique el resultado aplicando el teorema 12.6.2 o el teorema 12.6.6, según corresponda.*

1. $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$; $\mathbf{U} = \cos \tfrac{1}{4}\pi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \tfrac{1}{4}\pi\,\mathbf{j}$

2. $g(x, y) = 3x^2 + 4y^2$; $\mathbf{U} = \cos \tfrac{1}{3}\pi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\pi\,\mathbf{j}$

3. $g(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - 4z^2$; $\mathbf{U} = \cos \tfrac{1}{3}\pi\,\mathbf{i} + \cos \tfrac{1}{4}\pi\,\mathbf{j} + \cos \tfrac{2}{3}\pi\,\mathbf{k}$

4. $f(x, y, z) = 6x^2 - 2xy + yz$; $\mathbf{U} = \tfrac{3}{7}\mathbf{i} + \tfrac{2}{7}\mathbf{j} + \tfrac{6}{7}\mathbf{k}$

5. $g(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$; $\mathbf{U} = -\tfrac{12}{13}\mathbf{i} + \tfrac{5}{13}\mathbf{j}$

6. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$; $\mathbf{U} = \tfrac{3}{5}\mathbf{i} - \tfrac{4}{5}\mathbf{j}$

En los ejercicios 7 a 14, calcule el gradiente de la función.

7. $f(x, y) = 4x^2 - 3xy + y^2$

8. $g(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

9. $g(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
10. $f(x, y) = e^y \tan 2x$
11. $f(x, y, z) = \dfrac{x - y}{x + z}$
12. $f(x, y, z) = 3z \ln(x + y)$
13. $g(x, y, z) = xe^{-2y} \sec z$
14. $g(x, y, z) = e^{2z} (\operatorname{sen} x - \cos y)$

En los ejercicios 15 a 22 calcule el valor de la derivada direccional en el punto P_0 para la función en la dirección de **U**.

15. $f(x, y) = x^2 - 2xy^2$; $\mathbf{U} = \cos \pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \pi\mathbf{j}$; $P_0 = (1, -2)$
16. $g(x, y) = 3x^3y + 4y^2 - xy$; $\mathbf{U} = \cos \frac{1}{4}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \frac{1}{4}\pi\mathbf{j}$; $P_0 = (0, 3)$
17. $g(x, y) = y^2 \tan^2 x$; $\mathbf{U} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$; $P_0 = (\frac{1}{3}\pi, 2)$
18. $f(x, y) = xe^{2y}$; $\mathbf{U} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{j}$; $P_0 = (2, 0)$
19. $h(x, y, z) = \cos(xy) + \operatorname{sen}(yz)$; $\mathbf{U} = -\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$; $P_0 = (2, 0, -3)$
20. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; $\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$; $P_0 = (1, 3, 2)$
21. $f(x, y) = e^{-3x} \cos 3y$; $\mathbf{U} = \cos(-\frac{1}{12}\pi)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(-\frac{1}{12}\pi)\mathbf{j}$; $P_0 = (-\frac{1}{12}\pi, 0)$
22. $g(x, y, z) = \cos 2x \cos 3y \operatorname{senh} 4z$; $\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$; $P_0 = (\frac{1}{12}\pi, 0, 0)$

En los ejercicios 23 a 26, calcule (a) el gradiente de f en P, y (b) la tasa de variación del valor de la función en la dirección de **U** *en P.*

23. $f(x, y) = x^2 - 4y$; $P = (-2, 2)$; $\mathbf{U} = \cos \frac{1}{3}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi\mathbf{j}$
24. $f(x, y) = e^{2xy}$; $P = (2, 1)$; $\mathbf{U} = \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$
25. $f(x, y, z) = y^2 + z^2 - 4xz$; $P = (-2, 1, 3)$; $\mathbf{U} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{6}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}$
26. $f(x, y, z) = 2x^3 + xy^2 + xz^2$; $P = (1, 1, 1)$; $\mathbf{U} = \frac{1}{7}\sqrt{21}\,\mathbf{j} - \frac{2}{7}\sqrt{7}\,\mathbf{k}$
27. Dibuje un mapa de contornos que muestre las curvas de nivel de la función del ejercicio 23, para 8, 4, 0, −4 y −8. También muestre la representación de $\nabla f(-2, 2)$ cuyo punto inicial es (−2, 2).
28. Dibuje un mapa de contornos que muestre las curvas de nivel de la función del ejercicio 24, para e^8, e^4, 1, e^{-4} y e^{-8}. También muestre la representación de $\nabla f(2; 1)$ que tiene su punto inicial en (2, 1).

En los ejercicios 29 a 32, calcule $D_{\mathbf{U}}f$ en el punto P para el cual **U** *es un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{PQ}$. También en P, calcule $D_{\mathbf{U}}f$, si* **U** *es un vector unitario para el cual $D_{\mathbf{U}}f$ es un máximo.*

29. $f(x, y) = e^x \tan^{-1} y$; $P(0, 1)$, $Q(3, 5)$
30. $f(x, y) = e^x \cos y + e^y \operatorname{sen} x$; $P = (1, 0)$, $Q(-3, 3)$
31. $f(x, y, z) = x - 2y + z^2$; $P = (3, 1, -2)$, $Q(10, 7, 4)$
32. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4xz$; $P = (3, 1, -2)$, $Q(-6, 3, 4)$
33. Determine la dirección a partir del punto (1, 3) para la cual el valor de f no cambia si $f(x, y) = e^{2y} \tan^{-1} \dfrac{y}{3x}$.
34. La densidad en cualquier punto de una placa rectangular situada en el plano xy es $\rho(x, y)$ kilogramos por metro cuadrado, donde

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 3}}$$

(a) Calcule la tasa de variación de la densidad en el punto (3, 2) en la dirección del vector unitario $\cos \frac{2}{3}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi\mathbf{j}$. **(b)** Determine la dirección y la intensidad (o módulo) de la máxima tasa de variación de ρ en (3,2).

35. La temperatura en cualquier punto de una placa rectangular situada en el plano xy es $T(x, y)$, donde $T(x, y) = 3x^2 + 2xy$. La distancia se mide en metros. **(a)** Calcule la máxima tasa de variación de la temperatura en el punto (3, −6) de la placa. **(b)** Determine la dirección para la cual ocurre esta tasa de variación máxima en (3, −6).
36. En cualquier punto de un sólido del espacio tridimensional la temperatura es $T(x, y, z)$ grados, donde

$$T(x, y, z) = \frac{60}{x^2 + y^2 + z^2 + 3}$$

La distancia se mide en pulgadas. **(a)** Calcule la tasa de variación de la temperatura en el punto (3, −2, 2) en la dirección del vector $-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$. **(b)** Determine la dirección y la intensidad (o módulo) de la máxima tasa de variación de T en (3, −2, 2).

37. En cualquier punto del plano xy el potencial eléctrico es $V(x, y)$ volts, y $V(x, y) = e^{-2x} \cos 2y$. La distancia se mide en pies. **(a)** Calcule la tasa de variación del potencial en el punto $(0, \frac{1}{4}\pi)$ en la dirección del vector unitario $\cos \frac{1}{6}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi\mathbf{j}$. **(b)** Determine la dirección y la intensidad (o módulo) de la máxima tasa de variación de V en $(0, \frac{1}{4}\pi)$.
38. Una ecuación de la superficie de una montaña es

$$z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$$

donde la distancia se mide en metros, el eje x apunta hacia el este y el eje y hacia el norte. Una alpinista se encuentra en el punto que corresponde a (−10, 5, 850). **(a)** ¿Cuál es la dirección de máxima inclinación? **(b)** Si la alpinista se desplaza en la dirección este, ¿ella asciende o desciende, y a qué tasa? **(c)** Si la alpinista se desplaza en la dirección suroeste, ¿ella asciende o desciende, y a qué tasa? **(d)** ¿En qué dirección recorre la alpinista una curva de nivel?

12.7 PLANOS TANGENTES Y RECTAS NORMALES A SUPERFICIES

Ahora se mostrará cómo el vector gradiente se emplea para estudiar planos tangentes y rectas normales a superficies en el espacio tridimensional. Considere la ecuación

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

donde F es diferenciable y F_x, F_y y F_z no son simultáneamente cero. Un teorema de Cálculo avanzado, conocido como el *teorema de la función implícita*, garantiza que una de las tres variables x, y o z es función de las otras dos. Por tanto, puede considerarse la gráfica de la ecuación (1) como una superficie S.

Suponga que P_0 es un punto (x_0, y_0, z_0) de S, de modo que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Además suponga que C es una curva en S que pasa por P_0 y que un conjunto de ecuaciones paramétricas de C es

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t) \tag{2}$$

donde el valor del parámetro t en P_0 es t_0. Una ecuación vectorial de C es

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Como la curva C está sobre la superficie S, se tiene, al sustituir de (2) en (1),

$$F(f(t), g(t), h(t)) = 0 \tag{3}$$

Sea $G(t) = F(f(t), g(t), h(t))$. Si F es diferenciable y F_x, F_y y F_z no son todas cero en P_0 y si $f'(t_0)$, $g'(t_0)$ y $h'(t_0)$ existen, entonces la derivada total de F con respecto a t en P_0 está dada por

$$G'(t_0) = F_x(x_0, y_0, z_0)f'(t_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)\, g'(t_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)\, h'(t_0)$$

El miembro derecho de esta ecuación se puede escribir como

$$[F_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + F_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + F_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}] \cdot [f'(t_0)\mathbf{i} + g'(t_0)\mathbf{j} + h'(t_0)\mathbf{k}]$$

Así,

$$G'(t_0) = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot D_t\mathbf{R}(t_0)$$

Puesto que $G'(t) = 0$ para toda t (debido a (3)), $G'(t_0) = 0$; por tanto, se deduce que

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot D_t\mathbf{R}(t_0) = 0 \tag{4}$$

De la sección 11.3 se sabe que $D_t\mathbf{R}(t_0)$ tiene la misma dirección que un vector tangente a la curva C en P_0. Por tanto, de (4) se puede concluir que el vector gradiente de F en P_0 es ortogonal a un vector tangente de cada curva C de S que pase por el punto P_0. Así, se ha demostrado el teorema siguiente en el que se emplea el término *vector normal*, el cual se definirá antes de enunciar el teorema.

12.7.1 Definición de vector normal

Un vector ortogonal a un vector tangente de toda curva C que pase por un punto P_0 de una superficie S se denomina **vector normal** a S en P_0.

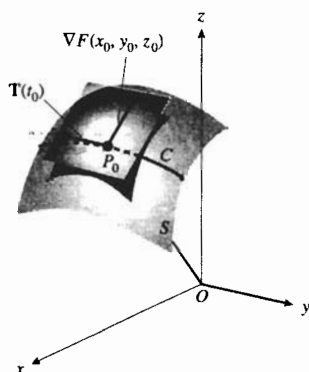


FIGURA 1

12.7.2 Teorema

Si una ecuación de una superficie S es $F(x, y, z) = 0$, y si F es diferenciable y F_x, F_y y F_z no son todas cero en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de S, entonces $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es un vector normal a S en P_0.

El concepto de vector normal se emplea para definir el *plano tangente* a una superficie en un punto.

12.7.3 Definición de plano tangente

Si una ecuación de una superficie S es $F(x, y, z) = 0$, y F satisface la hipótesis del teorema 12.7.2, entonces el **plano tangente** de S en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es el plano que pasa por P_0 y tiene a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ como un vector normal.

Una ecuación del plano tangente de la ecuación anterior es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \quad (5)$$

Refiérase a la figura 1, la cual muestra el plano tangente a la superficie S en P_0 y la representación del vector gradiente que tiene su punto inicial en P_0.

Una ecuación vectorial del plano tangente dado en (5) es

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] = 0 \quad (6)$$

EJEMPLO 1 Obtenga una ecuación del plano tangente al paraboloide elíptico

$$4x^2 + y^2 - 16z = 0$$

en el punto (2, 4, 2).

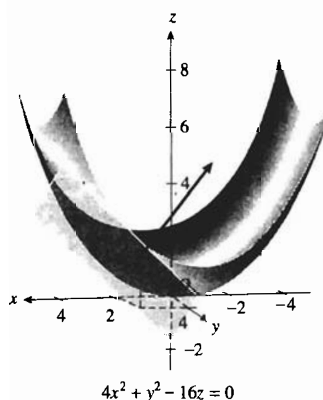
Solución Sea $F(x, y, z) = 4x^2 + y^2 - 16z$. Entonces

$$\nabla F(x, y, z) = 8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 16\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \nabla F(2, 4, 2) = 16\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$$

De (6) se infiere que una ecuación del plano tangente es

$$16(x - 2) + 8(y - 4) - 16(z - 2) = 0$$
$$2x + y - 2z - 4 = 0$$

La figura 2 muestra el paraboloide elíptico junto con el plano tangente y la representación del vector normal en (2, 4, 2). ◀



$4x^2 + y^2 - 16z = 0$

FIGURA 2

La definición siguiente de *recta normal* a una superficie en un punto está motivada por el requisito de que la representación del vector normal en un punto debe estar sobre la recta normal.

12.7.4 Definición de recta normal a una superficie

La **recta normal** a una superficie S en un punto P_0 de S es la recta que pasa por P_0 y tiene como un conjunto de números directores a las componentes de cualquier vector normal a S en P_0.

De esta definición, si una ecuación de una superficie S es $F(x, y, z) = 0$, entonces las ecuaciones simétricas de la recta normal de S en (x_0, y_0, z_0) son

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

debido a que los denominadores son las componentes de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ el cual es un vector normal a S en (x_0, y_0, z_0).

▶ ***EJEMPLO 2*** Obtenga las ecuaciones simétricas de la recta normal a la superficie del ejemplo 1 en el punto (2, 4, 2).

Solución Como $\nabla F(2, 4, 2) = 16\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$, las ecuaciones simétricas de la recta normal son

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{-2}$$ ◀

12.7.5 Definición de recta tangente a una curva en el espacio

La **recta tangente** a una curva C en el punto P_0 es la recta que pasa por P_0 y tiene como números directores las componentes del vector tangente unitario a C en P_0.

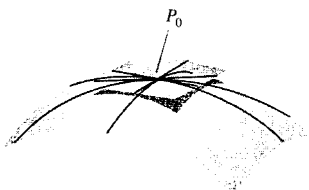


FIGURA 3

De esta definición y la definición 12.7.3, todas las rectas tangentes en el punto P_0 a las curvas contenidas en una superficie dada están en el plano tangente a la superficie en P_0. Refiérase a la figura 3, la cual muestra dibujos de algunas curvas que pasan por P_0 y sus rectas tangentes.

Considere ahora la curva C de intersección de dos superficies que tienen ecuaciones

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{y} \quad G(x, y, z) = 0$$

respectivamente. Se mostrará cómo se obtienen las ecuaciones de la recta tangente a C en un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Puesto que esta recta tangente está contenida en cada uno de los planos tangentes a las superficies dadas en P_0, dicha recta es la recta de intersección de los dos planos tangentes. Sea $\mathbf{N}_1$ un vector normal en P_0 a la superficie que tiene la ecuación $F(x, y, z) = 0$, y sea $\mathbf{N}_2$ un vector normal en P_0 a la superficie que tiene la ecuación $G(x, y, z) = 0$. Entonces

$$\mathbf{N}_1 = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \quad \text{y} \quad \mathbf{N}_2 = \nabla G(x_0, y_0, z_0)$$

Los vectores $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$ son ortogonales al vector tangente unitario a C en P_0. De modo que si $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$ no son paralelos, entonces, del teorema 10.5.10, el vector tangente unitario tiene la misma dirección, o la opuesta, que el vector $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$. Por tanto, las componentes de $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$ sirven como los números directores de la recta tangente. A partir de este conjunto de números directores y de las coordenadas de P_0 se pueden obtener las ecuaciones simétricas de la recta tangente requeridas, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

▶ ***EJEMPLO 3*** Obtenga las ecuaciones simétricas de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 49 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 2z^2 = 10$$

en el punto (3, −3, 2).

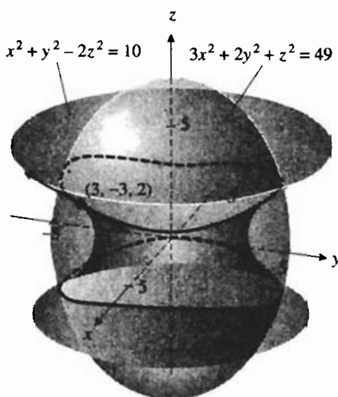


FIGURA 4

Solución Sean

$$F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 49 \quad \text{y} \quad G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 - 10$$

entonces

$$\nabla F(x, y, z) = 6x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \nabla G(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 4z\mathbf{k}$$

Por tanto,

$$\mathbf{N}_1 = \nabla F(3, -3, 2) = 18\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = 2(9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \qquad \mathbf{N}_2 = \nabla G(3, -3, 2) = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 8\mathbf{k} = 2(3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$$

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 &= 4(9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})\\ &= 4(30\mathbf{i} + 42\mathbf{j} - 9\mathbf{k})\\ &= 12(10\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 3\mathbf{k})\end{aligned}$$

En consecuencia, un conjunto de números directores de la recta tangente es [10, 14, −3]. Así, las ecuaciones simétricas de la recta tangente son

$$\frac{x-3}{10} = \frac{y+3}{14} = \frac{z-2}{-3}$$

La figura 4 muestra dibujos de las dos superficies, la curva de intersección y la recta tangente en (3, −3, 2). ◀

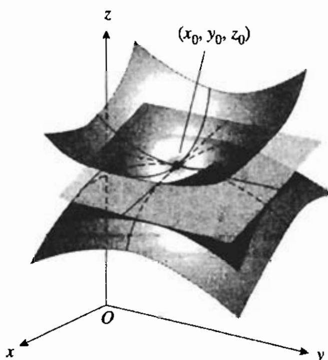


FIGURA 5

Si dos superficies tienen un plano tangente común en un punto, se dice que las dos superficies son **tangentes** en ese punto. Vea la figura 5. De la definición 12.7.3, dos superficies cuyas ecuaciones son $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$, son tangentes en el punto (x_0, y_0, z_0) si para alguna constante k

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = k\nabla G(x_0, y_0, z_0)$$

▶ EJEMPLO 4 Demuestre que las esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \text{y} \quad (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$$

son tangentes en el punto (2, 0, 0).

Solución Sean

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 \quad \text{y} \quad G(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 1$$

Entonces

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \qquad \nabla G(x, y, z) = 2(x-1)\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{N}_1 = \nabla F(2, 0, 0) = 4\mathbf{i} \qquad \mathbf{N}_2 = \nabla G(2, 0, 0) = 2\mathbf{i}$$

Como $\mathbf{N}_1 = 2\mathbf{N}_2$ o, equivalentemente, $\nabla F(2, 0, 0) = 2\,\nabla G(2, 0, 0)$, las esferas son tangentes en (2, 0, 0). Consulte la figura 6. ◀

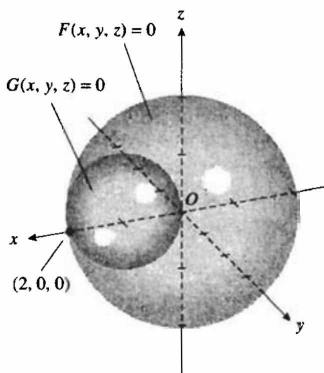


FIGURA 5

El teorema siguiente para funciones de dos variables es análogo al teorema 12.7.2 y su demostración es semejante.

12.7.6 Teorema

Si una ecuación de una curva C es $F(x, y) = 0$ y si F es diferenciable y F_x y F_y no son cero simultáneamente en el punto $P_0(x_0, y_0)$ de C, entonces $\nabla F(x_0, y_0)$ es un vector normal a C en P_0.

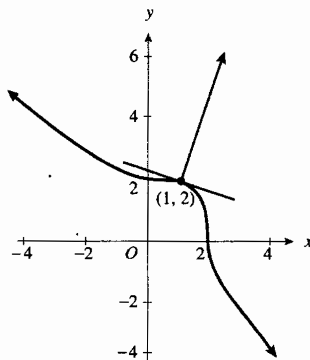


FIGURA 7

Análogas a las ecuaciones (5) y (6) de un plano tangente, se tienen las siguientes ecuaciones para una recta tangente en el punto $P_0(x_0, y_0)$ de la curva contenida en el plano xy si $F(x, y) = 0$:

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

o, equivalentemente,

$$\nabla F(x_0, y_0) \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{k}] = 0$$

EJEMPLO 5 Utilice el gradiente para determinar una ecuación de la recta tangente a la curva $x^3 + y^3 = 9$ en el punto $(1, 2)$.

Solución Sea $F(x, y) = x^3 + y^3 - 9$. El gradiente de F es

$$\nabla F(x, y) = 3x^2\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j}$$

En el punto $(1, 2)$ de la curva, un vector normal es

$$\nabla F(1, 2) = 3\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$$

Por tanto, una ecuación de la recta tangente en $(1, 2)$ es

$$\begin{aligned} \nabla F(1, 2) \cdot [(x - 1)\mathbf{i} + (y - 2)\mathbf{j}] &= 0 \\ (3\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) \cdot [(x - 1)\mathbf{i} + (y - 2)\mathbf{j}] &= 0 \\ 3(x - 1) + 12(y - 2) &= 0 \\ x + 4y - 9 &= 0 \end{aligned}$$

La figura 7 muestra dibujos de la curva, del vector normal y de la recta tangente en $(1, 2)$. ◀

Compare la solución del ejemplo 5 con la solución del ejemplo 3 de la sección 2.9 para el mismo problema.

EJERCICIOS 12.7

En los ejercicios 1 a 12, obtenga una ecuación de la recta normal a la superficie en el punto indicado.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 17$; $(2, -2, 3)$
2. $4x^2 + y^2 + 2z^2 = 26$; $(1, -2, 3)$
3. $x^2 + y^2 - 3z = 2$; $(-2, -4, 6)$
4. $x^2 + y^2 - z^2 = 6$; $(3, -1, 2)$
5. $y = e^x \cos z$; $(1, e, 0)$
6. $z = e^{3x} \operatorname{sen} 3y$; $(0, \frac{1}{6}\pi, 1)$
7. $x^2 = 12y$; $(6, 3, 3)$
8. $z = x^{1/2} + y^{1/2}$; $(1, 1, 2)$
9. $x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} = 4$; $(4, 1, 1)$
10. $zx^2 - xy^2 - yz^2 = 18$; $(0, -2, 3)$
11. $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 14$; $(-8, 27, 1)$
12. $x^{1/2} + z^{1/2} = 8$; $(25, 2, 9)$

En los ejercicios 13 a 20, si las dos superficies se intersectan en una curva, determine ecuaciones de la recta tangente a la curva de intersección en el punto indicado; si las dos superficies son tangentes en el punto dado, demuéstrelo.

13. $x^2 + y^2 - z = 8$, $x - y^2 + z^2 = -2$; $(2, -2, 0)$
14. $x^2 + y^2 - 2z + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; $(0, 1, 1)$
15. $y = x^2$, $y = 16 - z^2$; $(4, 16, 0)$
16. $x = 2 + \cos \pi yz$, $y = 1 + \operatorname{sen} \pi xz$; $(3, 1, 2)$
17. $y = e^x \operatorname{sen} 2\pi z + 2$, $z = y^2 - \ln(x + 1) - 3$; $(0, 2, 1)$
18. $x^2 - 3xy + y^2 = z$, $2x^2 + y^2 - 3z + 27 = 0$; $(1, -2, 11)$

19. $x^2 + z^2 + 4y = 0, x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 7 = 0$; $(0, -1, 2)$

20. $x^2 + y^2 + z^2 = 8, yz = 4$; $(0, 2, 2)$

En los ejercicios 21 a 24, utilice el gradiente para obtener una ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado.

21. $9x^3 - y^3 = 1$; $(1, 2)$

22. $16x^4 + y^4 = 32$; $(1, 2)$

23. $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$; $(1, 2)$

24. $x^4 + 2xy - y^2 = 4$; $(2, -2)$

25. Pruebe que las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $(x - b)^2 + y^2 + z^2 = (b - a)^2$ son tangentes en el punto $(a, 0, 0)$.

26. Demuestre que las superficies $4x^2 + y^2 9z^2 = 108$ y $xyz = 36$ son tangentes en el punto $(3, 6, 2)$.

27. Se dice que dos superficies son **perpendiculares** en un punto de intersección P_0 si los vectores normales a las superficies en P_0 son ortogonales. Demuestre que en el punto $(1, -1, 2)$ la superficie $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ es perpedicular a cada miembro de la familia de superficies

$$x^2 + (4c - 2)y^2 - cz^2 + 1 = 0$$

28. Demuestre que toda recta normal a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pasa por el centro de la esfera.

12.8 EXTREMOS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

En el capítulo 3 se dijo que una aplicación importante de la derivada de una función de una sola variable está relacionada con los valores extremos de una función, lo cual condujo a una gran variedad de aplicaciones. En ese capítulo se demostraron teoremas que involucran la primera y segunda derivadas, a partir de los cuales se determinaron los valores máximos y mínimos relativos de la función. Después se incluyeron los valores extremos relativos como posibles extremos absolutos. Al extender la teoría a funciones de dos variables, se verá que el procedimiento es similar al caso de una variable; sin embargo, se presentan ciertas complicaciones.

Este estudio se inicia con la definición de *extremos relativos* y *absolutos* de funciones de dos variables.

12.8.1 Definición de extremos absolutos de funciones de dos variables

(i) Se dice que la función f de dos variables tiene un **valor máximo absoluto** en su dominio D del plano xy si existe algún punto (x_0, y_0) en D tal que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) de D. En tal caso, $f(x_0, y_0)$ es el valor máximo absoluto de f en D.

(ii) Se dice que la función f de dos variables tiene un **valor mínimo absoluto** en su dominio D del plano xy si existe algún punto (x_0, y_0) en D tal que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) de D. En tal caso, $f(x_0, y_0)$ es el valor mínimo absoluto de f en D.

12.8.2 Definición de extremos relativos de funciones de dos variables

(i) Se dice que una función f de dos variables tiene un **valor máximo relativo** en el punto (x_0, y_0) si existe un disco abierto $B((x_0, y_0); r)$ tal que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) de B.

(ii) Se dice que una función f de dos variables tiene un **valor mínimo relativo** en el punto (x_0, y_0) si existe un disco abierto $B((x_0, y_0); r)$ tal que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) de B.



FIGURA 1

Refiérase a la figura 1, la cual muestra la gráfica de una función f cuyo dominio es el plano xy. La función tiene cuatro extremos relativos, uno de los cuales es un máximo absoluto y otro es un mínimo absoluto. Si el dominio de una función es un disco abierto o el plano xy completo, como én la figura 1, un extremo absoluto debe ser un extremo relativo.



EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 La figura 2 muestra la gráfica de la función definida por

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

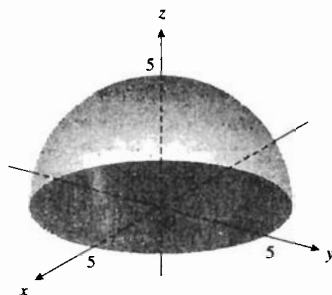
Sea B cualquier disco abierto ((0, 0); r) para el cual $r < 5$. De la definición 12.8.2(i), f tiene un valor máximo relativo de 5 en el punto donde $x = 0$ y $y = 0$. De la definición 12.8.1(i), 5 es también el valor máximo absoluto de f. ◀



EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 La figura 3 muestra la gráfica de la función definida por

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

El dominio de g es el plano xy completo. Sea B cualquier disco abierto ((0, 0); r). De la definición 12.8.2(ii), g tiene un valor mínimo relativo de 0 en el origen. De la definición 12.8.1(ii), 0 es también el valor mínimo absoluto de g. ◀



$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

FIGURA 2

El teorema 3.1.3 establece: Si $f(x)$ existe para todos los valores de x del intervalo abierto (a, b), y si f tiene un extremo relativo en c, donde $a < c < b$, y $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$. El teorema siguiente para funciones de dos variables es análogo.

12.8.3 Teorema

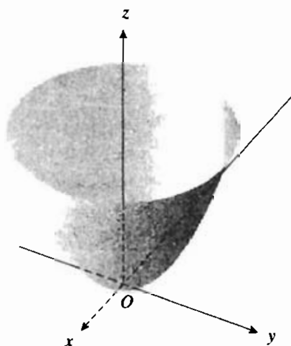
Si $f(x, y)$ existe en todos los puntos de algún disco abierto $B((x_0, y_0); r)$ y si f tiene un extremo relativo en (x_0, y_0), entonces si $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ existen,

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

Antes de probar este teorema, se presentará un argumento geométrico informal. Sea f una función que satisface la hipótesis del teorema y suponga que f tiene un valor máximo relativo en (x_0, y_0). Considere la curva de intersección del plano $y = y_0$ con la superficie $z = f(x, y)$, como se muestra en la figura 4. Esta curva está representada por las ecuaciones

$$y = y_0 \quad \text{y} \quad z = f(x, y)$$

Como f tiene un valor máximo relativo en el punto donde $x = x_0$ y $y = y_0$, la curva tiene una recta tangente horizontal en el plano $y = y_0$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. La pendiente de esta recta tangente es $f_x(x_0, y_0)$; de modo que $f_x(x_0, y_0) = 0$. De manera semejante, puede considerarse la curva de intersección del plano $x = x_0$ con la superficie $z = f(x, y)$ y obtenerse $f_y(x_0, y_0) = 0$. También puede darse una discusión similar si f tiene un valor mínimo relativo en (x_0, y_0). A continuación se presenta la demostración formal, en la cual se emplea el teorema 3.1.3.



$g(x, y) = x^2 + y^2$

FIGURA 3

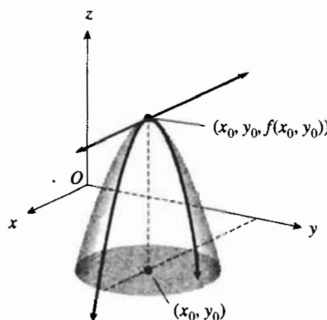


FIGURA 4

Demostración del teorema 12.8.3 Considere las dos funciones g y h de una sola variable definidas por

$$g(x) = f(x, y_0) \quad \text{y} \quad h(y) = f(x_0, y)$$

Entonces,

$$g'(x_0) = f_x(x_0, y_0) \text{ y } h'(y_0) = f_y(x_0, y_0)$$

Como $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ existen, $g'(x_0)$ y $h'(y_0)$ existen. Puesto que f tiene un extremo relativo en (x_0, y_0), g tiene un extremo relativo en x_0 y h tiene un extremo relativo en y_0. En consecuencia, por el teorema 3.1.3,

$$g'(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad h'(y_0) = 0$$

Por tanto,

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

■

Observe que la condición de que tanto $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ sean cero equivale a la condición de que el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ es el vector cero. Además, esta condición implica que la gráfica de f tiene un plano tangente horizontal en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Se le pedirá que demuestre esto en el ejercicio 51.

Del teorema 12.8.3, una condición necesaria para que una función de dos variables tenga un extremo relativo en un punto es que sus primeras derivadas parciales sean cero en el punto, o bien, que al menos una de las derivadas parciales no exista en el punto. A tal punto se le denomina *punto crítico* de la función.

12.8.4 Definición de punto crítico

Si $f(x, y)$ existe en todos los puntos de algún disco abierto $B((x_0, y_0); r)$, el punto (x_0, y_0) es un **punto crítico** de f si una de las siguientes condiciones se cumple:

(i) $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$;

(ii) $f_x(x_0, y_0)$ o $f_y(x_0, y_0)$ no existen.

Cuando se estudian los extremos relativos de una función, primero se localizan los puntos críticos, si existen. Después se debe aplicar otro criterio para determinar si se tiene un extremo relativo en un punto crítico particular.

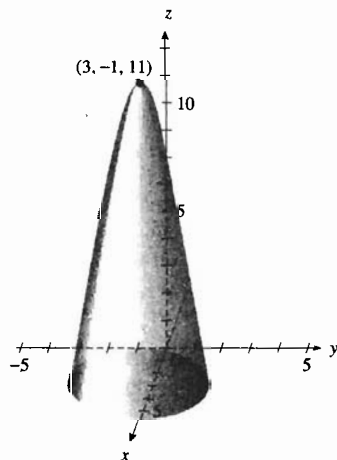


FIGURA 5

▶ ***EJEMPLO 1*** Determine los extremos relativos de la función definida por

$$f(x, y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$$

Solución Se comienza por determinar los puntos críticos de f. Al diferenciar parcialmente se obtiene

$$f_x(x, y) = 6 - 2x \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = -4 - 4y$$

Las dos derivadas parciales existen para cualquier punto. Si se consideran $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ iguales a cero y se resuelven las ecuaciones para x y y, resulta $x = 3$ y $y = -1$. Por tanto, el único punto crítico es $(3, -1)$, y $f(3, -1) = 11$. Para determinar si se tiene un extremo relativo en $(3, -1)$, se completan los cuadrados en la expresión para $f(x, y)$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -(x^2 - 6x + 9) - 2(y^2 + 2y + 1) + 9 + 2 \\ &= -(x - 3)^2 - 2(y + 1)^2 + 11 \end{aligned}$$

Así, si $(x,y) \neq (3,-1)$, $f(x, y) < 11$. En consecuencia, de la definición 12.8.2(i), $f(3, -1) = 11$ es un valor máximo relativo. Por la definición 12.8.1(i), este valor también es un valor máximo absoluto.

Vea la figura 5 que muestra la gráfica de f, la cual es un paraboloide que abre hacia abajo con su vértice en $(3, -1, 11)$. La gráfica apoya la respuesta. ◀

▶ EJEMPLO 2 Determine los extremos relativos de la función definida por

$$g(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

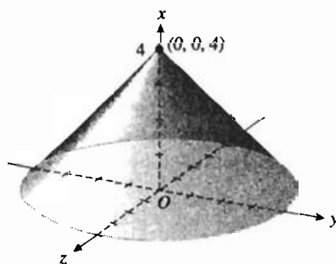
Solución Al calcular las derivadas parciales de g se tiene

$$g_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{y} \quad g_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

El dominio de g es el conjunto de todos los puntos de R^2 y g_x y g_y existen en todos los puntos diferentes de $(0, 0)$. Además, $g_x(x, y) = 0$ sólo cuando $x = 0$, pero $g_y(x, y) \neq 0$; y $g_y(x, y) = 0$ sólo cuando $y = 0$; pero $g_x(x, y) \neq 0$. Por tanto, el único punto crítico de g es $(0, 0)$. Como $g(0, 0) = 4$ y si $(x, y) \neq (0, 0)$, entonces

$$g(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} < 4$$

de modo que g tiene un valor máximo relativo de 4 en $(0, 0)$, el cual también es un valor máximo absoluto. La figura 6 muestra la gráfica de g, cuyo punto más alto se encuentra en $(0, 0, 4)$, lo cual apoya la respuesta. ◀



$g(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$

FIGURA 6

Un punto crítico de una función no necesariamente proprorciona un extremo relativo de la función, como se muestra en el siguiente ejemplo ilustrativo.

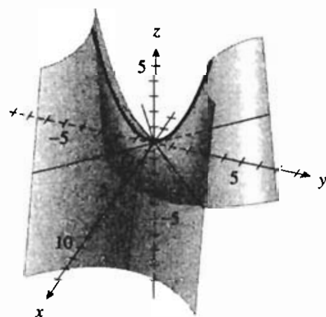
▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Sea f la función definida por

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

entonces

$$f_x(x, y) = -2x \qquad f_y(x, y) = 2y$$

Tanto $f_x(0, 0)$ como $f_y(0, 0)$ son iguales a cero. La gráfica de f que se muestra en la figura 7, tiene la forma de una silla de montar en los puntos cercanos al origen. En los puntos del plano xz, donde $y = 0$ y $x \neq 0$, los valores de la función son negativos, y en los puntos del plano yz, donde $x = 0$ y $y \neq 0$, los valores de la función son positivos. Por tanto, la función f no satisface la definición 12.8.1 cuando $(x_0, y_0) = (0, 0)$. ◀



$f(x, y) = y^2 - x^2$

FIGURA 7

Un punto crítico de una función f donde no se tiene un extremo relativo, tal como el punto $(0, 0, 0)$ del ejemplo ilustrativo 3, se denomina **punto silla** de la función f.

El criterio básico para determinar extremos relativos para funciones de dos variables es el siguiente *criterio de la segunda derivada*, el cual proporciona condiciones que garantizan el hecho de que una función tiene un extremo relativo en un punto donde las primeras derivadas parciales son cero.

12.8.5 Teorema Criterio de la segunda derivada

Sea f una función de dos variables tal que f y sus derivadas parciales de primer y segundo orden son continuas en un disco abierto $B((a, b); r)$. Suponga además que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$. Sea

$$D(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

(i) f tiene un valor mínimo relativo en (a, b) si

$$D(a, b) > 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(a, b) > 0 \quad (\text{o } f_{yy}(a, b) > 0)$$

(ii) f tiene un valor máximo relativo en (a, b) si

$$D(a, b) > 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(a, b) < 0 \quad (\text{o } f_{yy}(a, b) < 0)$$

(iii) $f(a, b)$ no es un extremo relativo, pero f tiene un punto silla en $(a, b, f(a, b))$ si

$$D(a, b) < 0$$

(iv) No se tiene ninguna conclusión acerca de los extremos relativos si

$$D(a, b) = 0$$

La demostración del inciso (i) del criterio de la segunda derivada se realiza en el suplemento de esta sección, mientras que las pruebas de los incisos (ii) y (iii) se dejan como ejercicios, consulte los ejercicios suplementarios 1 y 2. El inciso (iv) se incluye de modo que se revisen todos los casos posibles.

Si $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$, entonces la expresión para $D(a, b)$ del enunciado del criterio de la segunda derivada es el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$$

Este determinante, denominado **hessiano** (o **discriminante**) de la función f, proporciona un método conveniente para recordar la fórmula de $D(a, b)$.

▶ ***EJEMPLO 3*** Dada

$$f(x, y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$$

determine los extremos relativos de f si es que existen.

Solución A fin de aplicar el criterio de la segunda derivada, se calculan las primeras y segundas derivadas parciales de f.

$$f_x(x, y) = 8x^3 - 2x \qquad f_y(x, y) = 2y - 2$$

$$f_{xx}(x, y) = 24x^2 - 2 \qquad f_{yy}(x, y) = 2 \qquad f_{xy}(x, y) = 0$$

Al considerar $f_x(x, y) = 0$ se tiene $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ o $x = \frac{1}{2}$. Si se considera $f_y(x, y) = 0$ se obtiene $y = 1$. Por tanto, f_x y f_y son 0 en los puntos $(-\frac{1}{2}, 1)$, $(0, 1)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$, de modo que son los puntos críticos de f. Los resultados obtenidos al aplicar el criterio de la segunda derivada en estos puntos se resumen en la tabla 1.

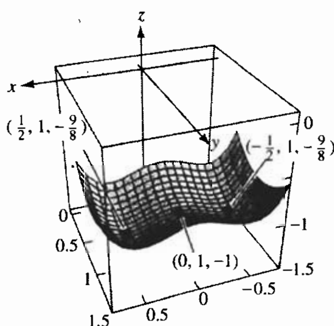


FIGURA 8

Tabla 1

Punto crítico (a, b)	$f_{xx}(a, b)$	$f_{yy}(a, b)$	$f_{xy}(a, b)$	$D(a, b)$	*Conclusión*
$(-\frac{1}{2}, 1)$	4	2	0	8	f tiene un valor mínimo relativo
(0, 1)	−2	2	0	−4	f no tiene extremo relativo
$(\frac{1}{2}, 1)$	4	2	0	8	f tiene un valor mínimo relativo

Por el inciso (i) del criterio de la segunda derivada, f tiene en los puntos críticos $(-\frac{1}{2}, 1)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$ un valor mínimo relativo. Del inciso (iii) del criterio, f no tiene extremo relativo en el punto crítico (0, 1).

Como $f(-\frac{1}{2}, 1) = -\frac{9}{8}$ y $f(\frac{1}{2}, 1) = -\frac{9}{8}$, se concluye que f tiene un valor mínimo relativo de $-\frac{9}{8}$ en los dos puntos críticos $(-\frac{1}{2}, 1)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$.

La figura 8, la cual muestra la gráfica de f con los puntos mínimos en $(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{9}{8})$ y $(\frac{1}{2}, 1, -\frac{9}{8})$ y el punto silla en (0, 1, −1), apoya los resultados. ◀

EJEMPLO 4 Determine las dimensiones relativas de una caja rectangular, sin tapa que tiene un volumen específico, si se desea emplear la mínima cantidad de material en su elaboración.

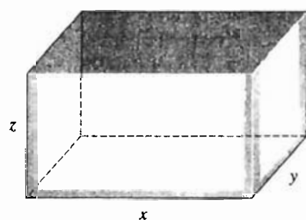


FIGURA 9

Solución La figura 9 muestra la caja, donde la longitud de la base es x unidades, el ancho de la base es y unidades y su profundidad es de z unidades. Sean S unidades cuadradas el área de la superficie de la caja. Si V unidades es el volumen de la caja, V es una costante puesto que la caja tiene un volumen específico.

Cada una de las variables x, y y z está en el intervalo $(0, +\infty)$. De las fórmulas para el área de la superficie y el volumen,

$$S = xy + 2xz + 2yz \quad \text{y} \quad V = xyz$$

Al resolver la segunda ecuación para z en términos de x, y y de la constante V, se tiene $z = \dfrac{V}{xy}$, y al sustituir esto en la primera ecuación resulta

$$S = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x} \tag{1}$$

Al diferenciar parcialmente se obtiene

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{2V}{x^2} \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{2V}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{4V}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} = 1 \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{4V}{y^3}$$

Si se considera $\dfrac{\partial S}{\partial x} = 0$ y $\dfrac{\partial S}{\partial y} = 0$ se tiene

$$x^2y - 2V = 0$$

$$xy^2 - 2V = 0$$

Al resolver estas dos ecuaciones simultáneamente, se obtiene $x = \sqrt[3]{2V}$ y $y = \sqrt[3]{2V}$.. Para estos valores de x y y,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3} = 2 > 0 \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x}\right)^2 = \frac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3} \cdot \frac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3} - 1 = 3 > 0$$

Por el inciso (i) del criterio de la segunda derivada, S tiene un valor mínimo relativo cuando $x = \sqrt[3]{2V}$ y $y = \sqrt[3]{2V}$. Recuerde que x y y están en el intervalo $(0, +\infty)$, y observe en la ecuación (1) que S es muy grande cuando x y y están cerca de cero o cuando son muy grandes. Por tanto, se concluye que el valor mínimo relativo de S es un valor mínimo absoluto de S.

Como $z = V/(xy)$, entonces cuando $x = \sqrt[3]{2V}$ y $y = \sqrt[3]{2V}$,

$$z = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$$

Conclusión: La caja debe tener una base cuadrada y una profundidad de un medio de la longitud de uno de los lados de la base. ◀

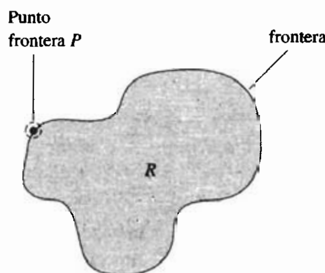


FIGURA 10

Recuerde el teorema del valor extremo para funciones de una variable: Si la función f es continua en un intervalo cerrado, entonces f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en ese intervalo cerrado. Se dijo que un valor extremo de una función continua en un intervalo cerrado debe ser un extremo relativo o un valor de la función en uno de los extremos del intervalo. Se tiene una situación análoga para funciones de dos variables en la que se involucra el teorema del valor extremo.

En el enunciado del teorema del valor extremo para funciones de dos variables se emplea el término *región acotada y cerrada*. Una región R se dice **acotada** si es una subregión de un disco cerrado. La **frontera** de una región R es el conjunto de todos los puntos P para los cuales todo disco abierto que tiene su centro en P contiene al menos un punto de R y al menos un punto que no pertenece a R. Una **región cerrada** es aquella que contiene a su frontera.

La figura 10 muestra una región acotada y cerrada R, la frontera de R y un punto P de la frontera. El ejemplo ilustrativo siguiente presenta algunas regiones acotadas y cerradas, en las que se identifica la frontera de cada región.

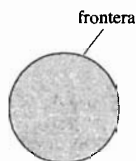


FIGURA 11

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

(a) Un disco cerrado es una región acotada y cerrada. La frontera de esta región es la circunferencia del disco. Consulte la figura 11.

(b) Los lados de un triángulo junto con la región limitada por él es una región acotada y cerrada. La frontera de esta región consta de los lados del triángulo. Observe la figura 12.

(c) Los lados de un rectángulo junto con la región acotada por el rectángulo es una región acotada y cerrada. La frontera de esta región consiste de los lados del rectángulo. Refiérase a la figura 13. ◀

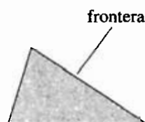


FIGURA 12

12.8.6 Teorema del valor extremo para funciones de dos variables

Sea R una región acotada y cerrada del plano xy, y sea f una función continua en R. Entonces f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en R.

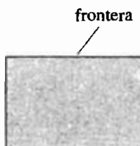


FIGURA 13

La demostración de este teorema está más allá del alcance de este libro, por lo que se omite.

Si f es función de dos variables que satisface el teorema del valor extremo, entonces un extremo absoluto de f es un extremo relativo o un valor de la

función en un punto de la frontera de la región R. El valor extremo en tal situación puede determinarse mediante el procedimiento siguiente:

1. Calcule los valores de la función en los puntos críticos de f del interior de la región R.
2. Determine los valores extremos posibles de f de la frontera de la región R.
3. El mayor de los valores determinados en los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto, y el menor de los valores es el valor mínimo absoluto.

▶ ***EJEMPLO 5*** Calcule los extremos absolutos de la función definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 7$$

si el dominio de f es la región triangular cerrada cuyos lados están sobre el eje x, el eje y y la recta $x + y = 5$.

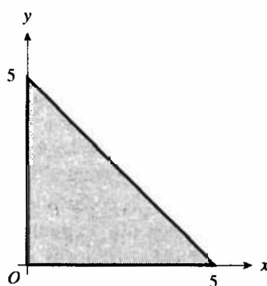


FIGURA 14

Solución La figura 14 muestra la región triangular cerrada R indicada. La función polinomial f es continua en R, de modo que se puede aplicar el teorema del valor extremo. A fin de determinar los puntos críticos de f se calculan las primeras derivadas parciales:

$$f_x(x, y) = 2x - 4 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 2y - 2$$

Estas derivadas parciales existen en cualquier punto de R^2. Al considerar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ iguales a 0 se obtiene $x = 2$ y $y = 1$. Por tanto, el único punto crítico de f es (2, 1).

Ahora se considerarán los valores de f en los puntos de la frontera de R. Se examinará cada lado del triángulo por separado.

Sobre el eje x, cuando $y = 0$ y $0 \leq x \leq 5$, se tiene $f(x, 0) = x^2 - 4x + 7$, una función cuadrática de una sola variable. Sea $\alpha(x) = f(x, 0)$, entonces

$$\alpha(x) = x^2 - 4x + 7 \qquad 0 \leq x \leq 5$$

La función α tendrá valores extremos cuando $\alpha'(x) = 0$ o en los extremos del intervalo [0, 5]. Al diferenciar α, se tiene

$$\alpha'(x) = 2x - 4$$

Si se considera $\alpha'(x) = 0$ se obtiene $x = 2$, de modo que en el eje x se deben tomar en cuenta los valores de la función en (2, 0), (0, 0) y (5, 0).

Sobre el eje y, cuando $x = 0$ y $0 \leq y \leq 5$, se tiene $f(0, y) = y^2 - 2y + 7$. Sea $\beta(y) = f(0, y)$, de modo que

$$\beta(y) = y^2 - 2y + 7 \qquad 0 \leq y \leq 5$$
$$\beta'(y) = 2y - 2$$

Al considerar $\beta'(y) = 0$, se obtiene $y = 1$. Por tanto, sobre el eje y, deben tenerse en cuenta los valores de la función en (0, 1), (0, 0) y (0, 5).

Sobre la recta $x + y = 5$: $y = 5 - x$; $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 5$. De modo que

$$f(x, 5 - x) = x^2 + (5 - x)^2 - 4x - 2(5 - x) + 7$$
$$= 2x^2 - 12x + 22 \qquad 0 \leq x \leq 5$$

Tabla 2

(x, y)	$f(x, y)$
(2, 1)	2
(2, 0)	3
(0, 1)	6
(3, 2)	4
(0, 0)	7
(5, 0)	12
(0, 5)	22

Sea $\gamma(x) = f(x, 5 - x)$, por lo que

$$\gamma(x) = 2x^2 - 12x + 22 \qquad 0 \le x \le 5$$
$$\gamma'(x) = 4x - 12$$

Al considerar $\gamma'(x) = 0$, se obtiene $x = 3$. De este modo, sobre la recta $x + y = 5$, se deben tomar en cuenta los valores de la función en (3, 2), (5, 0) y (0, 5).

En resumen, los puntos posibles (x, y) para un extremo absoluto son (2, 1), (2, 0), (0, 1), (3, 2), (0, 0), (5, 0) y (0, 5). Los valores de la función en estos puntos se muestran en la tabla 2. El valor máximo absoluto es $f(0, 5) = 22$ y el valor mínimo absoluto es $f(2, 1) = 2$.

La figura 15 muestra la gráfica de f, la porción de un paraboloide sobre la región triangular del plano xy dada. La gráfica apoya los resultados.

La figura 16 presenta la región triangular R y tres curvas de nivel de f, circunferencias del plano xy con sus centros en (2, 1). Observe que los puntos frontera de la tabla 2 son los vertices del triángulo, el centro de las circunferencias y los puntos sobre los lados del triángulo donde el lado es tangente a la curva de nivel. ◀

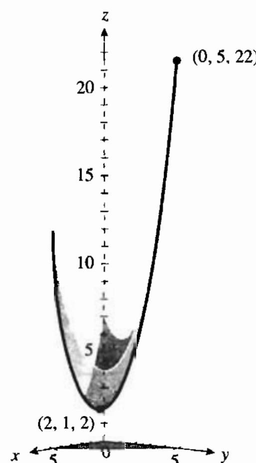
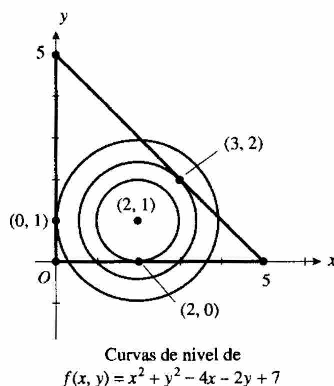


FIGURA 15



Curvas de nivel de
$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 7$

FIGURA 16

A lo largo de este libro se ha visto cómo los modelos matemáticos se emplean en muchas aplicaciones. Con frecuencia, estos modelos fueron ecuaciones que contenían a las variables de la situación. Se emplearon varios métodos a fin de obtener dichos modelos, uno de los cuales trató acerca de la *recta de regresión* que proporciona la *recta de mejor ajuste* para un conjunto de puntos. El procedimiento para determinar una recta de regresión requiere la localización de un valor mínimo absoluto de una función de dos variables.

Suponga, por ejemplo, que se desea obtener un modelo matemático para algunos datos dados mediante el conjunto de puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . . , (x_n, y_n). En particular, y_i puede representar el número de dólares de la utilidad semanal de un fabricante cuando x_i es el número de unidades vendidas en la semana, o y_i podría representar el total de las ventas anuales de una compañía cuando x_i años han transcurrido desde que inició la compañía. El número de casos nuevos de cierta enfermedad podría representarse por y_i cuando x_i es el número de días desde el brote de una epidemia de la enfermedad. El modelo deseado es una relación que involucra a x y y, y que puede emplearse para hacer predicciones. Dicha relación está dada por una recta que "ajusta" los datos.

Con el propósito de obtener una definición adecuada de la recta de mejor ajuste de los datos, primero se indica qué tan bien se ajusta una recta particular a un conjunto de puntos al medir las ditancias verticales desde los puntos a la recta. Por ejemplo, la figura 17 muestra n puntos y la recta $y = mx + b$. El punto (x_i, y_i) es el i-ésimo punto y le corresponde el punto $(x_i, mx_i + b)$ de la recta. La **desviación** (o **error**) entre el i-ésimo punto y la recta está definido por d_i, donde

$$d_i = y_i - (mx_i + b)$$

La suma de los cuadrados de las desviaciones es

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

la cual nunca es negativa y es cero sólo si cada d_i es cero, en este caso todos los puntos están sobre la recta. Se considerará como la recta de mejor ajuste aquella para la cual $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$ es un mínimo absoluto. Esta recta se denomina **recta de regresión** de y sobre x, y el proceso para determinarla se llama **método de mínimos cuadrados.**

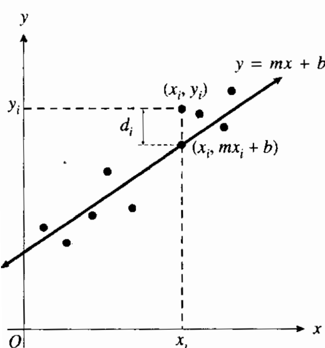


FIGURA 17

A continuación se presentará el método de mínimos cuadrados para determinar la recta de regresión $y = mx + b$ de un conjunto de n puntos. Como x_i y y_i son constantes, y m y b son variables, entonces $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$ es una función de m y b. Denote esta función por f, de modo que

$$f(m, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b)^2$$

Con el fin de obtener los valores de m y b que hacen de $f(m, b)$ un mínimo absoluto, primero se calculan las derivadas parciales $f_m(m, b)$ y $f_b(m, b)$.

$$\begin{aligned} f_m(m, b) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial m}[(y_i - mx_i - b)^2] \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - mx_i - b)(-x_i) \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} (-x_iy_i + mx_i^2 + bx_i) \\ &= 2\left[-\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i\right] \\ f_b(m, b) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial b}[(y_i - mx_i - b)^2] \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - mx_i - b)(-1) \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} (-y_i + mx_i + b) \\ &= 2\left(-\sum_{i=1}^{n} y_i + m\sum_{i=1}^{n} x_i + nb\right) \end{aligned}$$

Al considerar $f_m(m, b) = 0$ y $f_b(m, b) = 0$ se obtienen dos ecuaciones simultáneas en m y b:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)m + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \tag{2}$$

y

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)m + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Si se resuelve la segunda ecuación para b, se tiene

$$b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \tag{3}$$

Al sustituir este valor de b en (2) se obtiene

$$m = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_iy_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{4}$$

En el ejercicio 52 se le pedirá que proporcione los detalles de la obtención de la ecuación (4) a partir de (2) y (3), y en el ejercicio 53 se le pedirá que utilice el criterio de la segunda derivada para demostrar que f tiene un valor mínimo relativo para los valores de m y b determinados por (3) y (4). En este ejercicio verá que existe sólo un un extremo relativo para f, que m y b están en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ y que $f(m, b)$ es grande cuando el valor absoluto de m o el valor absoluto de b es grande. De este modo, se concluye que el valor mínimo relativo de f es un valor mínimo absoluto.

Observe que en las fórmulas (3) y (4) aparecen cuatro sumas diferentes. Estas fórmulas pueden evaluarse en una computadora o en muchas calculadoras. En el ejemplo siguiente, se muestra una manera conveniente para calcular las sumas cuando se tiene una cantidad pequeña de datos.

EJEMPLO 6 En 1975 se compró un objeto antiguo y raro por \$1 200. Su valor en 1980 fue de \$1 800, en 1985 su precio fue de \$2 500 y en 1990 su valor fue de \$3 100. Si el valor del objeto fuese determinado para el año 2000 de acuerdo con el mismo patrón, utilice el método de mínimos cuadrados para estimar el valor del objeto para este año.

Solución A fin de obtener la recta de regresión $y = mx + b$, sea x el número de lustros (o periodos de 5 años) desde 1975 y sea y dólares el valor del objeto $5x$ años a partir de 1975. Así, se tienen los puntos de datos mostrados en la tabla 3.

Tabla 3

x	0	1	2	3
y	1 200	1 800	2 500	3 100

La tabla 4 muestra el cálculo para las cuatro sumas que aparecen en las ecuaciones (3) y (4). De esta tabla,

Tabla 4

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
0	1200	0	0
1	1800	1	1800
2	2500	4	5000
3	3100	9	9300
$\sum$6	8600	14	16100

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 6 \qquad \sum_{i=1}^{4} y_i = 8\,600 \qquad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 14 \qquad \sum_{i=1}^{4} x_iy_i = 16\,100$$

Con estos valores y $n = 4$ se obtiene, de (4) y (3),

$$m = \frac{4(16100) - 6(8600)}{4(14) - 6(6)} \qquad b = \tfrac{1}{4}[8600 - 640(6)]$$
$$= 640 \qquad\qquad = 1190$$

Por tanto, una ecuación de la recta de regresión es

$$y = 640x + 1190$$

De donde, para el año 2000, $x = 5$; y para este valor de x

$$y = 640(5) + 1190$$
$$= 4390$$

Conclusión: Se estima que el valor del objeto para el año 2000 será de \$4 390.

EJEMPLO 7 En la tabla 5, x días han transcurrido desde el brote de una enfermedad particular, y y es el número de casos nuevos de la enfermedad en el día número x. **(a)** Determine la recta de regresión para los puntos de datos (x_i, y_i). **(b)** Utilice la recta de regresión para estimar el número de nuevos casos de la enfermedad en el sexto día.

Tabla 5

x	1	2	3	4	5
y	20	24	30	35	42

Tabla 6

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	20	1	20
2	24	4	48
3	30	9	90
4	35	16	140
5	42	25	210
$\sum$15	151	55	508

Solución

(a) La recta pedida tiene la ecuación $y = mx + b$. Para determinar m y b, primero se obtienen las sumas de las ecuaciones (3) y (4) a partir de los datos de la tabla 6. De esta tabla,

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 15 \qquad \sum_{i=1}^{5} y_i = 151 \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 55 \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 508$$

Con estos valores y $n = 5$ se obtiene a partir de (4) y (3),

$$m = \frac{5(508) - (15)(151)}{5(55) - (15)(15)} = 5.5 \qquad b = \tfrac{1}{5}[151 - 5.5(15)] = 13.7$$

Por tanto, la recta de regresión tiene la ecuación

$$y = 5.5x + 13.7$$

(b) Con $x = 6$ en la ecuación de la recta de regresión,

$$y = 5.5(6) + 13.7 = 46.7$$

Conclusión: En el sexto día de la epidemia, se estima que habrá 47 casos nuevos de la enfermedad. ◀

Muchas calculadoras poseen programas que proporcionan un modelo de regresión lineal mediante un ajuste de mínimos cuadrados. Si su calculadora es capaz de esto, utilícela con el objeto de apoyar los resultados de los ejemplos 6 y 7. Otros programas pueden determinar modelos de regresión cuadráticos, cúbicos, logarítmicos y exponenciales. Refiérase al manual del usuario de su calculadora para conocer los procedimientos a fin de obtener estos modelos.

EJERCICIOS 12.8

En los ejercicios 1 a 6, encuentre los extremos relativos de la función obteniendo primero los puntos críticos y después aplicando la definición 12.8.2. Determine si los extremos relativos son extremos absolutos.

1. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$
2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 9}$
3. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16$
4. $f(x, y) = 2 + 2x + 6y - x^2 - y^2$
5. $f(x, y) = 9 - \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}$
6. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 1$

En los ejercicios 7 a 18, determine los extremos relativos de f y localice los puntos silla, si los tiene.

7. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6x^2 + y - 1$
8. $f(x, y) = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y - 110$
9. $f(x, y) = y^2 - x^2 + 2x - 4y + 3$
10. $f(x, y) = x^2 - y^2 + 6x - 8y + 25$
11. $f(x, y) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{64}{y} + xy$
12. $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$
13. $f(x, y) = 4xy^2 - 2x^2y - x$
14. $f(x, y) = y^4 - 4y^3 + 2x^2 + 8xy$
15. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3y^2 - 3x - 9y + 2$
16. $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$
17. $f(x, y) = e^{xy}$
18. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 18xy$

En los ejercicios 19 a 24, obtenga los extremos absolutos de la función cuyo dominio es la región acotada y cerrada R del plano xy.

19. La función del ejercicio 3; R es la región triangular que tiene vértices en (0, 0), (4, 0) y (0, 8).

20. La función del ejercicio 4; R es la región triangular cuyos lados son el eje x, el eje y y la recta $x + y = 5$.

21. $f(x, y) = 3x^2 + xy$; R es la región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$.

22. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$; R es la región acotada por la parábola $y = 4 - x^2$ y el eje x.

23. $f(x, y) = y^3 + x^2 - 3y$; R es la región limitada por la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

24. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$; R es la región acotada por el cuadrado cuyos vértices son $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$ y (π, π).

25. Determine los tres números positivos cuya suma sea 24 de modo que su producto sea el mayor posible.

26. Obtenga tres números positivos cuyo producto sea 24 de manera que su suma sea lo más pequeña posible.

27. Encuentre el punto del plano $3x + 2y - z = 5$ que esté más cerca al punto $(1, -2, 3)$, y calcule la distancia mínima.

28. Determine los puntos de la superficie $y^2 - xz = 4$ que estén más cerca al origen, y calcule la distancia mínima.

29. Obtenga los puntos de la curva de intersección del elipsoide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$ y el plano $x - 4y - z = 0$ que estén más cerca del origen, y calcule la distancia mínima.

30. En una fábrica, los trabajadores se han clasificado en dos maneras: A y B. Los trabajadores tipo A ganan \$14 por jornada, mientras que los del tipo B ganan \$13. Para alcanzar cierta producción en una jornada, se ha determinado aumentar los salarios de los trabajadores, si se emplean x trabajadores del tipo A y y del tipo B, entonces el número de dólares del costo de la jornada es $y^3 + x^2 - 8xy + 600$. ¿Cuántos trabajadores de cada tipo deben emplearse a fin de que el costo de la jornada sea un mínimo si se requieren por lo menos tres trabajadores de cada tipo para una jornada?

31. Una inyección de x miligramos de cierto medicamento A y y miligramos del medicamento B produce una respuesta de R unidades, y $R = x^2y^3(c - x - y)$, donde c es una constante positiva. ¿Qué dosis de cada medicamento ocasionarán la respuesta máxima?

32. Suponga que t horas después de la inyección de x miligramos de adrenalina la respuesta es de R unidades, y $R = te^{-t}(c - x)x$, donde c es una constante positiva. ¿Qué valores de x y t producirán la respuesta máxima?

33. Calcule el volumen del mayor paralelepípedo rectangular que pueda inscribirse en el elipsoide $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$ si las aristas deben ser paralelas a los ejes coordenados.

34. Se elabora una caja rectangular sin tapa con un costo de material de \$10. Si el material para el fondo de la caja cuesta \$0.15 por pie cuadrado y el material para los lados cuesta \$0.30 por pie cuadrado, determine las dimensiones de la caja de mayor volumen que pueda elaborarse.

35. Se construye una caja rectangular cerrada con un volumen de 16 pie^3 empleando tres tipos de materiales. El costo del material para el fondo y la tapa es de \$0.18 por pie cuadrado, el costo del material para el frente y la parte trasera es de \$0.16 por pie cuadrado, y el costo del material para los otros dos lados es de \$0.12 por pie cuadrado. Calcule las dimensiones de la caja de modo que el costo de los materiales sea un mínimo.

36. Suponga que T grados es la temperatura en cualquier punto (x, y, z) de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, y $T = 100xy^2z$. Obtenga los puntos de la esfera donde la temperatura es la máxima y también los puntos donde es mínima. Además, calcule la temperatura en estos puntos.

37. Suponga que en la producción de cierto artículo se requieren x horas–máquina y y horas–persona, y que el costo de producción está dado por $f(x, y)$, donde

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy + y^2 + 500$$

Determine los números de horas-máquina y de horas-persona necesarios para producir el artículo al costo mínimo.

38. Una tienda de ropa vende dos tipos de camisa que son similares pero que son elaboradas por diferentes fabricantes. El costo de la tienda para el primer tipo es de \$40 y el costo del segundo tipo es de \$50. Por medio de la experiencia, se ha determinado que si el precio de venta del primer tipo es de x dólares y el precio de venta para el segundo tipo es de y dólares, entonces el número de camisas del primer tipo que se venden mensualmente es $3\,200 - 50x + 25y$, y el de las del segundo tipo es $25x - 25y$. ¿Cuál debe ser el precio de venta de cada tipo de camisa a fin de obtener la máxima utilidad?

39. En 1921, el autor de una pintura abstracta la vendió por \$100. Debido a su importancia histórica su valor se ha incrementado con el paso del tiempo. En 1941 su valor fue de \$4 600, en 1961 se vendió en \$11 000, y en 1981 su valor fue de \$20 000. Suponiendo que el valor de la pintura se establecerá de acuerdo con el mismo patrón hasta el año 2001, utilice el método de mínimos cuadrados para estimar su valor para ese año.

40. Un automóvil modelo 1991 se vendió como un carro usado en 1992 por \$6 800. Su valor fue de \$6 200 en 1993, en 1994 su valor fue de \$5 700, y en 1996 su precio fue de \$4 800. Utilice el método de mínimos cuadrados para estimar el valor del carro en 1995.

41. En el *Cinema Uno* se ha exhibido una película durante cinco semanas, y la asistencia semanal (con aproximación de cientos) para cada semana está dada en la tabla siguiente.

Semana No.	1	2	3	4	5
Asistencia	5 000	4 500	4 100	3 900	3 500

Suponga que la asistencia semanal continuará reduciéndose de acuerdo con el mismo patrón hasta llagar a 1 500. **(a)** Utilice la recta de regresión para los datos de la tabla a fin de determinar la asistencia esperada para la sexta semana. **(b)** La película se cambiará al *Cinema Dos*, que es más pequeño, cuando la asistencia semanal esté por debajo 2 250. ¿Cuántas semanas estará exhibiéndose la película en el *Cinema Uno*?

42. Se analiza la savia de cinco árboles a fin de determinar la cantidad de la hormona vegetal que causa la caída de las hojas. En el caso de los árboles de la tabla siguiente, cuando se

liberan x microgramos (μg) de la hormona vegetal ocurre la caída de y hojas.

	Roble	*Arce*	*Abedul*	*Pino*	*Acacia*
x	28	57	38	75	82
y	208	350	300	620	719

(a) Obtenga una ecuación de la recta de regresión para los datos de la tabla. **(b)** Utilice la recta de regresión para estimar el número de hojas caídas de otro tipo de árbol cuando se liberan 100 μg de la hormona vegetal.

43. Se examinaron cinco corredores a fin de determinar su absorción máxima de oxígeno, medida que refleja el estado cardiovascular de una persona. Los resultados se presentan en la siguiente tabla, donde x segundos es el mejor tiempo del corredor al correr una milla y y mililitros por minuto por kilogramo de peso es la absorción máxima de oxígeno del corredor.

	Corredor A	*Corredor B*	*Corredor C*	*Corredor D*	*Corredor E*
x	300.5	350.6	407.3	326.2	512.8
y	418.5	375.6	350.2	400.2	325.8

(a) Obtenga una ecuación de la recta de regresión para los datos de la tabla. **(b)** Emplee la recta de regresión para estimar la absorción máxima de oxígeno de un corredor si su mejor tiempo al correr una milla es de 340.4 s.

44. Se utiliza la calificación del examen de admisión de un estudiante con el objeto de predecir su promedio al final del primer año de estudios. La siguiente tabla proporciona los datos para seis estudiantes, donde x es el resultado del examen y y es el promedio de calificaciones.

	Estudiante A	*Estudiante B*	*Estudiante C*	*Estudiante D*	*Estudiante E*	*Estudiante F*
x	92	81	73	98	79	85
y	3.4	2.7	3.1	3.8	2.2	3.0

(a) Obtenga una ecuación de la recta de regresión para los datos de la tabla. **(b)** Emplee la recta de regresión a fin de estimar el promedio de calificaciones de un estudiante al final del primer año de estudios si el estudiante obtuvo un resultado de 88 en el examen de admisión.

45. La siguiente tabla presenta la producción mensual de una fábrica y la utilidad para los primeros cinco meses del año, donde x miles de unidades se produjeron y y miles de dólares se obtuvieron de utilidad.

	Enero	*Febrero*	*Marzo*	*Abril*	*Mayo*
x	65	72	82	90	100
y	30	35	42	48	60

Si la producción para junio es de 105 000 unidades, utilice la recta regresión para los datos de la tabla a fin de estimar la utilidad de ese mes.

46. En la tabla siguiente, para cinco niños sanos, w kilogramos es su peso y y milímetros de mercurio expresa su presión arterial media (el promedio de la presión sanguínea de la diástole y de la sístole).

	Niño A	*Niño B*	*Niño C*	*Niño D*	*Niño E*
w	20	30	35	40	50
y	70	85	90	96	100

(a) Una ecuación que "ajusta" los datos de esta tabla es $y = m(\ln w) + b$. Para determinar esta ecuación considere $x = \ln w$ y utilice el método de mínimos cuadrados para los puntos (x_i, y_i). **(b)** Use el resultado del inciso (a) a fin de estimar la presión arterial media de un niño sano cuyo peso es de 45 kg.

47. Un decorador, quien es un monopolista, hace dos tipos de marcos para pinturas. Por medio de la experiencia, el decorador ha determinado que si elabora x marcos del primer tipo y y marcos del segundo tipo y los pone a la venta en una sala de exhibición, pueden venderse por $(100 - 2x)$ dólares y $(120 - 3y)$ dólares cada uno, respectivamente. El costo total de fabricación de estos marcos es $(12x + 12y + 4xy)$ dólares. ¿Cuántos marcos de cada tipo debe producir para obtener la máxima utilidad, y cuál es esa utilidad?

48. Demuestre que la caja rectangular de mayor volumen que puede colocarse dentro de una esfera tiene la forma de un cubo.

49. Se elabora una caja sin tapa con una cantidad de material dada. Determine las dimensiones relativas de la caja que contenga el mayor volumen posible.

50. Un monopolista produce engrapadoras y grapas cuyas ecuaciones de demanda son $x = 11 - 2p - 2q$ y $y = 19 - 2p - 3q$, donde la demanda de engrapadoras es $1000x$ si el precio unitario es p dólares, y la demanda de grapas es de $1000y$ cajas si el precio unitario por caja es q dólares. El costo de producción de cada engrapadora es de \$2, y el de cada caja de grapas es de \$1. Demuestre que para obtener la máxima utilidad total, las engrapadoras deben ser gratuitas y las grapas deben ser costosas.

51. Si f es una función diferenciable para la cual $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$, demuestre que la gráfica de f tiene un plano tangente horizontal en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

52. Obtenga la ecuación (4) al sustituir de (3) en (2).

53. Si $f(m, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b)^2$, utilice el criterio de la segunda derivada para demostrar que los valores de m y b en (3) y (4) proporcionan un valor mínimo relativo de f. *Sugerencia:* primero demuestre que $f_{mm}(m, b) > 0$. Para probar que $D(m, b) > 0$, debe demostrar que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$. Para demostrar esto, sea $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ y aplique las propiedades de la notación sigma a la desigualdad $\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2 > 0$.

12.9 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

En la solución del ejemplo 4 de la sección 12.8 se minimizó la función cuyos valores de función son $xy + 2xz + 2yz$, sujeta a la condición de que x, y y z satisfaciesen la ecuación $xyz = V$. Compare esto con el ejemplo 3 de la sección 12.8, en el que se determinó el extremo relativo de f para el cual $f(x, y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$. Estos son esencialmente dos tipos diferentes de problemas debido a que en el ejemplo 4 se tiene una condición adicional, denominada **restricción** (o **condición lateral**). Estos problemas se denominan **problemas con extremos restringidos,** mientras que el problema del ejemplo 3 se denomina **problema con extremos libres.**

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 En el ejemplo ilustrativo 1 de la sección 12.8, se demostró que la función definida por

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \qquad (1)$$

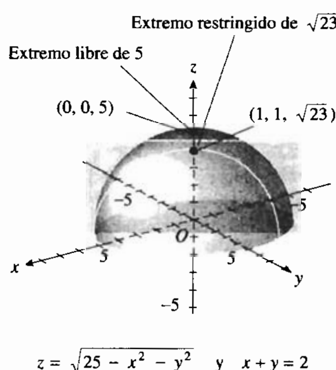


FIGURA 1

tiene un valor máximo relativo de 5 cuando $x = 0$ y $y = 0$. El número 5 es un máximo libre de f.

Suponga que, además de satisfacer la ecuación (1), se impone la condición de que x y y deben satisfacer la ecuación

$$x + y = 2 \qquad (2)$$

Ahora se trata de obtener un máximo restringido. El punto que corresponde al máximo restringido estará en la semiesfera definida por la ecuación (1) y en el plano definido por la ecuación (2); esto es, estará sobre la curva de intersección de la semiesfera y el plano. Refiérase a la figura 1. Se puede determinar que el valor máximo restringido es $\sqrt{23}$ cuando $x = 1$ y $y = 1$, esto por medio de las técnicas estudiadas en el capítulo 2: sustituya el valor de y en términos de x de (2) en (1), y obtenga el valor máximo relativo de la función de una variable que resulte. ◀

Debido a que no siempre es posible resolver la restricción para una de las variables en términos de las otras, como se bosquejó en el ejemplo ilustrativo 1, se puede seguir otro enfoque para determinar los puntos críticos a fin de resolver un problema de extremos restringidos. El procedimiento empleado para tal fin se denomina **método de multiplicadores de Lagrange,** en honor a su descubridor Joseph L. Lagrange, el matemático francés que se ha mencionado varias veces en este libro. El método está basado en el teorema siguiente.

12.9.1 Teorema

Suponga que f y g son funciones de dos variables cuyas primeras derivadas parciales son continuas. Si f tiene un extremo relativo en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ sujeto a la condición $g(x, y) = 0$, y $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces existe una constante λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = \mathbf{0} \qquad (3)$$

Demostración Si $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$, entonces se cumple (3) si $\lambda = 0$. Ahora se probará (3) suponiendo que $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$. De las condiciones

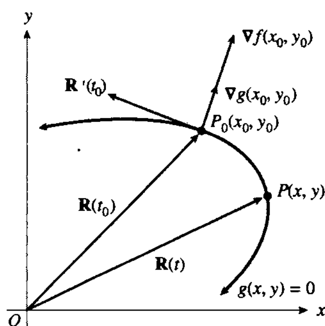


FIGURA 2

dadas, el teorema de la función implícita, el cual se demuestra en Cálculo avanzado, permite representar la curva C, cuya ecuación es $g(x, y) = 0$, mediante la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = \alpha(t)\mathbf{i} + \beta(t)\mathbf{j}$$

para t en algún intervalo para el cual $\mathbf{R}'(t) \neq \mathbf{0}$. Refiérase a la figura 2. Sea t_0 el valor de t correspondiente al punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ donde f tiene un extremo relativo. Conforme t varía a lo largo de C, se obtienen diferentes valores de la función f, de los cuales los puntos correspondientes $(x, y, f(x, y))$ se hallan sobre la superficie definida por f y están sujetos a la restricción $g(x, y) = 0$.

Sea ϕ la función de la variable t definida por

$$\phi(t) = f(\alpha(t), \beta(t))$$

Como f tiene un extremo relativo en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, entonces ϕ tiene un extremo relativo en t_0. Por tanto, $\phi'(t_0) = 0$. Ahora se calculará $\phi'(t)$ mediante la regla de la cadena:

$$\phi'(t) = f_x(x, y)\alpha'(t) + f_y(x, y)\beta'(t)$$
$$\phi'(t_0) = f_x(x_0, y_0)\alpha'(t_0) + f_y(x_0, y_0)\beta'(t_0)$$

Debido a que $\phi'(t_0) = 0$, se tiene de la ecuación anterior

$$f_x(x_0, y_0)\alpha'(t_0) + f_y(x_0, y_0)\beta'(t_0) = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{R}'(t_0) = 0$$

Puesto que $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\mathbf{R}'(t_0)$ son distintos del vector cero, se puede concluir a partir de esta ecuación que $\nabla f(x_0, y_0)$ es ortogonal a $\mathbf{R}'(t_0)$. Sin embargo, del teorema 12.7.6, $\nabla g(x_0, y_0)$ también es ortogonal a $\mathbf{R}'(t_0)$. La figura 2 ilustra estos resultados. Como $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\nabla g(x_0, y_0)$ son ortogonales al mismo vector, entonces ellos son paralelos, de modo que se cumple la ecuación (3). ■

Ahora se mostrará cómo se aplica el teorema 12.9.1 para determinar los extremos relativos de una función f de las variables x y y sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$.

Se introduce una nueva variable, denominada **multiplicador de Lagrange,** y se forma la función auxiliar F de las tres variables x, y y λ para la cual

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

De este modo, el problema se transforma en un problema en el que se deben determinar los puntos críticos de F en los que las tres primeras derivadas parciales de F son cero:

$$F_x(x, y, \lambda) = 0 \qquad F_y(x, y, \lambda) = 0 \qquad F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \tag{4}$$

Observe que las dos primeras ecuaciones de (4) equivalen a

$$f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0$$

y estas dos ecuaciones son equivalentes a la ecuación vectorial

$$\nabla f(x, y) + \lambda \nabla g(x, y) = \mathbf{0}$$

que es la ecuación (3) del teorema 12.9.1. Además, la tercera ecuación de (4) es $g(x, y) = 0$, la cual es la restricción.

El siguiente procedimiento resume la discusión anterior.

A fin de aplicar el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los extremos relativos de una función f de las dos variables x y y sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$:

1. Defina la función auxiliar F de las tres variables x, y y λ para la cual

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

2. Considere el sistema de ecuaciones que se forma al igualar a cero las tres primeras derivadas parciales de F:

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 0 \\ F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

3. Resuelva el sistema de ecuaciones del paso 2 para determinar los puntos críticos de F.
4. Entre las primeras dos coordenadas de los puntos críticos de F, obtenidos en el paso 3, se encuentran los valores de x y y que proporcionan los extremos relativos deseados.

Observe que los extremos relativos de f sujeta a la restricción pueden ocurrir en un punto donde $g_x(x, y)$ y $g_y(x, y)$ sean cero. Estos puntos tal vez no puedan obtenerse mediante el método de multiplicadores de Lagrange, por lo que deben examinarse por separado.

EJEMPLO 1 Utilice el método de multiplicadores de Lagrange a fin de determinar los extremos de la función f para la cual

$$f(x, y) = 3x + 4y - 3$$

si el punto (x, y) está sobre la circunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 25$.

Solución Se escribe la ecuación de la circunferencia en la forma

$$x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$$

Con el propósito de obtener los extremos relativos de f sujeta a esta restricción, se define la función F como sigue:

$$F(x, y, \lambda) = 3x + 4y - 3 + \lambda(x^2 + y^2 - 2x - 24)$$

Al calcular las derivadas parciales F_x, F_y y F_λ, e igualar a cero los valores resultantes se tiene

$$F_x:\quad 3 + 2\lambda(x - 1) = 0 \tag{5}$$
$$F_y:\quad 4 + 2\lambda y = 0 \tag{6}$$
$$F_\lambda:\quad x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0 \tag{7}$$

Observe en las ecuaciones (5) y (6) que $x \neq 1$ y $y \neq 0$. Al resolver estas ecuaciones para λ se obtiene

$$\lambda = -\frac{3}{2(x - 1)} \quad \text{y} \quad \lambda = -\frac{2}{y} \tag{8}$$

Si se igualan estos dos valores de λ resulta

$$3y = 4(x - 1)$$
$$y = \frac{4}{3}(x - 1) \tag{9}$$

Este valor de y se sustituye en la ecuación (7) y se resuelve para x:

$$\begin{aligned} x^2 + \tfrac{16}{9}(x^2 - 2x + 1) - 2x - 24 &= 0 \\ 9x^2 + 16x^2 - 32x + 16 - 18x - 216 &= 0 \\ 25x^2 - 50x - 200 &= 0 \\ x^2 - 2x - 8 &= 0 \\ (x + 2)(x - 4) &= 0 \\ x = -2 \qquad x &= 4 \end{aligned}$$

De las ecuaciones (9) y (8): cuando $x = -2$, $y = -4$ y $\lambda = \frac{1}{2}$; y cuando $x = 4$, $y = 4$ y $\lambda = -\frac{1}{2}$. Por tanto, los puntos $(-2, -4, \frac{1}{2})$ y $(4, 4, -\frac{1}{2})$ son los puntos críticos de F. Así, $(-2, -4)$ y $(4, 4)$ son los únicos puntos posibles para los cuales f tiene un extremo relativo. Como

$$f(-2, -4) = 3(-2) + 4(-4) = -25 \quad \text{y} \quad f(4, 4) = (3)(4) + 4(4) - 3 = 25$$

el valor mínimo relativo de f es -25 y su valor máximo relativo es 25. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** La función f del ejemplo 1 es continua en el disco cerrado definido por

$$(x - 1)^2 + y^2 \leq 25$$

Por tanto, por el teorema del valor extremo f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en el disco. Como

$$f_x(x, y) = 3 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 4$$

y estos valores nunca son cero, entonces f no tiene extremos relativos dentro de la circunferencia. De modo que los extremos relativos deben ocurrir sobre la circunferencia. En consecuencia, del resultado del ejemplo 1, se puede concluir que 25 es un valor máximo absoluto y que -25 es un valor mínimo absoluto en el disco cerrado.

Refiérase a la figura 3. Las rectas

$$3x + 4y - 3 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 4y - 28 = 0$$
$$3x + 4y - 3 = -25 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 4y + 22 = 0$$

son curvas de nivel de f tangentes a la circunferencia de restricción en los puntos $(4, 4)$ y $(-2, -4)$, respectivamente. ◀

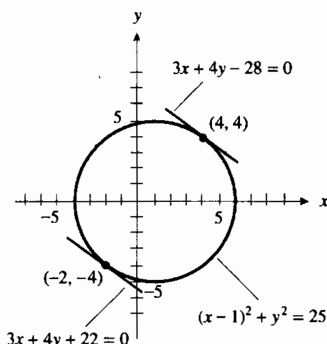


FIGURA 3

El método de multiplicadores de Lagrange puede extenderse a funciones de tres variables. El teorema siguiente es similar al teorema 12.9.1.

12.9.2 Teorema

Suponga que f y g son funciones de tres variables cuyas primeras derivadas parciales son continuas. Si f tiene un extremo relativo donde $x = x_0$, $y = y_0$ y $z = z_0$, sujeto a la restricción $g(x, y, z) = 0$ y $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, entonces existe una constante λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{0} \qquad \textbf{(10)}$$

En la demostración de este teorema, semejante a la del teorema 12.9.1, es necesario probar que cuando $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ y $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ son distintos del vector cero, los dos son ortogonales a la superficie $g(x, y, z) = 0$, lo cual implica que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ y $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ son paralelos. De este hecho resulta la ecuación (10).

Al igual que del teorema 12.9.1 se obtuvo el procedimiento con el fin de aplicar el método de multiplicadores de Lagrange para funciones de dos variables, el teorema 12.9.2 proporciona el siguiente procedimiento para funciones de tres variables.

A fin de aplicar el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los extremos relativos de una función f de las tres variables x, y y z sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$:

1. **Defina la función auxiliar F de las cuatro variables x, y, z y λ para la cual**

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

2. **Considere el sistema de ecuaciones que se forma al igualar a cero las cuatro primeras derivadas parciales de F.**

$$\begin{cases} F_x(x, y, z, \lambda) = 0 \\ F_y(x, y, z, \lambda) = 0 \\ F_z(x, y, z, \lambda) = 0 \\ F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0 \end{cases}$$

3. **Resuelva el sistema de ecuaciones del paso 2 para determinar los puntos críticos de F.**
4. **Entre las primeras tres coordenadas de los puntos críticos de F, obtenidos en el paso 3, se encuentran los valores de x, y y z que proporcionan los extremos relativos deseados.**

▶ ***EJEMPLO 2*** Resuelva el ejemplo 4 de la sección 12.8 mediante el método de multiplicadores de Lagrange.

Solución Se definen las variables x, y y z, y la constante V como en la solución del ejemplo 12.8. Sea

$$\begin{aligned} S &= f(x, y, z) \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad g(x, y, z) = xyz - V \\ &= xy + 2xz + 2yz \end{aligned}$$

Se desea minimizar la función f sujeta a la restricción

$$g(x, y, z) = 0$$

Ahora se considera la función F para la cual

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda) &= f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) \\ &= xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - V) \end{aligned}$$

Con el propósito de obtener los puntos críticos de F se calculan las cuatro primeras derivadas parciales F_x, F_y, F_z y F_λ y se igualan a cero los resultados:

$$F_x: \quad y + 2z + \lambda yz = 0 \tag{11}$$
$$F_y: \quad x + 2z + \lambda xz = 0 \tag{12}$$
$$F_z: \quad 2x + 2y + \lambda xy = 0 \tag{13}$$
$$F_\lambda: \quad xyz - V = 0 \tag{14}$$

Si se restan los miembros de (12) de los correspondientes de (11) resulta

$$y - x + \lambda z(y - x) = 0$$
$$(y - x)(1 + \lambda z) = 0$$

de donde se obtiene

$$y = x \tag{15}$$

y como $z \neq 0$,

$$\lambda = -\frac{1}{z}$$

Al sustituir $\lambda = -1/z$ en (12) resulta $x + 2z - x = 0$, lo que da $z = 0$, lo cual es imposible debido a que z se encuentra en el intervalo $(0, +\infty)$. Si se sustituye de (15) en (13) resulta

$$2x + 2x + \lambda x^2 = 0$$
$$x(4 + \lambda x) = 0$$
$$\lambda = -\frac{4}{x} \qquad \text{debido a que } x \neq 0$$

Si en (12) se sustituye λ por $-4/x$, se obtiene

$$x + 2z - \frac{4}{x}(xz) = 0$$
$$x + 2z - 4z = 0$$
$$z = \frac{x}{2} \tag{16}$$

Al reemplazar de (15) y (16) en (14) se obtiene $\frac{1}{2}x^3 - V = 0$, de donde resulta $x = \sqrt[3]{2V}$. Con este valor en (15) y (16), $y = \sqrt[3]{2V}$ y $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. Por tanto, el punto $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}, \lambda)$ es un punto crítico de F y, como se mostró en la sección 12.8, f tiene un valor mínimo donde $x = \sqrt[3]{2V}$, $y = \sqrt[3]{2V}$, y $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. ◀

El ejemplo que sigue trata una situación sobre economía en la que se emplea la **función utilidad,** la cual mide la satisfacción a partir de las cantidades de ciertos artículos. Se llama **índice de utilidad** a cualquier valor de una función utilidad, el cual describe numéricamente una preferencia individual por los artículos.

▶ ***EJEMPLO 3*** Suponga que U es una función utilidad para la cual

$$U(x, y, z) = xyz$$

donde x, y y z representan el número de unidades de los artículos A, B y C, respectivamente, los cuales son consumidos semanalmente por una persona particular. Además suponga que los precios unitarios de A, B y C son \$2, \$3, y \$4, respectivamente, y que el gasto total semanal para estos artículos se ha presupuestado en \$90. ¿Cuántas unidades de cada artículo deben comprarse semanalmente para maximizar el índice de utilidad de la persona?

Solución Se desea determinar el valor de x, y y z, cada uno en el intervalo $[0, +\infty)$, que maximice $U(x, y, z)$ sujeta a la restricción de presupuesto $2x + 3y + 4z = 90$. Sean

$$g(x, y, z) = 2x + 3y + 4z - 90$$

y

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(2x + 3y + 4z - 90)$$

Al calcular las primeras derivadas parciales e igualar a cero los resultados, se obtiene

$$F_x: \quad yz + 2\lambda = 0 \qquad (17)$$

$$F_y: \quad xz + 3\lambda = 0 \qquad (18)$$

$$F_z: \quad xy + 4\lambda = 0 \qquad (19)$$

$$F_\lambda: \quad 2x + 3y + 4z - 90 = 0 \qquad (20)$$

De (17) y (18), y después de (17) y (19)

$$y = \tfrac{2}{3}x \quad \text{y} \quad z = \tfrac{1}{2}x \qquad (21)$$

Si se sustituye de estas ecuaciones en (20) se obtiene

$$2x + 3(\tfrac{2}{3}x) + 4(\tfrac{1}{2}x) - 90 = 0$$

$$x = 15$$

Con este valor de x en la ecuación (21), $y = 10$ y $z = 7.5$. Por tanto, se calcula

$$U = (15, 10, 7.5) = (15)(10)(7.5)$$

$$= 1125$$

Como x, y y z están en el intervalo $[0, +\infty)$, es claro que este valor no puede ser un mínimo porque existen muchos valores de U sujeta a la restricción dada que son menores que 1125. Por tanto, este valor maximiza a U sujeta a la restricción dada.

Conclusión: Para maximizar el índice de utilidad del consumidor, éste debe comprar 15, 10 y 7.5 unidades de los artículos A, B y C, respectivamente, por semana. ◀

▶ ***EJEMPLO 4*** Utilice el método de multiplicadores de Lagrange para calcular la distancia más corta del origen al plano $Ax + By + Cz = D$.

Solución Sean w unidades la distancia del origen al punto (x, y, z) del plano. Entonces

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Debido a que w será un mínimo cuando w^2 sea un mínimo, se define la función f para la cual

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Se desea determinar el valor mínimo de f sujeta a la restricción

$$Ax + By + Cz - D = 0$$

Con la suposición de que existe tal valor mínimo, éste ocurrirá en un punto crítico de la función F tal que

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(Ax + By + Cz - D)$$

A fin de obtener los puntos críticos de F se calculan las primeras derivadas parciales de F y se igualan a cero.

$$\begin{aligned} F_x&: \quad 2x + \lambda A = 0 \\ F_y&: \quad 2y + \lambda B = 0 \\ F_z&: \quad 2z + \lambda C = 0 \\ F_\lambda&: \quad Ax + By + Cz - D = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

A partir de las primeras tres ecuaciones se obtiene

$$x = -\tfrac{1}{2}\lambda A \qquad y = -\tfrac{1}{2}\lambda B \qquad z = -\tfrac{1}{2}\lambda C \tag{23}$$

Si se sustituyen estos valores de x, y y z en (22) resulta

$$-\tfrac{1}{2}\lambda(A^2 + B^2 + C^2) = D$$

$$-\tfrac{1}{2}\lambda = -\frac{D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

En las ecuaciones (23) se sustituye $-\frac{1}{2}\lambda$ por su valor y se obtiene

$$x = \frac{AD}{A^2 + B^2 + C^2} \qquad y = \frac{BD}{A^2 + B^2 + C^2} \qquad z = \frac{CD}{A^2 + B^2 + C^2} \tag{24}$$

El punto que tiene estas coordenadas es el único punto crítico de F. Por tanto, la distancia mínima del origen al plano es la distancia del origen al punto (x_0, y_0, z_0) donde x_0, y_0 y z_0 son los valores de x, y y z de la ecuación (24). En consecuencia, la distancia mínima es

$$\begin{aligned} \sqrt{x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2} &= \sqrt{\frac{A^2D^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} + \frac{B^2D^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} + \frac{C^2D^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}} \\ &= \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

◀

El método de multiplicadores de Lagrange puede extenderse en el caso en que se impongan varias restricciones. En particular, si se desea determinar los puntos críticos de la función que tiene valores $f(x, y, z)$ sujeta a las dos restricciones $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$, se determinan los puntos críticos de la función F de las cinco variables x, y, z, λ, y μ para la cual

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$$

El ejemplo siguiente ilustra el método.

▶ **EJEMPLO 5** Obtenga los extremos relativos de la función f si

$$f(x, y, z) = xz + yz$$

y si el punto (x, y, z) está en la intersección de las superficies $x^2 + z^2 = 2$ y $yz = 2$.

Solución Se define la función F para la cual

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = xz + yz + \lambda(x^2 + z^2 - 2) + \mu(yz - 2)$$

Al calcular las cinco primeras derivadas parciales de F e igualando los resultados a cero se tiene

$$F_x: \quad z + 2\lambda x = 0 \tag{25}$$

$$F_y: \quad z + \mu z = 0 \tag{26}$$

$$F_z: \quad x + y + 2\lambda z + \mu y = 0 \tag{27}$$

$$F_\lambda: \quad x^2 + z^2 - 2 = 0 \tag{28}$$

$$F_\mu: \quad yz - 2 = 0 \tag{29}$$

De (26) se obtiene $\mu = -1$ y $z = 0$. Se rechaza $z = 0$ debido a que esto contradice (29). De (25) se obtiene, si $x \neq 0$,

$$\lambda = -\frac{z}{2x}$$

Al sustituir este valor de λ y $\mu = -1$ en (27) resulta

$$x + y - \frac{z^2}{x} - y = 0$$

$$x^2 = z^2 \tag{30}$$

Si de (30) se reemplaza en (28) se obtiene $2x^2 - 2 = 0$, o $x^2 = 1$. Esto proporciona dos valores para x, a saber, 1 y -1; y para cada uno de estos valores de x se obtiene, de (30), los dos valores 1 y -1 para z. Al obtener los valores correspondientes para y, a partir de (29), se tienen cuatro conjuntos de soluciones para las cinco ecuaciones (25)–(29). Estas soluciones son

$x = 1$	$y = 2$	$z = 1$	$\lambda = -\frac{1}{2}$	$\mu = -1$
$x = 1$	$y = -2$	$z = -1$	$\lambda = \frac{1}{2}$	$\mu = -1$
$x = -1$	$y = 2$	$z = 1$	$\lambda = \frac{1}{2}$	$\mu = -1$
$x = -1$	$y = -2$	$z = -1$	$\lambda = -\frac{1}{2}$	$\mu = -1$

Los conjuntos de soluciones primero y cuarto proporcionan $f(x, y, z) = 3$, y los conjuntos de soluciones segundo y tercero dan $f(x, y, z) = 1$. En consecuencia, f tiene un valor máximo relativo de 3 y un valor mínimo relativo de 1. ◀

EJERCICIOS 12.9

En los ejercicios 1 a 4, utilice el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los puntos críticos de la función sujeta a la restricción.

1. $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ con la restricción $x^2 + y^2 - 4y = 0$.
2. $f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 + 5$ con la restricción $x^2 + y^2 - 2y = 0$.
3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ con la restricción $3x - 2y + z - 4 = 0$.
4. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ con la restricción $y^2 - x^2 = 1$.

En los ejercicios 5 a 8, utilice el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los extremos absolutos de f sujeta a la restricción. También determine los puntos en los que ocurren los extremos.

5. $f(x, y) = x^2 + y$ con la restricción $x^2 + y^2 = 9$.
6. $f(x, y) = x^2y$ con la restricción $x^2 + 8y^2 = 24$.

7. $f(x, y, z) = xyz$ con la restricción $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 4$.

8. $f(x,y,z) = y^3 + xz^2$ con la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

En los ejercicios 9 a 12, calcule los valores máximo y mínimo absolutos de f en la región indicada. Utilice las respuestas de los ejercicios 5 a 8 para los extremos en la frontera.

9. La función del ejercicio 5; $x^2 + y^2 \leq 9$.

10. La función del ejercicio 6; $x^2 + 8y^2 \leq 24$.

11. La función del ejercicio 7; $x^2 + 2y^2 + 4z^2 \leq 4$.

12. La función del ejercicio 8; $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

En los ejercicios 13 y 14, calcule el valor mínimo absoluto de f sujeta a la restricción.

13. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ con la restricción $xyz = 1$.

14. $f(x, y, z) = xyz$ con la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

En los ejercicios 15 y 16, obtenga el valor máximo absoluto de f sujeta a la restricción.

15. $f(x, y, z) = x + y + z$ con la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

16. $f(x, y, z) = xyz, x \geq 0, y \geq 0$ y $z \geq 0$ con la restricción $2xy + 3xz + yz = 72$.

17. Obtenga un valor mínimo relativo de la función f para la cual $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 16z^2$ con la restricción **(a)** $xyz = 1$; **(b)** $xy = 1$; **(c)** $x = 1$.

18. Utilice multiplicadores de Lagrange para determinar la distancia más corta del punto $(1, 3, 0)$ al plano $4x + 2y - z = 5$.

19. Emplee multiplicadores de Lagrange a fin de obtener la distancia más corta del punto $(1, -1, -1)$ al plano $x + 4y + 3z = 2$.

20. Calcule las distancias menor y mayor desde el origen a un punto de la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$.

21. Calcule las distancias menor y mayor desde el origen a un punto del elipsoide $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$.

22. Si $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$, utilice multiplicadores de Lagrange para determinar el punto del plano $x + y + z = 5$ en el cual $f(x, y, z)$ es mínimo.

23. Emplee multiplicadores de Lagrange para calcular el valor mínimo absoluto de f si $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ con las dos restricciones $x + 2y + 3z = 6$ y $x - y - z = -1$.

24. Use multiplicadores de Lagrange para calcular el valor mínimo absoluto de f si $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ con las dos restricciones $x + y + 2z = 1$ y $3x - 2y + z = -4$.

25. Utilice multiplicadores de Lagrange para calcular el valor máximo relativo de f si $f(x, y, z) = xyz$ con las dos restricciones $x + y + z = 4$ y $x - y - z = 3$.

26. Emplee multiplicadores de Lagrange para calcular el valor mínimo absoluto de f si $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ con las dos restricciones $x + y + z = 1$ y $x + y - z = 0$.

En los ejercicios 27 a 36, utilice multiplicadores de Lagrange para resolver el ejercicio indicado de la sección 12.8.

27. Ejercicio 25 **28.** Ejercicio 26 **29.** Ejercicio 27
30. Ejercicio 28 **31.** Ejercicio 29 **32.** Ejercicio 34
33. Ejercicio 35 **34.** Ejercicio 36 **35.** Ejercicio 49
36. Ejercicio 48

37. Resuelva el ejemplo 3 si $U(x, y, z) = e^{x^2yz}$.

38. Resuelva el ejemplo 3 si $U(x, y, z) = x^2y^3z$.

39. Si $T(x, y)$ grados es la temperatura en cualquier punto (x, y) del disco circular limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y

$$T(x, y) = 2x^2 + y^2 - y$$

determine los puntos más calientes y los más fríos del disco y la temperatura en esos puntos.

40. En el ejercicio 39 suponga que la región es la mitad superior del disco circular, por lo que la región está definida por $x^2 + y^2 \leq 1$ y $y \geq 0$. Determine los puntos más calientes y los más fríos de la región si

$$T(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$$

y la temperatura en esos puntos.

41. En el ejemplo 3, suponga que la función utilidad involucra cinco artículos A, B, C, D y E. Además, suponga que x unidades de A, y unidades de B, z unidades de C, s unidades de D y t unidades de E se consumen semanalmente, y que los precios de A, B, C, D y E son, respectivamente, \$2, \$3, \$4, \$1 y \$5. Si

$$U(x, y, z, s, t) = xyzst$$

y el gasto semanal para los artículos es de \$150, ¿cuántas unidades de cada artículo deben comprarse por semana para maximizar el índice de utilidad del consumidor?

42. Una compañía tiene tres fábricas y todas elaboran el mismo producto. Si la fábrica A produce x unidades, la fábrica B produce y unidades y la fábrica C produce z unidades, entonces sus respectivos costos de producción son $(3x^2 + 200)$ dólares, $(y^2 + 400)$ dólares y $(2z^2 + 300)$ dólares. Si se va a surtir un pedido de 1100 unidades, emplee multiplicadores de Lagrange para determinar cómo debe distribuirse la producción entre las tres fábricas a fin de minimizar el costo total de producción.

43. **(a)** Demuestre que si $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$, entonces el valor máximo de f sujeto a la restricción

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

es $(\frac{1}{3}R^2)^3$. **(b)** Utilice el resultado del inciso (a) para demostrar que

$$(x^2y^2z^2)^{1/3} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}$$

para todos los valores de x, y y z.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 12

SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 12

1. Defina *función de dos variables* e incluya en su definición el significado de *dominio* y *contradominio*.
2. Efectúe la sugerencia 1 para *función de tres variables*.
3. Defina la *función compuesta* $f \circ g$, donde f es una función de una sola variable y g es una función de dos variables. Establezca cómo está relacionado el dominio de $f \circ g$ con los dominios de f y g.
4. Defina la *gráfica* de una función de dos variables.
5. ¿Qué es una *curva de nivel* de una función de dos variables? Invente un ejemplo.
6. ¿Qué es una *superficie de nivel* de una función de tres variables? Invente un ejemplo.
7. Escriba una fórmula para determinar la *distancia entre dos puntos* de R, de R^2 y de R^3.
8. Defina: $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$
9. Enuncie un teorema que pueda emplearse para demostrar que $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ no existe. Invente un ejemplo que ilustre la aplicación del teorema.
10. Enuncie la definición de *continuidad* de una función de dos variables.
11. Invente un ejemplo de una función de dos variables que tenga una *discontinuidad removible* en el origen.
12. Invente un ejemplo de una función de dos variables que tenga una *discontinuidad esencial* en el origen.
13. Si f es una función de las dos variables x y y, defina:

    (a) la *derivada parcial* de f *con respecto a* x, y **(b)** la *derivada parcial de* f *con respecto a* y.
14. Dé la interpretación geométrica de las derivadas parciales de la sugerencia 13.
15. Interprete las derivadas parciales de la sugerencia 13 como tasas de variación.
16. ¿Cómo se calculan las derivadas parciales de la sugerencia 13 sin emplear la definición?
17. Invente un ejemplo de una función polinomial de dos variables y calcule las dos derivadas parciales.
18. Efectúe la sugerencia 17 para una una función que no sea polinomial.
19. Calcule las cuatro *derivadas parciales de segundo orden* para la función de **(a)** la sugerencia 17, y **(b)** la sugerencia 18.
20. Enuncie el teorema que garantiza que las dos derivadas parciales mixtas de una función de dos variables son iguales.
21. Defina *función diferenciable* de dos variables.
22. Enuncie un teorema que garantice la diferenciabilidad de una función de dos variables.
23. Defina la *diferencial total* de una función de dos variables. Invente un ejemplo.
24. ¿Cómo se aplica la diferencial total para aproximar un valor de función? Invente un ejemplo.
25. Enuncie la *regla de la cadena* que proporciona las fórmulas de la derivada parcial de u con respecto a r y la derivada parcial de u con respecto a s si $u = f(x, y)$ donde $x = F(r, s)$ y $y = G(r, s)$.
26. Invente un ejemplo en el que se apliquen las fórmulas de la sugerencia 25 donde f, F y G sean funciones polinomiales.
27. Invente un ejemplo en el que se apliquen las fórmulas de la sugerencia 25 donde f sea una función polinomial, F sea una función trigonométrica y G sea una función exponencial.
28. Establezca una fórmula que proporcione la derivada de una función de una sola variable definida *implícitamente*. Invente un ejemplo.
29. Establezca las fórmulas que proporcionan las derivadas parciales de una función de dos variables definida implícitamente. Invente un ejemplo.
30. Defina la *derivada direccional* de una función de dos variables en la dirección de un vector unitario dado. Establezca una fórmula para calcular la derivada direccional de manera rápida en la que se emplee la definición. Invente un ejemplo.
31. Efectúe la sugerencia 30 para una función de tres variables.
32. Defina el *gradiente* de una función de dos variables. ¿Cómo se aplica el gradiente para calcular una derivada direccional? Invente un ejemplo.
33. Efectúe la sugerencia 32 para una función de tres variables.
34. ¿Cómo se aplica el gradiente para determinar la dirección del valor máximo de la derivada direccional en un punto? Invente un ejemplo.
35. ¿Cómo se aplica el gradiente para obtener el *vector normal* y el *plano tangente* a una superficie en un punto particular? Invente un ejemplo.
36. Invente un ejemplo que muestre cómo se aplica el gradiente para obtener una ecuación de la *recta tangente* en un punto particular de una curva del plano xy definida por una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$.
37. ¿Qué es un *punto crítico* de una función de dos variables? Invente un ejemplo de una función que tenga un punto crítico donde **(a)** ambas derivadas parciales sean cero, y **(b)** donde al menos una de las derivads parciales no exista.
38. ¿Cómo se utilizan los puntos críticos para determinar los *extremos relativos* de una función de dos variables? Invente un ejemplo.

39. Invente un ejemplo de una función que tenga un punto crítico donde la función no tiene extremo relativo.

40. Enuncie el *criterio de la segunda derivada* para determinar los extremos relativos de una función de dos variables.

41. Invente un ejemplo que muestre la aplicación del criterio de la segunda derivada.

42. Enuncie el *teorema del valor extremo* para funciones de dos variables.

43. Describa el procedimiento empleado para determinar los *extremos absolutos* de una función de dos variables que satisface el teorema del valor extremo. Invente un ejemplo.

44. ¿Cómo se emplea el *método de mínimos cuadrados* para obtener un modelo matemático que mejor aproxime a un conjunto de datos? Invente un ejemplo.

45. ¿Cómo se utiliza el *método de multiplicadores de Lagrange* para obtener los extremos relativos de una función de dos variables sujeta a una restricción dada? Invente un ejemplo.

46. Efectúe la sugerencia 45 para una función de tres variables.

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 12

En los ejercicios 1 a 4, determine el dominio de f y dibuje el conjunto de puntos del dominio como una region de R^2

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 16}$
2. $f(x, y) = \dfrac{6}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}$
3. $f(x, y) = \ln(y - x^2)$
4. $f(x, y) = \text{sen}^{-1}(5 - x^2 - y^2)$

En los ejercicios 5 y 6, determine el dominio de f y describa la región en R^3 que representa al dominio.

5. $f(x, y, z) = \dfrac{x}{|y| - |z|}$
6. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

En los ejercicios 7 y 8, determine el dominio de f y dibuje su gráfica.

7. $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$
8. $f(x, y) = 16x^2 - y^2$

9. La función de producción de cierto artículo es f, donde $f(x, y) = 4x^{1/2}y$, y x y y indican las cantidades de dos insumos. Dibuje un mapa de contornos de f que muestre las curvas de producción constante para 16, 8 4 y 2.

10. La temperatura en un punto (x, y) de una placa metálica es $t(x, y)$ grados, y $t(x, y) = x^2 + 2y$. Dibuje las isotermas cuando t toma los valores 0, 2, 4, 6 y 8.

En los ejercicios 11 a 24, obtenga las derivadas parciales indicadas.

11. $f(x, y) = 2x^2y - 3xy^2 + 4x - 2y$;
(a) $D_1f(x, y)$; **(b)** $D_2f(x, y)$; **(c)** $D_{11}f(x, y)$; **(d)** $D_{22}f(x, y)$;
(e) $D_{12}f(x, y)$; **(f)** $D_{21}f(x, y)$

12. $f(x, y) = (4x^2 - 2y)^3$;
(a) $f_1(x, y)$; **(b)** $f_2(x, y)$; **(c)** $f_{11}(x, y)$; **(d)** $f_{22}(x, y)$;
(e) $f_{12}(x, y)$; **(f)** $f_{21}(x, y)$

13. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y}{3y^2}$;
(a) $f_x(x, y)$; **(b)** $f_y(x, y)$; **(c)** $f_{xy}(x, y)$; **(d)** $f_{yx}(x, y)$

14. $f(r, s) = re^{2rs}$;
(a) $D_rf(r, s)$; **(b)** $D_sf(r, s)$; **(c)** $D_{rs}f(r, s)$; **(d)** $D_{sr}f(r, s)$

15. $g(s, t) = \text{sen}(st^2) + te^s$;
(a) $D_sg(s, t)$; **(b)** $D_tg(s, t)$; **(c)** $D_{st}g(s, t)$; **(d)** $D_{ts}g(s, t)$

16. $h(x, y) = \tan^{-1}\dfrac{x^3}{y^2}$;
(a) $D_1h(x, y)$; **(b)** $D_2h(x, y)$; **(c)** $D_{11}h(x, y)$; **(d)** $D_{22}h(x, y)$

17. $f(x, y) = e^{x/y} + \ln\dfrac{x}{y}$;
(a) $f_x(x, y)$; **(b)** $f_y(x, y)$; **(c)** $f_{xx}(x, y)$; **(d)** $f_{yy}(x, y)$

18. $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$;
(a) $f_1(x, y)$; **(b)** $f_{11}(x, y)$; **(c)** $f_{12}(x, y)$; **(d)** $f_{121}(x, y)$

19. $f(x, y, z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$;
(a) $D_1f(x, y, z)$; **(b)** $D_2f(x, y, z)$; **(c)** $D_3f(x, y, z)$

20. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 3yz - z^2}$;
(a) $f_x(x, y, z)$; **(b)** $f_y(x, y, z)$; **(c)** $f_z(x, y, z)$

21. $f(u, v, w) = \ln(u^2 + 4v^2 - 5w^2)$;
(a) $f_{uwv}(u, v, w)$; **(b)** $f_{uvv}(u, v, w)$

22. $f(r, s, t) = t^2e^{4rst}$; **(a)** $f_r(r, s, t)$; **(b)** $f_{rt}(r, s, t)$; **(c)** $f_{rts}(r, s, t)$

23. $f(r, s, t) = \dfrac{\ln 4rs}{t^2}$;
(a) $D_1f(r, s, t)$; **(b)** $D_{13}f(r, s, t)$; **(c)** $D_{131}f(r, s, t)$

24. $f(u, v, w) = w\cos 2v + 3v\,\text{sen}\,u - 2uv\tan w$;
(a) $D_2f(u, v, w)$; **(b)** $D_1f(u, v, w)$; **(c)** $D_{131}f(u, v, w)$

25. Si $w = x^2y - y^2x + y^2z - z^2y + z^2x - x^2z$, pruebe que

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

26. Si $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

En los ejercicios 27 y 28, calcule $\frac{\partial u}{\partial t}$ *y* $\frac{\partial u}{\partial s}$ *mediante dos métodos.*

27. $u = y \ln(x^2 + y^2), x = 2s + 3t, y = 3t - 2s$

28. $u = e^{2x+y} \cos(2y - x), x = 2s^2 - t^2, y = s^2 + 2t^2$

29. Si $u = 3x^2y + 2xy - 3yz - 2z^2, x = e^{3rs}, y = r^3s^2$, y $z = \ln 4r$, calcule $\frac{\partial u}{\partial r}$ mediante dos métodos: **(a)** Utilice la regla de la cadena; **(b)** efectúe la sustitución de x, y y z antes de diferenciar.

30. Si $u = e^{x^2+y^2} - \frac{3x}{y} + 3z$, $x = \operatorname{sen} \theta$, $y = \cos \theta$ y $z = \tan \theta$, obtenga la derivada total $du/d\theta$ mediante dos métodos: **(a)** no exprese u en términos de θ antes de diferenciar; **(b)** exprese u en términos de θ antes de diferenciar.

31. Si $u = xy + x^2$, $x = 4 \cos t$ y $y = 3 \operatorname{sen} t$, calcule el valor de la derivada total du/dt en $t = \frac{1}{4}\pi$ mediante dos métodos: **(a)** no exprese u en términos de t antes de derivar; **(b)** exprese u en términos de t antes de derivar.

32. Si $f(x, y) = x^2 + ye^2$, calcule: **(a)** $\Delta f(0, 2)$, el incremento de f en $(0, 2)$; **(b)** $\Delta f(0, 2)$ cuando $\Delta x = -0.1$ y $\Delta y = 0.2$; **(c)** $df(0, 2, \Delta x, \Delta y)$, la diferencial total de f en $(0, 2)$; **(d)** $df(0, 2, -0.1, 0.2)$.

33. Si $f(x, y, z) = 3xy^2 - 5xz^2 - 2xyz$, calcule:

(a) $\Delta f(-1, 3, 2)$, el incremento de f en $(-1, 3, 2)$; **(b)** $\Delta f(-1, 3, 2)$ cuando $\Delta x = 0.02$, $\Delta y = -0.01$ y $\Delta z = -0.02$; **(c)** $df(-1, 3, 2, \Delta x, y, \Delta z)$, la diferencial total de f en $(-1, 3, 2)$; **(d)** $df(-1, 3, 2, 0.02, -0.01, -0.02)$.

34. Sean $f(x) = x^2 + 1$, $g(x, y) = \frac{2x}{3y}$, y $h(x) = \frac{1}{x}$, calcule: **(a)** $(h \circ g)(-3, 4)$; **(b)** $g(f(3), h(\frac{1}{4}))$; **(c)** $g(f(x), h(y))$; **(d)** $f(h \circ g)(x, y)$.

En los ejercicios 35 a 37, evalúe el límite empleando los teoremas de límites.

35. $\lim\limits_{(x,y)\to(e,0)} \ln\left(\frac{x^2}{y+1}\right)$

36. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi/2)} \frac{xy^2 + e^x}{\cos x + \operatorname{sen} y}$

37. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3x}{2y}\right)$

En los ejercicios 38 a 40, verifique el límite obteniendo una $\delta > 0$ *para cualquier* $\epsilon > 0$ *tal que la definición 12.2.5 se cumpla.*

38. $\lim\limits_{(x,y)\to(4,-1)} (4x - 5y) = 21$

39. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)} (3x^2 - 4y^2) = -4$

40. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} (x^2 - y^2 + 2x - 4y) = 10$

En los ejercicios 41 a 44, determine si el límite existe.

41. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2 + y^2}$

42. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}$

43. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^9y}{(x^6 + y^2)^2}$

44. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3 + 4x^2y}{x^2 + y^2}$

En los ejercicios 45 a 48, determine todos los puntos en los que f es continua.

45. $f(x, y) = \frac{x^2 + 4y^2}{x^2 - 4y^2}$

46. $f(x, y) = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\pi x + \cos^2 \frac{1}{2}\pi y}$

47. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Sugerencia: Consulte el ejercicio 41.

48. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Sugerencia: Consulte el ejercicio 42.

En los ejercicios 49 a 53, obtenga el valor de la derivada direccional en el punto P_0 *para la función en la dirección de* **U**.

49. $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 1$; $\mathbf{U} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$; $P_0 = (5, 10)$

50. $g(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$; $\mathbf{U} = \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$; $P_0 = (4, -4)$

51. $h(x, y) = e^x + y^2 \cos x$; $\mathbf{U} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathbf{i} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathbf{j}$; $P_0 = (0, 3)$

52. $f(x, y) = x^2 - 2x^2y + \ln x$; $\mathbf{U} = \cos \pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \pi\mathbf{j}$; $P_0 = (1, -2)$

53. $f(x, y, z) = xy^2z - 3xyz + 2xz^2$; $\mathbf{U} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}$; $P_0 = (2, 1, 1)$

En los ejercicios 54 a 57, calcule (a) el gradiente de f en P_0; *(b) la tasa de variación de la función en* P_0 *en la dirección de* **U**.

54. $f(x, y) = 3x^2 - 2xy^3$; $\mathbf{U} = \cos \frac{1}{6}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi\mathbf{j}$; $P_0 = (-3, 1)$

55. $f(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$; $\mathbf{U} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{j}$; $P_0 = (1, 1)$

56. $f(x, y, z) = yz - y^2 - xz$; $\mathbf{U} = \frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{2}{7}\mathbf{k}$; $P_0 = (1, 2, 3)$

57. $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + 2xyz$; $\mathbf{U} = \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$; $P_0 = (2, -1, 0)$

En los ejercicios 58 y 59, determine los extremos relativos de f, si los tiene.

58. $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 2y^2 + 10x - 11y$

59. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$

En los ejercicios 60 y 61, demuestre que f es diferenciable en todos los puntos de su dominio probando que la definición 12.4.2 se cumple.

60. $f(x, y) = 3xy^2 - 4x^2 + y^2$ **61.** $f(x, y) = \dfrac{2x + y}{y^2}$

62. Suponga que α es la medida en radianes de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y que sen α está determinado por a/c, donde a centímetros es la longitud del cateto opuesto al ángulo α y c centímetros es la longitud de la hipotenusa. Si al medir a se obtuvo 3.52 y al medir c resultó 7.14, y se sabe que hay un posible error de 0.01 en cada medición, determine el error posible en el cálculo de sen α de estas mediciones.

63. Un pintor cobra $4 por metro cuadrado al pintar las cuatro paredes y el techo de una habitación. Si las dimensiones del techo son de 4 y 5 m, y la altura de la habitación es de 3 m, y si estas medidas son correctas con un margen de error de 0.5 cm, calcule aproximadamente, empleando la diferencial total, el mayor error posible al estimar el costo del trabajo a partir de estas medidas.

64. En un instante dado, la longitud de un lado de un rectángulo es de 6 cm y se incrementa a la tasa de 1 cm/s, y la longitud del otro lado del rectángulo es de 10 cm y disminuye a la tasa de 2 cm/s. Calcule la tasa de variación del área del rectángulo en el instante dado.

65. El radio de un cilindro circular recto disminuye a la tasa de 5 cm/min y su altura se incrementa a la tasa de 12 cm/min. Calcule la tasa de variación del volumen en el instante en que el radio es de 20 cm y la altura de 40 cm.

66. Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $25x^2 - 16y^2 + 9z^2 - 4 = 0$ con el plano $x = 4$ en el punto (4, 9, 10).

67. Utilice la ley del gas ideal (consulte el ejemplo 6 de la sección 12.3) con $k = 1.4$ para calcular la tasa de variación de la presión en el instante en que la temperatura Kelvin es de 75° y el volumen del gas es de 20 litros si la temperatura se incrementa a la tasa de 0.5°K/min y el volumen crece a la tasa de 0.3 litros/min.

En los ejercicios 68 a 70, obtenga una ecuación del plano tangente y ecuaciones de la recta normal a la superficie en el punto indicado.

68. $z = x^2 + 2xy$; (1, 3, 7)

69. $x^2 + 2y + z = 8$; (2, 1, 2)

70. $3x^2 + 2xy - y^2 = 15$; (2, 3, 4)

71. Obtenga las ecuaciones simétricas de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies $x^2 - 3xy + y^2 - z = 0$ y $2x^2 + y^2 - 3z + 27 = 0$ en el punto $(1, -2, 11)$.

72. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = 3x^2 + y^2 + 1$ con el plano $x = 2$ en el punto $(2, -1, 14)$.

73. Una ecuación de la superficie de una montaña es $z = 900 - 3xy$, donde la distancia se mide en metros, el eje x apunta hacia el oeste y el eje y apunta hacia el sur. Un alpinista se encuentra en el punto que corresponde a (50, 4, 300). **(a)** ¿Cuál es la dirección de la mayor pendiente en ese punto? **(b)** ¿Asciende o desciende el alpinista cuando se mueve en la dirección norte? **(c)** En qué dirección recorrerá el alpinista una curva de nivel?

74. Si $f(x, y)$ unidades son producidas por x trabajadores y y máquinas, entonces $D_x f(x, y)$ se denomina **productividad marginal de la mano de obra** y $D_y f(x, y)$ se llama **productividad marginal de la maquinaria.** Suponga que

$$f(x, y) = x^2 + 6xy + 3y^2$$

donde $5 \leq x \leq 30$ y $4 \leq y \leq 12$. **(a)** Calcule el número de unidades producidas en un día cuando la mano de obra, para ese día, consiste de 15 trabajadores y se emplean 8 máquinas. **(b)** Utilice la productividad marginal de la mano de obra para determinar el número aproximado de unidades adicionales que pueden producirse en un un día si la mano de obra se incrementa de 15 a 16 trabajadores y el número de máquinas permanece fijo en 8. **(c)** Emplee la productividad marginal de la maquinaria para determinar aproximadamente el número de unidades adicionales que se pueden producir en un día si el número de máquinas se incrementa de 8 a 9 y el número de trabajadores permanece fijo en 15.

En los ejercicios 75 a 78, utilice multiplicadores de Lagrange para obtener los puntos críticos de la función sujeta a la restricción indicada. Determine si la función tiene un valor máximo o mínimo relativo en los puntos críticos.

75. $f(x, y) = 5 + x^2 - y^2$ con la restricción $x^2 - 2y^2 = 5$.

76. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ con la restricción $x^2 - y^2 = 1$.

77. $f(x, y, z) = y + xz - 2x^2 - y^2 - z^2$ con la restricción $z = 35 - x - y$.

78. $f(x, y, z) = xz^2 + y^3$ con la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

79. Emplee multiplicadores de Lagrange para calcular la distancia mínima del punto (4, 1, 2) al plano $x - y + 2z = 0$.

80. Utilice multiplicadores de Lagrange para determinar el punto de la superficie $z = x^2 - y^2 + 2$ que esté más cerca del origen.

81. Determine tres números cuya suma sea 100 de modo que la suma de sus cuadrados sea mínima.

82. Un fabricante produce cada día x unidades del artículo A y y unidades del artículo B. Si $P(x, y)$ dólares es la utilidad diaria por la venta de los artículos, y $P(x, y) = 33x + 66y + xy - x^2 - 3y^2$, ¿cuántas unidades de cada artículo debe producir el fabricante cada día de modo que obtenga la máxima utilidad?

83. Calcule las dimensiones del paralelepípedo rectangular de mayor volumen que puede inscribirse en el elipsoide $x^2 + 9y^2 + z^2 = 9$. Suponga que las aristas del paralelepípedo deben ser paralelas a los ejes coordenados.

84. En cualquier punto (x, y) de la curva $4x^2 + 12y^2 = 1$ la temperatura es t grados, y

$$T = 4x^2 + 24y^2 - 2x$$

Determine los puntos de la curva donde la temperatura es máxima y donde es mínima. También calcule la temperatura en esos puntos.

85. En cualquier punto (x, y) de una placa circular caliente la temperatura es es T grados, y

$$T = \frac{44}{x^2 + y^2 + 9}$$

donde la distancia se mide en centímetros a partir del origen ubicado en el centro de la placa. **(a)** Calcule la tasa de variación de la temperatura en el punto (3, 2) en la dirección del vector $\cos \frac{1}{6}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi\mathbf{j}$. **(b)** Determine la dirección y la intensidad (módulo) de la mayor tasa de variación de T en el punto (3, 2).

86. Una caja rectangular sin tapa debe tener un área superficial de 216 pie^2. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de volumen máximo?

87. Para la caja del ejercicio 86, suponga que, en lugar de que el área superficial es de 216 pie^2, la suma de las longitudes de las aristas es de 216 pie. ¿Cuáles son entonces las dimensiones de la caja de volumen máximo?

88. Un trozo de alambre de L unidades de longitud se corta en tres partes. Una parte se dobla en forma de circunferencia, otra se dobla en forma de cuadrado y la tercera parte en forma de triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que **(a)** el área combinada de las tres figuras sea la mínima posible, y **(b)** el área combinada de las tres figuras sea la máxima posible?

89. Determine las dimensiones relativas de una caja rectangular sin tapa que tiene un área superficial específica de modo que el volumen que debe contener sea el máximo posible.

90. Calcule las distancias mayor y menor desde el origen a la curva de intersección de las superficies $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 30$ y $x^2 = 2yz$.

91. La tabla siguiente proporciona datos de cinco pacientes que se sometieron a una operación en cierto hospital, donde x años es la edad del paciente y y días es el tiempo de convalecencia en el hospital después de la operación.

	Paciente A	*Paciente B*	*Paciente C*	*Paciente D*	*Paciente E*
x	54	46	40	36	30
y	15	12	9	10	8

(a) Obtenga una ecuación de la recta de regresión para los datos de la tabla. **(b)** Utilice la recta de regresión para estimar el tiempo de convalecencia para una persona que ha sido operada en ese hospital y cuya edad es de 42 años.

92. En la tabla siguiente se dan la presión sanguínea sistólica de un paciente y el ritmo cardiaco correspondiente, donde x milímetros de mercurio es la presión sanguínea sistólica y y pulsaciones por minuto es el ritmo cardiaco.

	Paciente A	*Paciente B*	*Paciente C*	*Paciente D*	*Paciente E*	*Paciente F*
x	110	117	133	146	115	127
y	70	74	80	85	60	77

(a) Obtenga una ecuación de la recta de regresión para los datos de la tabla. **(b)** Utilice la recta de regresión para estimar el ritmo cardiaco de un paciente cuya presión sanguínea sistólica es de 85 mm de mercurio.

93. En el desierto, el agua es un factor que limita considerablemente la actividad vegetal. En la tabla siguiente x representa el número de milímetros de precipitación anual para seis regiones diferentes, y y denota el número de kilogramos por hectárea en la producción neta de fotosíntesis.

	Región A	*Región B*	*Región C*	*Región D*	*Región E*	*Región F*
x	100	200	400	500	600	650
y	1000	1900	3200	4400	5800	6400

(a) Obtenga una ecuación de la recta de regresión para los datos de la tabla. **(b)** Utilice la recta de regresión del inciso (a) para estimar la fotosíntesis neta producida en una región que tiene una precipitación anual de 300 mm.

94. Se realizó una prueba de venta de un cereal en cuatro ciudades del mismo tamaño a diferentes precios; los resultados se muestran en la tabla adjunta, donde x centavos representa el precio por caja y y denota los miles de cajas vendidas semanalmente.

	Ciudad A	*Ciudad B*	*Ciudad C*	*Ciudad D*
x	130	140	150	160
y	100	85	75	63

(a) Obtenga una ecuación de la recta de regresión para los datos de la tabla. Utilice la recta de regresión del inciso (a)

como la curva de demanda para estimar las ventas semanales si el precio por caja es **(b)** \$1.20, y **(c)** \$1.70.

95. Calcule **(a)** $f_2(x,0)$ si $x \neq 0$, y **(b)** $f_2(0,0)$, si

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{12x^2y - 3y^3}{x^2 + y} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

96. Verifique que $u(x, y) = (\operatorname{senh} x)(\operatorname{sen} y)$ satisface la ecuación de Laplace en R^2:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

97. Si f es una función diferenciable de u, considere $u = x^2 + y^2$ y demuestre que $z = xy + f(x^2 + y^2)$ satisface la ecuación

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2$$

98. La ecuación de Laplace en coordenadas polares es

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

Verifique que $u(r, \theta) = r^n \operatorname{sen} n\theta$, donde n es una constante, satisface esta ecuación.

99. Verifique que $u(x, y, z) = e^{3x+4y} \operatorname{sen} 5z$ satisface la ecuación de Laplace en R^3:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

100. Verifique que $u(x, t) = A\cos(kat)\operatorname{sen}(kx)$, donde A y k son constantes arbitrarias, satisface la ecuación diferencial parcial para una cuerda vibrante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

101. Verifique que

$$u(x, t) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, e^{(-n^2\pi^2k^2/L^2)t}$$

satisface la ecuación diferencial parcial unidimensional de la conducción de calor:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

102. Sea f la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Demuestre que $D_1f(0, 0)$ y $D_2f(0, 0)$ existen y que, sin embargo, f no es diferenciable en $(0, 0)$. *Sugerencia:* Consulte el ejemplo 7 de la sección 12.2 y el ejercicio 38 de esa misma sección.

103. Sea f la función definida por

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Demuestre que f es diferenciable en $(0, 0, 0)$.

104. Sea f la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-1/x^2}y}{e^{-2/x^2} + y} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que f es continua en el origen.

105. Para la función del ejercicio 104, demuestre que $D_1f(0, 0)$ y $D_2f(0, 0)$ existen.

106. Si f es una función diferenciable de x y y, y $u = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$, demuestre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

107. La ecuación diferencial parcial unidimensional de la conducción de calor se presentó en el ejercicio 101. Demuestre que si f es una función de x que satisface la ecuación

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \lambda^2 f(x) = 0$$

y g es una función de t que satisface la ecuación

$$\frac{dg}{dt} + k^2\lambda^2 g(t) = 0,$$

y si $u = f(x)g(t)$ y k y λ son constantes, entonces u satisface la ecuación diferencial parcial de la conducción de calor.

108. La ecuación diferencial parcial para una cuerda vibrante se dio en el ejercicio 100. Demuestre que si f es una función de x que satisface la ecuación $\dfrac{d^2f}{dx^2} + \lambda^2 f(x) = 0$, y que g es una función que satisface la ecuación $\dfrac{d^2g}{dt^2} + a^2\lambda^2 g(t) = 0$, y si $u = f(x)g(t)$ y a y λ son constantes, entonces u satisface dicha ecuación diferencial parcial de la cuerda vibrante.

109. Demuestre que si f y g son dos funciones arbitrarias de una variable real cuyas segundas derivadas son continuas y

$$u = f(x + at) + g(x - at)$$

entonces u satisface la ecuación diferencial parcial de la cuerda vibrante dada en el ejercicio 100. *Sugerencia:* considere $v = x + at$ y $w = x - at$; entonces u es una función de v y w, y v y w son funciones de x y t.

110. Una ecuación de onda electromagnética no homogénea para un potencial escalar $V(r, t)$ que asume *simetría esférica de* r unidades a partir del origen es

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) - \mu\epsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

donde μ es la permeabilidad constante en el espacio libre y ϵ es la constante permitida de espacio libre. **(a)** Suponga que $V(r, t) = \phi(r, t)/r$ donde las segundas derivadas parciales de ϕ con respecto a r y t existen. Demuestre que la ecuación de onda no homogénea puede escribirse como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

la cual es la ecuación de onda homogénea unidimensional. **(b)** Sea f una función de una variable cuya segunda derivada existe. Demuestre mediante sustitución directa que $\phi = f(t - r\sqrt{\mu\epsilon})$ es una solución de la ecuación de onda homogénea unidimensional.

111. La ecuación bidimensional para las ondas eléctricas transversales es

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K^2 h = 0$$

donde $K^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ y K, m, n, a y b son constantes. Demuestre que una solución de esta ecuación es

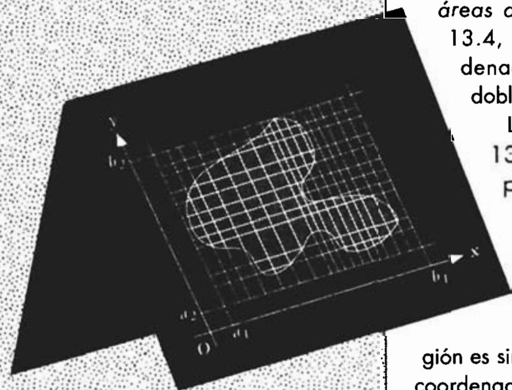
$$h = H\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

donde H es una constante.

Capítulo 13

Integración múltiple

VISIÓN PRELIMINAR



Las *coordenadas cilíndricas* y *esféricas* son generalizaciones de las coordenadas polares para el espacio tridimensional. Estos tipos de coordenadas se estudian en la primera sección, debido a que se emplearán en aplicaciones posteriores.

El propósito principal de este capítulo consiste en extender el concepto de integral definida de una función de una variable a funciones de varias variables. La sección 13.2 se inicia con la definición de *integral doble* de una función de dos variables definida en una región rectangular cerrada de R^2. Después se amplía esta definición al considerar la integral doble de una función definida en una región de integración plana más general. También se muestra en esta sección cómo se utilizan las *integrales iteradas* para evaluar integrales dobles. En la sección 13.2 se aplican las integrales dobles al calcular *volúmenes de sólidos* y en la sección de 13.3 se emplean para determinar *masas, centros de masas, momentos de inercia* y *áreas de superficies*. Posteriormente, en la sección 13.4, se muestra cómo pueden utilizarse las coordenadas polares para evaluar ciertas integrales dobles.

Las *integrales triples* se estudian en la sección 13.5. Primero se definen para un paralelepípedo rectangular y después en una región de integra-ción más general de R^3. En la sección de 13.6 se demuestra que cuando la región de integración tiene un eje de simetría, se utilizan las coordenadas cilíndricas a fin de evaluar una integral triple, y que cuando la región es simétrica con respecto a un punto, se emplean las coordenadas esféricas.

Los conceptos de este capítulo se tratan de manera más intuitiva y menos formal debido a que la mayoría de las demostraciones de los teoremas pertenecen a un curso de Cálculo avanzado.

13.1 COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

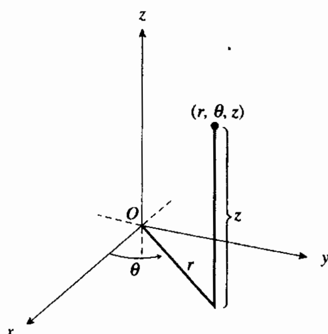


FIGURA 1

Antes de iniciar el estudio de integrales múltiples y de sus aplicaciones, se introducirán dos nuevos sistemas de coordenadas para el espacio tridimensional: *coordenadas cilíndricas* y *coordenadas esféricas*. Estos sistemas coordenados simplificarán el trabajo en varios casos del presente capítulo.

El sistema de coordenadas cilíndricas es una extensión de las coordenadas polares para tres dimensiones. La representación en **coordenadas cilíndricas** de un punto P es (r, θ, z), donde r y θ son las coordenadas polares de la proyección de P en el plano polar y z es la distancia dirigida desde el plano polar hasta P. Consulte la figura 1.

EJEMPLO 1 Dibuje la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones, expresada en coordenadas cilíndricas, donde c es una constante: **(a)** $r = c$; **(b)** $\theta = c$; **(c)** $z = c$.

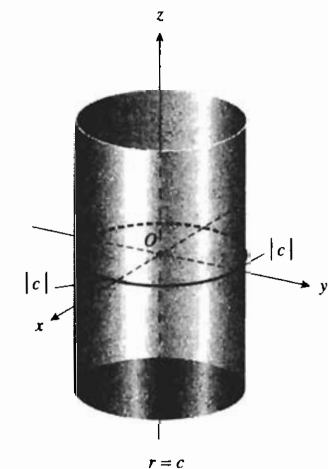


FIGURA 2

Solución

(a) Para un punto $P(r, \theta, z)$ de la gráfica de $r = c$, θ y z pueden asumir cualquier valor, mientras que r es constante. La gráfica es un cilindro circular recto cuyo radio es $|c|$ unidades y su eje es el eje z. La gráfica se muestra en la figura 2.

(b) Para todos los puntos $P(r, \theta, z)$ de la gráfica de $\theta = c$, r y z pueden tomar cualquier valor, en tanto que θ permanece constante. La gráfica es un plano que pasa por el eje z. Refiérase a la figura 3 donde $0 < c < \frac{1}{2}\pi$.

(c) La gráfica de $z = c$ es un plano paralelo al plano polar ubicado a una distancia dirigida de c unidades a partir del plano polar. La figura 4 muestra la gráfica para $c > 0$. ◀

El nombre "coordenadas cilíndricas" proviene del hecho de que la gráfica de $r = c$ es un cilindro circular recto como el del ejemplo 1(a). Las coordenadas cilíndricas se emplean con frecuencia en problemas físicos en los que se tiene un eje de simetría.

Suponga que un sistema de coordenadas cartesianas y otro de coordenadas cilíndricas se colocan de modo que el plano xy es el plano polar del sistema de coordenadas cilíndricas, y que la parte positiva del eje x es el eje polar, observe la figura 5. Entonces, el punto P tiene a (x, y, z) y (r, θ, z) como dos conjuntos de coordenadas que están relacionados por las ecuaciones siguientes:

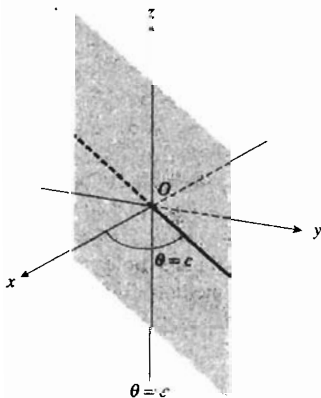


FIGURA 3

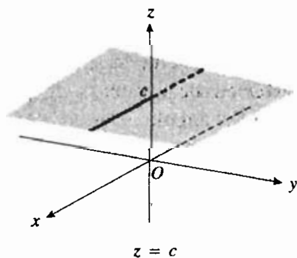


FIGURA 4

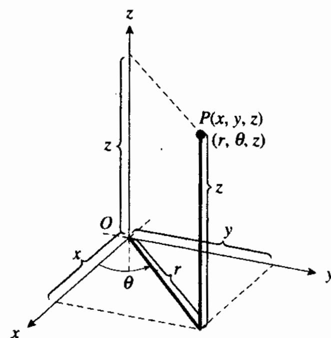


FIGURA 5

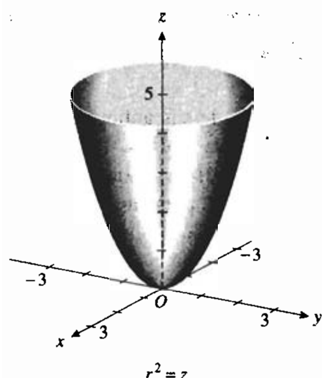


FIGURA 6

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad z = z \tag{1}$$

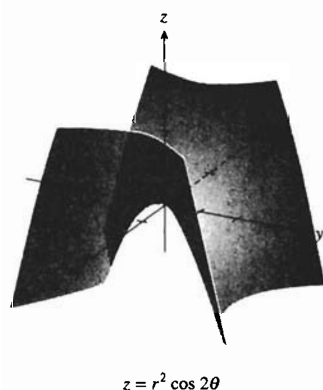
$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}\ \text{si}\ x \neq 0 \qquad z = z \tag{2}$$

▶ ***EJEMPLO 2*** Obtenga una ecuación en coordenadas cartesianas para cada una de las siguientes superficies cuyas ecuaciones se han expresado en coordenadas cilíndricas, e identifique la superficie: **(a)** $r = 6\,\text{sen}\,\theta$; **(b)** $r(3\cos\theta + 2\,\text{sen}\,\theta) + 6z = 0$.

Solución

(a) Al multiplicar los dos miembros de la ecuación por r se obtiene $r^2 = 6r\,\text{sen}\,\theta$. Como $r^2 = x^2 + y^2$ y $r\,\text{sen}\,\theta = y$, entonces $x^2 + y^2 = 6y$. Esta ecuación puede escribirse en la forma $x^2 + (y - 3)^2 = 9$, lo cual muestra que su gráfica es un cilindro circular recto cuya sección transversal en el plano xy es la circunferencia con centro en $(0, 3)$ y radio 3.

(b) Si se sustituye $r\cos\theta$ por x y $r\,\text{sen}\,\theta$ por y se obtiene la ecuación $3x + 2y + 6z = 0$. En consecuencia, la gráfica es un plano que pasa por el origen y tiene al vector $\langle 3, 2, 6\rangle$ como un vector normal. ◀



$z = r^2 \cos 2\theta$

FIGURA 7

▶ ***EJEMPLO 3*** Obtenga una ecuación en coordenadas cilíndricas para cada una de las siguientes superficies cuyas ecuaciones se han dado en coordenadas cartesianas, e identifique la superficie: **(a)** $x^2 + y^2 = z$; **(b)** $x^2 - y^2 = z$.

Solución

(a) La ecuación es similar a la ecuación 9 de la sección 10.6, por lo que la gráfica es un paraboloide elíptico. Este paraboloide se muestra en la figura 6. Si $x^2 + y^2$ se sustituye por r^2, entonces la ecuación se transforma en $r^2 = z$.

(b) La ecuación es semejante a la ecuación 10 de la sección 10.6 con x y y intercambiadas. Por tanto, la gráfica es un paraboloide hiperbólico que tiene al eje z como su eje. Cuando se sustituye x por $r\cos\theta$ y y por $r\,\text{sen}\,\theta$, se obtiene la ecuación $r^2\cos^2\theta - r^2\,\text{sen}^2\,\theta = z$; debido a que $\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta = \cos 2\theta$, entonces se puede escribir la ecuación como $z = r^2\cos 2\theta$. La figura 7 muestra el paraboloide hiperbólico. ◀

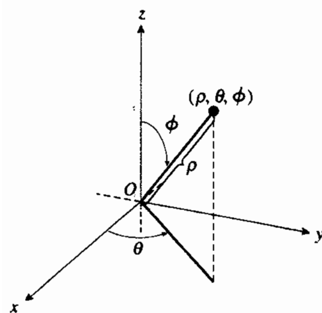


FIGURA 8

En un sistema de coordenadas esféricas se tiene un plano polar y un eje z perpendicular al plano polar, con el origen del eje como el polo del plano polar. Por medio de tres números se localiza un punto, y la representación en **coordenadas esféricas** de un punto P es (ρ, θ, ϕ), donde $\rho = |\overline{OP}|$, θ es la medida en radianes del ángulo polar de la proyección de P en el plano polar, y ϕ es la medida en radianes no negativa del ángulo menor medido desde la parte positiva del eje z a la recta OP, consulte la figura 8. El origen tiene la representación $(0, \theta, \phi)$ en coordenadas esféricas, donde θ y ϕ pueden asumir cualquier valor. Si el punto $P(\rho, \theta, \phi)$ no es el origen, entonces $\rho > 0$ y $0 \leq \phi \leq \pi$, donde $\phi = 0$ si P está en la parte positiva del eje z y $\phi = \pi$ si P se encuentra en la parte negativa del eje z.

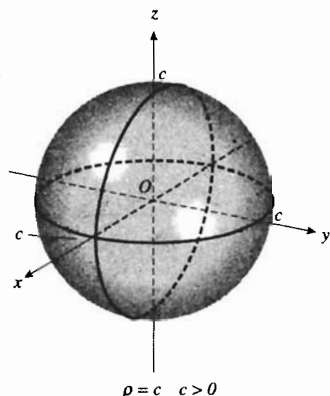


FIGURA 9

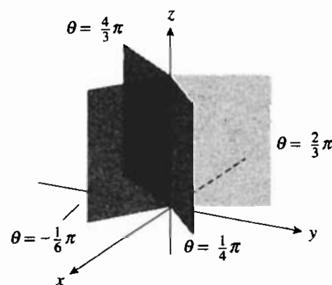


FIGURA 10

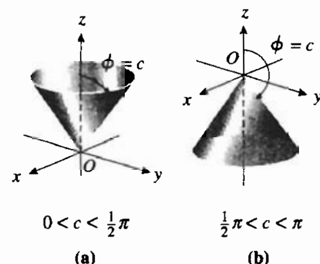


FIGURA 11

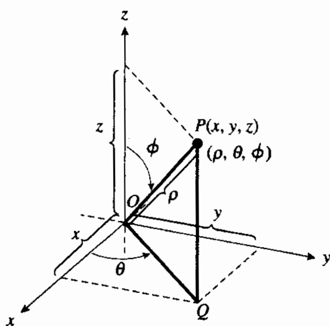


FIGURA 12

EJEMPLO 4 Dibuje la gráfica de cada una de las ecuaciones siguientes, expresadas en coordenadas esféricas, donde c es una constante: **(a)** $\rho = c$ y $c > 0$; **(b)** $\theta = c$; **(c)** $\phi = c$ y $0 < c < \pi$.

Solución

(a) Todos los puntos $P(\rho, \theta, \phi)$ de la gráfica de $\rho = c$ tienen el mismo valor para ρ, θ puede ser cualquier número y $0 \leq \phi \leq \pi$. De esto se deduce que la gráfica es una esfera de radio c cuyo centro es el polo. La figura 9 muestra la esfera.

(b) Para cualquier punto $P(\rho, \theta, \phi)$ de la gráfica de $\theta = c$, ρ puede ser cualquier número no negativo, ϕ puede ser cualquier número del intervalo cerrado $[0, \pi]$ y θ es constante. Por tanto, la gráfica es un semiplano que contiene al eje z, y se obtiene al rotar la mitad del plano xz, para el cual $x \geq 0$, alrededor del eje z mediante un ángulo de c radianes. La figura 10 muestra los semiplanos para $\theta = \frac{1}{4}\pi$, $\theta = \frac{2}{3}\pi$, $\theta = \frac{4}{3}\pi$ y $\theta = -\frac{1}{6}\pi$.

(c) La gráfica de $\phi = c$ contiene todos los puntos $P(\rho, \theta, \phi)$ para los cuales ρ es cualquier número no negativo, θ es cualquier número y ϕ es la constante c. La gráfica es la mitad de un cono cuyo vértice es el origen y cuyo eje es el eje z. Las figuras 11(a) y (b) muestran cada una el semicono para $0 < c < \frac{1}{2}\pi$ y $\frac{1}{2}\pi < c < \pi$, respectivamente. ◀

Debido a que la gráfica de $\rho = c$ es una esfera, como se vio en el ejemplo 4(a), se tiene el nombre "coordenadas esféricas". Las coordenadas esféricas se utilizan frecuentemente cuando en un problema físico se tiene un punto como centro de simetría.

Si se colocan juntos un sistema de coordenadas esféricas y uno de coordenadas cartesianas, como se ilustra en la figura 12, se pueden deducir las siguientes relaciones entre las coordenadas esféricas y cartesianas de un punto P:

$$x = |\overline{OQ}|\cos\theta \qquad y = |\overline{OQ}|\operatorname{sen}\theta \qquad z = |\overline{QP}|$$

Como $|\overline{OQ}| = \rho \operatorname{sen}\phi$ y $|\overline{QP}| = \rho\cos\phi$, las ecuaciones anteriores se transforman en

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta \qquad y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \qquad z = \rho\cos\phi \tag{3}$$

Al elevar al cuadrado cada una de las ecuaciones de (3) y sumando los miembros correspondientes se tiene

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}^2\theta + \rho^2\cos^2\phi$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\operatorname{sen}^2\phi(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + \rho^2\cos^2\phi$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2(\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

EJEMPLO 5 Obtenga una ecuación en coordenadas cartesianas de las superficies siguientes, cuyas ecuaciones se han expresado en coordenadas esféricas, e identifique la superficie: **(a)** $\rho\cos\phi = 4$; **(b)** $\rho\operatorname{sen}\phi = 4$.

Solución

(a) Como $z = \rho\cos\phi$, la ecuación se transforma en $z = 4$. En consecuencia, la gráfica es un plano paralelo al plano xy ubicado a 4 unidades por arriba de éste.

(b) Para coordenadas esféricas $\rho \geq 0$ y $\operatorname{sen}\phi \geq 0$ (ya que $0 \leq \phi \leq \pi$); por tanto, al elevar al cuadrado los dos miembros de la ecuación dada se obtiene la ecuación equivalente $\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi = 16$, la cual equivale a

$$\rho^2(1 - \cos^2\phi) = 16$$
$$\rho^2 - \rho^2\cos^2\phi = 16$$

Si se sustituye ρ^2 por $x^2 + y^2 + z^2$ y $\rho\cos\phi$ por z se tiene

$$x^2 + y^2 + z^2 - z^2 = 16$$
$$x^2 + y^2 = 16$$

Por tanto, la gráfica es el cilindro circular recto que tiene al eje z como su eje y radio 4. ◀

▶ ***EJEMPLO 6*** Obtenga una ecuación en coordenadas esféricas para **(a)** el paraboloide elíptico del ejemplo 3(a); **(b)** el plano del ejemplo 2(b).

Solución

(a) Una ecuación cartesiana del paraboloide elíptico del ejemplo 3(a) es $x^2 + y^2 = z$. Al sustituir x por $\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta$, y por $\rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$, y z por $\rho\cos\phi$ se obtiene

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta = \rho\cos\phi$$
$$\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = \rho\cos\phi$$

la cual equivale a las dos ecuaciones

$$\rho = 0 \quad \text{y} \quad \rho \operatorname{sen}^2\phi = \cos\phi$$

El origen es el único punto cuyas coordenadas satisfacen $\rho = 0$. Como el origen $(0, \theta, \frac{1}{2}\pi)$ está en $\rho \operatorname{sen}^2\phi = \cos\phi$, se puede descartar la ecuación $\rho = 0$. Además, $\operatorname{sen}\phi \neq 0$ debido a que no existe valor de ϕ para el cual $\operatorname{sen}\phi$ y $\cos\phi$ sean 0. Por tanto, la ecuación $\rho \operatorname{sen}^2\phi = \cos\phi$ puede escribirse como $\rho = \csc^2\phi \cos\phi$, o, equivalentemente, $\rho = \csc\phi \cot\phi$.

(b) Una ecuación cartesiana para el plano del ejemplo 2(b) es $3x + 2y + 6z = 0$. Al utilizar las ecuaciones de (3), esta ecuación se transforma en

$$3\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta + 2\rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta + 6\rho\cos\phi = 0$$ ◀

EJERCICIOS 13.1

1. Obtenga las coordenadas cartesianas del punto que tiene las coordenadas cilíndricas dadas:
(a) $(3, \frac{1}{2}\pi, 5)$; **(b)** $(7, \frac{2}{3}\pi, -4)$; **(c)** $(1, 1, 1)$.

2. Determine un conjunto de coordenadas cilíndricas del punto que tiene las coordenadas cartesianas indicadas:
(a) $(4, 4, -2)$; **(b)** $(-3\sqrt{3}, 3, 6)$; **(c)** $(1, 1, 1)$.

3. Obtenga las coordenadas cartesianas del punto que tiene las coordenadas esféricas dadas:
(a) $(4, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi)$; **(b)** $(4, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi)$; **(c)** $(\sqrt{6}, \frac{1}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi)$.

4. Determine un conjunto de coordenadas esféricas del punto que tiene las coordenadas cartesianas indicadas:
(a) $(1, -1, -\sqrt{2})$; **(b)** $(-1, \sqrt{3}, 2)$; **(c)** $(2, 2, 2)$.

5. Obtenga un conjunto de coordenadas cilíndricas del punto que tiene las coordenadas esféricas dadas:
(a) $(4, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi)$; **(b)** $(\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi)$; **(c)** $(2\sqrt{3}, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{4}\pi)$.

6. Determine un conjunto de coordenadas esféricas del punto que tiene las coordenadas cilíndricas indicadas:
(a) $(3, \frac{1}{6}\pi, 3)$; **(b)** $(3, \frac{1}{2}\pi, 2)$; **(c)** $(2, \frac{5}{6}\pi, -4)$.

En los ejercicios 7 a 12, obtenga una ecuación en coordenadas cilíndricas de la superficie, e identifique la superficie.

7. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ **8.** $x^2 - y^2 = 9$

9. $x^2 + y^2 = 3z$ **10.** $9x^2 + 4y^2 = 36$

11. $x^2 - y^2 = 3z^2$ **12.** $x^2 + y^2 = z^2$

En los ejercicios 13 a 17, obtenga una ecuación en coordenadas esféricas de la superficie, e identifique la superficie.

13. $x^2 + y^2 + z^2 - 9z = 0$ **14.** $x^2 + y^2 = z^2$

15. $x^2 + y^2 = 9$ **16.** $x^2 + y^2 = 2z$

17. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 0$

En los ejercicios 18 a 22, obtenga una ecuación en coordenadas cartesianas para la superficie cuya ecuación se da en coordenadas cilíndricas. En los ejercicios 18 y 19, identifique la superficie.

18. $r = 3 \cos \theta$ **19.** **(a)** $r = 4$; **(b)** $\theta = \frac{1}{4}\pi$

20. $r = 3 + 2 \cos \theta$ **21.** $r^2 \cos 2\theta = z^3$

22. $z^2 \operatorname{sen}^3 \theta = r^3$

En los ejercicios 23 a 28, obtenga una ecuación en coordenadas cartesianas para la superficie cuya ecuación se da en coordenadas esféricas. En los ejercicios 23 a 25, identifique la superficie.

23. **(a)** $\rho = 9$; **(b)** $\theta = \frac{1}{4}\pi$; **(c)** $\phi = \frac{1}{4}\pi$

24. $\rho = 9 \sec \phi$ **25.** $\rho = 6 \csc \phi$

26. $\rho = 3 \cos \phi$ **27.** $\rho = 2 \tan \theta$

28. $\rho = 6 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta + 3 \cos \phi$

En los ejercicios 29 a 32, relacione la ecuación, dada en coordenadas esféricas o cilíndricas, con una de las superficies mostradas en las figuras (i)–(x).

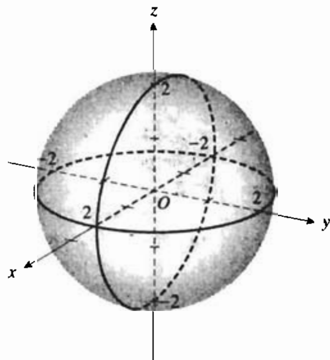
29. **(a)** $r = 4$; **(b)** $\rho = 4$; **(c)** $r = 2 \operatorname{sen} \theta$

30. **(a)** $\theta = \frac{1}{3}\pi$; **(b)** $\phi = \frac{1}{3}\pi$; **(c)** $r = 2 \cos \theta$

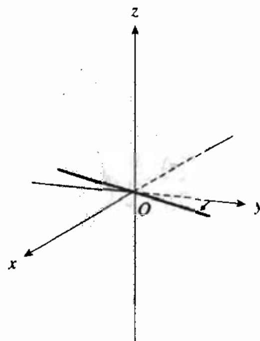
31. **(a)** $\rho \operatorname{sen} \phi = 2$; **(b)** $r^2 = 4z$

32. **(a)** $\rho \cos \phi = 2$; **(b)** $z^2 + r^2 = 4$

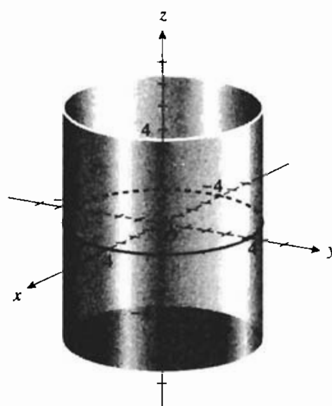
i.



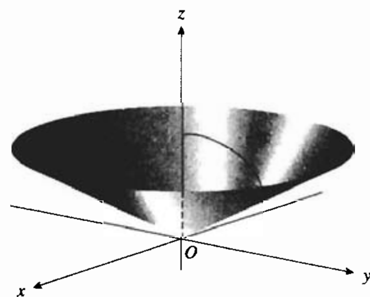
ii.



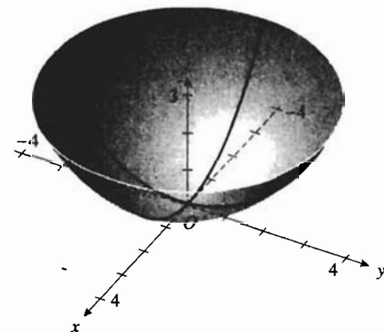
iii.



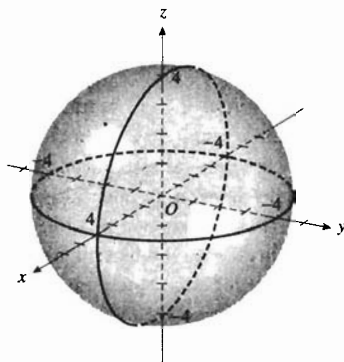
iv.



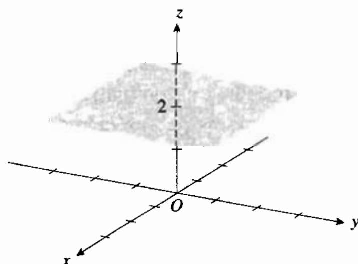
v.



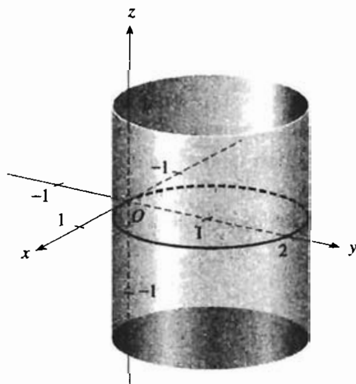
vi.



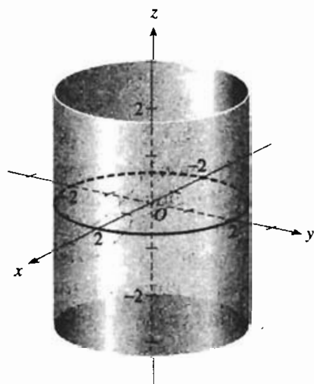
vii.



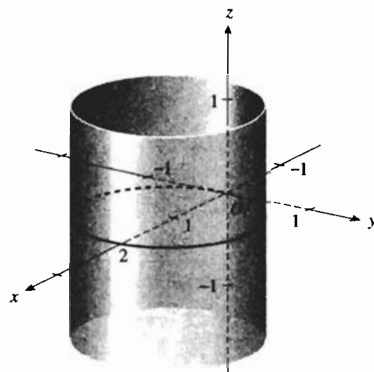
viii.



ix.



x.



33. Una curva C en R^3 tiene las siguientes ecuaciones paramétricas en coordenadas cilíndricas: $r = F_1(t)$, $\theta = F_2(t)$, $z = F_3(t)$. Utilice la fórmula del teorema 11.2.11 y las fórmulas (1) de esta sección para demostrar que si L unidades es la longitud de arco de C a partir del punto donde $t = a$ hasta el punto donde $t = b$, entonces

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

34. Una curva C en R^3 tiene las siguientes ecuaciones paramétricas en coordenadas esféricas: $\rho = G_1(t)$, $\theta = G_2(t)$, $\phi = G_3(t)$. Utilice la fórmula del teorema 11.2.11 y las fórmulas (3) de esta sección para demostrar que si L unidades es la longitud de arco de C a partir del punto donde $t = a$ hasta el punto donde $t = b$, entonces

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}\, dt$$

35. **(a)** Demuestre que las ecuaciones paramétricas para la hélice circular del ejemplo 7 de la sección 11.2 son $r = 2$, $\theta = t$, $z = t$. **(b)** Utilice la fórmula del ejercicio 33 para calcular la longitud de arco de la hélice circular del inciso (a) de $t = 0$ a $t = 4\pi$. Compare el resultado con el del ejemplo 7 de la sección 11.2.

36. Una **hélice cónica** se enrolla en un cono de manera semejante a como se enrolla una hélice circular en un cilindro. Utilice la fórmula del ejercicio 34 para calcular la longitud de arco de $t = 0$ a $t = 2\pi$ de la hélice cónica que tiene ecuaciones paramétricas $\rho = t$, $\theta = t$, $\phi = \frac{1}{4}\pi$.

13.2 INTEGRALES DOBLES

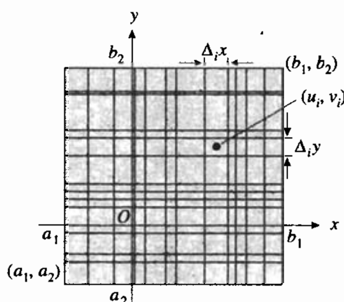


FIGURA 1

En el estudio de *integrales múltiples*, en el cual se tratan funciones de varias variables, se hará referencia a una integral de una función de una sola variable como **integral simple.** Recuerde que al estudiar la integral simple se requirió que la función estuviese definida en un intervalo cerrado del conjunto de números reales. Para la *integral doble* de una función de dos variables, se pedirá que la función esté definida en una región cerrada de R^2. En este capítulo, cuando se haga referencia a una región, se supondrá que ésta es cerrada.

El tipo más simple de región cerrada en R^2 es la *región rectangular cerrada*, la cual se definirá a continuación. Dos puntos diferentes $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, tales que $a_1 \leq b_1$ y $a_2 \leq b_2$, determinan un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados. Refiérase a la figura 1. Los dos puntos, junto con los puntos (b_1, a_2) y (a_1, b_2), se denominan **vértices** del rectángulo. Los segmentos de recta que unen vértices consecutivos se llaman **lados** del rectángulo. El conjunto de todos los puntos interiores del rectángulo recibe el nombre de **región rectangular abierta,** y el conjunto de todos los puntos de un rectángulo abierto junto con los puntos de sus lados se denomina **región rectangular cerrada.**

Considere la región rectangular cerrada de la figura 1, la cual se denotará por R, y sea f una función definida sobre R. La región R se considerará como una **región de integración.** El primer paso en el estudio de la integral doble es definir una **partición** Δ de R. Al dibujar rectas paralelas a los ejes coordenados se obtiene una red de subregiones rectangulares que cubren a R. La **norma** de esta partición, denotada por $\|\Delta\|$, está determinada por la longitud de la diagonal más grande de las subregiones rectangulares de la partición. Se elige la longitud de la diagonal debido a que representa la distancia más grande entre dos puntos cualesquiera de una subregión rectangular. Numere las subregiones de manera arbitraria y considere que se tienen en total n. Denote el ancho de la i-ésima subregión por $\Delta_i x$ unidades y su longitud por $\Delta_i y$ unidades. Ahora bien, si $\Delta_i A$ unidades cuadradas es el área de la i-ésima subregión rectangular, entonces

$$\Delta_i A = \Delta_i x \, \Delta_i y$$

Sea (u_i, v_i) un punto arbitrario de la i-ésima subregión y sea $f(u_i, v_i)$ el valor de la función en ese punto. Considere el producto $f(u_i, v_i)\,\Delta_i A$. Asociado con cada una de las n subregiones se tiene uno de estos productos, y su suma es

$$\sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i)\Delta_i A \tag{1}$$

llamada **suma de Riemann** de una función de dos variables. Existen muchas sumas de Riemann asociadas con una función particular debido a que la norma de la partición puede ser cualquier número positivo y cada punto (u_i, v_i) puede ser cualquier punto de la i-ésima subregión. Si todas estas sumas de Riemann se pueden acercar arbitrariamente a un número L tomando particiones con normas suficientemente pequeñas, entonces se define L como el *límite* de estas sumas conforme la norma de la partición de R se aproxima a cero. Esta discusión conduce a la siguiente definición.

13.2.1 Definición del límite de una suma de Riemann de una función de dos variables

Sea f una función definida en una región rectangular cerrada R. El número L es el **límite** de las sumas de la forma $\sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i)\,\Delta_i A$ si L satisface la propiedad de que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para cualquier partición Δ para la cual $\|\Delta\| < \delta$ y para toda elección posible del punto (u_i, v_i) en el i-ésimo rectángulo, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i)\Delta_i A - L\right| < \epsilon$$

Si tal número L existe, se escribe

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i)\,\Delta_i A = L$$

Puede demostrarse que el número L que satisfaga esta definición será único. La demostración es similar a la demostración del teorema 1.5.16 relativo a la *unicidad* del límite de una función de una variable.

13.2.2 Definición de la integral doble

Sea f una función de dos variables definida en una región rectangular cerrada R. La **integral doble** de f en R, denotada por $\iint_R f(x, y)\,dA$, está definida por

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i)\,\Delta_i A$$

si este límite existe.

Si la integral doble de f en R existe, entonces se dice que f es **integrable** en R. El teorema siguiente, enunciado sin demostración, proporciona una condición suficiente para que una función de dos variables sea integrable.

13.2.3 Teorema

Si una función de dos variables es continua en una región rectangular cerrada R, entonces f es integrable en R.

▶ *EJEMPLO 1* Obtenga un valor aproximado de la integral doble

$$\iint_R (3y - 2x^2)\,dA$$

donde R es la región rectangular que tiene vértices en $(-1, 1)$ y $(2, 3)$. Considere una partición de R generada por las rectas $x = 0$, $x = 1$ y $y = 2$, y tome el centro de la i-ésima subregión como (u_i, v_i).

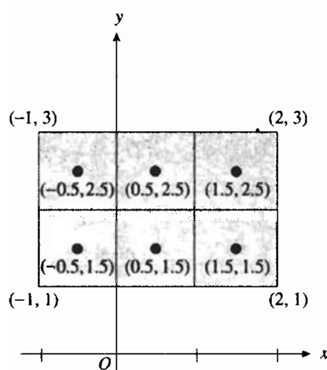


FIGURA 2

Solución Refiérase a la figura 2, la cual muestra la región R dividida en seis subregiones que son cuadrados cuyos lados miden 1 unidad. Así, para cada i, $\Delta_i A = 1$. En cada subregión el punto (u_i, v_i) es el centro del cuadrado. Con $f(x, y) = 3y - 2x^2$, una aproximación de la integral doble indicada está dada por

$$\begin{aligned}\iint_R (3y - 2x^2)\, dA &\approx f(-0.5, 1.5) \cdot 1 + f(0.5, 1.5) \cdot 1 + f(1.5, 1.5) \cdot 1 + \\ &\quad f(1.5, 2.5) \cdot 1 + f(0.5, 2.5) \cdot 1 + f(-0.5, 2.5) \cdot 1 \\ &= 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 7 + 7 \cdot 1 + 7 \cdot 1 \\ &= 25\end{aligned}$$

◀

El valor exacto de la integral doble del ejemplo 1 es 24, como se verá en el ejemplo 3.

Ahora se considerará la integral doble de una función sobre una región más general. Recuerde que una curva lisa es la gráfica de una función lisa, es decir, aquélla cuya derivada es continua. Sea R una región cerrada cuya frontera consiste de un número finito de arcos de curvas lisas que se unen para formar una curva cerrada simple. Como se hizo con una región rectangular, se dibujan rectas paralelas a los ejes coordenados, lo cual proporciona una partición rectangular de R. Si se descartan las subregiones que contienen puntos que no pertencen a R, se tendrán sólo aquéllas contenidas completamente en R. Sea n el número de estas subregiones, sombreadas en la figura 3. Al proceder de manera análoga a la descrita para una región rectangular, se pueden aplicar las definiciones 13.2.1 y 13.2.2 para esta región R más general. Conforme la norma de la partición se aproxima a cero, n crece sin límite, y el área de las regiones omitidas (es decir, los rectángulos descartados) tiende a cero. Si una función es integrable en una región R, se puede demostrar que el límite de las sumas de Riemann es el mismo sin importar como se subdivida R, siempre y cuando se tenga una forma mediante la cual se pueda asignar un área a cada subregión.

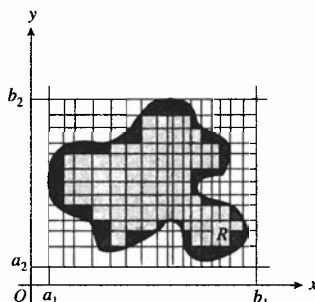


FIGURA 3

Así como se interpreta geométricamente la integral de una función de una variable en términos del área de una región plana, la integral doble puede interpretarse geométricamente en términos del volumen de un sólido tridimensional. Suponga que la función f es continua en una región cerrada R de R^2. Además, para simplificar la discusión, suponga que $f(x, y)$ es no negativa en R. La gráfica de la ecuación $z = f(x, y)$ es una superficie que se encuentra por arriba del plano xy, como se muestra en la figura 4. Esta figura presenta una subregión particular de R, cuyas dimensiones son $\Delta_i x$ y $\Delta_i y$. La figura también muestra un sólido rectangular que tiene esta subregión como base, y $f(u_i, v_i)$ como medida de su altura, donde (u_i, v_i) es un punto de la i-ésima subregión. El volumen del sólido rectangular está determinado por

$$\begin{aligned}\Delta_i V &= f(u_i, v_i)\, \Delta_i A \\ &= f(u_i, v_i)\, \Delta_i x\, \Delta_i y\end{aligned}$$

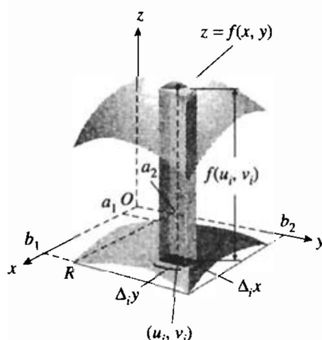


FIGURA 4

El número $\Delta_i V$ es la medida del volumen del sólido rectangular delgado que se muestra en la figura 4; de modo que la suma dada en (1) es la suma de las medidas de los volúmenes de los n sólidos como éste. Esta suma aproxima la medida del volumen del sólido tridimensional que aparece an la figura 4. El sólido está limitado en la parte superior por la gráfica de f y en la parte inferior por la región R del plano xy. La suma de (1) también aproxima el número proporcionado por la integral doble

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

y el volumen del sólido tridimensional de la figura 4 es el valor de esta integral. Este hecho se establece en el siguiente teorema, omitiéndose su demostración formal.

13.2.4 Teorema

Sea f una función de dos variables y continua en una región cerrada R del plano xy tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) de R. Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido S que tiene la región R como su base y cuya altura es $f(x, y)$ unidades en el punto (x, y) de R, entonces

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i)\, \Delta_i A$$

$$= \iint_R f(x, y)\, dA$$

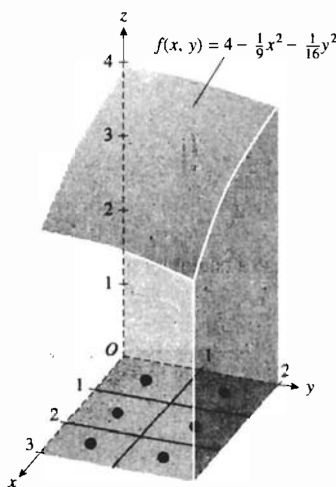


FIGURA 5

EJEMPLO 2 Exprese el volumen del sólido limitado por la superficie

$$f(x, y) = 4 - \tfrac{1}{9}x^2 - \tfrac{1}{16}y^2$$

los planos $x = 3$, $y = 2$ y los tres planos coordenados como una integral doble. A fin de obtener un valor aproximado de la integral doble, considere la partición de la región del plano xy generada al dibujar las rectas $x = 1, x = 2$ y $y = 1$, y tome el centro de la i-ésima subregión como (u_i, v_i).

Solución En la figura 5 se muestra el sólido. La región rectangular R es el rectángulo del plano xy limitado por los ejes coordenados y las rectas $x = 3$ y $y = 2$. Del teorema 13.2.4, si V unidades cúbicas es el volumen del sólido, entonces

$$V = \iint_R \left(4 - \tfrac{1}{9}x^2 - \tfrac{1}{16}y^2\right) dA$$

La figura 5 también muestra la región R dividida en seis subregiones que son cuadrados cuyos lados miden 1 unidad. Por tanto, para cada i, $\Delta_i A = 1$. El punto (u_i, v_i) de cada subregión es el centro del cuadrado. Entonces una aproximación de V está dada por una aproximación de la integral doble. Por tanto,

$$V \approx f(0.5, 0.5) \cdot 1 + f(1.5, 0.5) \cdot 1 + f(2.5, 0.5) \cdot 1 + f(0.5, 1.5) \cdot 1 + f(1.5, 1.5) \cdot 1 + f(2.5, 1.5) \cdot 1$$

Si se emplea una calculadora para determinar los valores de la función, se obtiene

$$V \approx 3.957 + 3.734 + 3.290 + 3.832 + 3.609 + 3.165$$

$$\approx 21.59$$

<u>**Conclusión:**</u> El volumen es aproximadamente 21.59 unidades cúbicas. ◀

El volumen exacto del ejemplo anterior es 21.5 unidades cúbicas, como se mostrará en el ejemplo 4.

Varias propiedades de la integral doble son análogas a las propiedades de la integral definida de una función de una variable. Las más importantes se dan en los cinco teoremas siguientes.

13.2.5 Teorema

Si c es una constante y la función f es integrable en una región cerrada R, entonces cf es integrable en R y

$$\iint_R cf(x, y)\, dA = c \iint_R f(x, y)\, dA$$

La demostración de este teorema y del siguiente, se deducen inmediatamente de la definición de integral doble.

13.2.6 Teorema

Si las funciones f y g son integrables en una región cerrada R, entonces la función $f + g$ es integrable en R y

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA + \iint_R g(x, y)\, dA$$

El resultado de este teorema puede extenderse a cualquier número finito de funciones integrables.

13.2.7 Teorema

Si las funciones f y g son integrables en una región cerrada R y además $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo (x, y) de R, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA \geq \iint_R g(x, y)\, dA$$

Este teorema es análogo al teorema 4.6.1, y el siguiente es análogo al teorema 4.6.2. Las demostraciones son similares a las demostraciones correspondientes de la sección 4.6.

13.2.8 Teorema

Sea f una función integrable en una región cerrada R, y suponga que m y M son dos números tales que $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo (x, y) de R. Si A es la medida del área de la región R, entonces

$$mA \leq \iint_R f(x, y)\, dA \leq MA$$

13.2.9 Teorema

Suponga que la función f es continua en la región cerrada R y que la región R se compone de dos subregiones R_1 y R_2 que no tienen puntos en común excepto algunos puntos en parte de sus fronteras. Entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$$

La demostración de este teorema depende de la definición de integral doble y de los teoremas de límites.

Para funciones de una variable, el segundo teorema fundamental del Cálculo proporciona un método para evaluar la integral definida mediante una antiderivada, o integral indefinida, del integrando. Un método correspondiente para evaluar una integral doble implica realizar integraciones indefinidas simples en forma sucesiva. Un desarrollo riguroso de este procedimiento corresponde a un curso de Cálculo avanzado. En este libro el análisis es sólo intuitivo, y se utiliza la interpretación geométrica de la integral doble como la medida de un volumen. Primero se desarrollará el método para la integral doble en una región rectangular.

Sea f una función integrable en una región rectangular cerrada R del plano xy limitada por las rectas $x = a_1$, $x = b_1$, $y = a_2$ y $y = b_2$. Suponga que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) de R. Refiérase a la figura 6, la cual muestra la gráfica de la ecuación $z = f(x, y)$, donde (x, y) pertenece a R. El número que representa el valor de la integral doble

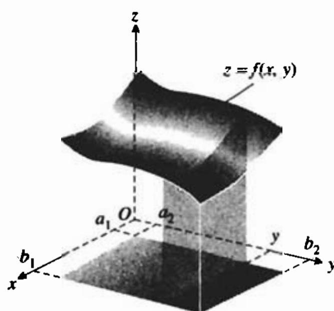


FIGURA 6

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

es la medida del volumen del sólido entre la superficie y la región R. Este número puede determinarse mediante el método de rebanado como se muestra a continuación.

Sea y un número del intervalo $[a_2, b_2]$. Considere el plano paralelo al plano xz que pasa por el punto $(0, y, 0)$. Sean $A(y)$ unidades cuadradas el área de la región plana de intersección de este plano con el sólido. La medida del volumen del sólido se expresa por

$$\int_{a_2}^{b_2} A(y)\, dy$$

Como el volumen del sólido también está determinado por la integral doble, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{a_2}^{b_2} A(y)\, dy \qquad (2)$$

Así, puede calcularse el valor de la integral doble de la función f en R al evaluar una integral simple de $A(y)$. Ahora debe obtenerse $A(y)$ cuando y está dada. Como $A(y)$ unidades cuadradas es el área de la región plana, este número puede obtenerse mediante integración. Observe en la figura 6 que la frontera superior de la región plana es la gráfica de la ecuación $z = f(x, y)$ cuando x pertenece a $[a_1, b_1]$. Por tanto, $A(y) = \displaystyle\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx$. Al sustituir de esta ecuación en (1) se obtiene

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx \right] dy \qquad \textbf{(3)}$$

La expresión del miembro derecho de (3) se denomina **integral iterada.** Debido a que los corchetes se omiten regularmente cuando se escribe una integral iterada, entonces (3) puede expresarse como

$$\iint_R (x, y)\, dA = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx\, dy \qquad \textbf{(4)}$$

Al evaluar la "integral interior" de (4), recuerde que x es la variable de integración y se considera a y como una constante. Esto es análogo a tomar y como una constante cuando se obtiene la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a x.

Si se consideran secciones planas paralelas al plano yz se obtiene una integral iterada en la que se intercambia el orden de integración, esto es,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy\, dx \qquad \textbf{(5)}$$

Una condición suficiente para que (4) y (5) sean válidas es que la función sea continua en la región rectangular R.

▶ *EJEMPLO 3* Evalúe la integral doble

$$\iint_R (3y - 2x^2)\, dA$$

si R es la región del plano xy que consiste de todos los puntos (x, y) para los cuales $-1 \le x \le 2$ y $1 \le y \le 3$.

Solución Con $a_1 = -1$, $b_1 = 2$, $a_2 = 1$ y $b_2 = 3$, de (4) se tiene

$$\begin{aligned}
\iint_R (3y - 2x^2)\, dA &= \int_1^3 \int_{-1}^2 (3y - 2x^2)\, dx\, dy \\
&= \int_1^3 \left[\int_{-1}^2 (3y - 2x^2)\, dx \right] dy \\
&= \int_1^3 \left[3xy - \tfrac{2}{3} x^3 \right]_{-1}^2 dy \\
&= \int_1^3 (9y - 6)\, dy \\
&= \tfrac{9}{2} y^2 - 6y \Big]_1^3 \\
&= 24
\end{aligned}$$

◀

En el ejemplo 1 se obtuvo un valor aproximado de 25 para la integral doble del ejemplo anterior.

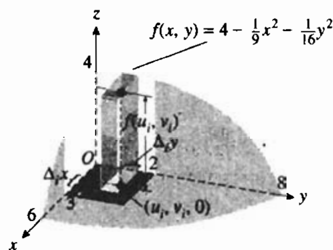


FIGURA 7

▶ ***EJEMPLO 4*** Calcule el volumen del sólido limitado por la superficie

$$f(x, y) = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$$

así como por los planos $x = 3$ y $y = 2$, y los tres planos coordenados.

Solución La figura 7 muestra la gráfica de la ecuación $z = f(x, y)$ y el sólido dado en el primer octante. Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido, entonces por el teorema 13.2.4,

$$\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i)\Delta_i A \\
&= \iint_R f(x, y)\, dA \\
&= \int_0^3 \int_0^2 (4 - \tfrac{1}{9}x^2 - \tfrac{1}{16}y^2)\, dy\, dx \\
&= \int_0^3 \Big[4y - \tfrac{1}{9}x^2 y - \tfrac{1}{48}y^3\Big]_0^2 dx \\
&= \int_0^3 (\tfrac{47}{6} - \tfrac{2}{9}x^2)\, dx \\
&= \tfrac{47}{6}x - \tfrac{2}{27}x^3\Big]_0^3 \\
&= 21.5
\end{aligned}$$

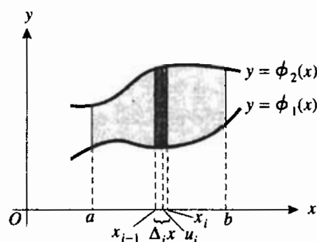


FIGURA 8

<u>**Conclusión:**</u> El volumen es 21.5 unidades cúbicas. ◀

En el ejemplo 2 se obtuvo un valor aproximado de 21.59 para el volumen del sólido del ejemplo anterior.

Suponga ahora que R es la región del plano xy limitada por las rectas $x = a$ y $x = b$, donde $a < b$ y por las curvas $y = \phi_1(x)$ y $y = \phi_2(x)$, donde ϕ_1 y ϕ_2 son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Además, suponga que $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ siempre que $a \leq x \leq b$ (consulte la figura 8). Sea Δ una partición del intervalo $[a, b]$ definida por Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Considere la región R de la figura 8 divida en franjas verticales de ancho $\Delta_i x$ unidades. En esta figura se muestra una franja particular. La intersección de la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $x = u_i$, donde $x_{i-1} \leq u_i \leq x_i$, es una curva. Una porción de esta curva se encuentra sobre la i-ésima franja vertical. La región debajo de este segmento de curva y sobre el plano xy se muestra en la figura 9 y la medida del área de esta región está dada por

$$\int_{\phi_1(u_i)}^{\phi_2(u_i)} f(u_i, y)\, dy$$

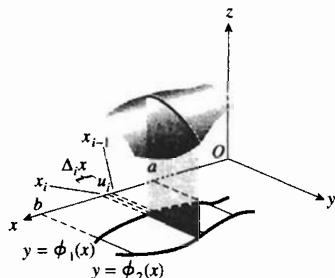


FIGURA 9

La medida del volumen del sólido limitado superiormente por la superficie $z = f(x, y)$ e inferiormente por la i-ésima franja vertical es aproximadamente igual a

$$\left[\int_{\phi_1(u_i)}^{\phi_2(u_i)} f(u_i, y)\, dy\right]\Delta_i x$$

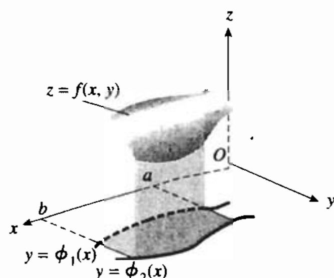


FIGURA 10

Si se toma el límite, conforme la norma de Δ tiende a cero, de la suma de las medidas de los volúmenes para las n franjas verticales de R desde $x = a$ hasta $x = b$, se obtiene la medida del volumen del sólido limitado en la parte superior por la superficie $z = f(x, y)$ y en la parte inferior por la región R del plano xy. (Refiérase a la figura 10). Este límite es la integral doble de f en R; es decir

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{\phi_1(u_i)}^{\phi_2(u_i)} f(u_i, y)\, dy \right] \Delta_i x = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

$$= \iint_R f(x, y)\, dy\, dx \qquad (6)$$

Las condiciones suficientes para que la fórmula (6) sea válida son que f sea continua en la región cerrada R y que ϕ_1 y ϕ_2 sean funciones lisas.

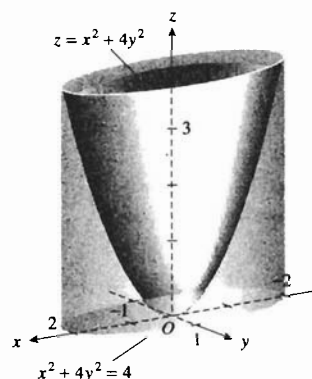


FIGURA 11

EJEMPLO 5 Exprese como una integral doble y una integral iterada la medida del volumen del sólido que se encuentra por arriba del plano xy delimitado por el paraboloide elíptico $z = x^2 + 4y^2$ y el cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$. Evalúe la integral iterada para calcular el volumen del sólido.

Solución La figura 11 muestra el sólido. Se obtendrá el volumen de la porción del sólido del primer octante, el cual, por las propiedades de simetría, es un cuarto del volumen requerido. La región R del plano xy es aquélla limitada por los ejes x y y, así como por la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Esta región se presenta en la figura 12, la cual también muestra la i-ésima subregión de una partición rectangular de R, donde (u_i, v_i) es cualquier punto de esta subregión. Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido dado, entonces, por el teorema 13.2.4,

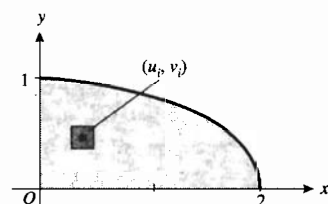


FIGURA 12

$$V = 4 \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (u_i^2 + 4v_i^2)\, \Delta_i A$$

$$= 4 \iint_R (x^2 + 4y^2)\, dA$$

A fin de expresar V como una integral iterada, se divide la región R en n franjas verticales. La figura 13 muestra la región R y la i-ésima franja vertical cuyo ancho es de $\Delta_i x$ unidades y su longitud es $\frac{1}{2}\sqrt{4 - u_i^2}$ unidades, donde $x_{i-1} \leq u_i \leq x_i$. De (6),

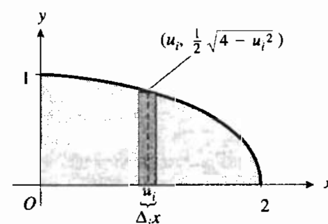


FIGURA 13

$$V = 4 \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^{\sqrt{4 - u_i^2}/2} (u_i^2 + 4y^2)\, dy \right] \Delta_i x$$

$$= 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4 - u_i^2}/2} (x^2 + 4y^2)\, dy\, dx$$

$$= 4 \int_0^2 \left[x^2 y + \tfrac{4}{3} y^3 \right]_0^{\sqrt{4 - x_i^2}/2} dx$$

$$= 4 \int_0^2 \left[\tfrac{1}{2} x^2 \sqrt{4 - x^2} + \tfrac{1}{6} (4 - x^2)^{3/2} \right] dx$$

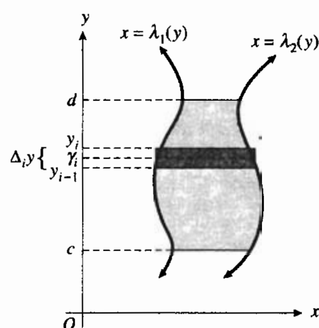


FIGURA 14

$$= \frac{4}{3}\int_0^2 (x^2 + 2)\sqrt{4 - x^2}\, dx$$

$$= -\tfrac{1}{3}x(4 - x^2)^{3/2} + 2x\sqrt{4 - x^2} + 8\,\text{sen}^{-1}\tfrac{1}{2}x\Big]_0^2$$

$$= 4\pi$$

Conclusión: El volumen es 4π unidades cúbicas. ◀

Suponga que la región R está limitada por las curvas $x = \lambda_1(y)$ y $x = \lambda_2(y)$ y las rectas $y = c$ y $y = d$, donde $c < d$, y λ_1 y λ_2 son dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[c, d]$ para las cuales $\lambda_1(y) \leq \lambda_2(y)$ siempre que $c \leq y \leq d$. Considere una partición Δ del intervalo $[c, d]$ y divida la región R en franjas horizontales de ancho $\Delta_i y$ unidades. Consulte la figura 14, la cual muestra la i-ésima franja horizontal. La intersección de la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $y = v_i$, donde $y_{i-1} \leq v_i \leq y_i$, es una curva, y una porción de esta curva se encuentra sobre la i-ésima franja horizontal. Entonces, de la misma manera en que se obtuvo la fórmula (6), la medida del volumen del sólido limitado superiormente por la superficie $z = f(x, y)$ e inferiormente por la i-ésima franja horizontal es aproximadamente igual a

$$\left[\int_{\lambda_1(v_i)}^{\lambda_2(v_i)} f(x, v_i)\, dx\right]\Delta_i y$$

Al tomar el límite, conforme $\|\Delta\|$ tiende a cero, de la suma de las medidas de los volúmenes para las n franjas horizontales de R desde $y = c$ hasta $y = d$, se obtiene la medida del volumen del sólido limitado superiormente por la superficie $z = f(x, y)$ e inferiormente por la región R del plano xy. Esta medida de volumen es la integral doble de f en R. En consecuencia,

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{\lambda_1(v_i)}^{\lambda_2(v_i)} f(x, v_i)\, dx\right]\Delta_i x = \int_c^d \int_{\lambda_1(y)}^{\lambda_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \iint_R f(x, y)\, dx\, dy \qquad (7)$$

Las condiciones suficientes para que la fórmula (7) sea válida son que λ_1 y λ_2 sean funciones lisas y que f sea continua en R. Al aplicar las fórmulas (6) y (7), en ocasiones puede ser necesario dividir la región R en subregiones en las cuales se cumplan estas condiciones.

▶ ***EJEMPLO 6*** Exprese el volumen del sólido del ejemplo 5 mediante una integral iterada en la que el orden de integración sea contrario al de dicho ejemplo. Calcule el volumen del sólido.

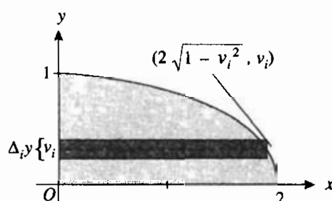


FIGURA 15

Solución Otra vez se obtendrá el volumen del sólido correspondiente al primer octante, y después se multiplicará el resultado por 4. La figura 15 muestra la región R del plano xy y la i-ésima franja horizontal cuyo ancho es $\Delta_i y$ unidades y su longitud es $2\sqrt{1 - v_i^2}$ unidades. Entonces, por (7),

$$
\begin{aligned}
V &= 4 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{0}^{2\sqrt{1 - v_i^2}} (x^2 + 4v_i^2)\, dx \right] \Delta_i y \\
&= 4 \int_{0}^{1} \int_{0}^{2\sqrt{1 - y^2}} (x^2 + 4y^2)\, dx\, dy \\
&= 4 \int_{0}^{1} \left[\tfrac{1}{3} x^3 + 4y^2 x \right]_{0}^{2\sqrt{1 - y^2}} dy \\
&= 4 \int_{0}^{1} \left[\tfrac{8}{3} (1 - y^2)^{3/2} + 8y^2 \sqrt{1 - y^2} \right] dy \\
&= \frac{32}{3} \int_{0}^{1} (2y^2 + 1) \sqrt{1 - y^2}\, dy \\
&= -\tfrac{16}{3} y (1 - y^2)^{3/2} + 8y\sqrt{1 - y^2} + 8 \operatorname{sen}^{-1} y \Big]_{0}^{1} \\
&= 4\pi
\end{aligned}
$$

Conclusión: El volumen es 4π unidades cúbicas, lo cual concuerda con la respuesta del ejemplo 5. ◀

De las soluciones de los ejemplos 5 y 6 se observa que la integral doble $\iint_R (x^2 + 4y^2)\, dA$ puede evaluarse por medio de las integrales iteradas

$$
\int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4 - x^2}/2} (x^2 + 4y^2)\, dy\, dx \quad \text{o} \quad \int_{0}^{1} \int_{0}^{2\sqrt{1 - y^2}} (x^2 + 4y^2)\, dx\, dy
$$

Si en (6) o (7), se considera $f(x, y) = 1$ para toda x y y, entonces la medida A del área de la región R se expresa como una integral doble. Así,

$$
A = \iint_R dy\, dx \quad \Leftrightarrow \quad A = \iint_R dx\, dy \tag{8}
$$

▶ ***EJEMPLO 7*** Calcule mediante integración doble el área de la región del plano xy limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4x - x^2$.

Solución En la figura 16 se muestra la región. De (8) se tiene

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_R dy\, dx \\
&= \int_{0}^{2} \int_{x^2}^{4x - x^2} dy\, dx \\
&= \int_{0}^{2} (4x - x^2 - x^2)\, dx \\
&= 2x^2 - \tfrac{2}{3} x^3 \Big]_{0}^{2} \\
&= \tfrac{8}{3}
\end{aligned}
$$

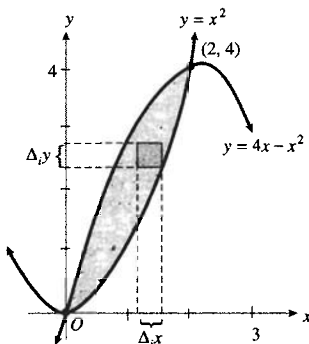


FIGURA 16

Conclusión: El área de la región es $\frac{8}{3}$ unidades cuadradas. ◀

EJERCICIOS 13.2

1. Obtenga un valor aproximado de la integral doble
$$\iint_R (3x - 2y + 1)\, dA$$
donde R es la región rectangular que tiene vértices en $(0, -2)$ y $(3, 0)$. Considere la partición de R generada por las rectas $x = 1$, $x = 2$ y $y = -1$, y tome el centro de la i-ésima subregión como (u_i, v_i).

2. Obtenga un valor aproximado de la integral doble
$$\iint_R (y^2 - 4x)\, dA$$
donde R es la región rectangular cuyos vértices son $(-1, 0)$ y $(1, 3)$. Considere la partición de R generada por las rectas $x = 0$, $y = 1$ y $y = 2$, y tome el centro de la i-ésima subregión como (u_i, v_i).

En los ejercicios 3 a 8, obtenga un valor aproximado de la integral doble, donde R es la región rectangular que tiene vértices en P y Q, Δ es una partición de R y (u_i, v_i) es el centro de cada subregión.

3. $\iint_R (x^2 + y)\, dA$; $P(0, 0)$; $Q(4, 2)$; Δ: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$

4. $\iint_R (2 - x - y)\, dA$; $P(0, 0)$; $Q(6, 4)$; Δ: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $y_1 = 0$, $y_2 = 2$

5. $\iint_R (xy + 3y^2)\, dA$; $P(-2, 0)$; $Q(4, 6)$; Δ: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 4$

6. $\iint_R (xy + 3y^2)\, dA$; $P(0, -2)$; $Q(6, 4)$; Δ: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $y_1 = -2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$

7. $\iint_R (x^2y - 2xy^2)\, dA$; $P(-3, -2)$; $Q(1, 6)$; Δ: $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $y_1 = -2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$, $y_4 = 4$

8. $\iint_R (x^2y - 2xy^2)\, dA$; $P(-3, -2)$, $Q(1, 6)$; Δ: $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$, $y_1 = -2$, $y_2 = -1$, $y_3 = 0$, $y_4 = 1$, $y_5 = 2$, $y_6 = 3$, $y_7 = 4$, $y_8 = 5$

En los ejercicios 9 a 12, obtenga un valor aproximado de la integral doble donde R es la región rectangular que tiene vértices en P y Q, Δ es una partición de R y (u_i, v_i) es un punto arbitrario en cada subregión.

9. La integral doble, con P, Q y Δ como en el ejercicio 3;
$(u_1, v_1) = (0.25, 0.5)$; $(u_2, v_2) = (1.75, 0)$;
$(u_3, v_3) = (2.5, 0.25$; $(u_4, v_4) = (4, 1)$;
$(u_5, v_5) = (0.75, 1.75)$; $(u_6, v_6) = (1.25, 1.5)$;
$(u_7, v_7) = (2.5, 2)$; $(u_8, v_8) = (3, 1)$.

10. La integral doble, con P, Q y Δ como en el ejercicio 4;
$(u_1, v_1) = (0.5, 1.5)$; $(u_2, v_2) = (3, 1)$;
$(u_3, v_3) = (5.5, 0.5)$; $(u_4, v_4) = (2, 2)$;
$(u_5, v_5) = (2, 2)$; $(u_6, v_6) = (5, 3)$.

11. La integral doble, con P, Q y Δ como en el ejercicio 5;
$(u_1, v_1) = (-0.5, 0.5)$; $(u_2, v_2) = (1, 1.5)$;
$(u_3, v_3) = (2.5, 2)$; $(u_4, v_4) = (-1.5, 3.5)$;
$(u_5, v_5) = (0, 3)$; $(u_6, v_6) = (4, 4)$;
$(u_7, v_7) = (-1, 4.5)$; $(u_8, v_8) = (1, 4.5)$;
$(u_9, v_9) = (3, 4.5)$.

12. La integral doble, con P, Q y Δ como en el ejercicio 5;
$(u_1, v_1) = (-2, 0)$; $(u_2, v_2) = (0, 0)$;
$(u_3, v_3) = (2, 0)$; $(u_4, v_4) = (-2, 2)$;
$(u_5, v_5) = (0, 2)$; $(u_6, v_6) = (2, 2)$; $(u_7, v_7) = (-2, 4)$;
$(u_8, v_8) = (0, 4)$; $(u_9, v_9) = (2, 4)$.

13. Exprese como una integral doble el volumen del sólido ubicado en el primer octante y limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 64$, los planos $x = 3$, $y = 3$ y los tres planos coordenados. Afin de obtener un valor aproximado de la integral, considere la partición de la región del plano xy generada por las rectas $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$ y $y = 2$, y tome el centro de la i-ésima subregión como (u_1, v_1).

14. Exprese como una integral doble el volumen del sólido limitado por los planos $z = 2x + y + 4$, $y = 3$ y los tres planos coordenados. A fin de obtener un valor aproximado de la integral, considere una partición de la región del plano xy generada por las rectas $x = 1$, $y = 1$ y $y = 2$, y tome el centro de la i-ésima subregión como (u_i, v_i).

15. Exprese como una integral doble el volumen del sólido limitado por la superficie $z = 10 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2$, los planos $x = 2$, $y = 2$ y los tres planos coordenados. A fin de obtener un valor aproximado de la integral, considere la partición de la región del plano xy generada por las rectas $x = 1$ y $y = 1$, y tome el centro de la i-ésima subregión como (u_i, v_i).

16. Exprese como una integral doble el volumen del sólido limitado por la superficie $100z = 300 - 25x^2 - 4y^2$, los planos $x = -1$, $x = 3$, $y = -3$, $y = 5$ y el plano xy. A fin de obtener un valor aproximado de la integral, considere una partición de la región del plano xy generada por las rectas $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$ y $y = 3$, y tome el centro de la i-ésima subregión como (u_i, v_i).

En los ejercicios 17 a 20, aplique el teorema 13.2.8 para obtener un intervalo cerrado que contenga el valor de la integral doble.

17. $\iint_R (2x + 5y)\, dA$, donde R es la región rectangular cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ y $(0, 2)$.

18. $\iint\limits_R (x^2 + y^2)\, dA$, donde R es la región rectangular cuyos vértices son (0, 0), (1, 0), (1, 1) y (0, 1).

19. $\iint\limits_R e^{xy}\, dA$, donde R es la región rectangular cuyos vértices son (0, 0), (1, 0), (1, 1) y (0, 1).

20. $\iint\limits_R (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)\, dA$, donde R es la región rectangular cuyos vértices son $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$ y (π, π). *Sugerencia:* utilice el resultado del ejercicio 24 de la sección 12.8.

En los ejercicios 21 a 30, evalúe la integral iterada.

21. $\int_1^2 \int_0^{2x} xy^3\, dy\, dx$

22. $\int_0^4 \int_0^y dx\, dy$

23. $\int_0^4 \int_0^y \sqrt{9 + y^2}\, dx\, dy$

24. $\int_{-1}^1 \int_1^{e^x} \frac{x}{y} dy\, dx$

25. $\int_1^4 \int_{y^2}^y \sqrt{\frac{y}{x}}\, dx\, dy$

26. $\int_1^4 \int_{x^2}^x \sqrt{\frac{y}{x}}\, dy\, dx$

27. $\int_0^1 \int_0^1 |x - y|\, dy\, dx$

28. $\int_0^3 \int_0^x x^2 e^{xy}\, dy\, dx$

29. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^x \operatorname{sen}(4x - y)\, dy\, dx$

30. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{y^2} \operatorname{sen} \frac{x}{y}\, dx\, dy$

En los ejercicios 31 a 38, calcule el valor exacto de la integral doble.

31. La integral doble del ejercicio 1.
32. La integral doble del ejercicio 2.
33. La integral doble del ejercicio 3.
34. La integral doble del ejercicio 6.

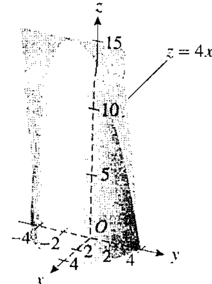
35. $\iint\limits_R \operatorname{sen} x\, dA$; R es la región acotada por las rectas $y = 2x$, $y = \frac{1}{2}x$ y $x = \pi$.

36. $\iint\limits_R \cos(x + y)\, dA$; R es la región acotada por las rectas $y = x$ y $x = \pi$, y el eje x.

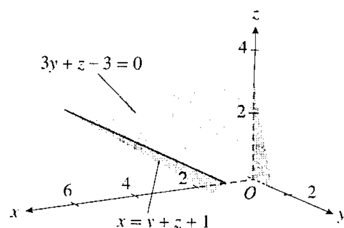
37. $\iint\limits_R x^2\sqrt{9 - y^2}\, dA$; R es la región acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

38. $\iint\limits_R \frac{y^2}{x^2}\, dA$; R es la región limitada por las rectas $y = x$ y $y = 2$, y la hipérbola $xy = 1$.

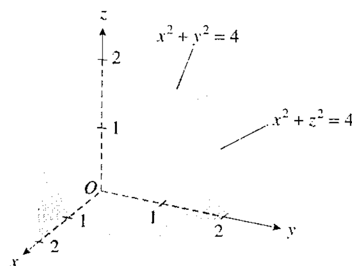
39. Obtenga el volumen del sólido ubicado debajo del plano $z = 4x$ y que se encuentra por arriba de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ del plano xy.



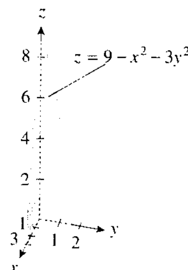
40. Determine el volumen del sólido delimitado por los planos $x = y + 2z + 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $3y + z - 3 = 0$.



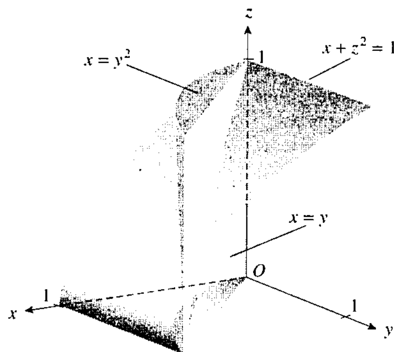
41. Calcule el volumen del sólido del primer octante acotado por los dos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + z^2 = 4$



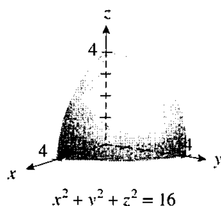
42. Obtenga el volumen del sólido del primer octante limitado por el paraboloide $z = 9 - x^2 - 3y^2$.



43. Determine el volumen del sólido del primer octante limitado por las superficies $x + z^2 = 1$, $x = y$ y $x = y^2$.



44. Calcule mediante integración doble el volumen de la porción del sólido del primer octante limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.



$x^2 + y^2 + z^2 = 16$

En los ejercicios 45 a 48, utilice integrales dobles para calcular el área de la región limitada por las curvas del plano xy. Dibuje la región.

45. $y = x^3$ y $y = x^2$

46. $y^2 = 4x$ y $x^2 = 4y$

47. $y = x^2 - 9$ y $y = 9 - x^2$

48. $x^2 + y^2 = 16$ y $y^2 = 6x$

49. Exprese como una integral iterada la medida del volumen del sólido limitado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

50. Utilice integración doble para obtener el área de la región del primer cuadrante limitada por la parábola $y^2 = 4x$, la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$, y el eje x mediante dos métodos: **(a)** integre primero con respecto a x; **(b)** integre primero con respecto a y. Compare los dos métodos de solución.

51. Calcule mediante dos métodos el volumen del sólido ubicado debajo del plano $3x + 8y + 6z = 24$ y por arriba de la región del primer cuadrante del plano xy limitada por la parábola $y^2 = 2x$, la recta $2x + 3y = 10$ y el eje x: **(a)** integre primero con respecto a x; **(b)** integre primero con respecto a y. Compare los dos métodos de solución.

52. Considere la integral iterada $\int_0^a \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dy\, dx$.
(a) Dibuje el sólido cuya medida de volumen está representada por la integral; **(b)** evalúe la integral iterada; **(c)** escriba la integral iterada que proporciona la medida del volumen del mismo sólido con el orden de integración inverso.

53. Considere la integral iterada

$$\frac{2}{3}\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^3}} (2x + y)\, dy\, dx$$

y efectúe las instrucciones del ejercicio 52.

54. Utilice doble integración para calcular el volumen del sólido común a los dos cilindros circulares rectos de radio r unidades, cuyos ejes se intersectan formando ángulos rectos. (Consulte el ejercicio 60 de la sección 4.9).

En los ejercicios 55 y 56, la integral iterada no puede evaluarse exactamente en términos de funciones elementales mediante el orden de integración propuesto. Invierta el orden de integración y realice el cálculo.

55. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \operatorname{sen} \pi y^3\, dy\, dx$

56. $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy$

13.3 APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DOBLES

En la sección 13.2 se estudió cómo aplicar las integrales dobles a fin de calcular volúmenes de sólidos. En esta sección se tratarán otras aplicaciones de las integrales dobles, tales como determinar centros de masa, momentos de inercia y el área de una superficie.

Cuando se aplicaron las integrales simples para determinar el centro de masa de una lámina, se consideraron únicamente láminas homogéneas, excepto en casos especiales. Sin embargo, con las integrales dobles se puede determinar el centro de masa de una lámina homogénea o no homogénea.

Suponga que se tiene una lámina cuya forma es la de una región cerrada R del plano xy. Sea $\rho(x, y)$ la medida de la densidad superficial de la lámina

en cualquier punto (x, y) de R donde ρ es continua en R. Para calcular la masa total de la lámina se procede como sigue. Sea Δ una partición de R en n rectángulos. Si (u_i, v_i) es cualquier punto del i-ésimo rectángulo que tiene área $\Delta_i A$ unidades cuadradas, entonces una aproximación de la medida de la masa total del i-ésimo rectángulo es $\rho(u_i, v_i)\,\Delta_i A$, y la medida de la masa total de la lámina está aproximada por

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(u_i, v_i)\,\Delta_i A$$

Al tomar el límite de la suma anterior, conforme la norma de Δ tiende a cero, la medida M de la masa de la lámina puede expresarse como

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(u_i, v_i)\,\Delta_i A \\ &= \iint_R \rho(x, y)\,dA \end{aligned} \tag{1}$$

La medida del momento de masa del i-ésimo rectángulo con respecto al eje x está aproximada por $v_i\rho(u_i, v_i)\,\Delta_i A$. Entonces la suma de las medidas de los momentos de masa con respecto al eje x de los n rectángulos será aproximada por la suma de n términos de éstos. La medida M_x del momento de masa con respecto al eje x de la lámina completa está dada por

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} v_i\rho(u_i, v_i)\,\Delta_i A \\ &= \iint_R y\rho(x, y)\,dA \end{aligned}$$

De manera análoga, la medida M_y de su momento de masa con respecto al eje y está determinada por

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} u_i\rho(u_i, v_i)\,\Delta_i A \\ &= \iint_R x\rho(x, y)\,dA \end{aligned} \tag{2}$$

El centro de masa de la lámina se denota por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ donde

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

▶ *EJEMPLO 1* Una lámina cuya forma es la de un triángulo rectángulo isósceles, tiene una densidad superficial que varía de acuerdo al cuadrado de la distancia a partir del vértice del ángulo recto. Si la masa se mide en kilogramos y la distancia en metros, calcule la masa y el centro de masa de la lámina.

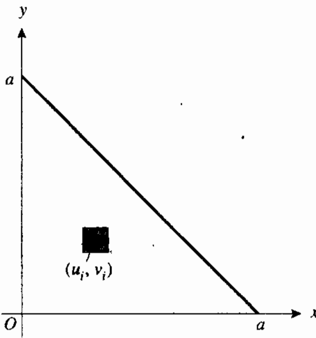


FIGURA 1

Solución Elija los ejes coordenados de modo que el vértice del ángulo recto esté en el origen y los catetos de longitud a queden sobre los ejes coordenados (consulte la figura 1). Sea $\rho(x, y)$ kilogramos por metro cuadrado la densidad superficial de la lámina en el punto (x, y). Entonces $\rho(x, y) = k(x^2 + y^2)$, donde k es una constante. Por tanto, si M kilogramos es la masa de la lámina, se tiene, de (1),

$$
\begin{aligned}
M &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k(u_i^2 + v_i^2)\,\Delta_i A \\
&= k \iint_R (x^2 + y^2)\, dA \\
&= \int_0^a \int_0^{a-x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx \\
&= k \int_0^a \Big[yx^2 + \tfrac{1}{3}y^3 \Big]_0^{a-x} dx \\
&= k \int_0^a (\tfrac{1}{3}a^3 - a^2x + 2ax^2 - \tfrac{4}{3}x^3)\, dx \\
&= k(\tfrac{1}{3}a^4 - \tfrac{1}{2}a^4 + \tfrac{2}{3}a^4 - \tfrac{1}{3}a^4) \\
&= \tfrac{1}{6}ka^4
\end{aligned}
$$

A fin de determinar el centro de masa, observe que, debido a la simetría, éste debe estar sobre la recta $y = x$. Por tanto, si se obtiene $\bar{x}$, también se obtendrá $\bar{y}$. De (2),

$$
\begin{aligned}
M_y &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} ku_i(u_i^2 + v_i^2)\,\Delta_i A \\
&= k \iint_R x(x^2 + y^2)\, dA \\
&= k \int_0^a \int_0^{a-x} (x^3 + xy^2)\, dy\, dx \\
&= k \int_0^a \Big[x^3y + \tfrac{1}{3}xy^3 \Big]_0^{a-x} dx \\
&= k \int_0^a (\tfrac{1}{3}a^3x - a^2x^2 + 2ax^3 - \tfrac{4}{3}x^4)\, dx \\
&= k(\tfrac{1}{6}a^5 - \tfrac{1}{3}a^5 + \tfrac{1}{2}a^5 - \tfrac{4}{15}a^5) \\
&= \tfrac{1}{15}ka^5
\end{aligned}
$$

Como $M\bar{x} = M_y$, entonces $M\bar{x} = \frac{1}{15}ka^5$; y debido a que $M = \frac{1}{6}ka^4$, se obtiene $\bar{x} = \frac{2}{5}a$.

Conclusión: El centro de masa se encuentra en el punto $(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a)$. ◀

El momento de masa de una lámina con respecto a un eje se denomina, en ocasiones, **primer momento** de la lámina con respecto al eje. Otro momento de una lámina con respecto a un eje es el *momento de inercia*, también llamado

segundo momento de la lámina. El momento de inercia es una medición de la resistencia al cambio en el movimiento de rotación. Para llegar a la definición de momento de inercia de una lámina, primero considere una partícula de masa m kilogramos cuya distancia perpendicular desde un eje es r metros. El momento de inercia de la partícula con respecto al eje se define como mr^2 kilogramos-metro cuadrado. Entonces el momento de inercia de un sistema de n partículas respecto al eje es la suma de los momentos de inercia de todas las partículas. Esto es, si la i-ésima partícula tiene una masa de m_i kilogramos y se encuentra a una distancia de r_i metros del eje, entonces I kilogramos-metro cuadrado es el momento de inercia del sistema respecto al eje, donde

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Al extender este concepto a una distribución continua de masa en un plano, tal como una lámina, mediante procesos semejantes a los anteriores, se tiene la definición siguiente.

13.3.1 Definición de momento de inercia respecto a un eje

Suponga que se tiene una lámina que ocupa una región R en el plano xy tal que la densidad superficial en el punto (x, y) tiene medida $\rho(x, y)$, donde ρ es continua en R. Entonces, la medida del **momento de inercia** de la lámina con respecto al eje x, denotado por I_x, está determinada por

$$\begin{aligned} I_x &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \rho(u_i, v_i) \Delta_i A \\ &= \iint_R y^2 \rho(x, y)\, dA \end{aligned}$$

De manera similar, la medida del **momento de inercia** de la lámina con respecto al eje y, denotado por I_y, está dada por

$$\begin{aligned} I_y &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \rho(u_i, v_i) \Delta_i A \\ &= \iint_R x^2 \rho(x, y)\, dA \end{aligned}$$

▶ ***EJEMPLO 2*** Un alambre recto homogéneo tiene una densidad lineal constante de k kilogramos por metro. Calcule el momento de inercia del alambre con respecto a un eje perpendicular al alambre que pasa por uno de sus extremos.

Solución Suponga que la longitud del alambre es de a metros, y que se extiende a lo largo del eje x a partir del origen. Se determinará el momento de inercia del alambre con respecto al eje y. Divida el alambre en n segmentos de modo que la longitud del i-ésimo segmento es $\Delta_i x$ metros. Entonces, la masa del i-ésimo segmento es $k\, \Delta_i x$ kilogramos. Suponga que la masa del i-ésimo segmento se concentra en un punto u_i, donde $x_{i-1} \leq u_i \leq x_i$. La medida del momento de inercia del i-ésimo segmento con respecto al eje y se encuentra entre $kx_{i-1}^2 \Delta_i x$ y $kx_i^2 \Delta_i x$ y está aproximado por $ku_i^2 \Delta_i x$. Si el momento de inercia del alambre con respecto al eje y es I_y kilogramos-metro cuadrado, entonces

$$\begin{aligned} I_y &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k u_i^2 \, \Delta_i x \\ &= \int_0^a kx^2 \, dx \\ &= \tfrac{1}{3} k a^3 \end{aligned}$$

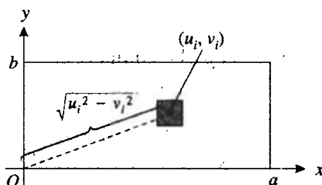
Conclusión: El momento de inercia es $\frac{1}{3}ka^3$ kg-m^2. ◀

La suma de los momentos de inercia I_x e I_y de una lámina del plano xy se denomina *momento polar de inercia*, y representa el momento de inercia de la lámina con respecto al origen o al eje z.

13.3.2 Definición de momento polar de inercia

Suponga que se tiene una lámina que ocupa una región R del plano xy tal que la densidad superficial en el punto (x, y) tiene medida $\rho(x, y)$, donde ρ es continua en R. Entonces la medida del **momento polar de inercia,** denotado por I_0, está definido por

$$\begin{aligned} I_0 &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (u_i^2 + v_i^2)\rho(u_i, v_i) \, \Delta_i A \\ &= \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y) \, dA \end{aligned}$$



▶ **EJEMPLO 3** Una lámina rectangular homogénea tiene una densidad superficial constante de k slugs por pie cuadrado. Calcule el momento de inercia de la lámina con respecto a una esquina.

Solución Suponga que la lámina está limitada por las rectas $x = a$, $y = b$ y los ejes x y y. Refiérase a la figura 2. Si I_0 slug-pie cuadrado es el momento de inercia con respecto al origen, entonces

$$\begin{aligned} I_0 &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k(u_i^2 + v_i^2) \, \Delta_i A \\ &= \iint_R k(x^2 + y^2) \, dA \\ &= k\int_0^b \int_0^a (x^2 + y^2) \, dx \, dy \\ &= k\int_0^b \left[\tfrac{1}{3}x^3 + xy^2\right]_0^a dy \\ &= k\int_0^b (\tfrac{1}{3}a^3 + ay^2) \, dy \\ &= \tfrac{1}{3}kab(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Conclusión: El momento de inercia es $\frac{1}{3}kab(a^2 + b^2)$ slug-pie^2. ◀

El *radio de giro* de una lámina con respecto a un eje L es la distancia desde L a un punto de la lámina en el que puede ser concentrada su masa sin afectar su momento de inercia con respecto a L. Esto es, si la masa M kilogramos de la lámina se concentra en un punto ubicado a r metros de L, el momento de inercia de la lámina con respecto a L es la misma que la de una partícula de masa M kilogramos a una distancia de r metros de L; este momento de inercia es Mr^2 kilogramos-metro cuadrado. Así, se tiene la definición siguiente.

13.3.3 Definición del radio de giro

Si I es la medida del momento de inercia con respecto a un eje L de una lámina y M es la medida de la masa total de la lámina, entonces el **radio de giro** de la lámina con respecto a L tiene medida r, donde

$$r^2 = \frac{I}{M}$$

EJEMPLO 4 Suponga que una lámina tiene la forma de un semicírculo y que la medida de la densidad superficial de la lámina en cualquier punto es proporcional a la medida de la distancia del punto a partir del diámetro. Si la masa se mide en kilogramos y la distancia en metros, calcule el radio de giro de la lámina con respecto al eje x.

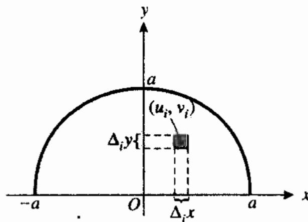


FIGURA 3

Solución Elija los ejes x y y de modo que el semicírculo sea la parte superior del círculo limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. Consulte la figura 3. Entonces la densidad superficial de la lámina en el punto (x, y) es ky kilogramos-metro cuadrado. Así, si M kilogramos es la masa de la lámina, entonces

$$\begin{aligned}
M &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} kv_i\,\Delta_i A \\
&= \iint_R ky\,dA \\
&= \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} ky\,dx\,dy \\
&= k\int_0^a \Big[yx\Big]_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy \\
&= 2k\int_0^a y\sqrt{a^2-y^2}\,dy \\
&= -\tfrac{2}{3}k(a^2-y^2)^{3/2}\Big]_0^a \\
&= \tfrac{2}{3}ka^3
\end{aligned}$$

Si I_x kilogramos-metro cuadrado es el momento de inercia de la lámina con respecto al eje x, entonces

$$\begin{aligned}
I_x &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} v_i^2\,(kvi)\,\Delta_i A \\
&= \iint_R ky^3\,dy\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-a}^{a} \int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} ky^3 \, dy \, dx \\
&= k \int_{-a}^{a} \left[\tfrac{1}{4} y^4 \right]_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\
&= \tfrac{1}{4} k \int_{-a}^{a} (a^4 - 2a^2x^2 + x^4) \, dx \\
&= \tfrac{1}{4} k (2a^5 - \tfrac{4}{3} a^5 + \tfrac{2}{5} a^5) \\
&= \tfrac{4}{15} k a^5
\end{aligned}
$$

Por tanto, si r metros es el radio de giro, entonces

$$
\begin{aligned}
r^2 &= \frac{\tfrac{4}{15} k a^5}{\tfrac{2}{3} k a^3} \\
&= \tfrac{2}{5} a^5
\end{aligned}
$$

De modo que $r = \frac{1}{5}\sqrt{10}\, a$.

Conclusión: El radio de giro es $\frac{1}{5}\sqrt{10}\, a$ metros. ◀

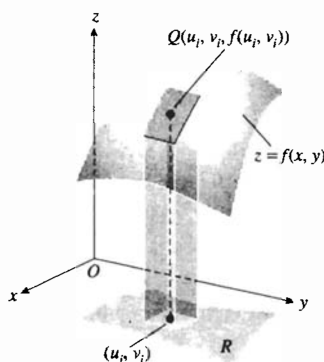


FIGURA 4

La integral doble puede emplearse para determinar el área de la porción de la superficie $z = f(x, y)$ que se encuentra sobre la región cerrada R del plano xy. A fin de mostrar esto, primero se definirá lo que significa la medida de esta área y después se obtendrá una fórmula para calcularla. Suponga que f y sus primeras derivadas parciales son continuas en R, y que $f(x, y) > 0$ en R. Sea Δ una partición de R de n subregiones rectangulares. El i-ésimo rectángulo tiene dimensiones $\Delta_i x$ unidades y $\Delta_i y$ unidades y un área de $\Delta_i A$ unidades cuadradas. Sea (u_i, v_i) cualquier punto del i-ésimo rectángulo, y considere el plano tan-gente a la superficie en el punto $Q(u_i, v_i, f(u_i, v_i))$. Proyecte verticalmente hacia arriba el i-ésimo rectángulo sobre el plano tangente y sea $\Delta_i \sigma$ unidades cuadra-das el área de esta proyección. La figura 4 muestra la región R, la porción de la superficie sobre R, la i-ésima subregión rectangular de R y la proyección del i-ésimo rectángulo sobre el plano tangente a la superficie en Q. El número $\Delta_i \sigma$ es una aproximación de la medida del área de la porción de la superficie que se encuentra sobre el i-ésimo rectángulo. Como existen n de estas porciones, la suma

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \sigma$$

es una aproximación de la medida σ del área de la porción de la superficie ubicada sobre R. Esto conduce a definir σ como sigue:

$$\sigma = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \sigma \tag{3}$$

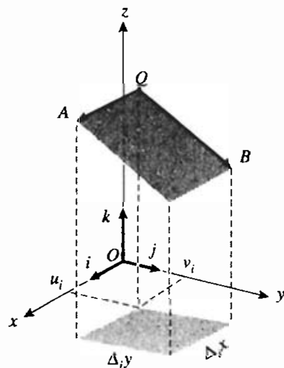


FIGURA 5

A continuación se obtendrá una fórmula para calcular este límite. Para esto, se deducirá una fórmula a fin de calcular $\Delta_i \sigma$ como la medida del área de un paralelogramo. Con el fin de simplificar los cálculos se toma el punto (u_i, v_i) del i-ésimo rectángulo como el vértice (x_{i-1}, y_{i-1}). Sean **A** y **B** los vectores que tienen como representaciones los segmentos de recta dirigidos cuyo punto inicial es Q y que forman dos lados adyacentes del paralelogramo cuya área es $\Delta_i \sigma$ unidades cuadradas. Refiérase a la figura 5. Así, $\Delta_i \sigma = \| \mathbf{A} \times \mathbf{B} \|$. Como

$$\mathbf{A} = \Delta_i x \mathbf{i} + f_x(u_i, v_i)\, \Delta_i x \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \Delta_i y \mathbf{j} + f_y(u_i, v_i) \Delta_i y \mathbf{k}$$

entonces

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta_i x & 0 & f_x(u_i, v_i)\,\Delta_i x \\ 0 & \Delta_i y & f_y(u_i, v_i)\,\Delta_i y \end{vmatrix}$$

$$= -\Delta_i x\,\Delta_i y f_x(u_i, v_i)\mathbf{i} - \Delta_i x\,\Delta_i y f_y(u_i, v_i)\mathbf{j} + \Delta_i x\,\Delta_i y\mathbf{k}$$

Por tanto,

$$\Delta_i\sigma = \|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\|$$

$$= \sqrt{f_x^2(u_i, v_i) + f_y^2(u_i, v_i) + 1}\;\Delta_i x\,\Delta_i y$$

Al sustituir esta expresión por $\Delta_i\sigma$ en (3) se tiene

$$\sigma = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{f_x^2(u_i, v_i) + f_y^2(u_i, v_i) + 1}\;\Delta_i x\,\Delta_i y$$

Este límite es una doble integral que existe sobre R debido a la continuidad de f_x y f_y en R. De este modo se tiene el teorema siguiente.

13.3.4 Teorema

Suponga que f y sus primeras derivadas parciales son continuas en la región cerrada R del plano xy. Si σ unidades cuadradas es el área de la superficie $z = f(x, y)$ que se encuentra sobre R, entonces

$$\sigma = \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\; dx\, dy$$

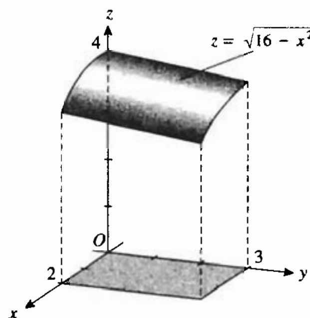


FIGURA 6

EJEMPLO 5 Calcule el área de la superficie en el primer octante cortada en el cilindro $x^2 + z^2 = 16$ por los planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ y $y = 3$.

Solución La superficie dada se muestra en la figura 6. La región R es el rectángulo en el primer cuadrante del plano xy limitado por las rectas $x = 2$, $y = 3$. La superficie tiene la ecuación $x^2 + z^2 = 16$. Si se despeja z en la ecuación anterior se obtiene $z = \sqrt{16 - x^2}$. Por tanto, $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2}$. De modo que si σ unidades cuadradas es el área de la superficie, entonces, por el teorema 13.3.4,

$$\sigma = \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\; dx\, dy$$

$$= \int_0^3\int_0^2 \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}\right)^2 + 0 + 1}\; dx\, dy$$

$$= \int_0^3\int_0^2 \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}}\, dx\, dy$$

$$= 4\int_0^3 \left[\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{1}{4}x\right]_0^2 dy$$

$$= 4\int_0^3 \tfrac{1}{6}\pi\, dy$$

$$= 2\pi$$

<u>**Conclusión:**</u> El área de la superficie es 2π unidades cuadradas. ◀

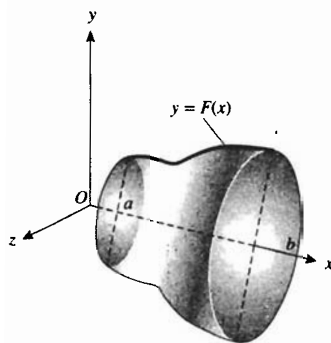


FIGURA 7

Considere ahora la curva $y = F(x)$ con $a \leq x \leq b$, $F(x) > 0$ para toda x de $[a, b]$ y F' continua en $[a, b]$. Si esta curva se gira alrededor del eje x, se obtiene una superficie de revolución. De la sección 10.6, una ecuación de esta superficie es

$$y^2 + z^2 = [F(x)]^2 \tag{4}$$

La figura 7 muestra la superficie de revolución. En esta figura el plano xy se encuentra en el plano de esta hoja; sin embargo, se tiene un sistema coordenado derecho. Se desea obtener una fórmula para calcular el área de esta superficie de revolución empleando el teorema 13.3.4. De las propiedades de simetría, el área de la superficie ubicada por arriba del plano xz y frente al plano xy es un cuarto del área de la superficie completa. Al resolver (4) para z y no tomando en cuenta la raíz cuadrada negativa puesto que $z \geq 0$, se tiene $f(x, y) = \sqrt{[F(x)]^2 - y^2}$. La región R del plano xy es la región limitada por el eje x, la curva $y = F(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$. Si se calculan las derivadas parciales de f se obtiene

$$f_x(x, y) = \frac{F(x)F'(x)}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} \qquad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}}$$

Se observa que $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ no existen en parte de la frontera de R (cuando $y = -F(x)$ y cuando $y = F(x)$). La integral doble que se obtiene a partir del teorema 13.3.4 es

$$\iint_R \sqrt{\frac{[F(x)]^2[F'(x)]^2}{[F(x)]^2 - y^2} + \frac{y^2}{[F(x)]^2 - y^2} + 1}\, dy\, dx$$
$$= \iint_R \frac{F(x)\sqrt{[F'(x)]^2 + 1}}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}}\, dy\, dx$$

Esta doble integral es impropia debido a que el integrando tiene una discontinuidad infinita en cada punto de la frontera de R donde $y = -F(x)$ y en donde $y = F(x)$. En consecuencia, se evalúa la doble integral como una integral iterada para la cual el integrando interior es impropio. Si σ unidades cuadradas es el área de la superficie de revolución, entonces

$$\sigma = 4\int_a^b \left[F(x)\sqrt{[F'(x)]^2 + 1} \int_0^{F(x)} \frac{dy}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} \right] dx \tag{5}$$

$$\int_0^{F(x)} \frac{dy}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} = \lim_{b \to F(x)^-} \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}}$$
$$= \lim_{b \to F(x)^-} \left[\operatorname{sen}^{-1} \frac{y}{F(x)} \right]_0^b$$
$$= \lim_{b \to F(x)^-} \operatorname{sen}^{-1} \frac{b}{F(x)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi$$

Por tanto, de (5),

$$\sigma = 2\pi \int_a^b F(x)\sqrt{[F'(x)]^2 + 1}\, dx$$

Este resultado se establece como un teorema, donde F se sustituye por f.

13.3.5 Teorema

Suponga que la función f es positiva en $[a, b]$ y que f' es continua en $[a, b]$. Si σ unidades cuadradas es el área de la superficie de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje x la curva $y = f(x)$, con $a \leq x \leq b$, entonces

$$\sigma = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{[f'(x)]^2 + 1}\,dx$$

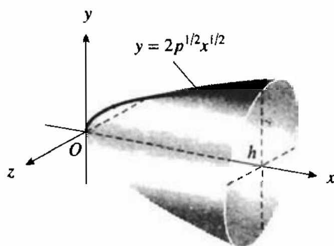


FIGURA 8

EJEMPLO 6 Calcule el área del paraboloide de revolución generado al girar la mitad superior de la parábola $y^2 = 4px$, con $0 \leq x \leq h$, alrededor del eje x.

Solución En la figura 8 se muestra el paraboloide de revolución. Si se despeja y en la ecuación de la parábola, con $y \geq 0$, se obtiene $y = 2p^{1/2}x^{1/2}$. De modo que si σ unidades cuadradas es el área de la superficie, entonces por el teorema 13.3.5, con $f(x) = 2p^{1/2}x^{1/2}$,

$$\begin{aligned}
\sigma &= 2\pi \int_0^h 2p^{1/2}x^{1/2}\sqrt{\frac{p}{x} + 1}\,dx \\
&= 4\pi p^{1/2} \int_0^h \sqrt{p + x}\,dx \\
&= \tfrac{8}{3}\pi p^{1/2}(p + x)^{3/2}\Big]_0^h \\
&= \tfrac{8}{3}\pi\left(\sqrt{p(p + h)^3} - p^2\right)
\end{aligned}$$

<u>**Conclusión:**</u> El área del paraboloide de revolución es $\frac{8}{3}\pi(\sqrt{p(p + h)^3} - p^2)$ unidades cuadradas. ◀

EJERCICIOS 13.3

En los ejercicios 1 a 12, calcule la masa y el centro de masa de la lámina si se considera la densidad superficial como se indica. La masa se mide en kilogramos y la distancia en metros.

1. Una lámina tiene la forma de una región rectangular limitada por las rectas $x = 3$ y $y = 2$ y los ejes coordenados. La densidad superficial en cualquier punto es xy^2 kilogramos por metro cuadrado.
2. Una lámina tiene la forma de una región rectangular acotada por las rectas $x = 4$ y $y = 5$ y los ejes coordenados. La densidad superficial en cualquier punto es $(x^2 + y)$ kilogramos por metro cuadrado.
3. Una lámina tiene la forma de una región triangular cuyos lados son los segmentos de los ejes coordenados y la recta $x + 2y = 6$. La densidad superficial en cualquier punto es y^2 kilogramos por metro cuadrado.
4. Una lámina tiene la forma de la región del primer cuadrante limitada por la parábola $y = x^2$, la recta $y = 1$ y el eje y. La densidad superficial en cualquier punto es $(x + y)$ kilogramos por metro cuadrado.
5. Una lámina tiene la forma de la región del primer cuadrante acotada por la parábola $x^2 = 8y$, la recta $y = 2$ y el eje y. La densidad superficial varía como la distancia desde la recta $y = -1$.
6. Una lámina tiene la forma de la región limitada por la curva $y = e^x$, la recta $x = 1$ y los ejes coordenados. La densidad superficial varía como la distancia desde el eje x.
7. Una lámina tiene la forma de la región del primer cuadrante acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ y los ejes coordenados. La densidad superficial varía conforme a la suma de las distancias a los dos lados rectos.

8. Una lámina tiene la forma de la región limitada por el triángulo cuyos lados son los segmentos de los ejes coordenados y la recta $3x + 2y = 18$. La densidad superficial varía como el producto de las distancias a los ejes coordenados.

9. Una lámina tiene la forma de la región acotada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ y el eje x desde $x = 0$ hasta $x = \pi$. La densidad superficial varía conforme a la distancia desde el eje x.

10. Una lámina tiene la forma de la región limitada por la curva $y = \sqrt{x}$ y la recta $y = x$. La densidad superficial varía como la distancia desde el eje y.

11. Una lámina tiene la forma de la región del primer cuadrante acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y la recta $x + y = 2$. La densidad superficial en cualquier punto es xy kilogramos por metro cuadrado.

12. Una lámina tiene la forma de la región limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y las rectas $x = 1$ y $y = 1$. La densidad superficial en cualquier punto es xy kilogramos por metro cuadrado.

En los ejercicios 13 a 18, calcule el momento de inercia de la lámina homogénea con respecto al eje indicado si la densidad superficial es k kilogramos por metro cuadrado y la distancia se mide en metros.

13. Una lámina tiene la forma de la región limitada por $4y = 3x$, $x = 4$ y el eje x; con respecto al eje x.

14. La lámina del ejercicio 13; con respecto a la recta $x = 4$.

15. Una lámina tiene la forma de la región acotada por la circunferencia de radio a metros; con respecto a su centro.

16. Una lámina tiene la forma de la región limitada por la parábola $x^2 = 4 - 4y$ y el eje x; con respecto al eje x.

17. La lámina del ejercicio 16; con respecto al origen.

18. Una lámina tiene la forma de la región acotada por un triángulo cuyos lados miden a metros, b metros y c metros; con respecto al lado que mide a metros.

En los ejercicios 19 a 22, determine para cada lámina lo siguiente: (a) el momento de inercia con respecto al eje x, (b) el momento de inercia con respecto al eje y, (c) el radio de giro con respecto al eje x, (d) el momento polar de inercia.

19. La lámina del ejercicio 1.

20. La lámina del ejercicio 4.

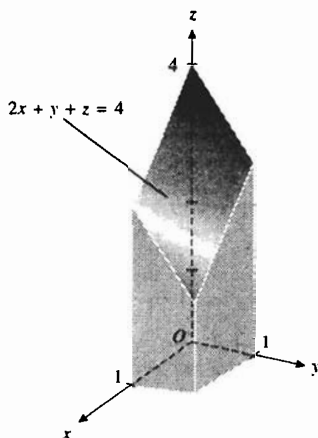
21. La lámina del ejercicio 9.

22. La lámina del ejercicio 10.

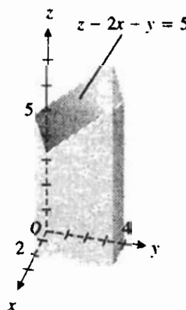
23. Una lámina tiene la forma de la región acotada por la parábola $y = 2x - x^2$ y el eje x. Calcule el momento de inercia de la lámina con respecto a la recta $y = 4$ si la densidad supeficial varía como la distancia desde la recta $y = 4$. La masa se mide en kilogramos y la distancia en metros.

24. Una lámina homogénea de k slugs por pie cuadrado de densidad superficial tiene la forma de la región limitada por la curva $x = \sqrt{y}$, el eje x y la recta $x = a$, donde $a > 0$. Calcule el momento de inercia de la lámina con respecto a la recta $x = a$.

25. Determine el área de la superficie cortada en el plano $2x + y + z = 4$ por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y $y = 1$.



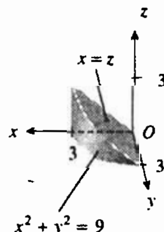
26. Calcule el área de la superficie cortada en el plano $z - 2x - y = 5$ por los planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ y $y = 4$.



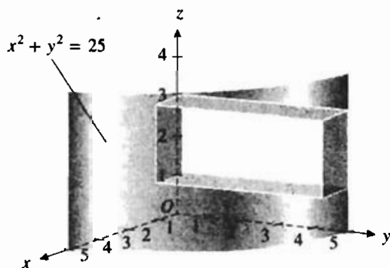
27. Obtenga el área de la porción de superficie del plano $36x + 16y + 9z = 144$ cortada por los planos coordenados.

28. Determine el área de la superficie cortada en el plano $z = ax + by$ por los planos $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ y $y = b$, donde $a > 0$ y $b > 0$.

29. Calcule el área de la superficie del primer octante cortada en el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ por el plano $x = z$.



30. Obtenga el área de la superficie cortada en el cilindro $x^2 + y^2 = 25$ por los planos $x = 0, x = 1, z = 1$ y $z = 3$.



31. Sea R la región triángular del plano xy con vértices en $(0, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$ y $(2, 4, 0)$. Determine el área de la superficie de la parte de la gráfica de $z - 5x - y^2 = 2$ que se encuentra sobre R.

32. Calcule el área de la superficie del primer octante cortada en el cono $x^2 + y^2 = z^2$ por el plano $x + y = 4$.

33. Obtenga el área de la porción de superficie del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

34. Determine el área de la porción de superficie del cono $x^2 + y^2 = z^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

35. Calcule el área de la porción de superficie del cono $x^2 + y^2 = z^2$ ubicada entre el cilindro $y^2 = x$ y el plano $x - y = 2$.

36. Obtenga el área de la porción del plano $x = z$ que está entre los planos $y = 0$ y $y = 6$ y dentro del hiperboloide $9x^2 - 4y^2 + 16z^2 = 144$.

37. Se gira el segmento de recta del origen al punto (a, b) alrededor del eje x. Determine el área de la superficie del cono generado.

38. Deduzca una fórmula para calcular el área de la superficie de una esfera al girar una semicircunferencia alrededor de su diámetro.

39. Calcule el área de la superficie de revolución generada al girar el arco de la catenaria $y = a \cosh(x/a)$ desde $x = 0$ hasta $x = a$ alrededor del eje y.

40. Determine el área de la superficie de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje x la catenaria del ejercicio 39.

41. El lazo de la curva $18y^2 = x(6 - x)^2$ se gira alrededor del eje x. Obtenga el área de la superficie de revolución generada.

42. Calcule el área de la superficie de revolución generada al girar el arco de la curva $y = \ln x$ desde $x = 1$ hasta $x = 2$ alrededor del eje y.

43. Una lámina homogénea de k slugs por pie cuadrado de densidad superficial tiene la forma de la región limitada por un triángulo isósceles cuya base mide b pies de longitud y su altura h pies de longitud. Determine el radio de giro de la lámina con respecto a su recta de simetría.

44. Suponga que f y sus primeras derivadas parciales son continuas en una región cerrada R del plano xy. Demuestre que si σ unidades cuadradas es el área de la porción de la superficie $z = f(x, y)$ que se encuentra sobre R, entonces

$$\sigma = \iint_R \|\nabla g(x, y, z)\| \, dx \, dy$$

donde $g(x, y, z) = z - f(x, y)$

13.4 INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

A fin de definir la integral doble de una función en una región cerrada del plano coordenado polar, primero se considera el tipo más simple de región. Sea R la región limitada por los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ y las circunferencias $r = a$ y $r = b$. Sea Δ la *partición* de esta región que se obtiene al dibujar rayos que pasen por el polo y circunferencias con centro en el polo. Refiérase a la figura 1, la cual muestra una red de subregiones denominadas **rectángulos curvados.** La norma $\|\Delta\|$ de la partición es la longitud de la mayor diagonal de los rectángulos curvados. Sea n el número de subregiones y sea $\Delta_i A$ unidades cuadradas el área del i-ésimo rectángulo curvado. Como el área de la i-ésima subregión es la diferencia de las áreas de dos sectores circulares, entonces

$$\begin{aligned}\Delta_i A &= \tfrac{1}{2} r_i^2(\theta_i - \theta_{i-1}) - \tfrac{1}{2} r_{i-1}^2(\theta_i - \theta_{i-1}) \\ &= \tfrac{1}{2}(r_i - r_{i-1})(r_i + r_{i-1})(\theta_i - \theta_{i-1})\end{aligned}$$

Sean $\bar{r}_i = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})$, $\Delta_i r = r_i - r_{i-1}$, y $\Delta_i \theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Entonces

$$\Delta_i A = \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta$$

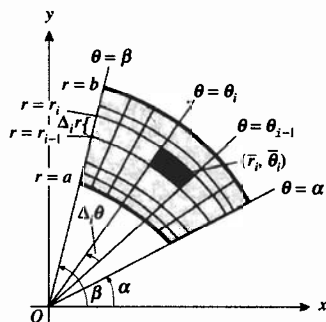


FIGURA 1

Tome el punto $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$ en la i-ésima subregión, donde $\theta_{i-1} \leq \bar{\theta}_i \leq \theta_i$, y forme la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\, \Delta_i A = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta$$

Se puede demostrar que si f es continua en la región R, entonces el límite de esta suma, conforme $\|\Delta\|$ tiende a cero, existe y se considerará como la integral doble de f en R. De este modo se puede escribir

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\, \Delta_i A = \iint_R f(r, \theta)\, dA$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta = \iint_R f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

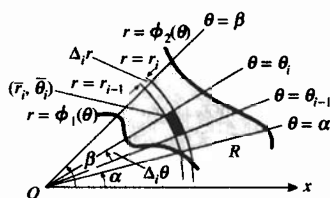


FIGURA 2

Observe que en coordenadas polares, $dA = r\, dr\, d\theta$.

También puede demostrarse que la integral doble es igual a una integral iterada que tiene una de las dos formas posibles:

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{a}^{b} f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{a}^{b} \int_{\alpha}^{\beta} f(r, \theta)\, r\, d\theta\, dr$$

Es posible definir la integral doble de una función continua f de dos variables en regiones cerradas del plano coordenado polar de manera diferente a la anterior. Por ejemplo, considere la región R limitada por las curvas $r = \phi_1(\theta)$ y $r = \phi_2(\theta)$, donde ϕ_1 y ϕ_2 son funciones lisas, y por las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. Consulte la figura 2. En la figura, $\phi_1(\theta) \leq \phi_2(\theta)$ para toda θ del intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$. Entonces se puede demostrar que la doble integral de f en R existe y que es igual a una integral iterada, obteniéndose

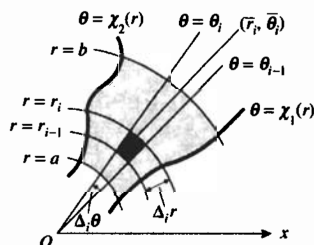


FIGURA 3

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(r, \theta) r\, dr\, d\theta$$

Si la región R está limitada por las curvas $\theta = \chi_1(r)$, y $\theta = \chi_2(r)$, donde χ_1 y χ_2 son funciones lisas, y por las circunferencias $r = a$ y $r = b$, como se muestra en la figura 3, donde $\chi_1(r) \leq \chi_2(r)$ para toda r del intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_{a}^{b} \int_{\chi_1(r)}^{\chi_2(r)} f(r, \theta)\, r\, d\theta\, dr$$

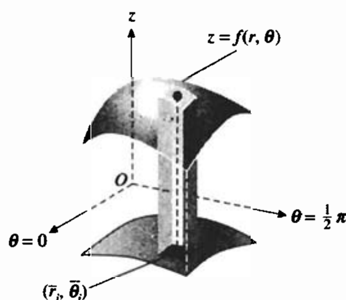


FIGURA 4

La integral doble de una función en una región cerrada del plano coordenado polar puede considerarse como la medida del volumen de un sólido empleando coordenadas cilíndricas. La figura 4 muestra un sólido que tiene como base a la región R del plano coordenado polar y limitado superiormente por la superficie $z = f(r, \theta)$, donde f es continua en R y $f(r, \theta) \geq 0$ en R. Considere una partición de R, la cual proporciona una red de n rectángulos curvados. Construya los n sólidos para los cuales el i-ésimo sólido tiene como base al i-ésimo rectángulo curvado y cuya altura es $f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$ unidades, donde $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$ pertenece a la i-ésima subregión. La figura 4 muestra el i-ésimo sólido. La medida del volumen del i-ésimo sólido es

$$f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\, \Delta_i A = f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta$$

La suma de las medidas de los n sólidos es

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta$$

Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido dado, entonces

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta \\ &= \iint_R f(r, \theta) r\, dr\, d\theta \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

▶ ***EJEMPLO 1*** Calcule el volumen del sólido del primer octante limitado por el cono $z = r$ y el cilindro $r = 3 \text{ sen } \theta$.

Solución El sólido y el i-ésimo elemento de volumen se muestran en la figura 5. Al utilizar (1) con $f(r, \theta) = r$, y si V unidades cúbicas es el volumen del sólido dado, entonces

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \cdot \bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta \\ &= \iint_R r^2\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{3 \text{ sen } \theta} r^2\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\tfrac{1}{3} r^3\right]_0^{3 \text{ sen } \theta} d\theta \\ &= 9 \int_0^{\pi/2} \text{sen}^3 \theta\, d\theta \\ &= -9 \cos \theta + 3 \cos^3 \theta \Big]_0^{\pi/2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Conclusión: La medida del volumen es 6 unidades cúbicas. ◀

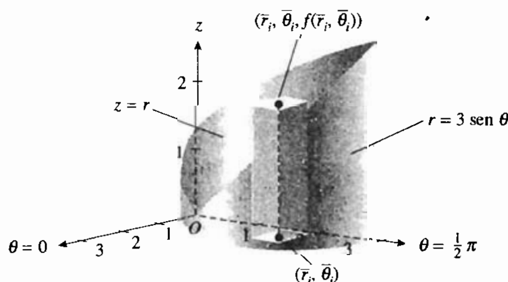


FIGURA 5

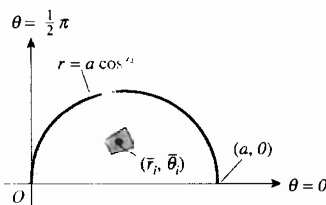


FIGURA 6

EJEMPLO 2 Calcule la masa de la lámina que tiene la forma de la región limitada por la semicircunferencia $r = a\cos\theta, 0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi$, y cuya densidad superficial en cualquier punto es proporcional a la medida de su distancia desde el polo. La masa se mide en kilogramos y la distancia en metros.

Solución La figura 6 muestra un dibujo de la lámina y del i-ésimo rectángulo curvado. La densidad superficial en el punto (r, θ) es kr kilogramos por metro cuadrado, donde k es una constante. Si M kilogramos es la masa de la lámina, entonces

$$
\begin{aligned}
M &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (k\bar{r}_i)\bar{r}_i \,\Delta_i r\, \Delta_i\theta \\
&= \iint_R k r^2 \,dr\, d\theta \\
&= k\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\cos\theta} r^2\, dr\, d\theta \\
&= \tfrac{1}{3}ka^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta \\
&= \tfrac{1}{3}ka^3\Big[\operatorname{sen}\theta - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3\theta\Big]_0^{\pi/2} \\
&= \tfrac{2}{9}ka^3
\end{aligned}
$$

<u>**Conclusión:**</u> La medida de la masa es $\frac{2}{9}ka^3$ kilogramos. ◀

EJEMPLO 3 Obtenga el centro de masa de la lámina del ejemplo 2.

Solución Sean $\bar{x}$ y $\bar{y}$ las coordenadas cartesianas del centro de masa de la lámina, donde, como es costumbre, el eje x está ubicado sobre el eje polar y el eje y se encuentra sobre el eje $\frac{1}{2}\pi$. Sea $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ la representación en coordenadas cartesianas del punto $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$. Si M_x kilogramos-metro es el momento de masa de la lámina con respecto al eje x, entonces

$$
M_x \doteq \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i(k\bar{r}_i)\bar{r}_i\,\Delta_i r\,\Delta_i\theta
$$

Al sustituir $\bar{y}_i$ por $\bar{r}_i$ sen $\bar{\theta}_i$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
M_x &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k\bar{r}_i^{\,3} \operatorname{sen}\bar{\theta}_i\,\Delta_i r\,\Delta_i\theta \\
&= \iint_R kr^3 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta \\
&= k\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\cos\theta} r^3 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta \\
&= \tfrac{1}{4}ka^4\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta \\
&= -\tfrac{1}{20}ka^4\cos^5\theta\Big]_0^{\pi/2} \\
&= \tfrac{1}{20}ka^4
\end{aligned}
$$

Si M_y kilogramos-metro es el momento de masa de la lámina con respecto al eje y, entonces

$$M_y = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i (k\bar{r}_i) \bar{r}_i \, \Delta_i r \, \Delta_i \theta$$

Al reemplazar $\bar{x}_i$ por $\bar{r}_i \cos \bar{\theta}_i$ resulta

$$\begin{aligned}
M_y &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\bar{r}_i^{\,3} \cos \bar{\theta}_i \, \Delta_i r \, \Delta_i \theta \\
&= \iint_R kr^3 \cos \theta \, dr \, d\theta \\
&= k \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} r^3 \cos \theta \, dr \, d\theta \\
&= \tfrac{1}{4} ka^4 \int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta \, d\theta \\
&= \tfrac{1}{4} ka^4 \Big[\operatorname{sen} \theta - \tfrac{2}{3} \operatorname{sen}^3 \theta + \tfrac{1}{5} \operatorname{sen}^5 \theta \Big]_0^{\pi/2} \\
&= \tfrac{2}{15} ka^4
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{M_y}{M} & \qquad \bar{y} &= \frac{M_x}{M} \\
&= \frac{\frac{2}{15} ka^4}{\frac{2}{9} ka^3} & &= \frac{\frac{1}{20} ka^4}{\frac{2}{9} ka^3} \\
&= \tfrac{3}{5} a & &= \tfrac{9}{40} a
\end{aligned}$$

<u>**Conclusión:**</u> El centro de masa se encuentra en el punto $(\frac{3}{5}a, \frac{9}{40}a)$. ◀

El ejemplo siguiente muestra cómo puede calcularse el área de una región del plano polar mediante la integración doble.

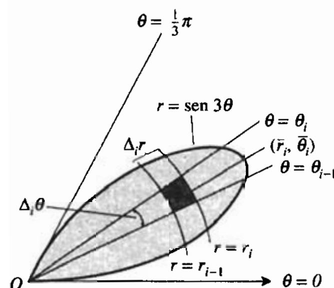


FIGURA 7

▶ *EJEMPLO 4*

Calcule por medio de integración doble el área de la región limitada por una hoja de la rosa $r = \operatorname{sen} 3\theta$.

Solución La región y el i-ésimo rectángulo curvado se muestran en la figura 7. Si A unidades cuadradas es el área de la región, entonces

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i A \\
&= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \, \Delta_i r \, \Delta_i \theta \\
&= \iint_R r \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3} \int_0^{\operatorname{sen} 3\theta} r \, dr \, d\theta \\
&= \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^2 3\theta \, d\theta
\end{aligned}$$

$$= \tfrac{1}{4}\theta - \tfrac{1}{24}\operatorname{sen} 6\theta\Big]_0^{\pi/3}$$
$$= \tfrac{1}{12}\pi$$

Conclusión: El área es $\frac{1}{12}\pi$ unidades cuadradas. ◀

En ocasiones resulta más fácil evaluar una integral doble empleando coordenadas polares en lugar de coordenadas cartesianas, como se muestra en los ejemplos siguientes.

▶ ***EJEMPLO 5*** Evalúe la integral doble

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

donde la región R se encuentra en el primer cuadrante y está limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ y los ejes coordenados.

Solución Como $x^2 + y^2 = r^2$, y $dA = r\,dr\,d\theta$, entonces

$$\begin{aligned}
\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dA &= \iint_R e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^a e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta \\
&= -\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\Big[e^{-r^2}\Big]_0^a\,d\theta \\
&= -\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(e^{-a^2} - 1)\,d\theta \\
&= -\tfrac{1}{2}(e^{-a^2} - 1)\theta\Big]_0^{\pi/2} \\
&= \tfrac{1}{4}\pi(1 - e^{-a^2})
\end{aligned}$$ ◀

▶ ***EJEMPLO 6*** Calcule el área de la superficie del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se encuentra debajo del plano $z = 4$.

Solución La figura 8 muestra la superficie dada. De la ecuación del paraboloide se ve que $f(x, y) = x^2 + y^2$. La región cerrada del plano xy limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ es la región R. Si σ unidades cuadradas es el área de la superficie requerida, entonces, por el teorema 13.3.4,

$$\begin{aligned}
\sigma &= \iint_R \sqrt{f_x^{\,2}(x, y) + f_y^{\,2}(x, y) + 1}\;dx\,dy \\
&= \iint_R \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}\;dx\,dy
\end{aligned}$$

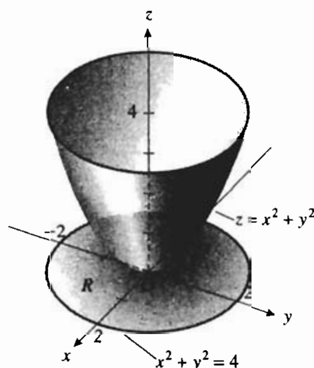


FIGURA 8

Como el integrando contiene el término $4(x^2 + y^2)$, la evaluación de la integral se simplifica al utilizar coordenadas polares. Así, $x^2 + y^2 = r^2$. Puesto que $dx\,dy = dA$, entonces $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$. Además, los límites para r son de 0 a 2 y los límites para θ son de 0 a 2π. Por tanto,

$$\sigma = \iint_R \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{12}(4r^2 + 1)^{3/2} \right]_0^2 d\theta$$
$$= \tfrac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} - 1)$$

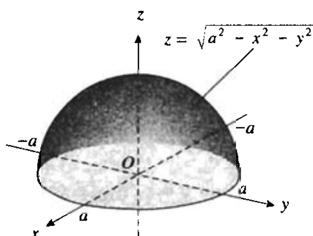


FIGURA 9

Conclusión: El área de la porción del paraboloide que se encuentra debajo del plano dado es $\frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} - 1)$ unidades cuadradas. ◀

▶ ***EJEMPLO 7*** Calcule el área de la mitad superior de la esfera

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Solución La semiesfera se muestra en la figura 9. Al despejar z en la ecuación de la esfera y considerando esto igual a $f(x, y)$ se obtiene

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

Como

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

f_x y f_y no están definidas en la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, la cual es la frontera de la región R del plano xy. Además, la integral doble que se obtiene al aplicar el teorema 13.3.4 es

$$\iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$$

la cual es impropia debido a que el integrando tiene una discontinuidad infinita en cada punto de la frontera de R. Esta situación puede evitarse al considerar la región R' como aquella limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = b^2$, donde $b < a$, y tomar el límite cuando $b \to a^-$. Además, el cálculo se simplifica si la integral doble se evalúa mediante una integral iterada en la que se utilizan coordenadas polares. De este modo, si σ unidades cuadradas es el área de la semiesfera, entonces

$$\sigma = \lim_{b \to a^-} \int_0^b \int_0^{2\pi} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, r\, d\theta\, dr$$
$$= 2\pi a \lim_{b \to a^-} \int_0^b \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, dr$$
$$= 2\pi a \lim_{b \to a^-} \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^b$$
$$= 2\pi a \lim_{b \to a^-} \left[-\sqrt{a^2 - b^2} + a \right]$$
$$= 2\pi a^2$$

Conclusión: El área de la semiesfera es $2\pi a^2$ unidades cuadradas. ◀

EJERCICIOS 13.4

En los ejercicios 1 a 6, utilice integrales dobles para calcular el área de la región.

1. La región ubicada dentro de la cardioide $r = 2(1 + \text{sen}\,\theta)$.
2. Una hoja de la rosa $r = a \cos 2\theta$.
3. La región ubicada dentro de la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$ y fuera de la circunferencia $r = a$.
4. La región ubicada dentro de la circunferencia $r = 1$ y fuera de la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$.
5. La región que se encuentra dentro del lazo más grande del caracol

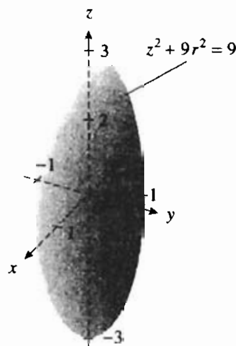
$$r = 2 - 4\,\text{sen}\,\theta$$

y fuera del lazo pequeño.

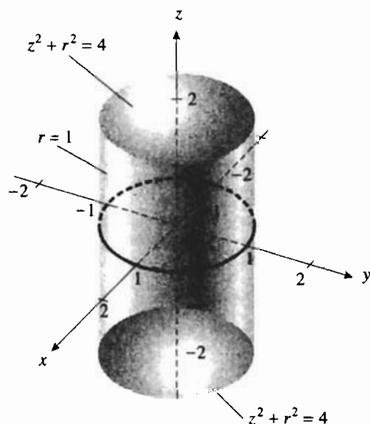
6. La región ubicada dentro del caracol $r = 3 - \cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 5\cos\theta$.

En los ejercicios 7 a 12, obtenga el volumen del sólido.

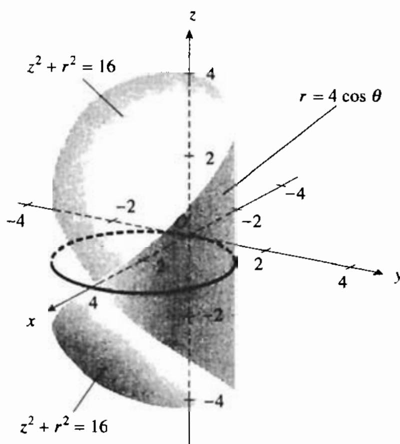
7. El sólido limitado por el elipsoide $z^2 + 9r^2 = 9$.



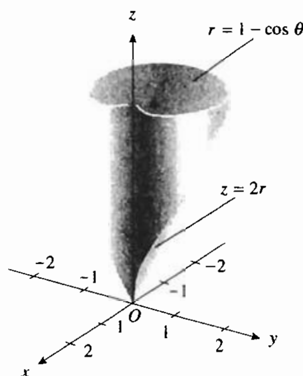
8. El sólido cortado en la esfera $z^2 + r^2 = 4$ por el cilindro $r = 1$.



9. El sólido cortado en la esfera $z^2 + r^2 = 16$ por el cilindro $r = 4\cos\theta$.



10. El sólido sobre el plano polar limitado por el cono $z = 2r$ y el cilindro $r = 1 - \cos\theta$.



11. El sólido limitado por el paraboloide $z = 4 - r^2$, el cilindro $r = 1$ y el plano polar.
12. El sólido ubicado por arriba del paraboloide $z = r^2$ y por debajo del plano $z = 2r\,\text{sen}\,\theta$.

En los ejercicios 13 a 19, calcule la masa y el centro de masa de la lámina si la densidad superficial es la que se indica. La masa se mide en kilogramos y la distancia en metros.

13. Una lámina tiene la forma de la región del ejercicio 1. La densidad superficial varía conforme cambia la distancia medida desde el polo.

14. Una lámina tiene la forma de la región del ejercicio 2. La densidad superficial varía como la distancia medida desde el polo.

15. Una lámina tiene la forma de la región acotada por el caracol $r = 2 - \cos\theta$. La densidad superficial varía como la distancia medida desde el polo.

16. Una lámina tiene la forma de la región acotada por el caracol $r = 2 + \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, y el eje polar. La densidad superficial en cualquier punto es k sen θ kilogramos por metro cuadrado.

17. La lámina del ejercicio 16. La densidad superficial en cualquier punto es kr sen θ kilogramos por metro cuadrado.

18. Una lámina tiene la forma de la región del ejercicio 6. La densidad superficial varía como la distancia medida desde el polo.

19. Una lámina tiene la forma de la región acotada por el lazo pequeño del caracol del ejercicio 5. La densidad superficial varía como la distancia medida desde el polo.

En los ejercicios 20 a 24, calcule el momento de inercia de la lámina con respecto al eje o punto indicado si la densidad superficial es la que se indica. La masa se mide en kilogramos y la distancia en metros.

20. Una lámina tiene la forma de la región limitada por la circunferencia $r = \text{sen}\,\theta$; con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$. La densidad superficial en cualquier punto es k kilogramos por metro cuadrado.

21. La lámina del ejercicio 20; con respecto al eje polar. La densidad superficial en cualquier punto es k kilogramos por metro cuadrado.

22. Una lámina tiene la forma de la región acotada por la cardioide $r = a(1 - \cos\theta)$; con respecto al polo. La densidad superficial en cualquier punto es k kilogramos por metro cuadrado.

23. Una lámina tiene la forma de la región limitada por la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$ y la circunferencia $r = 2a\cos\theta$; con respecto al polo. La densidad superficial en cualquier punto es k kilogramos por metro cuadrado.

24. Una lámina tiene la forma de la región acotada por la lemniscata $r^2 = a^2\cos 2\theta$; con respecto al eje polar. La densidad superficial en cualquier punto es k kilogramos por metro cuadrado.

25. Una lámina homogénea tiene la forma de la región limitada por un lazo de la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$. Calcule el radio de giro de la lámina con respecto a un eje perpendicular al plano polar que pase por el polo.

26. Una lámina tiene la forma de la región acotada por la circunferencia $r = 4$, y la densidad superficial varía conforme la distancia medida desde el polo. Determine el radio de giro de la lámina con respecto un eje perpendicular al plano polar que pase por el polo.

27. Evalúe por medio de coordenadas polares la integral

$$\iint_R e^{x^2 + y^2}\, dA$$

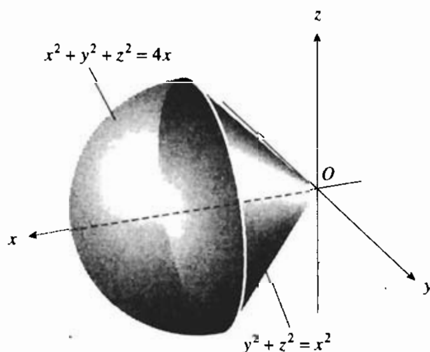
donde R es la región limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$.

28. Evalúe por medio de coordenadas polares la integral

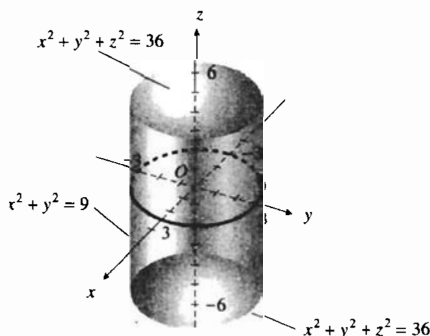
$$\iint_R \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dA$$

donde R es la región del primer cuadrante limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y los ejes coordenados.

29. Calcule el área de la porción de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ cortada por un manto del cono $y^2 + z^2 = x^2$.



30. Determine el área de la porción de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$.



31. Calcule el área de la porción de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que se encuentra dentro del paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$.

32. Para la esfera y el paraboloide del ejercicio 31, obtenga el área de la porción de la superficie del paraboloide que se encuentra dentro de la esfera.

33. Determine el área de la porción de la superficie $xy = az$ del primer octante que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

34. Calcule el área de la superficie cortada en el paraboloide hiperbólico $y^2 - x^2 = 6z$ por el cilindro $x^2 + y^2 = 36$.

13.5 INTEGRALES TRIPLES

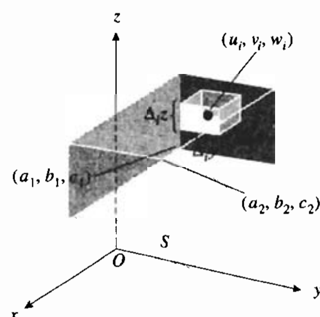


FIGURA 1

La extensión de la integral doble a la *integral triple* es análoga a la extensión de la integral simple a la integral doble. El tipo de región más simple en R^3 es un paralelepípedo rectangular limitado por seis planos: $x = a_1$, $x = a_2$, $y = b_1$, $y = b_2$, $z = c_1$ y $z = c_2$, con $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$ y $c_1 < c_2$. Sea f una función de tres variables y suponga que f es continua en una región S de este tipo. Una partición de esta región se forma al dividir S en cajas rectangulares mediante planos paralelos a los planos coordenados. Denote tal partición por Δ y suponga que se tienen n cajas. Sean $\Delta_i V$ unidades cúbicas el volumen de la i-ésima caja. Se elige un punto arbitrario (u_i, v_i, w_i) en la i-ésima caja y se forma la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i, w_i)\, \Delta_i V \tag{1}$$

Refiérase a la figura 1, la cual muestra el paralelepípedo rectangular junto con la i-ésima caja. La *norma* $\|\Delta\|$ de la partición es la longitud de la diagonal más grande de las cajas. Si las sumas de la forma (1) se aproximan a un límite conforme $\|\Delta\|$ tiende a cero para cualesquiera elecciones de los puntos (u_i, v_i, w_i), entonces este límite recibe el nombre de **integral triple** de f en S, y se escribe

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i, w_i)\, \Delta_i V = \iiint_S f(x, y, z)\, dV$$

Una condición suficiente para que exista la integral triple de f en S es que f sea continua en S.

Así como una integral doble es igual a una integral iterada doble, la integral triple es igual a una integral iterada triple. Cuando S es el paralelepípedo rectan-gular descrito anteriormente, y f es continua en S, se tiene entonces

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dV = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

EJEMPLO 1 Evalúe ia integral triple

$$\iiint_S xy \operatorname{sen} yz\, dV$$

si S es el paralelepípedo rectangular limitado por los planos $x = \pi$, $y = \frac{1}{2}\pi$, $z = \frac{1}{3}\pi$ y los planos coordenados.

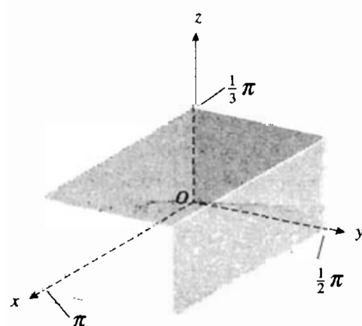


FIGURA 2

Solución La figura 2 muestra el paralelepípedo rectangular S.

$$\iiint_S xy \operatorname{sen} yz\, dV = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/3} xy \operatorname{sen} yz\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \Big[-x \cos yz\Big]_0^{\pi/3} dy\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} x(1 - \cos \tfrac{1}{3}\pi y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} x\left(y - \frac{3}{\pi} \operatorname{sen} \frac{1}{3} \pi y \right)\Big]_0^{\pi/2} dx$$

$$= \int_0^{\pi} x\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi^2}{6} \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi^2}{6} \right)\Big]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\pi^2 - 6 \operatorname{sen} \frac{\pi^2}{6} \right)$$ ◀

A continuación se discutirá cómo definir la integral triple de una función continua de tres variables en una región de R^3 diferente de un paralelepípedo rectangular. Sea S la región tridimensional cerrada y limitada por los planos $x = a$ y $x = b$, los cilindros $y = \phi_1(x)$ y $y = \phi_2(x)$, y las superficies $z = F_1(x, y)$ y $z = F_2(x, y)$, donde las funciones ϕ_1, ϕ_2, F_1 y F_2 son lisas. Trace planos paralelos a los planos coordenados de modo que se forme un conjunto de paralelepípedos rectangulares que cubran toda la región S. Los paralelepípedos que se encuentran completamente dentro de S o en la frontera de S forman una **partición** Δ de S. Elija un sistema para numerar de 1 a n estos paralelepípedos. La norma $\|\Delta\|$ de esta partición de S es la longitud de la diagonal más grande de los n paralelepípedos. El volumen del i-ésimo paralelepípedo es $\Delta_i V$ unidades cúbicas. Sea f una función de tres variables continua en S, y sea (u_i, v_i, w_i) un punto arbitrario del i-ésimo paralelepípedo. Refiérase a la figura 3.

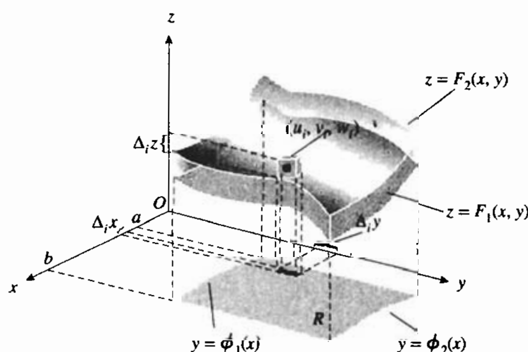


FIGURA 3

Forme la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i, w_i)\, \Delta_i V$$

Si esta suma tiene un límite conforme $\|\Delta\|$ tiende a cero, y si el límite es independiente de la elección de los planos de la partición y de los puntos arbi-

trarios (u_i, v_i, w_i) en cada paralelepípedo, entonces el límite se denomina **integral triple** de f en S, y se escribe

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i, w_i)\, \Delta_i V = \iiint_S f(x, y, z)\, dV \tag{2}$$

Se puede demostrar, en Cálculo avanzado, que una condición suficiente para que el límite de (2) exista es que f sea continua en S. Además, con la condición impuesta a las funciones ϕ_1, ϕ_2, F_1 y F_2 de que sean lisas, también es posible demostrar que la integral triple puede evaluarse mediante la integral iterada

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

Así como la integral doble puede interpretarse como la medida del área de una región plana cuando $f(x, y) = 1$ en R, la integral triple puede interpretarse como la medida del volumen de una región tridimensional. Si $f(x, y, z) = 1$ en S, entonces (2) se transforma en

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \iiint_S dV$$

de modo que la integral triple es la medida del volumen de la región S.

▶ ***EJEMPLO 2*** Calcule el volumen del sólido del ejemplo 5 de la sección 13.2 mediante integración triple.

Solución El sólido se encuentra sobre el plano xy y está limitado por el paraboloide elíptico $z = x^2 + 4y^2$ y el cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$. Consulte la figura 4. Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido, entonces

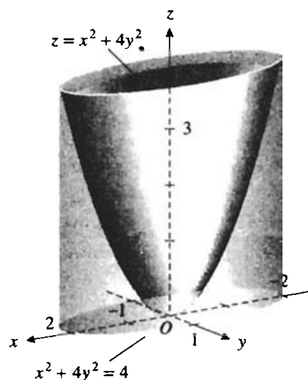


FIGURA 4

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i V \\ &= \iiint_S dV \end{aligned}$$

donde S es la región limitada por el sólido. Los límites de z son de 0 (el valor de z en el plano xy) a $x^2 + 4y^2$ (el valor de z en el paraboloide elíptico). Los límites de y para un cuarto del volumen son de 0 (el valor de y en plano xz) a $\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$ (el valor de y en el cilindro). Los límites de x para el primer octante son de 0 a 2. Al evaluar la integral triple por medio de una integral iterada se obtiene

$$V = 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} \int_0^{x^2+4y^2} dz\, dy\, dx$$
$$= 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} (x^2 + 4y^2)\, dy\, dx$$

Ésta es la misma integral iterada doble que se obtuvo en el ejemplo 5 de la sección 13.2, por lo que el resto de la solución es la misma. ◀

▶ **EJEMPLO 3** Calcule el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 25$, el plano $x + y + z = 8$ y el plano xy.

Solución El sólido se muestra en la figura 5. Los límites de z para la integral iterada son de 0 a $8 - x - y$ (el valor de z en el plano). Los límites de y se obtienen de la frontera de la región en el plano xy, la cual es la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. Por tanto, los límites para y son de $-\sqrt{25 - x^2}$ a $\sqrt{25 - x^2}$. Los límites para x son de -5 a 5. Si V unidades cúbicas es el volumen requerido, entonces

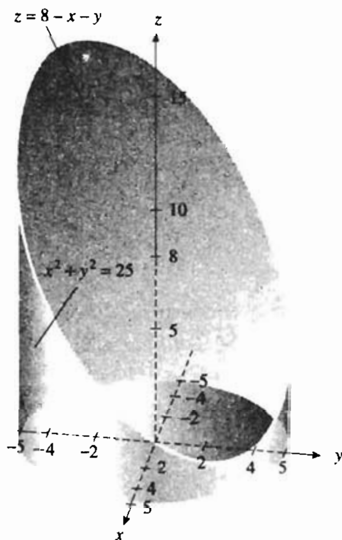


FIGURA 5

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i V$$
$$= \iiint_S dV$$
$$= \int_{-5}^{5} \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^{8-x-y} dz\, dy\, dx$$
$$= \int_{-5}^{5} \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} (8 - x - y)\, dy\, dx$$
$$= \int_{-5}^{5} \left[(8 - x)y - \tfrac{1}{2}y^2\right]_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} dx$$
$$= 2\int_{-5}^{5} (8 - x)\sqrt{25 - x^2}\, dx$$
$$= 16\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\, dx + \int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\,(-2x)\, dx$$
$$= 16\left(\tfrac{1}{2}x\sqrt{25 - x^2} + \tfrac{25}{2}\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{1}{5}x\right) + \tfrac{2}{3}(25 - x^2)^{3/2}\Big]_{-5}^{5}$$
$$= 200\pi$$

Conclusión: El volumen es 200π unidades cúbicas. ◀

▶ **EJEMPLO 4** Calcule la masa del sólido ubicado por arriba del plano xy y limitado por el cono $9x^2 + z^2 = y^2$ y el plano $y = 9$ si la medida de la densidad volumínica en cualquier punto (x, y, z) del sólido es proporcional a la medida de la distancia del punto al plano xy. La densidad volumínica se mide en kilogramos por metro cúbico.

Solución La figura 6 muestra el sólido. Sean M kilogramos la masa del sólido. La densidad volumínica en cualquier punto (x, y, z) del sólido es kz kilogramos por metro cúbico, donde k es una constante. Si (u_i, v_i, w_i) es cualquier punto del i-ésimo paralelepípedo rectangular de la partición, entonces

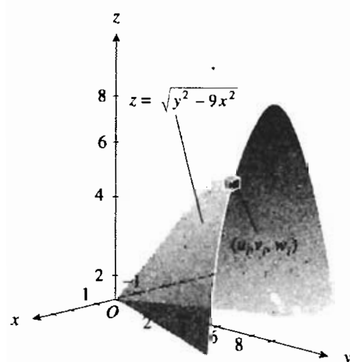


FIGURA 6

$$
\begin{aligned}
M &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\mu_i \Delta_i V \\
&= \iiint_S kz\, dV \\
&= 2k \int_0^9 \int_0^{y/3} \int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z\, dz\, dy\, dx \\
&= 2k \int_0^9 \int_0^{y/3} \left[\tfrac{1}{2} z^2 \right]_0^{\sqrt{y^2 - 9x^2}} dx\, dy \\
&= k \int_0^9 \int_0^{y/3} (y^2 - 9x^2)\, dx\, dy \\
&= \tfrac{2}{9} k \int_0^9 y^3\, dy \\
&= \tfrac{729}{2} k
\end{aligned}
$$

Conclusión: La masa es $\frac{729}{2}k$ kilogramos. ◀

EJERCICIOS 13.5

En los ejercicios 1 a 8, evalúe la integral iterada.

1. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{2y}^{1+y^2} x\, dz\, dy\, dx$

2. $\displaystyle\int_1^2 \int_0^x \int_1^{x+xy} xy\, dz\, dy\, dx$

3. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x+y} (x + y + z)\, dz\, dy\, dx$

4. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{2-y} z\, dx\, dz\, dy$

5. $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_e^{2e} \int_0^{\pi/3} y \ln z \tan x\, dx\, dz\, dy$

6. $\displaystyle\int_1^2 \int_y^{y^2} \int_0^{\ln x} ye^z\, dz\, dx\, dy$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_z^{\pi/2} \int_0^{xz} \cos \frac{y}{z}\, dy\, dx\, dz$

8. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^y \int_0^{\sqrt{3}z} \frac{z}{x^2 + z^2}\, dx\, dz\, dy$

En los ejercicios 9 a 18, evalúe la integral triple.

9. $\displaystyle\iiint_S y\, dV$ si S es la región limitada por el tetraedro formado por el plano $12x + 20y + 15z = 60$ y los planos coordenados.

10. $\displaystyle\iiint_S (x^2 + z^2)\, dV$ si S es la región del ejercicio 9.

11. $\displaystyle\iiint_S z\, dV$ si S es la región acotada por el tetraedro cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ y $(1, 0, 1)$.

12. $\displaystyle\iiint_S yz\, dV$ si S es la región del ejercicio 11.

13. $\displaystyle\iiint_S xy\, dV$ si S es el paralelepípedo rectangular del primer octante limitado por los planos coordenados y los planos $x = 2$, $y = 3$ y $z = 4$.

14. $\displaystyle\iiint_S x\, dV$ si S es el tetraedro delimitado por los planos $x + 2y + 3z = 6$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

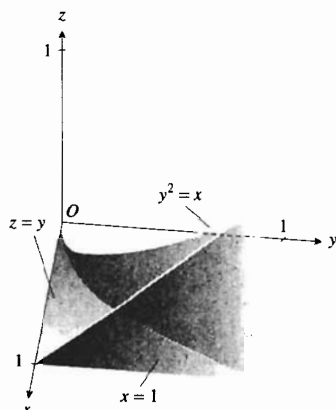
15. $\displaystyle\iiint_S dV$ si S es la región limitada por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 27 - 2x^2 - 2y^2$.

16. $\displaystyle\iiint_S y^2\, dV$ si S es la región acotada por los cilindros $x^2 + y = 1$ y $z^2 + y = 1$ y el plano $y = 0$.

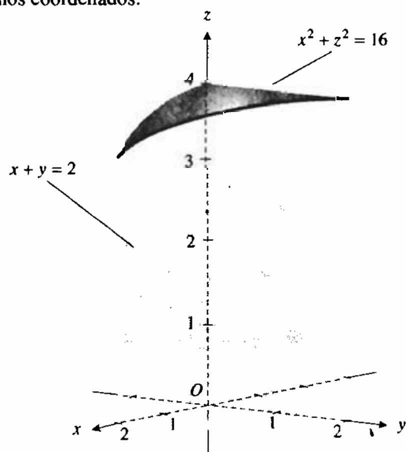
17. $\displaystyle\iiint_S (xz + 3z)\, dV$ si S es la región limitada por el cilindro $x^2 + z^2 = 9$ y los planos $x + y = 3$, $z = 0$ y $y = 0$, y ubicada arriba del plano xy

18. $\displaystyle\iiint_S xyz\, dV$ si S es la región acotada por los cilindros $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + z^2 = 4$.

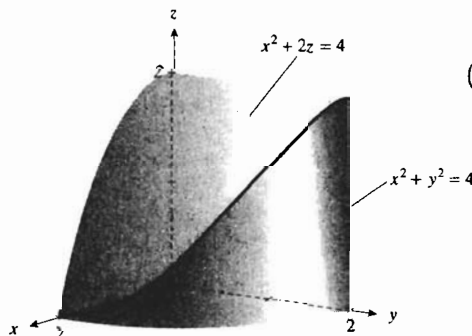
19. Calcule el volumen del sólido del primer octante limitado inferiormente por el plano xy, superiomente por el plano $z = y$, y lateralmente por el cilindro $y^2 = x$ y el plano $x = 1$.



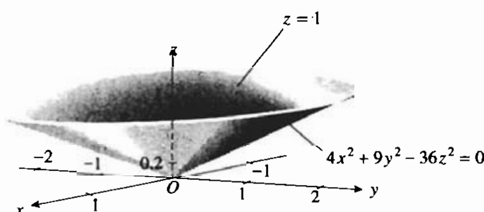
20. Determine el volumen del sólido del primer octante acotado por el cilindro $x^2 + z^2 = 16$, el plano $x + y = 2$ y los tres planos coordenados.



21. Obtenga el volumen del sólido del primer octante limitado por los cilindros $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + 2z = 4$ y los tres planos coordenados.



22. Calcule el volumen del sólido acotado por el cono elíptico $4x^2 + 9y^2 - 36z^2 = 0$ y el plano $z = 1$.



23. Determine el volumen del sólido ubicado sobre el paraboloide elíptico $3x^2 + y^2 = z$ y debajo del cilindro $x^2 + z = 4$.

24. Obtenga el volumen del sólido limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

25. Calcule el volumen del sólido acotado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

26. Obtenga el volumen del sólido limitado por los cilindros $z = 5x^2$ y $z = 3 - x^2$, el plano $y + z = 4$ y el plano xz.

27. Determine la masa del sólido homogéneo acotado por el cilindro $z = 4 - x^2$, el plano $y = 5$ y los planos coordenados si la densidad volumínica en cualquier punto del sólido es k kilogramos por metro cúbico.

28. Calcule la masa del sólido limitado por el tetraedro formado por los planos $100x + 25y + 16z = 400$ y los planos coordenados si la densidad volumínica varía como la distancia medida desde el plano yz. La densidad volumínica se mide en kilogramos por metro cúbico.

29. Obtenga la masa del sólido acotado por los cilindros $x = z^2$ y $y = x^2$, y los planos $x = 1$, $y = 0$ y $z = 0$. La densidad volumínica varía conforme el producto de las distancias medidas desde los tres planos coordenados, y se mide en kilogramos por metro cúbico.

30. Determine la masa del sólido limitado por la superficie $z = 4 - 4x^2 - y^2$ y el plano xy. La densidad volumínica en cualquier punto del sólido es $3z\,|x|$ kilogramos por metro cúbico.

31. Calcule la masa del sólido limitado por la superficie $z = xy$ y los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 0$. La densidad volumínica en cualquier punto del sólido es $3\sqrt{x^2 + y^2}$ kilogramos por metro cúbico.

32. Un sólido tiene la forma de un cilindro circular recto cuyo radio de la base mide r metros y cuya altura mide h metros. Calcule la masa del sólido si la densidad volumínica varía como la distancia a una de las bases. La densidad volumínica se mide en kilogramos por metro cúbico.

13.6 INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

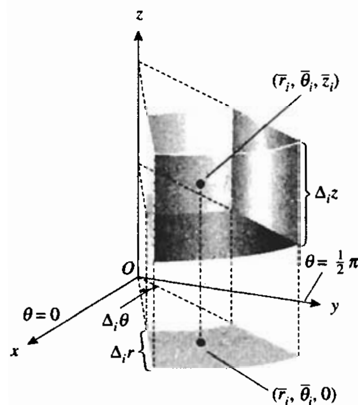


FIGURA 1

Si una región S de R^3 tiene un eje de simetría, las integrales triples en S son más fáciles de evaluar si se emplean coordenadas cilíndricas. Si la región es simétrica con respecto a un punto, entonces conviene elegir el punto como origen y emplear coordenadas esféricas. En esta sección se discutirán las integrales triples en estos sistemas coordenados y se aplicarán a problemas físicos.

A fin de definir la integral triple en coordenadas cilíndricas se construye una partición de la región S dibujando planos que contengan al eje z, planos perpendiculares al eje z y cilindros circulares rectos que tengan al eje z como eje. La figura 1 muestra una subregión típica. Los elementos de la partición construida se encuentran completamente en S. A esta partición se le denomina **partición cilíndrica.** La medida de la longitud de la "diagonal" más grande de todas las subregiones es la **norma** de la partición. Sea n el número de subregiones de la partición y sean $\Delta_i V$ unidades cúbicas el volumen de la i-ésima subregión. El área de la base de la i-ésima subregión es $\bar{r}_i\ \Delta_i r\ \Delta_i \theta$ unidades cuadradas, donde $\bar{r}_i = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})$ como se mostró en la sección 13.4. En consecuencia, si $\Delta_i z$ unidades es la altura de la i-ésima subregión, entonces

$$\Delta_i V = \bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta\, \Delta_i z$$

Sea f una función de r, θ y z, y suponga que f es continua en S. Elija un punto $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)$ en la i-ésima subregión tal que $\theta_{i-1} \leq \bar{\theta}_i \leq \theta_i$, y $z_{i-1} \leq \bar{z}_i \leq z_i$. Forme la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)\, \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)\bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta\, \Delta_i z \tag{1}$$

Si la norma de Δ tiende a cero, se puede demostrar, con ciertas condiciones sobre S, que el límite de esta suma existe. Este límite se denomina **integral triple en coordenadas cilíndricas** de la función f en S, y se escribe

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)\, \Delta_i V = \iiint_S f(r, \theta, z)\, dV$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)\bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta\, \Delta_i z = \iiint_R f(r, \theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz$$

Observe que en coordenadas cilíndricas, $dV = r\, dr\, d\theta\, dz$. De modo que puede evaluarse una integral triple por medio de una integral iterada. Por ejemplo, suponga que la región S de R^3 está limitada por los planos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, con $\alpha < \beta$, por los cilindros $r = \lambda_1(\theta)$ y $r = \lambda_2(\theta)$, donde λ_1 y λ_2 son lisas en $[\alpha, \beta]$ y $\lambda_1(\theta) \leq \lambda_2(\theta)$ para $\alpha \leq \theta \leq \beta$, y por las superficies $z = F_1(r, \theta)$ y $z = F_2(r, \theta)$, donde F_1 y F_2 son dos funciones de dos variables y que son lisas en alguna región R del plano polar limitada por las curvas $r = \lambda_1(\theta)$, $r = \lambda_2(\theta)$, $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. También suponga que $F_1(r, \theta) \leq F_2(r, \theta)$ para todo punto (r, θ) de R. Entonces la integral triple puede evaluarse como una integral iterada por medio de la fórmula

$$\iiint_S f(r, \theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\lambda_1(\theta)}^{\lambda_2(\theta)} \int_{F_1(r,\theta)}^{F_2(r,\theta)} f(r, \theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

Existen otras cinco integrales iteradas que pueden emplearse para evaluar la integral triple ya que se tienen seis permutaciones posibles de las tres variables r, θ y z.

Las integrales triples y las coordenadas cilíndricas son útiles especialmente cuando se calcula el momento de inercia de un sólido con respecto al eje z debido a que la distancia desde el eje z a un punto del sólido está determinada por la coordenada r.

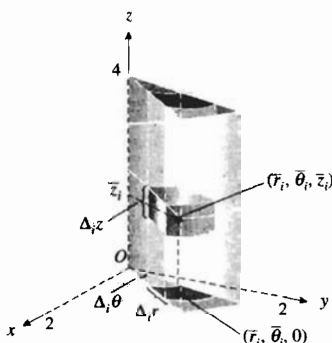


FIGURA 2

EJEMPLO 1 Un sólido homogéneo tiene la forma de un cilindro circular recto cuyo radio de la base mide 2 m y cuya altura es de 4 m. Calcule el momento de inercia del sólido con respecto a su eje.

Solución Elija los planos coordenados de modo que el plano xy coincida con la base del sólido y el eje z sea el eje del sólido. La figura 2 muestra la porción del sólido en el primer octante junto con la i-ésima subregión de una partición cilíndrica. Al emplear coordenadas cilíndricas y tomar el punto $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)$ de la i-ésima subregión con k kilogramos por metro cúbico como la densidad volumínica en cualquier punto, y si I_z kilogramos-metro cuadrado es el momento de inercia del sólido con respecto al eje z, entonces

$$
\begin{aligned}
I_z &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i^{\,2}\, k\, \Delta_i V \\
&= \iiint_S k r^2 \, dV
\end{aligned}
$$

Se tiene seis órdenes posibles de integración. En la figura 2 se muestra el orden $dz\, dr\, d\theta$. Al emplear este orden se obtiene

$$
\begin{aligned}
I_z &= \iiint_S k r^2 \, r \, dz\, dr\, d\theta \\
&= 4k \int_{\alpha}^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^4 r^3 \, dz\, dr\, d\theta
\end{aligned}
$$

En la primera integración se suman los bloques desde $z = 0$ hasta $z = 4$; por lo que los bloques se transforman en una columna mostrada en la figura. En la segunda integración se suman las columnas desde $r = 0$ hasta $r = 2$; de modo que las columnas se transforman en una rebanada del cilindro en forma de cuña, también mostrada en la figura. En la tercera integración se gira la cuña desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{1}{2}\pi$; esto hace que la cuña se desplace por toda la región tridimensional del primer octante. Después se multiplica por 4 para obtener el volumen completo. Al realizar la integración se obtiene

$$
\begin{aligned}
I_z &= 16k \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^3 \, dr\, d\theta \\
&= 64k \int_0^{\pi/2} d\theta \\
&= 32k\pi
\end{aligned}
$$

<u>**Conclusión:**</u> El momento de inercia es $32k\pi$ kg-m^2. ◀

EJEMPLO 2 Resuelva el ejemplo 1 tomando el orden de integración indicado: **(a)** $dr\, dz\, d\theta$; **(b)** $d\theta\, dr\, dz$.

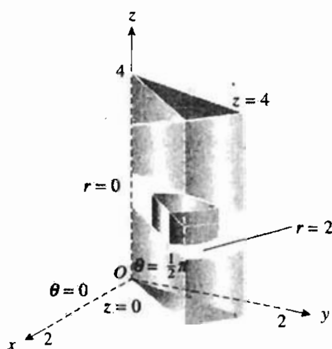


FIGURA 3

Solución

(a) En la figura 3 se ilustra el orden $dr\,dz\,d\theta$. En ella se muestran los bloques sumados desde $r = 0$ hasta $r = 2$ para obtener un sector en forma de cuña. Después se suman desde $z = 0$ hasta $z = 4$, lo que produce una rebanada en forma de cuña también mostrada en la figura. Luego, se gira la cuña desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{1}{2}\pi$ a fin de cubrir el primer octante. Entonces

$$\begin{aligned} I_z &= 4k \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \int_0^2 r^3\, dr\, dz\, d\theta \\ &= 32k\pi \end{aligned}$$

(b) La figura 4 muestra el orden $d\theta\, dr\, dz$. En ella se presentan los bloques sumados desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{1}{2}\pi$ para obtener un anillo dentro del cilindro. Después se suman estos anillos desde $r = 0$ hasta $r = 2$, lo que produce una rebanada horizontal del cilindro. Luego se suman las rebanadas horizontales desde $z = 0$ hasta $z = 4$. Por tanto,

$$\begin{aligned} I_z &= 4k \int_0^4 \int_0^2 \int_0^{\pi/2} r^3\, d\theta\, dr\, dz \\ &= 32k\pi \end{aligned}$$

◀

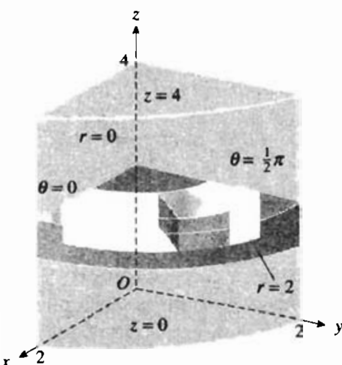


FIGURA 4

▶ ***EJEMPLO 3*** Calcule la masa de una semiesfera sólida de radio a metros si la densidad volumínica en cualquier punto del sólido es proporcional a la distancia del punto al eje x, y se mide en kilogramos por metro cúbico.

Solución Si se eligen los planos coordenados de modo que el origen sea el centro de la esfera y el eje z sea el eje del sólido, entonces una ecuación de la superficie semiesférica ubicada por arriba del plano xy es $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. La figura 5 muestra esta superficie y el sólido junto con la i-ésima subregión de una partición cilíndrica. Una ecuación de la semiesfera en coordenadas cilíndricas es $z = \sqrt{a^2 - r^2}$. Si $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)$ es un punto de la i-ésima subregión, entonces la densidad volumínica en este punto es $k\bar{r}_i$ kilogramos por metro cúbico, donde k es una constante; y si M kilogramos es la masa del sólido, entonces

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\bar{r}_i\, \Delta_i V \\ &= \iiint_S kr\, dV \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r^2\, dz\, dr\, d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \sqrt{a^2 - r^2}\, dr\, d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \left[-\tfrac{1}{4} r(a^2 - r^2)^{3/2} + \tfrac{1}{8} a^2 r \sqrt{a^2 - r^2} + \tfrac{1}{8} a^4 \operatorname{sen}^{-1} \frac{r}{a} \right]_0^a d\theta \\ &= \tfrac{1}{16} k a^4 \pi \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \tfrac{1}{8} k a^4 \pi^2 \end{aligned}$$

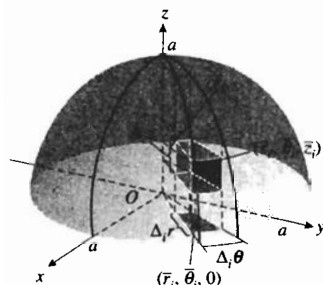


FIGURA 5

<u>Conclusión:</u> La masa de la semiesfera sólida es $\frac{1}{8} k a^4 \pi^2$ kilogramos. ◀

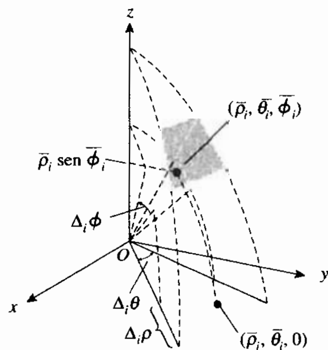


FIGURA 6

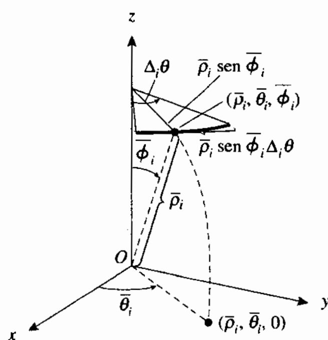


FIGURA 7

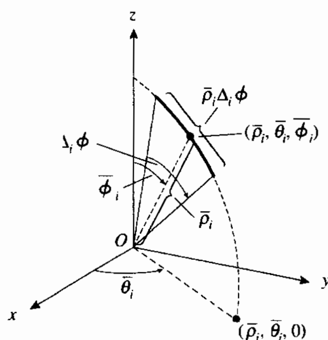


FIGURA 8

EJEMPLO 4 Determine el centro de masa del sólido del ejemplo 3.

Solución Sea $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ una representación en coordenadas cartesianas del centro de masa. Debido a la simetría, $\bar{x} = 0$ y $\bar{y} = 0$, por lo que se necesita calcular $\bar{z}$. Si M_{xy} kg-m es el momento de masa del sólido con respecto al plano xy, entonces

$$
\begin{aligned}
M_{xy} &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i (k\bar{r}_i)\, \Delta_i V \\
&= \iiint_S kzr\, dV \\
&= k\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} zr^2\, dz\, dr\, d\theta \\
&= \tfrac{1}{2}k\int_0^{2\pi}\int_0^{a} (a^2 - r^2)r^2\, dr\, d\theta \\
&= \tfrac{1}{15}ka^5 \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \tfrac{2}{15}ka^5\, \pi
\end{aligned}
$$

Como $M\bar{z} = M_{xy}$, se obtiene $\bar{z} = M_{xy}/M$;de modo que

$$
\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{\frac{2}{15}\, ka^5\pi}{\frac{1}{8}\, ka^4\pi^2} \\
&= \frac{16}{15\pi}a
\end{aligned}
$$

<u>**Conclusión:**</u> El centro de masa se encuentra sobre el eje del sólido a una distancia de $16a/15\pi$ metros sobre el plano de la base. ◀

Ahora se procederá a definir la integral triple en coordenadas esféricas. Una **partición esférica** de la región tridimensional S se forma al trazar planos que contengan al eje z, esferas con centro en el origen, y conos circulares que tengan su vértice en el origen y el eje z como su eje. La figura 6 muestra una subregión típica de la partición. Si $\Delta_i V$ unidades cúbicas es el volumen de la i-ésima subregión, y $(\bar\rho_i, \bar\theta_i, \bar\phi_i)$ es un punto en ella, puede obtenerse una aproximación de $\Delta_i V$ al considerar la región como si fuese un paralelepípedo rectangular y tomando el producto de las medidas de las tres dimensiones. Estas medidas son $\bar\rho_i$ sen $\bar\phi_i\, \Delta_i\theta$, $\bar\rho_i\, \Delta_i\phi$, y $\Delta_i\rho$. Las figuras 7 y 8 ilustran cómo se obtienen las dos primeras medidas, mientras que la figura 6 muestra la dimensión de la medida $\Delta_i\rho$. En consecuencia,

$$\Delta_i V = \bar\rho_i^{\,2} \operatorname{sen} \bar\phi_i\, \Delta_i\rho\, \Delta_i\theta\, \Delta_i\phi$$

La **integral triple en coordenadas esféricas** de una función f en S está definida por

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar\rho_i, \bar\theta_i, \bar\phi_i)\, \Delta_i V = \iiint_S f(\rho, \theta, \phi)\, dV$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar\rho_i, \bar\theta_i, \bar\phi_i)\bar\rho_i^{\,2} \operatorname{sen} \bar\phi_i\, \Delta_i\rho\, \Delta_i\theta\, \Delta_i\phi$$

$$= \iiint_S f(\rho, \theta, \phi)\rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

La integral triple puede evaluarse mediante una integral iterada. Observe que en coordenadas esféricas, $dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$.

Las coordenadas esféricas son especialmente útiles en algunos problemas que involucran esferas, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 Calcule la masa de la semiesfera sólida del ejemplo 3 si la densidad volumínica en cualquier punto del sólido es proporcional a la distancia del punto al centro de la base.

Solución Si $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ es un punto de la i-ésima subregión de una partición esférica, entonces la densidad volumínica en este punto es $k\bar{\rho}_i$ kilogramos por metro cúbico, donde k es una constante. Si M kilogramos es la masa del sólido, entonces

$$
\begin{aligned}
M &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\bar{\rho}_i \, \Delta_i V \\
&= \iiint_S k\rho \, dV \\
&= 4k \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^a \rho^3 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\
&= a^4 k \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \phi \, d\theta \, d\phi \\
&= \tfrac{1}{2} a^4 k\pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \phi \, d\phi \\
&= \tfrac{1}{2} a^4 k\pi \Big[-\cos \phi \Big]_0^{\pi/2} \\
&= \tfrac{1}{2} a^4 k\pi
\end{aligned}
$$

<u>**Conclusión:**</u> La masa de la semiesfera sólida es $\frac{1}{2} a^4 k\pi$ kilogramos. ◀

Resulta interesante comparar la solución del ejemplo 5, en la cual se utilizan coordenadas esféricas, con la que se obtuvo cuando se emplearon coordenadas cartesianas. En el último método se generó una partición de S cuando se dividió en cajas rectangulares al trazar planos paralelos a los planos coordenados. Si (u_i, v_i, w_i) es cualquier punto de la i-ésima subregión, y como $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, entonces

$$
\begin{aligned}
M &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k \sqrt{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2} \, \Delta_i V \\
&= \iiint_S k \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV \\
&= 4k \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz
\end{aligned}
$$

El cálculo implicado en la evaluación de esta integral es obviamente mucho más complicado que cuando se emplearon coordenadas esféricas.

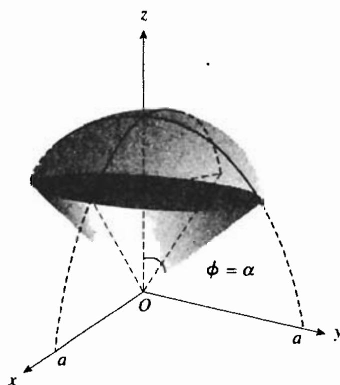


FIGURA 9

EJEMPLO 6 Un sólido homogéneo está limitado superiormente por la superficie $\rho = a$ e inferiormente por el cono $\phi = \alpha$, donde $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$. Calcule el momento de inercia del sólido con respecto al eje z. La densidad volumínica en cualquier punto del sólido es k kilogramos por metro cúbico.

Solución En la figura 9 se muestra el sólido. Considere una partición esférica y sea $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ un punto de la i-ésima subregión. La medida de la distancia del punto $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ al eje z es $\bar{\rho}_i$ sen $\bar{\phi}_i$. En consecuencia, si I_z kilogramos-metro cuadrado es el momento de inercia del sólido con respecto al eje z, entonces

$$
\begin{aligned}
I_z &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\bar{\rho}_i \operatorname{sen} \bar{\phi}_i)^2 k \, \Delta_i V \\
&= \iiint_S k\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \, dV \\
&= k \int_0^{\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^{a} (\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi)\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\
&= \tfrac{1}{5} k a^5 \int_0^{\alpha} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 \phi \, d\theta \, d\rho \\
&= \tfrac{2}{5} k a^5 \pi \int_0^{\alpha} \operatorname{sen}^3 \phi \, d\phi \\
&= \tfrac{2}{5} k a^5 \pi \Big[-\cos \phi + \tfrac{1}{3} \cos^3 \phi \Big]_0^{\alpha} \\
&= \tfrac{2}{15} k a^5 \pi (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 2)
\end{aligned}
$$

Conclusión: El momento de inercia del sólido con respecto al eje z es $\frac{2}{15} k a^5 \pi (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 2)$ kg-m^2. ◀

EJERCICIOS 13.6

En los ejercicios 1 a 6, evalúe la integral iterada.

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \int_0^{a} \int_0^{r \cos \theta} r \sec^3 \theta \, dz \, dr \, d\theta$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \int_{2 \operatorname{sen} \theta}^{2 \cos \theta} \int_0^{r \operatorname{sen} \theta} r^2 \cos \theta \, dz \, dr \, d\theta$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_2^{4} \int_0^{1} r e^z \, dz \, dr \, d\theta$

4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2} \rho^3 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \int_0^{2a \cos \phi} \int_0^{2\pi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\theta \, d\rho \, d\phi$

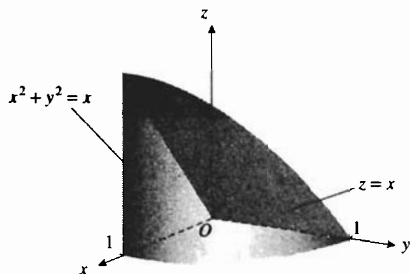
6. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{\pi/4}^{\phi} \int_0^{a \csc \theta} \rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

7. Calcule el volumen del sólido acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ empleando **(a)** coordenadas cilíndricas, y **(b)** coordenadas esféricas.

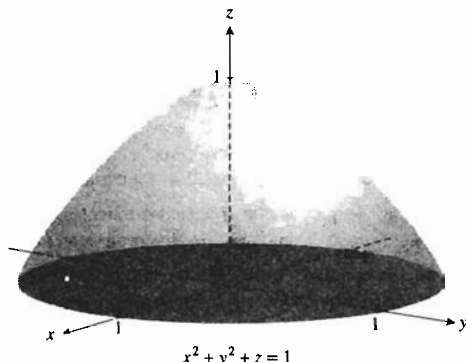
8. Si S es el sólido del primer octante limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y los planos coordenados, evalúe la integral triple $\iiint_S xyz \, dV$ mediante tres métodos: **(a)** utilizando coordenadas esféricas; **(b)** empleando coordenadas rectangulares; **(c)** usando coordenadas cilíndricas.

En los ejercicios 9 a 16, utilice coordenadas cilíndricas.

9. Calcule el volumen del sólido del primer octante acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $z = x$.



10. Determine el volumen del sólido limitado por el paraboloide $x^2 + y^2 + z = 1$ y el plano xy.



11. Obtenga el volumen del sólido acotado por el paraboloide $x^2 + y^2 + z = 12$ y el plano $z = 8$.

12. Calcule el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, el paraboloide $x^2 + y^2 = 2z$ y el plano xy.

13. Determine la masa del sólido acotado por una esfera de radio a metros si la densidad volumínica varía de acuerdo al cuadrado de la distancia desde el centro. La densidad volumínica se mide en kilogramos por metro cúbico.

14. Obtenga la masa del sólido del primer octante ubicado dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4x$ y que se encuentra debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. La densidad volumínica varía de acuerdo a la distancia desde el plano xy, y se mide en kilogramos por metro cúbico.

15. Calcule el momento de inercia con respecto al eje z del sólido homogéneo limitado por el cilindro $r = 5$, el cono $z = r$ y el plano xy. La densidad volumínica en cualquier punto es k slugs por pie cúbico.

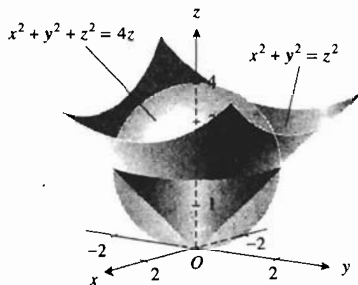
16. Determine el momento de inercia del sólido limitado por un cilindro circular recto de altura h metros y radio a metros, con respecto al eje del cilindro. La densidad volumínica varía de acuerdo la distancia al eje del cilindro, y se mide en kilogramos por metro cúbico.

17. Obtenga la masa del sólido del ejercicio 13 mediante el uso de coordenadas esféricas.

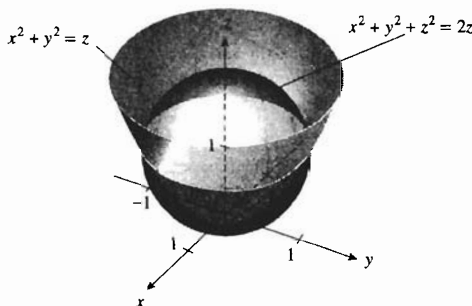
18. Utilice coordenadas esféricas para calcular el centro de masa del sólido limitado por la semiesfera del ejemplo 5. La densidad volumínica es la misma que en ese ejemplo.

En los ejercicios 19 a 22, emplee coordenadas esféricas.

19. Determine el volumen del sólido ubicado dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ y que se encuentra arriba del cono $x^2 + y^2 = z^2$.



20. Obtenga el volumen del sólido que se encuentra dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ y por arriba del paraboloide $x^2 + y^2 = z$.



21. Determine el momento de inercia con respecto al eje z del sólido homogéneo ubicado dentro del cilindro $x^2 + y^2 - 2x = 0$, debajo del cono $x^2 + y^2 = z^2$ y por arriba del plano xy. La densidad volumínica en cualquier punto del sólido es k kilogramos por metro cúbico.

22. Calcule el momento de inercia con respecto al eje z del sólido homogéneo limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. La densidad volumínica en cualquier punto del sólido es k slugs por pie cúbico.

En los ejercicios 23 a 28, utilice el sistema coordenado que crea más conveniente para el problema.

23. Obtenga la masa de la semiesfera sólida de radio 2 m si la densidad volumínica varía de acuerdo a la distancia desde el centro de la base y se mide en kilogramos por metro.

24. Determine la masa del sólido homogéneo que se encuentra dentro del paraboloide $3x^2 + 3y^2 = z$ y fuera del cono $x^2 + y^2 = z^2$ si la densidad volumínica constante es k kilogramos por metro cúbico.

25. Calcule el momento de inercia con respecto a un diámetro del sólido ubicado entre dos esferas de radios a pies y $2a$ pies. La densidad volumínica varía inversamente al cuadrado de la distancia desde el centro, y se mide en slugs por pie cúbico.

26. Obtenga la masa del sólido del ejercicio 25. La densidad volumínica es la misma de ese ejercicio.

27. Determine el centro de masa del sólido ubicado dentro del paraboloide $x^2 + y^2 = z$ y fuera del cono $x^2 + y^2 = z^2$. La densidad volumínica constante es k kilogramos por metro cúbico.

28. Calcule el momento de inercia con respecto al eje z del sólido homogéneo del ejercicio 27.

En los ejercicios 29 a 32, evalúe la integral iterada empleando coordenadas cilíndricas o coordenadas esféricas.

29. $\displaystyle\int_0^4 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx\, dz$

30. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dz\, dy\, dx$

31. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2+y^2}} z^2\, dz\, dx\, dy$

32. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\, dz\, dy\, dx$

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 13

▶ SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 13

1. Defina las *coordenadas cilíndricas* de un punto del espacio tridimensional.

2. Escriba las ecuaciones que expresan las coordenadas cartesianas en términos de las coordenadas cilíndricas. Escriba las ecuaciones que expresan las coordenadas cilíndricas en términos de las coordenadas cartesianas. Haga un dibujo que muestre cómo se obtienen estas ecuaciones.

3. Si la representación en coordenadas cilíndricas de un punto es (r, θ, z), describa cada una de las siguientes superficies donde c es una constante: **(a)** $r = c$; **(b)** $\theta = c$; **(c)** $z = c$.

4. Defina las *coordenadas esféricas* de un punto del espacio tridimensional.

5. Escriba las ecuaciones que expresan las coordenadas cartesianas en términos de las coordenadas esféricas. Escriba las ecuaciones que expresan las coordenadas esféricas en términos de las coordenadas cartesianas. Haga un dibujo que muestre cómo se obtienen estas ecuaciones.

6. Si la representación en coordenadas esféricas de un punto es (ρ, θ, ϕ), describa cada una de las siguientes superficies donde c es una constante: **(a)** $\rho = c$; **(b)** $\theta = c$; **(c)** $\phi = c$.

7. Defina el *límite de una suma de Riemann* de una función de dos variables.

8. Defina la *integral doble* de una función de dos variables en una *región rectangular cerrada* del plano.

9. ¿Cómo puede extenderse la definición de la sugerencia 8 a la de integral doble de una función sobre una región del plano más general?

10. Dé una interpretación geométrica de la integral doble.

11. Invente un ejemplo que ilustre cómo se calcula el volumen de un sólido mediante una integral doble.

12. ¿Cómo se utilizan las *integrales iteradas* para evaluar una integral doble? Invente un ejemplo.

13. Invente un ejemplo que muestre cómo se determina el *área de una región plana* por medio de una integral doble.

14. Invente un ejemplo que ilustre cómo se calculan la *masa* y el *centro de masa* de una lámina mediante una integral doble.

15. Invente un ejemplo que muestre cómo puede calcularse el *momento de inercia* con respecto a un eje por medio de una integral doble.

16. Invente un ejemplo que ilustre cómo se obtiene el *momento polar de inercia* mediante una integral doble.

17. Invente un ejemplo que muestre cómo se determina el *radio de giro* de una lámina con respecto a un eje por medio de una integral doble.

18. Invente un ejemplo que ilustre cómo se calcula el *área de una superficie* mediante una integral doble.

19. Escriba la fórmula, que involucra una integral simple, para calcular *el área de una superficie de revolución.* Invente un ejemplo que muestre la aplicación de esta fórmula.

20. Invente un ejemplo que ilustre cómo se utiliza una *integral doble en coordenadas polares* para calcular el volumen de un sólido.

21. Invente un ejemplo que muestre cómo se pueden emplear las integrales dobles en coordenadas polares para calcular la masa y el centro de masa de una lámina.

22. Invente un ejemplo que ilustre cómo se puede calcular el área de una región del plano polar mediante integración doble.

23. ¿Cómo puede cambiarse una integral doble en coordenadas rectangulares a una integral doble en coordenadas polares? Invente un ejemplo que muestre un caso en el que un cambio de coordenadas sea conveniente.

24. Defina la *integral triple* de una función de tres variables en un *paralelepípedo rectangular*.

25. ¿Cómo se utilizan las integrales iteradas para calcular integrales triples? Invente un ejemplo.

26. Invente un ejemplo que ilustre cómo se puede calcular el volumen de un sólido por medio de integración triple.

27. Defina una *integral triple en coordenadas cilíndricas* y una *integral triple en coordenadas esféricas.*

28. ¿Cuándo es ventajoso emplear una integral triple en coordenadas cilíndricas en lugar de una integral triple en coordenadas rectangulares? Invente un ejemplo.

29. ¿Cuándo es ventajoso emplear una integral triple en coordenadas esféricas en lugar de una integral triple en coordenadas rectangulares? Invente un ejemplo.

▶ EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 13

1. Determine un conjunto de coordenadas cilíndricas para el punto que tiene coordenadas cartesianas $(3, \pi, \frac{1}{3}\pi)$.

2. Obtenga un conjunto de coordenadas esféricas para el punto que tiene coordenadas cartesianas $(-3, \sqrt{3}, 2)$.

3. Determine una ecuación en coordenadas cilíndricas de la gráfica de la ecuación: **(a)** $(x + y)^2 + 1 = z$; **(b)** $25x^2 + 4y^2 = 100$.

4. Obtenga una ecuación en coordenadas esféricas de la gráfica de la ecuación: **(a)** $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$; **(b)** $4x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 36$.

En los ejercicios 5 a 12, evalúe la integral iterada.

5. $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} x^2 y\, dy\, dx$

6. $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_{\sqrt{-4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} xy\, dx\, dy$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} r \cos^2 \theta\, dr\, d\theta$

8. $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{3(1+\cos \theta)} r^2 \operatorname{sen} \theta\, dr\, d\theta$

9. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^z \int_0^{y+z} e^x e^y e^z\, dx\, dy\, dz$

10. $\displaystyle\int_1^2 \int_3^x \int_0^{\sqrt{3}y} \frac{y}{y^2 + z^2}\, dz\, dy\, dx$

11. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^2 \rho^3 \operatorname{sen} \phi \cos \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

12. $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} zre^{-r^2}\, dr\, d\theta\, dz$

En los ejercicios 13 a 16, evalúe la integral múltiple.

13. $\displaystyle\iint_R xy\, dA$; R es la región del primer cuadrante limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y los ejes coordenados.

14. $\displaystyle\iint_R (x + y)\, dA$; R es la región delimitada por la curva $y = \cos x$ y el eje x desde $x = -\frac{1}{2}\pi$ hasta $x = \frac{1}{2}\pi$.

15. $\displaystyle\iiint_S z^2\, dV$; S es la región limitada por los cilindros $x^2 + z = 1$ y $y^2 + z = 1$ y el plano xy.

16. $\displaystyle\iiint_S y \cos (x + z)\, dV$; S es la región acotada por el cilindro $x = y^2$ y los planos $x + z = \frac{1}{2}\pi$, $y = 0$ y $z = 0$.

17. Evalúe mediante coordenadas polares la integral doble

$$\iint_R \frac{1}{x^2 + y^2}\, dA$$

donde R es la región del primer cuadrante limitada por las dos circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

18. Evalúe mediante coordenadas polares la integral iterada

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{4-y^2}} \ln(x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

En los ejercicios 19 y 20, evalúe la integral iterada invirtiendo el orden de integración.

19. $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen} y^2\, dy\, dx$

20. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1} y} e^{\operatorname{sen} x}\, dx\, dy$

En los ejercicios 21 y 22, utilice integrales dobles para clacular el área de la región limitada por las curvas del plano xy. Dibuje la región.

21. $y = x^2$ y $y = x^4$

22. $y = \sqrt{x}$ y $y = x^3$

En los ejercicios 23 y 24, evalúe la integral iterada cambiando a coordenadas cilíndricas o esféricas.

23. $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^2 \sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

24. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dz\, dy\, dx$

25. Utilice integración doble para determinar el área de la región del primer cuadrante limitada por las parábolas $x^2 = 4y$ y $x^2 = 8 - 4y$. Integre primero con respecto a x.

26. Emplee integración doble para calcular el área de la región del plano xy acotada por las parábolas $y = 9 - x^2$ y $y = x^2 + 1$. Integre primero con respecto a x.

27. Use integración doble a fin de obtener el área de la región del ejercicio 25 integrando primero con respecto a y.

28. Utilice integración doble para determinar el área de la región del ejercicio 26 integrando primero con respecto a y.

29. Emplee integración doble con el propósito de calcular el volumen del sólido limitado por los planos $x = y$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$ y $z = 1$. Integre primero con respecto a x.

30. Use integración doble para obtener el volumen del sólido ubicado por arriba del plano xy y limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y el plano $z = 2y$. Integre primero con respecto a x.

31. Utilice integración doble a fin de determinar el volumen del ejercicio 29 integrando primero con respecto a y.

32. Emplee integración doble para calcular el volumen del sólido del ejercicio 30 integrando primero con respecto a y.

33. Obtenga el volumen del sólido ubicado por arriba del plano xy y limitado por las superficies $x^2 = 4y$, $y^2 = 4x$ y $x^2 = z - y$.

34. Determine la masa de la lámina que tiene la forma de la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $x - y + 2 = 0$, si la densidad superficial en cualquier punto es x^2y^2 kilogramos por metro cuadrado.

35. Calcule el área de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ ubicada en el primer octante y que se encuentra entre los planos $x = z$ y $3x = z$.

36. Obtenga el área de la parte de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ que está dentro del cilindro $y^2 + z^2 = a^2$.

37. Utilice integración doble con el objeto de determinar el área de la región ubicada dentro de la circunferencia $r = 1$ y a la derecha de la parábola $r(1 + \cos\theta) = 1$.

38. Calcule la masa de la lámina que tiene la forma de la región exterior al caracol $r = 3 - \cos\theta$ y que está en el interior de la circunferencia $r = 5\cos\theta$ si la densidad superficial en cualquier punto es $2\,|\operatorname{sen}\theta|$ kilogramos por metro cuadrado.

39. Obtenga el centro de masa de la lámina rectangular limitada por las rectas $x = 3$ y $y = 2$ y los ejes coordenados si la densidad superficial en cualquier punto es xy^2 kilogramos por metro cuadrado.

40. Determine el centro de masa de la lámina que tiene la forma de la región acotada por las parábolas $x^2 = 4 + 4y$ y $x^2 = 4 - 8y$ si la densidad superficial en cualquier punto es kx^2 kilogramos por metro cuadrado.

41. Calcule la masa de la lámina que tiene la forma de la región limitada por el eje polar y la curva $r = \cos 2\theta$, donde $0 \le \theta \le \frac{1}{4}\pi$. La densidad superficial en cualquier punto es $r\theta$ kilogramos por metro cuadrado.

42. Obtenga el momento de inercia con respecto al eje x de la lámina que tiene la forma de la región acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ si la densidad superficial en cualquier punto es $k\sqrt{x^2 + y^2}$ kilogramos por metro cuadrado.

43. Utilice coordenadas cilíndricas a fin de determinar el volumen del sólido limitado por el paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$, el cilindro $x^2 + y^2 = 4ay$ y el plano $z = 0$.

44. Use coordenadas esféricas con el objeto de calcular la masa de la esfera sólida de radio a metros si la densidad volumínica en cualquier punto del sólido es proporcional a la distancia del punto al centro de la esfera. La densidad volumínica se mide en kilogramos por metro cúbico.

45. Emplee integración triple para obtener el volumen del sólido acotado por el plano $z = 1$ y el segmento más pequeño de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ cortado por este plano.

46. Utilice integración triple a fin de determinar el volumen del sólido del primer octante limitado por el plano $y + z = 8$, el cilindro $y = 2x^2$, el plano xy y el plano yz.

47. Calcule el momento de inercia con respecto al eje x de la lámina que tiene la forma de la región acotada por la curva $y = e^x$, la recta $x = 2$ y los ejes coordenados si la densidad superficial en cualquier punto es xy kilogramos por metro cuadrado.

48. Obtenga el momento de inercia de la lámina del ejercicio 47.

49. Determine el momento de inercia con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$ de la lámina homogénea que tiene la forma de la región acotada por la curva $r^2 = 4\cos 2\theta$ si la densidad superficial en cualquier punto es de k kilogramos por metro cuadrado.

50. Calcule la masa de la lámina del ejercicio 49.

51. Obtenga el momento polar de inercia y el radio de giro correspondiente de la lámina del ejercicio 49.

52. Determine el momento de inercia con respecto al eje y de la lámina que tiene la forma de la región limitada por la parábola $y = x - x^2$ y la recta $x + y = 0$, si la densidad superficial en cualquier punto es $(x + y)$ kilogramos por metro cuadrado.

53. Calcule la masa del sólido acotado por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ si la densidad volumínica en cualquier punto es $k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ kilogramos por metro cúbico.

54. Obtenga el momento de inercia con respecto al eje z del sólido del ejercicio 53.

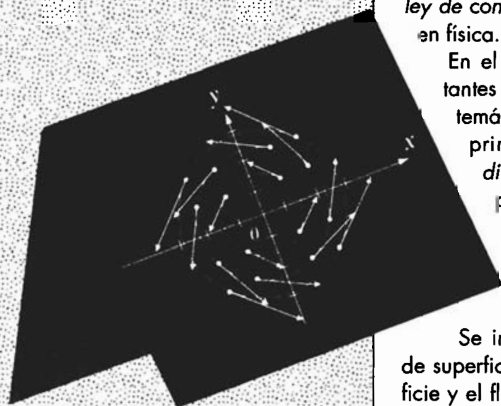
55. El sólido homogéneo limitado por el cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ y ubicado entre los planos $z = 0$ y $z = 4$ tiene una densidad volumínica de k kilogramos por metro cúbico en cualquier punto. Determine el momento de inercia con respecto al eje z para este sólido.

56. Calcule el centro de masa del sólido acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$ y que se encuentra por arriba del cono $x^2 + y^2 = z^2$, si la densidad volumínica en cualquier punto del sólido es kz kilogramos por metro cúbico.

Capítulo 14

Introducción al cálculo de campos vectoriales

VISIÓN PRELIMINAR



Este capítulo final sirve como introducción a los conceptos elementales de campos vectoriales, mismos que se desarrollan completamente en los cursos de Cálculo avanzado. De igual forma que en el capítulo 13, el estudio de varios de estos conceptos y de algunos métodos es informal e intuitivo.

Los *campos vectoriales*, (funciones que asocian vectores con puntos del espacio), la *divergencia* y el *rotacional* de un vector se presentan en la sección 14.1. Después, en la sección 14.2, se aplican las *integrales de línea* para calcular el trabajo realizado por un campo de fuerza al mover una partícula a lo largo de una curva. Las *integrales de línea independientes de la trayectoria* se estudian en la sección14.3, donde se presenta un teorema análogo al segundo teorema fundamental del Cálculo para integrales de línea. También en esta sección se demuestra la *ley de conservación de energía*, concepto muy importante en física.

En el Cálculo vectorial existen tres teoremas importantes que reciben sus nombres en honor de tres matemáticos: el *teorema de Green*, el cual es el tema principal de la sección 14.4; el *teorema de la divergencia de Gauss* y *el teorema de Stokes* se presentan en la sección final, después de la sección 14.5 que trata sobre *integrales de superficie*. Las aplicaciones de estos tres teoremas en física, química e ingeniería se estudian en los cursos de estas disciplinas.

Se incluyen algunas aplicaciones de las integrales de superficie en las que se calcula la masa de una superficie y el flujo de un campo de velocidad a través de una superficie.

14.1 CAMPOS VECTORIALES

A fin de preparar el terreno para el estudio de *campos vectoriales*, se mostrará cómo se determina si una función vectorial particular es el gradiente de alguna función real f, y si lo es, de qué forma determinar tal función. Primero considere el problema de cómo obtener f si se conoce su gradiente. Esto es, se tiene

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \tag{1}$$

y se desea determinar $f(x, y)$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Suponga que

$$\nabla f(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j} \tag{2}$$

Como la ecuación (1) debe satisfacerse, entonces se infiere que

$$f_x(x, y) = y^2 + 2x + 4 \tag{3}$$
$$f_y(x, y) = 2xy + 4y - 5 \tag{4}$$

Al integrar ambos miembros de (3) con respecto a x se tiene

$$f(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + g(y) \tag{5}$$

Observe que la "constante" de integración es una función de y e independiente de x debido a que se integró con respecto a x. Si ahora se derivan parcialmente los dos miembros de (5) con respecto a y, se obtiene

$$f_y(x, y) = 2xy + g'(y) \tag{6}$$

Las ecuaciones (4) y (6) son dos expresiones para $f_y(x, y)$. En consecuencia,

$$2xy + 4y - 5 = 2xy + g'(y)$$

Por tanto,

$$g'(y) = 4y - 5 \quad \text{y} \quad g(y) = 2y^2 - 5y + K$$

Al sustituir este valor de $g(y)$ en (5) resulta

$$f(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y + K$$

donde K es una constante arbitraria. ◀

Cada vector de la forma $M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ no necesariamente es un gradiente, como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Se demostrará que no existe una función f tal que

$$\nabla f(x, y) = 3y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} \tag{7}$$

Suponga que existe tal función. Entonces se deduce que

$$f_x(x, y) = 3y \tag{8}$$

y

$$f_y(x, y) = -2x \tag{9}$$

Si se integran los miembros de (8) con respecto a x se tiene

$$f(x, y) = 3xy + g(y)$$

Al derivar parcialmente los dos miembros de esta ecuación con respecto a y se obtiene

$$f_y(x, y) = 3x + g'(y)$$

Si se igualan los miembros derechos de esta ecuación y de (9) resulta

$$3x + g'(y) = -2x$$
$$g'(y) = -5x$$

Al diferenciar los dos miembros de esta ecuación con respecto a x se obtiene

$$0 = -5$$

lo cual, por supuesto, no es verdad. Así, la suposición de que $3y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}$ es un gradiente conduce a una contradicción. ◀

A continuación se estudiará una condición que debe satisfacer un vector para que sea un gradiente.

Suponga que M_y y N_x son continuas en un disco abierto B de R^2. Si

$$M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} \tag{10}$$

es un gradiente en B, entonces existe una función f tal que

$$f_x(x, y) = M(x, y) \tag{11}$$

$$f_y(x, y) = N(x, y) \tag{12}$$

para todo (x, y) de B. Como $M_y(x, y)$ existe en B, entonces, de (11),

$$M_y(x, y) = f_{xy}(x, y) \tag{13}$$

Además, como $N_x(x, y)$ existe en B, entonces, de (12),

$$N_x(x, y) = f_{yx}(x, y) \tag{14}$$

Debido a que M_y y N_x son continuas en B, sus equivalentes f_{xy} y f_{yx} también son continuas en B. Así, por el teorema 12.3.3, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ en todos los puntos de B. Por tanto, los miembros izquierdos de (13) y (14) son iguales en todos los puntos de B. De este modo se ha demostrado que si M_y y N_x son continuas en un disco abierto B de R^2, entonces una condición necesaria para que el vector (10) sea un gradiente en B es que

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \tag{15}$$

Esta ecuación también es una condición suficiente para que el vector (10) sea un gradiente en B. Si (15) se cumple, entonces se puede mostrar cómo obtener una función f tal que el vector (10) sea un gradiente. Sin embargo, la demostración de que dicha función existe, siempre que (15) se cumpla, pertenece a un curso de Cálculo avanzado. El método para determinar f es una generalización de lo que se hizo en el ejemplo ilustrativo 1. De esta forma, se tiene el teorema siguiente.

14.1.1 Teorema

Suponga que M y N son funciones de las variables x y y definidas en un disco abierto $B((x_0, y_0); r)$ de R^2, y que M_y y N_x son continuas en B. Entonces el vector

$$M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

es un gradiente en B si y sólo si

$$M_y(x, y) = N_x(x, y).$$

en todos los puntos de B.



EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

(a) Se aplicará el teorema 14.1.1 al vector del miembro derecho de (2) del ejemplo ilustrativo 1. Sean

$$M(x, y) = y^2 + 2x + 4 \qquad N(x, y) = 2xy + 4y - 5$$
$$M_y(x, y) = 2y \qquad N_x(x, y) = 2y$$

De modo que $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, y por tanto, el vector es un gradiente.

(b) Si se aplica el teorema 14.1.1 al vector del miembro derecho de la ecuación (7) del ejemplo ilustrativo 2, con $M(x, y) = 3y$ y $N(x, y) = -2x$, entonces se tiene

$$M_y(x, y) = 3 \qquad N_x(x, y) = -2$$

En consecuencia, $M_y(x, y) \neq N_x(x, y)$; de modo que el vector no es un gradiente. ◀



EJEMPLO 1

Determine si el vector

$$(e^{-y} - 2x)\mathbf{i} - (xe^{-y} + \operatorname{sen} y)\mathbf{j}$$

es un gradiente $\nabla f(x, y)$, y si lo es, entonces obtenga $f(x, y)$.

Solución Se aplicará el teorema 14.1.1. Sean

$$M(x, y) = e^{-y} - 2x \qquad N(x, y) = -xe^{-y} - \operatorname{sen} y$$
$$M_y(x, y) = -e^{-y} \qquad N_x(x, y) = -e^{-y}$$

Por tanto $M_y(x, y) = N_x(x, y)$; de modo que el vector dado es un gradiente $\nabla f(x, y)$. Además,

$$f_x(x, y) = e^{-y} - 2x \tag{16}$$
$$f_y(x, y) = -xe^{-y} - \operatorname{sen} y \tag{17}$$

Al integrar ambos miembros de (16) con respecto a x se tiene

$$f(x, y) = xe^{-y} - x^2 + g(y) \tag{18}$$

donde $g(y)$ es independiente de x. Si ahora se derivan parcialmente los dos miembros de (18) con respecto a y se obtiene

$$f_y(x, y) = -xe^{-y} + g'(y)$$

Después de igualar los miembros derechos de esta ecuación y de (17) resulta

$$
\begin{aligned}
-xe^{-y} + g'(y) &= -xe^{-y} - \operatorname{sen} y \\
g'(y) &= -\operatorname{sen} y \\
g(y) &= \cos y + K
\end{aligned}
$$

Si se sustituye esta expresión para $g(y)$ en (18) se tiene

$$f(x, y) = xe^{-y} - x^2 + \cos y + K$$ ◀

El teorema siguiente es una extensión del teorema 14.1.1 para funciones de tres variables.

14.1.2 Teorema

Sean M, N y R funciones de tres variables x, y y z definidas en la bola abierta $B((x_0, y_0, z_0); r)$ de R^3, y suponga que M_y, M_z, N_x, N_z, R_x y R_y son continuas en B. Entonces el vector $M(x, y, z)\mathbf{i} + N((x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ es un gradiente en B si y sólo si $M_y(x, y, z) = N_x(x, y, z)$, $M_z(x, y, z) = R_x(x, y, z)$ y $N_z(x, y, z) = R_y(x, y, z)$.

La demostración de la parte "sólo si" es semejante a la demostración de la parte "sólo si" del teorema 14.1.1 y se deja como ejercicio (consulte el ejercicio 49). La demostración de la parte "si" se omite debido a que está más allá del alcance de este libro.

▶ ***EJEMPLO 2*** Determine si el vector siguiente es un gradiente $\nabla f(x, y, z)$, y si lo es, entonces obtenga $f(x, y, z)$:

$$(e^x \operatorname{sen} z + 2yz)\mathbf{i} + (2xz + 2y)\mathbf{j} + (e^x \cos z + 2xy + 3z^2)\mathbf{k}$$

Solución Se aplicará el teorema 14.1.2. Sean

$$
\begin{array}{lll}
M(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} z + 2yz & N(x, y, z) = 2xz + 2y & R(x, y, z) = e^x \cos z + 2xy + 3z^2 \\
M_y(x, y, z) = 2z & N_x(x, y, z) = 2z & R_x(x, y, z) = e^x \cos z + 2y \\
M_z(x, y, z) = e^x \cos z + 2y & N_z(x, y, z) = 2x & R_y(x, y, z) = 2x
\end{array}
$$

Por tanto,

$$M_y(x, y, z) = N_x(x, y, z) \qquad M_z(x, y, z) = R_x(x, y, z) \qquad N_z(x, y, z) = R_y(x, y, z)$$

Así, el vector dado es un gradiente $\nabla f(x, y, z)$. Además,

$$f_x(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} z + 2yz \qquad (19)$$

$$f_y(x, y, z) = 2xz + 2y \qquad (20)$$

$$f_z(x, y, z) = e^x \cos z + 2xy + 3z^2 \qquad (21)$$

Al integrar ambos miembros de (19) con respecto a x se tiene

$$f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} z + 2xyz + g(y, z) \qquad (22)$$

donde $g(y, z)$ es independiente de x. Si se derivan parcialmente los dos miembros de (22) con respecto a y se obtiene

$$f_y(x, y, z) = 2xz + g_y(y, z)$$

Después de igualar los miembros derechos de esta ecuación y de (20) resulta

$$2xz + g_y(y, z) = 2xz + 2y$$
$$g_y(y, z) = 2y$$

Ahora, al integrar ambos miembros de esta ecuación con respecto a y se obtiene

$$g(y, z) = y^2 + h(z) \tag{23}$$

donde h es independiente de x y y. Al sustituir de (23) en (22) se tiene

$$f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} z + 2xyz + y^2 + h(z) \tag{24}$$

Si se derivan parcialmente los dos miembros de (24) con respecto a z resulta

$$f_z(x, y, z) = e^x \cos z + 2xy + h'(z)$$

Después de igualar los miembros derechos de esta ecuación y de (21) se obtiene

$$e^x \cos z + 2xy + h'(z) = e^x \cos z + 2xy + 3z^2$$
$$h'(z) = 3z^2$$
$$h(z) = z^3 + K$$

Al sustituir $z^3 + K$ por $h(z)$ en (24) se tiene

$$f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} z + 2xyz + y^2 + z^3 + K$$

◀

Un *campo vectorial* asocia un vector con un punto del espacio. Por ejemplo, si $\mathbf{F}$ es una función vectorial, definida en alguna bola abierta B de R^3, tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} \tag{25}$$

entonces $\mathbf{F}$ asocia a cada punto (x, y, z) de B un vector, y $\mathbf{F}$ recibe el nombre de **campo vectorial.** Este campo vectorial tiene como dominio un subconjunto de R^3 y como contradominio un subconjunto de V_3. Si el dominio de un campo vectorial es un conjunto de puntos de un plano y su contradominio es un conjunto de vectores de V_2, entonces el campo vectorial tiene una ecuación de la forma

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

Si en lugar de un vector se asocia un escalar con un punto del espacio, entonces se tiene un **campo escalar;** de modo que un campo escalar es una función real. Un ejemplo de un campo escalar se obtiene al expresar la temperatura en un punto como una función de las coordenadas del punto.

Como un ejemplo de campo vectorial, considere el flujo de un fluido, tal como el agua a través de un tubo o la sangre en una arteria. Suponga que el fluido consiste de un número infinito de partículas y que la velocidad de una de éstas depende sólo de su posición; de modo que la velocidad es independiente del tiempo, y debido a este hecho, el flujo del fluido se designa como un flujo de *estado estable*. En un punto (x, y, z) la velocidad del fluido está dada por $\mathbf{F}(x, y, z)$, definida mediante una ecuación de la forma (25). Así, $\mathbf{F}$ es un eampo vactorial denominado **campo de velocidad** del fluido. Los campos de velocidad pueden describir otros movimientos, tales como el viento o el giro de una rueda. Todos los campos vectoriales que se presentan en este libro serán independientes del tiempo; por lo que se llaman **campos vectoriales de estado estable.**

No es posible mostrar en una figura las representaciones de todos los vectores de un campo vectorial particular. Sin embargo, al dibujar las representaciones de algunos vectores se puede obtener una representación visual del campo vectorial, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 (a) Muestre en una figura las representaciones, que tienen su punto inicial en (x, y), de los vectores del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

donde $x = \pm 1$ o $x = \pm 2$, y $y = \pm 1$ o $y = \pm 2$. (b) Demuestre que cada representación es tangente a la circunferencia que tiene su centro en el origen y que tiene un longitud igual al radio de la circunferencia.

Tabla 1

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
(1, 1)	$-\mathbf{i} + \mathbf{j}$
(1, −1)	$\mathbf{i} + \mathbf{j}$
(−1, 1)	$-\mathbf{i} - \mathbf{j}$
(−1, −1)	$\mathbf{i} - \mathbf{j}$
(1, 2)	$-2\mathbf{i} + \mathbf{j}$
(1, −2)	$2\mathbf{i} + \mathbf{j}$
(−1, 2)	$-2\mathbf{i} - \mathbf{j}$
(−1, −2)	$2\mathbf{i} - \mathbf{j}$
(2, 1)	$-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
(2, −1)	$\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
(−2, 1)	$-\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
(−2, −1)	$\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
(2, 2)	$-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
(2, −2)	$2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
(−2, 2)	$-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
(−2, −2)	$2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

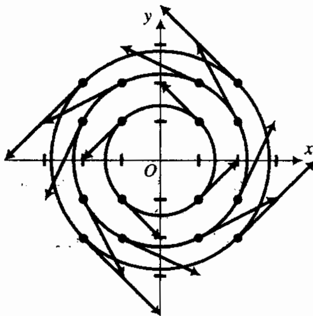


FIGURA 1

Solución

(a) La tabla 1 presenta los vectores $\mathbf{F}(x, y)$ asociados con los dieciseis puntos (x, y). Las representaciones de estos vectores se muestra en la figura 1.

(b) Sea

$$\mathbf{R}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

el vector de posición cuyo punto terminal está en (x, y). Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(x, y) \cdot \mathbf{F}(x, y) &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{i}) \cdot (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \\ &= -xy + xy \\ &= 0\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathbf{R}$ y $\mathbf{F}$ son ortogonales. De esta manera, la representación de $\mathbf{F}$ cuyo punto inicial está en (x, y) es tangente a la circunferencia que tiene su centro en el origen y radio $\|\mathbf{R}(x, y)\|$. Como

$$\begin{aligned}\|\mathbf{F}(x, y)\| &= \sqrt{(-y)^2 + x^2} \\ &= \|\mathbf{R}(x, y)\|\end{aligned}$$

entonces la longitud de cada representación es igual al radio de la circunferencia. ◀

El campo vectorial del ejemplo 3 es similar al campo de velocidad determinado por una rueda que gira en el origen.

Un ejemplo de un campo vectorial en V_3 surge de la ley de atracción gravitacional de Newton. Esta ley establece que la medida de la atracción gravitacional entre dos partículas de M unidades y m unidades de masa, respectivamente, es

$$\frac{GMm}{d^2}$$

donde d unidades es la distancia entre las partículas y G es la constante gravitacional. De modo que si una partícula de masa M unidades está en el origen y otra partícula de masa 1 unidad ($m = 1$) se encuentra en el punto $P(x, y, z)$, y si $\mathbf{F}(x, y, z)$ es la fuerza gravitacional ejercida por la partícula ubicada en el origen sobre la partícula que está en P, entonces

$$\|\mathbf{F}(x, y, z)\| = \frac{GM(1)}{\|\mathbf{R}(x, y, z)\|^2}$$

donde $\mathbf{R}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Para obtener el vector fuerza $\mathbf{F}(x, y, z)$, también se necesita la dirección de $\mathbf{F}$. Como esta dirección es hacia el origen, entonces es la misma que la dirección del vector unitario $-\dfrac{1}{\|\mathbf{R}\|}\mathbf{R}$. Con esta dirección y la intensidad (o módulo) indicadas anteriormente se tiene

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{GM}{\|\mathbf{R}(x, y, z)\|^2}\left(-\frac{\mathbf{R}(x, y, z)}{\|\mathbf{R}(x, y, z)\|}\right)$$

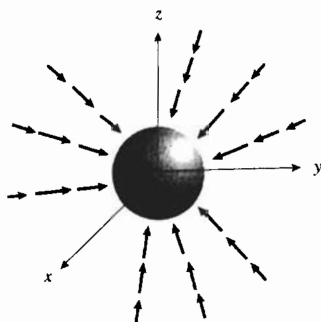


FIGURA 2

Debido a que $\|\mathbf{R}(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, se obtiene

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \tag{26}$$

El campo vectorial definido por (26) se denomina **campo de fuerza.** La figura 2 muestra representaciones de algunos vectores de este campo de fuerza, donde el objeto del origen es un esfera (por ejemplo, la Tierra) y $\|\mathbf{R}\|$ es mayor que el radio de la esfera. Cada representación apunta hacia el origen. Las representaciones de los vectores en puntos cercanos al origen son más largas que las representaciones de vectores en puntos más alejados, y las longitudes son iguales en puntos que están a la misma distancia del origen. Con estas propiedades, el campo de fuerza definido por (26) se denomina **campo de fuerza central.**

El gradiente de un campo escalar es un campo vectorial. Si ϕ es un campo escalar y $\mathbf{F}$ es el campo vectorial definido por $\mathbf{F} = \nabla\phi$, entonces a $\mathbf{F}$ se le llama **campo vectorial gradiente** y ϕ recibe el nombre de **función potencial** para $\mathbf{F}$. Un campo vectorial gradiente también se denomina **campo vectorial conservador** (o **conservativo**). El término *conservador* se aclarará después de que lea la sección 14.3.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 Considere el campo vectorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j}$$

Del ejemplo ilustrativo 1, si

$$\phi(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y + K$$

entonces

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla\phi(x, y)$$

De modo que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservador y ϕ es una función potencial para $\mathbf{F}$. ◀

El ejemplo ilustrativo siguiente muestra que el campo de fuerza gravitacional definido por (26) es conservador.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 En el ejemplo 6 de la sección 12.6 se demostró que si

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

entonces

$$\nabla V(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

De esta forma, si

$$\phi(x, y, z) = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

entonces

$$\nabla \phi(x, y, z) = \frac{GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Al comparar esta ecuación con (26), se observa que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \phi(x, y, z)$$

Por tanto, **F** es conservador y ϕ es una función potencial para **F**. ◀

En los dos ejemplos ilustrativos anteriores fue fácil demostrar que el campo vectorial es conservador debido a que se conocía una función ϕ para la cual **F** es su gradiente. Para decidir si un campo vectorial dado es conservador, y en caso de serlo, determinar una función potencial, se aplican los teoremas 14.1.1 y 14.1.2 como en los ejemplo 1 y 2.

Existen dos campos que involucran derivadas y que se asocian con un campo vectorial **F**. Uno es el campo llamado *rotacional* de **F**, el cual es un campo vectorial, y el otro es el campo denominado *divergencia* de **F**, el cual es un campo escalar. Antes de dar sus definiciones, se mostrará la forma en que se utiliza el símbolo ∇ como un operador.

Si f es una función escalar de tres variables x, y y z, el gradiente de f es

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k} \qquad (27)$$

Ahora se utilizará el operador ∇ en tres dimensiones para denotar

$$\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Por tanto, la operación de ∇ sobre la función escalar f significa

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

lo cual concuerda con (27).

14.1.3 Definición de rotacional de un campo vectorial

Sea **F** un campo vectorial sobre alguna bola abierta B de R^3 tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Entonces el **rotacional** de **F**, denotado por rot **F**, está definido por

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

si estas derivadas parciales existen.

Un truco nemotécnico para calcular rot **F** consiste en desarrollar la notación del producto cruz de dos vectores al "producto cruz" del operador ∇ y el campo vectorial **F** y escribir

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & R \end{vmatrix}$$

Como se indicó cuando se utilizó por primera vez la notación de determinantes para el producto cruz de dos vectores, los elementos del determinante no fueron todos números reales como es costumbre. En el "determinante" anterior el primer renglón contiene vectores, el segundo consiste de operadores de derivadas parciales, y el tercer renglón está constituido por funciones escalares.

EJEMPLO 4 Calcule rot **F** si **F** es el campo vectorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{2x}\mathbf{i} + 3x^2yz\mathbf{j} + (2y^2z + x)\mathbf{k}$$

Solución

$$\text{rot}\,\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^{2x} & 3x^2yz & 2y^2z + x \end{vmatrix}$$
$$= (4yz - 3x^2y)\mathbf{i} + (0 - 1)\mathbf{j} + (6xyz - 0)\mathbf{k}$$
$$= (4yz - 3x^2y)\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6xyz\mathbf{k}$$

14.1.4 Definición de divergencia de un campo vectorial

Sea **F** un campo vectorial sobre alguna bola abierta de R^3 tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Entonces la **divergencia** de **F**, denotada por div **F**, está definida como

$$\text{div}\,\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

si estas derivadas parciales existen.

Se extenderá la notación del producto punto de dos vectores al "producto punto" del operador ∇ y el campo vectorial **F** para calcular la divergencia de **F**, y se escribirá

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$
$$= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + R\mathbf{k})$$
$$= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

EJEMPLO 5 Calcule div **F** si **F** es el campo vectorial del ejemplo 4.

Solución

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{2x}) + \frac{\partial}{\partial y}(3x^2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(2y^2z + x)\\ &= 2e^{2x} + 3x^2z + 2y^2\end{aligned}$$

◀

En las secciones 14.4–14.6 se explicará el significado físico de rot **F** y div **F** al estudiar el movimiento de un fluido. En esta sección sólo interesa aprender a calcularlos y demostrar algunas de sus propiedades. Dos de dichas propiedades se dan el los teoremas siguientes, cuyas demostraciones se le pedirán en los ejercicios 47 y 48.

14.1.5 Teorema

Suponga que F es un campo vectorial sobre una bola abierta B de R^3 tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Si las segundas derivadas parciales de M, N y R son continuas en B, entonces

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0$$

14.1.6 Teorema

Si f es un campo escalar sobre una bola abierta B de R^3 y las segundas derivadas parciales de f son continuas en B, entonces

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$$

La ecuación del teorema 14.1.6 establece que el rotacional del gradiente de f es igual al vector cero. Considere ahora la divergencia del gradiente de f, esto es, $\nabla \cdot (\nabla f)$, lo cual puede escribirse como $\nabla \cdot \nabla f$ o $\nabla^2 f$. Por definición,

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

La expresión del miembro derecho de esta ecuación se denomina el **laplaciano** de f. La ecuación siguiente, obtenida al igualar a cero el laplaciano, recibe el nombre de **ecuación de Laplace,** en honor al matemático y astrónomo francés **Pierre Simon, marqués de Laplace** (1749–1827):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

A toda función escalar que satisfaga la ecuación de Laplace se le llama **armónica.** Este tipo de funciones tienen aplicaciones importantes en física en el estudio de la transferencia del calor, radiación electromagnética y acústica, entre otras.

Si **F** es un campo vectorial sobre algún disco abierto B de R^2 tal que $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$, entonces el rotacional de **F** y la divergencia de **F** en dos dimensiones están definidas por

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k} \qquad \text{div } \mathbf{F}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

si estas derivadas parciales existen. El laplaciano en dos dimensiones está definido como

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

EJEMPLO 6 Si $\mathbf{F}(x, y) = 3x^2y\mathbf{i} - 2xy^3\mathbf{j}$, calcule: **(a)** rot $\mathbf{F}(x, y)$, y **(b)** div $\mathbf{F}(x, y)$.

Solución Si $M(x, y) = 3x^2y$ y $N(x, y) = -2xy^3$, entonces

$$\textbf{(a)}\ \text{rot } \mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k} = (-2y^3 - 3x^2)\mathbf{k}$$

$$\textbf{(b)}\ \text{div } \mathbf{F}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 6xy - 6xy^2$$

◀

EJERCICIOS 14.1

En los ejercicios 1 a 6, muestre en una figura las representaciones de los vectores del campo vectorial que tienen su punto inicial en (x, y), donde $x = \pm 1$ o $x = \pm 2$, y $y = \pm 1$ o $y = \pm 2$.

1. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$

2. $\mathbf{F}(x, y) = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

3. $\mathbf{F}(x, y) = 4y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = -3y\mathbf{i} + 4x\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$

6. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

En los ejercicios 7 a 14, determine un campo vectorial conservador que tenga la función potencial dada.

7. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^3$

8. $f(x, y) = 2x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4$

9. $f(x, y) = \tan^{-1} x^2y$

10. $f(x, y) = ye^x - xe^y$

11. $f(x, y, z) = 2x^3 - 3x^2y + xy^2 - 4y^3$

12. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

13. $f(x, y, z) = x^2ye^{-4z}$

14. $f(x, y, z) = z \operatorname{sen}(x^2 - y)$

En los ejercicios 15 a 20, determine si el campo vectorial es conservador.

15. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 2y^2)\mathbf{i} + (3 - 4xy)\mathbf{j}$

16. $\mathbf{F}(x, y) = (e^xe^y + 6e^{2x})\mathbf{i} + (e^xe^y - 2e^y)\mathbf{j}$

17. $\mathbf{F}(x, y) = y\cos(x + y)\mathbf{i} - x\operatorname{sen}(x + y)\mathbf{j}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 + 2yz)\mathbf{i} + (2xz + 6yz)\mathbf{j} + (2xy + 3y^2 - 2z)\mathbf{k}$

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2ye^{2x} + e^z)\mathbf{i} + (3ze^{3y} + e^{2x})\mathbf{j} + (xe^z + e^{3y})\mathbf{k}$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\sec^2 x\mathbf{i} + (\tan x - z\sec^2 y)\mathbf{j} + x\sec z\tan z\mathbf{k}$

En los ejercicios 21 a 32, demuestre que el campo vectorial es conservador y obtenga una función potencial.

21. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

22. $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

23. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \operatorname{sen} y\mathbf{i} + e^x\cos y\mathbf{j}$

24. $\mathbf{F}(x, y) = (\operatorname{sen} y \operatorname{senh} x + \cos y\cosh x)\mathbf{i} + (\cos y\cosh x - \operatorname{sen} y\operatorname{senh} x)\mathbf{j}$

25. $\mathbf{F}(x, y) = (2xy^2 - y^3)\mathbf{i} + (2x^2y - 3xy^2 + 2)\mathbf{j}$

26. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 + 2y - y^2e^x)\mathbf{i} + (2x - 2ye^x)\mathbf{j}$

27. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y)\mathbf{i} - (x - 3z)\mathbf{j} + (z + 3y)\mathbf{k}$

28. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

29. $\mathbf{F}(x, y, z) = (ze^x + e^y)\mathbf{i} + (xe^y - e^z)\mathbf{j} + (-ye^z + e^x)\mathbf{k}$

30. $\mathbf{F}(x, y, z) = (\tan y + 2xy\sec z)\mathbf{i} + (x\sec^2 y + x^2\sec z)\mathbf{j} + \sec z(x^2y\tan z - \sec z)\mathbf{k}$

31. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x\cos y - 3)\mathbf{i} - (x^2\operatorname{sen} y + z^2)\mathbf{j} - (2yz - 2)\mathbf{k}$

32. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y^3 - 8xz^2)\mathbf{i} + (6xy^2 + 1)\mathbf{j} - (8x^2z + 3z^2)\mathbf{k}$

En los ejercicios 33 a 42, calcule rot **F** *y* div **F** *para el campo vectorial* **F** *indicado.*

33. $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$

34. $\mathbf{F}(x, y) = \cos x\mathbf{i} - \operatorname{sen} y\mathbf{j}$

35. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \cos y\mathbf{i} + e^x \operatorname{sen} y\mathbf{j}$

36. $\mathbf{F}(x, y) = -\frac{y}{x}\mathbf{i} + \frac{1}{x}\mathbf{j}$

37. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

38. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$

39. $\mathbf{F}(x, y, z) = \cos y\mathbf{i} + \cos z\mathbf{j} + \cos x\mathbf{k}$

40. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + xe^y \cos z\mathbf{j} - xe^y \cos z\mathbf{k}$

41. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\mathbf{i} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

42. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los ejercicios 43 a 46, demuestre que la función escalar es armónica probando que su Laplaciano es cero.

43. $f(x, y) = e^y \operatorname{sen} x + e^x \cos y$

44. $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$

45. $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - 5z^2$

46. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

47. Demuestre el teorema 14.1.5.

48. Demuestre el teorema 14.1.6.

49. Demuestre la parte "sólo si" del teorema 14.1.2.

50. Explique por qué la definición del rotacional de un campo vectorial aplicada al teorema 14.1.2 indica que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ es un gradiente si y sólo si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

14.2 INTEGRALES DE LÍNEA

En el capítulo 4 se utilizó el concepto geométrico de área para motivar la definición de la integral definida. Para motivar la definición de integral de un campo vectorial, se empleará el concepto físico de trabajo.

En la sección 10.3 se dijo que si una fuerza constante de medida vectorial **F** mueve una partícula a lo largo de una recta de un punto A a un punto B, y si W es la medida del trabajo realizado, entonces

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \tag{1}$$

Suponga ahora que el vector de fuerza no es constante, y en lugar de que el movimiento sea a lo largo de una recta, es a lo largo de una curva. Considere que la fuerza ejercida sobre la partícula ubicada en el punto (x, y), de algún disco B de R^2, está dada por el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

donde M y N son continuas en B. Sea C la curva, contenida en B, que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \qquad a \leq t \leq b$$

Se requiere que las funciones f y g sean tales que f' y g' resulten continuas en $[a, b]$ y que en cualquier punto de $[a, b]$ al menos una de ellas sea diferente de cero; esto es, de acuerdo con la definición 9.1.1, la curva C es suave en $[a, b]$. Se desea definir el trabajo realizado por la fuerza variable de medida vectorial **F** al desplazar la partícula a lo largo de C del punto $(f(a), g(a))$ al punto $(f(b), g(b))$. En cualquier punto $(f(t), g(t))$ de C el vector fuerza es

$$\mathbf{F}(f(t), g(t)) = M(f(t), g(t))\mathbf{i} + N(f(t), g(t))\mathbf{j} \tag{2}$$

Considere que Δ es una partición del intervalo $[a, b]$ tal que

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

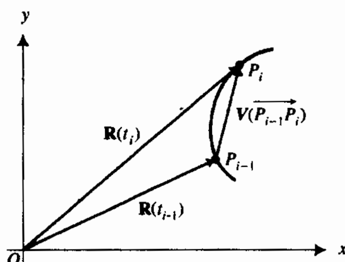


FIGURA 1

Sea P_i el punto $(x_i, y_i) = (f(t_i), g(t_i))$ de C. Refiérase a la figura 1. El vector $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_{i-1}P_i})$ es igual a $\mathbf{R}(t_i) - \mathbf{R}(t_{i-1})$; por tanto,

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{P_{i-1}P_i}) = f(t_i)\mathbf{i} + g(t_i)\mathbf{j} - [f(t_{i-1})\mathbf{i} + g(t_{i-1})\mathbf{j}]$$

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{P_{i-1}P_i}) = [f(t_i) - f(t_{i-1})]\mathbf{i} + [g(t_i) - g(t_{i-1})]\mathbf{j} \tag{3}$$

Puesto que f' y g' son continuas en $[a, b]$, se infiere del teorema del valor medio que existen números c_i y d_i en el intervalo abierto (t_{i-1}, t_i) tales que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i)(t_i - t_{i-1})$$
$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(d_i)(t_i - t_{i-1})$$

Al tomar $\Delta_i t = t_i - t_{i-1}$, y sustituir de las dos ecuaciones anteriores en (3) se obtiene

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{P_{i-1}P_i}) = [f'(c_i)\mathbf{i} + g'(d_i)\mathbf{j}]\,\Delta_i t \tag{4}$$

Para cada i considere el vector

$$\mathbf{F}_i = M(f(c_i), g(c_i))\mathbf{i} + N(f(d_i), g(d_i))\mathbf{j} \tag{5}$$

Cada uno de los vectores $\mathbf{F}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es una aproximación al vector fuerza $\mathbf{F}(f(t), g(t))$, dado por (2), a lo largo del arco de C desde P_{i-1} a P_i. Observe que aunque c_i y d_i son, en general, números diferentes del intervalo abierto (t_{i-1}, t_i), los valores de los vectores $\mathbf{F}(f(t), g(t))$ se encuentran cerca de $\mathbf{F}_i$. Además, el arco de C desde P_{i-1} a P_i se aproxima mediante el segmento rectilíneo $P_{i-1}P_i$. Así, al aplicar la fórmula (1) se obtiene el trabajo realizado por el vector $\mathbf{F}(f(t), g(t))$ al desplazar la partícula a lo largo del arco de C desde P_{i-1} a P_i. Si se denota esta aproximación por $\Delta_i W$, de la fórmula (1) y las ecuaciones (4) y (5) se tiene

$$\Delta_i W = [M(f(c_i), g(c_i))\mathbf{i} + N(f(d_i), g(d_i))\mathbf{j}] \cdot [f'(c_i)\mathbf{i} + g'(d_i)\mathbf{j}]\,\Delta_i t$$
$$\Leftrightarrow \quad \Delta_i W = [M(f(c_i), g(c_i))f'(c_i)]\,\Delta_i t + [N(f(d_i), g(d_i))g'(d_i)]\,\Delta_i t$$

Una aproximación de la medida del trabajo realizado por $\mathbf{F}(f(t), g(t))$ a lo largo de C es $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Delta_i W$ o bien, equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^{n} [M(f(c_i), g(c_i))f'(c_i)]\,\Delta_i t + \sum_{i=1}^{n} [N(f(d_i), g(d_i))\,g'(d_i)]\,\Delta_i t$$

Cada una de estas sumas es una suma de Riemann. La primera es una suma de Riemann para la función que tiene valores $M(f(t), g(t))f'(t)$, y la segunda es una suma de Riemann para la funcion que tiene valores $N(f(t), g(t))g'(t)$. Si n se incrementa sin límite y cada $\Delta_i t$ se aproxima a cero, entonces estas sumas tienden a la integral definida:

$$\int_a^b [M(f(t), g(t))f'(t) + N(f(t), g(t))\,g'(t)]\,dt$$

Por tanto, se tiene la definición siguiente, donde se emplea la notación $\mathbf{F}(\mathbf{R}(t))$ en lugar de $\mathbf{F}(f(t), g(t))$.

14.2.1 Definición del trabajo realizado por un campo de fuerza sobre una partícula que se desplaza a lo largo de una curva de R^2

Sea C una curva suave contenida en un disco abierto B de R^2 para la cual una ecuación vectorial de C es $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$. Además, considere un campo de fuerza definido por $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$, donde M y N son continuas en B. Si W es la medida del **trabajo** realizado por una fuerza de medida vectorial $\mathbf{F}$ al desplazar una partícula a lo largo de C desde $(f(a), g(a))$ hasta $(f(b), g(b))$, entonces

$$W = \int_a^b [M(f(t), g(t))f'(t) + N(f(t), g(t))g'(t)]\, dt \qquad \textbf{(6)}$$

o, equivalentemente, utilizando notación vectorial,

$$W = \int_a^b \langle M(f(t), g(t)), N(f(t), g(t))\rangle \cdot \langle f'(t), g'(t)\rangle\, dt$$

$$\Leftrightarrow \quad W = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\, dt \qquad \textbf{(7)}$$

▶ ***EJEMPLO 1*** Suponga que una partícula se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$ desde el punto $A(-1, 1)$ hasta el punto $B(2, 4)$. Calcule el trabajo total efectuado si el movimiento es ocasionado por el campo de fuerza

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j}$$

Suponga que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons.

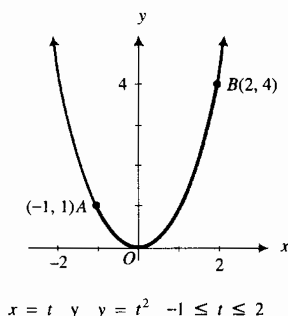


FIGURA 2

Solución La figura 2 muestra el arco de la parábola de A a B. La parábola tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = t \quad \text{y} \quad y = t^2 \qquad -1 \le t \le 2$$

De esta forma, la ecuación vectorial de la parábola es

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

Como $\mathbf{F}(x, y) = \langle x^2 + y^2, 3x^2y\rangle$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) &= \mathbf{F}(t, t^2)\\ &= \langle t^2 + t^4, 3t^4\rangle\end{aligned}$$

Si W joules es el trabajo realizado, entonces, de (7), se tiene

$$W = \int_{-1}^2 \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\, dt \qquad \textbf{(8)}$$

$$\begin{aligned}&= \int_{-1}^2 \langle t^2 + t^4, 3t^4\rangle \cdot \langle 1, 2t\rangle\, dt\\ &= \int_{-1}^2 (t^2 + t^4 + 6t^5)\, dt\\ &= \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + t^6\Big]_{-1}^2\\ &= \tfrac{8}{3} + \tfrac{32}{5} + 64 - (-\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} + 1)\\ &= \tfrac{363}{5}\end{aligned}$$

Conclusión: El trabajo efectuado es 72.6 joules. ◀

Las integrales de las ecuaciones (6) y (7) se denominan *integrales de línea*. Para la integral de línea de la ecuación (6), una notación común que involucra la forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es

$$\int_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$$

Esta notación es sugerida por el siguiente hecho: como las ecuaciones paramétricas de C son $x = f(t)$ y $y = g(t)$, entonces $dx = f'(t)dt$ y $dy = g'(t)dt$. Una notación vectorial para la integral de la ecuación (7) es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

La notación anterior proviene de considerar la ecuación vectorial de C, la cual es $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, y tomar $d\mathbf{R} = \mathbf{R}'(t)dt$. Entonces

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot d\mathbf{R} = \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\, dt$$

En consecuencia, se tiene la definición formal siguiente.

14.2.2 Definición de integral de línea sobre una curva de R^2

Sea C una curva suave contenida en un disco abierto B de R^2 y que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \qquad a \leq t \leq b$$

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial sobre B definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

donde M y N son continuas en B. Si se emplea la notación de la forma diferencial, la **integral de línea** de $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ sobre C está definida por

$$\int_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = \int_a^b [M(f(t), g(t))f'(t) + N(f(t), g(t))\, g'(t)]\, dt$$

o, equivalentemente, usando la notación vectorial, la **integral de línea** de $\mathbf{F}$ sobre C está definida por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\, dt$$

Se empleará la notación de la forma diferencial así como la notación vectorial para las integrales de línea.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** En el ejemplo 1, la integral de la ecuación (8) que define W es una integral de línea. Con la notación vectorial, esta integral de línea puede expresarse como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

donde $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$. Con la notación de la forma diferencial, esta integral de línea puede escribirse como

$$\int_C (x^2 + y^2)\, dx + 3x^2y\, dy \qquad (9)$$

◀

Si una ecuación de C es de la forma $y = F(x)$, entonces puede emplearse x como un parámetro en lugar de t. De manera semejante, si una ecuación de C es de la forma $x = G(y)$, entonces y puede utilizarse como parámetro en lugar de t.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** En el ejemplo 1 y en el ejemplo ilustrativo 1, la ecuación de C es $y = x^2$, la cual es de la forma $y = F(x)$. Por tanto, x puede emplearse como parámetro en lugar de t. Así, en la integral (9) del ejemplo ilustrativo 1 se puede sustituir y por x^2 y dy por $2x\, dx$, obteniéndose

$$W = \int_{-1}^{2} (x^2 + x^4)\, dx + 3x^2x^2(2x\, dx)$$

$$= \int_{-1}^{2} (x^2 + x^4 + 6x^5)\, dx$$

esta integral es la misma que la tercera la cual aparece en la solución del ejemplo 1, excepto que se tiene la variable x en lugar de t. ◀

Si la curva C de la definición de la integral de línea es el intervalo cerrado $[a, b]$ del eje x, entonces $y = 0$ y $dy = 0$. De modo que

$$\int_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = \int_a^b M(x, 0)\, dx$$

Por tanto, en tal caso, la integral de línea se reduce a una integral definida.

Se puede extender el concepto de integral de línea para incluir a las curvas que son suaves a trozos. Recuerde de la sección 9.1 que si un intervalo I puede dividirse en un número finito de subintervalos en los que la curva C es suave, entonces se dice que C es *suave a trozos* en I.

14.2.3 Definición de integral de línea sobre una curva suave a trozos de R^2

Suponga que la curva C consiste de los arcos suaves $C_1, C_2, \ldots, C_n$ contenidos en un disco abierto B de R^2, y considere $\mathbf{R}(t)$ y $\mathbf{F}(x, y)$ como en la definición 14.2.2. Entonces la **integral de línea** de $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ sobre C está definida por

$$\int_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{C_i} M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy \right)$$

o, equivalentemente, empleando la notación vectorial, la integral de línea de $\mathbf{F}$ sobre C se define como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{a_i}^{b_i} \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\, dt \right)$$

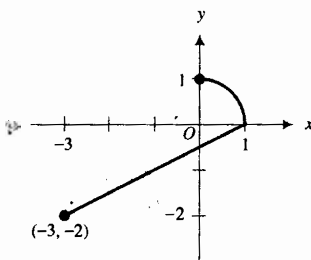


FIGURA 3

EJEMPLO 2 Evalúe la integral de línea

$$\int_C 4xy\,dx + (2x^2 - 3xy)dy$$

si la curva C consiste del segmento de recta de $(-3, -2)$ a $(1, 0)$ y el arco del primer cuadrante de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(0, 1)$, recorrida en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj.

Solución La figura 3 muestra la curva C compuesta por los arcos C_1 y C_2. El arco C_1 es el segmento de recta. Una ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-3, -2)$ y $(1, 0)$ es $x - 2y = 1$. Por tanto, C_1 puede representarse paramétricamente por

$$x = 1 + 2t \qquad y = t \qquad -2 \le t \le 0$$

El arco C_2, el cual es el arco del primer cuadrante de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, puede representarse paramétricamente por

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \le t \le \tfrac{1}{2}\pi$$

Si se aplica la definición 14.2.2 a cada uno de los arcos C_1 y C_2 se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} 4xy\,dx + (2x^2 - 3xy)\,dy
&= \int_{-2}^{0} 4(1 + 2t)t(2\,dt) + [2(1 + 2t)^2 - 3(1 + 2t)t]\,dt \\
&= \int_{-2}^{0} (8t + 16t^2 + 2 + 8t + 8t^2 - 3t - 6t^2)\,dt \\
&= \int_{-2}^{0} (18t^2 + 13t + 2)\,dt \\
&= 6t^3 + \tfrac{13}{2}t^2 + 2t\Big]_{-2}^{0} \\
&= -(-48 + 26 - 4) \\
&= 26
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} 4xy\,dx + (2x^2 - 3xy)\,dy
&= \int_{0}^{\pi/2} 4\cos t \operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t\,dt) + (2\cos^2 t - 3\cos t \operatorname{sen} t)(\cos t\,dt) \\
&= \int_{0}^{\pi/2} (-4\cos t \operatorname{sen}^2 t + 2\cos^3 t - 3\cos^2 t \operatorname{sen} t)\,dt \\
&= \int_{0}^{\pi/2} [-4\cos t \operatorname{sen}^2 t + 2\cos t(1 - \operatorname{sen}^2 t) - 3\cos^2 t \operatorname{sen} t]\,dt \\
&= \int_{0}^{\pi/2} (2\cos t - 6\cos t \operatorname{sen}^2 t - 3\cos^2 t \operatorname{sen} t)\,dt \\
&= 2\operatorname{sen} t - 2\operatorname{sen}^3 t + \cos^3 t\Big]_{0}^{\pi/2} \\
&= 2 - 2 - 1 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Por tanto, de la definición 14.2.3,

$$\int_C 4xy\,dx + (2x^2 - 3xy)\,dy = 26 + (-1)$$
$$= 25$$

La definición de integral de línea en tres dimensiones requiere que la curva sea *suave*: una curva de R^3 que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \qquad a \le t \le b$$

es **suave** si f', g' y h' son continuas en $[a, b]$ y en cualquier punto de $[a, b]$ no son simultáneamente cero.

14.2.4 Definición de integral de línea sobre una curva de R^3

Sea C una curva suave contenida en una bola abierta B de R^3 que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \qquad a \le t \le b$$

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial sobre B definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

donde M, N y R son funciones continuas en B. Si se emplea la notación de la forma diferencial, la **integral de línea** de $M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ sobre C está definida por

$$\int_C M(x, y, z)\,dx + N(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

$$= \int_a^b [M(f(t), g(t), h(t))f'(t) + N(f(t), g(t), h(t))g'(t) + R(f(t), g(t), h(t))h'(t)]\,dt$$

o, equivalentemente, empleando la notación vectorial, la **integral de línea de F** sobre C se define como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\,dt$$

EJEMPLO 3 Evalúe la integral de línea

$$\int_C 3x\,dx + 2xy\,dy + z\,dz$$

si la curva C es la hélice circular definida por las ecuaciones paramétricas

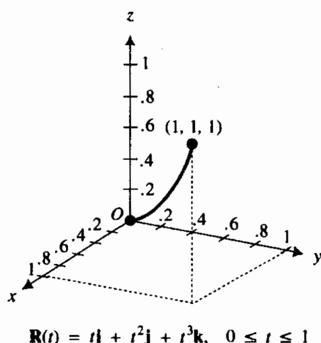
$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Solución De la notación de la forma diferencial para una integral de línea de la definición 14.2.4, se tiene

$$\int_C 3x\,dx + 2xy\,dy + z\,dz$$
$$= \int_0^{2\pi} 3\cos t(-\operatorname{sen} t\,dt) + 2(\cos t)(\operatorname{sen} t)(\cos t\,dt) + t\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-3 \operatorname{sen} t \cos t + 2 \cos^2 t \operatorname{sen} t + t)\, dt$$
$$= -\tfrac{3}{2} \operatorname{sen}^2 t - \tfrac{2}{3} \cos^3 t + \tfrac{1}{2} t^2 \Big]_0^{2\pi}$$
$$= -\tfrac{3}{2}(0) - \tfrac{2}{3}(1) + \tfrac{1}{2}(4\pi^2) + \tfrac{3}{2}(0) + \tfrac{2}{3}(1) + \tfrac{1}{2}(0)$$
$$= 2\pi^2$$ ◀

El trabajo realizado por un campo de fuerza al desplazar una partícula a lo largo de una curva de R^3 se puede definir de manera semejante como se hizo en la definición 14.2.1 para una curva de R^2. En el ejemplo siguiente se aplica dicha definición.



$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$

FIGURA 4

EJEMPLO 4 Una partícula recorre la cúbica alabeada

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \qquad 0 \le t \le 1$$

Calcule el trabajo total efectuado si el movimiento es causado por el campo de fuerza

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + x \operatorname{sen} \pi y^2 \mathbf{k}$$

Suponga que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons.

Solución La figura 4 muestra la cúbica alabeada a partir de $t = 0$ hasta $t = 1$. Como $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{R}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

Debido a que $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle e^x, xe^z, x \operatorname{sen} \pi y^2\rangle$, entonces

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) = \mathbf{F}(t, t^2, t^3)$$
$$= \langle e^t, te^{t^3}, t \operatorname{sen} \pi t^4\rangle$$

Si W joules es el trabajo realizado, entonces, de la notación vectorial para la integral de línea de la definición 14.2.4, se tiene

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$
$$= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\, dt$$
$$= \int_0^1 \langle e^t, te^{t^3}, t \operatorname{sen} \pi t^4\rangle \cdot \langle 1, 2t, 3t^2\rangle\, dt$$
$$= \int_0^1 (e^t + 2t^2 e^{t^3} + 3t^3 \operatorname{sen} \pi t^4)\, dt$$
$$= e^t + \frac{2}{3} e^{t^3} - \frac{3}{4\pi} \cos \pi t^4 \Big]_0^1$$
$$= e + \frac{2}{3} e - \frac{3}{4\pi} \cos \pi - 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{4\pi} \cos 0$$

$$= \frac{5}{3}e + \frac{3}{2\pi} - \frac{5}{3}$$
$$\approx 3.34$$

<u>**Conclusión:**</u> El trabajo realizado es 3.34 joules. ◀

EJERCICIOS 14.2

En los ejercicios 1 a 22, evalúe la integral de línea sobre la curva C.

1. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$; C: $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, 0 \le t \le 1$.
2. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} - 3x\mathbf{j}$; C: $\mathbf{R}(t) = 3t^2\mathbf{i} - t\mathbf{j}, 0 \le t \le 1$.
3. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x - 2y)\mathbf{j}$; C: $\mathbf{R}(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} - 2\cos t\mathbf{j}, 0 \le t \le \pi$.
4. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$; C: $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$, del punto (1, 1) al punto (4, −8).
5. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (y + x)\mathbf{j}$; C: la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ a partir del punto (2, 0) en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj.
6. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = (x - 2y)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$; C: $\mathbf{R}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j}, 0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$.
7. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = y \operatorname{sen} x\mathbf{i} - \cos x\mathbf{j}$; C: el segmento de recta de $(\frac{1}{2}\pi, 0)$ a $(\pi, 1)$.
8. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = 9x^2y\mathbf{i} + (5x^2 - y)\mathbf{j}$; C: la curva $y = x^3 + 1$ de (1, 2) a (3, 28).
9. $\int_C (x^2 + xy)\,dx + (y^2 - xy)\,dy$; C: la recta $y = x$ del origen al punto (2, 2).
10. La integral de línea del ejercicio 9; C: la parábola $x^2 = 2y$ desde el origen hasta el punto (2, 2).
11. La integral de línea del ejercicio 9; C: el eje x desde el origen hasta el punto (2, 0) y después la recta $x = 2$ de (2, 0) a (2, 2).
12. $\int_C yx^2\,dx + (x + y)\,dy$; C: la recta $y = -x$ desde el origen hasta el punto (1, −1).
13. La integral de línea del ejercicio 12; C: la curva $y = -x^3$ desde el origen hasta el punto (1, −1).
14. La integral de línea del ejercicio 12; C: el eje y del origen al punto (0, −1) y después la recta $y = -1$ desde (0, −1) hasta (1, −1).
15. $\int_C 3xy\,dx + (4x^2 - 3y)\,dy$; C: la recta $y = 2x + 3$ de (0, 3) a (3, 9) y después la parábola $y = x^2$ de (3, 9) a (5, 25).
16. $\int_C (xy - z)\,dx + e^x\,dy + y\,dz$; C: el segmento de recta de (1, 0, 0) a (3, 4, 8).
17. $\int_C (x + y)\,dx + (y + z)\,dy + (x + z)\,dz$; C: el segmento de recta desde el origen hasta el punto (1, 2, 4).
18. La integral de línea del ejercicio 16; C: $\mathbf{R}(t) = (t + 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, 0 \le t \le 2$.
19. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; C: la helice circular $\mathbf{R}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, 0 \le t \le 2\pi$.
20. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (6y^2 - xz)\mathbf{j} + 10z\mathbf{k}$; C: $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, 0 \le t \le 1$.
21. La integral de línea del ejercicio 20; C: el segmento de recta desde el origen hasta el punto (0, 0, 1); después el segmento de (0, 0, 1) a (0, 1, 1); luego el segmento de (0, 1, 1) a (1, 1, 1).
22. La integral de línea del ejercicio 20; C: el segmento de recta desde el origen hasta el punto (1, 1, 1).

En los ejercicios 23 a 36, calcule el trabajo total realizado al mover una partícula a lo largo del arco C si el movimiento lo ocasiona el campo de fuerza **F**. *Suponga que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons.*

23. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$; C: el segmento de recta desde el origen hasta el punto (1, 1).
24. El campo de fuerza del ejercicio 23; C: el arco de la parábola $y^2 = x$ desde el origen hasta el punto (1, 1).
25. $\mathbf{F}(x, y) = (y - x)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$; C: el segmento de recta del punto (1, 1) al punto (2, 4).
26. El campo de fuerza del ejercicio 25; C: el arco de la parábola $y = x^2$ desde el punto (1, 1) hasta el punto (2, 4).
27. El campo de fuerza del ejercicio 25; C: el segmento de recta de (1, 1) a (2, 2) y después el segmento de (2, 2) a (2, 4)
28. $\mathbf{F}(x, y) = -x^2y\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$; C: el segmento de recta de $(a, 0)$ a $(0, a)$.
29. El campo de fuerza del ejercicio 28; C: $\mathbf{R}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\mathbf{j}, 0 \le t \le \frac{1}{2}\pi, a > 0$.
30. El campo de fuerza del ejercicio 28; C: el segmento de recta de $(a, 0)$ a (a, a) y después el segmento de (a, a) a $(0, a)$.
31. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$; C: el segmento de recta desde el origen hasta el punto (1, 1, 1).
32. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; C: el segmento de recta desde el origen hasta el punto (4, 0, 3).
33. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$; C: $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, 0 \le t \le 2$.
34. $\mathbf{F}(x, y, z) = (xyz + x)\mathbf{i} + (x^2z + y)\mathbf{j} + (x^2y + z)\mathbf{k}$; C: el arco del ejercicio 33.
35. El campo de fuerza del ejercicio 34; C: el segmento de recta desde el origen hasta el punto (1, 0, 0); después el segmento de (1, 0, 0) a (1, 1, 0); luego el segemento de (1, 1, 0) a (1, 1, 1).
36. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (yz - x)\mathbf{k}$; C: $\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}, 0 \le t \le 1$.

14.3 INTEGRALES DE LÍNEA INDEPENDIENTES DE LA TRAYECTORIA

En la sección 14.2 se dijo que el valor de una integral de línea está determinado por el integrando y una curva C entre dos puntos P_1 y P_2. Sin embargo, en ciertas condiciones el valor de una integral de línea depende sólo del integrando y de los puntos P_1 y P_2 y no de la trayectoria de P_1 a P_2. De dicha integral se dice que es **independiente de la trayectoria.**

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Suponga que un campo de fuerza

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j}$$

mueve una partícula desde el origen hasta el punto (1, 1). Se demostrará que el trabajo total realizado es el mismo si la trayectoria es a lo largo **(a)** del segmento de recta desde el origen hasta el punto (1, 1); **(b)** del arco de la parábola $y = x^2$ desde el origen hasta el punto (1, 1); y **(c)** del arco de la curva $x = y^3$ desde el origen hasta el punto (1, 1).

Si W es la medida del trabajo efectuado, entonces

$$W = \int_C (y^2 + 2x + 4)\, dx + (2xy + 4y - 5)\, dy \tag{1}$$

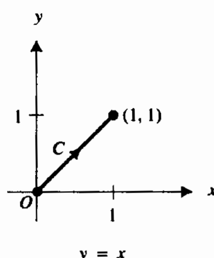


FIGURA 1

(a) Consulte la figura 1. Una ecuación de C es $y = x$. Se emplea x como parámetro y se considera $y = x$ y $dy = dx$ en (1). Entonces

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (x^2 + 2x + 4)\, dx + (2x^2 + 4x - 5)\, dx \\ &= \int_0^1 (3x^2 + 6x - 1)\, dx \\ &= x^3 + 3x^2 - x\Big]_0^1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

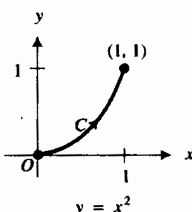


FIGURA 2

(b) Refiérase a la figura 2. Una ecuación de C es $y = x^2$. Otra vez, tomando x como parámetro y considerando $y = x^2$ y $dy = 2x\, dx$ en (1), se tiene

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (x^4 + 2x + 4)\, dx + (2x^3 + 4x^2 - 5)2x\, dx \\ &= \int_0^1 (5x^4 + 8x^3 - 8x + 4)\, dx \\ &= x^5 + 2x^4 - 4x^2 + 4x\Big]_0^1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

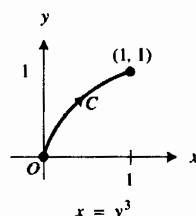


FIGURA 3

(c) Vea la figura 3. Una ecuación de C es $x = y^3$. Si se toma y como parámetro y se considera $x = y^3$ y $dx = 3y^2 dy$ en (1), se obtiene

$$W = \int_0^1 (y^2 + 2y^3 + 4)3y^2\, dy + (2y^4 + 4y - 5)\, dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 (6y^5 + 5y^4 + 12y^2 + 4y - 5)\, dy \\
&= y^6 + y^5 + 4y^3 + 2y^2 - 5y \Big]_0^1 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

◀

En el ejemplo ilustrativo se ha visto que el valor de la integral de línea es el mismo sobre las tres trayectorias diferentes de (0, 0) a (1, 1). En realidad, el valor de la integral de línea es el mismo sobre cualquier curva suave a trozos desde el origen hasta el punto (1, 1); por tanto, esta integral de línea es independiente de la trayectoria. Este hecho se demuestra en el ejemplo ilustrativo 2.

A continuación se establecerá y demostrará un teorema que no sólo proporciona condiciones para las cuales el valor de la integral de línea es independiente de la trayectoria, sino que también provee una fórmula para calcular el valor.

14.3.1 Teorema

Sea C cualquier curva suave a trozos contenida en un disco abierto B de R^2 desde el punto (x_1, y_1) hasta el punto (x_2, y_2). Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservador continuo sobre B y ϕ es una función potencial para $\mathbf{F}$, entonces la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

es independiente de la trayectoria C, y

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1)$$

Demostración Se presenta la demostración en el caso de que C es suave. Si C es suave a trozos, entonces considere cada parte por separado; la demostración siguiente se aplica a cada parte suave.

Considere como ecuaciones paramétricas de C las siguientes:

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad t_1 \leq t \leq t_2$$

De esta forma, una ecuación vectorial de C es

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \qquad t_1 \leq t \leq t_2$$

Además, se tiene que el punto (x_1, y_1) es $(f(t_1), g(t_1))$ y el punto (x_2, y_2) es $(f(t_2), g(t_2))$. Puesto que ϕ es una función potencial para $\mathbf{F}$, entonces $\nabla\phi(x, y) = \mathbf{F}(x, y)$, donde $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$. En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{R} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \nabla\phi(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\, dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \nabla\phi(f(t), g(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\, dt
\end{aligned}
$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \langle M(f(t), g(t)), N(f(t), g(t))\rangle \cdot \langle f'(t), g'(t)\rangle \, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} [M(f(t), g(t)) f'(t)\, dt + N(f(t), g(t)) g'(t)\, dt] \qquad \textbf{(2)}$$

Observe que como $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = d\phi(x, y)$, entonces

$$M(f(t), g(t)) f'(t)\, dt + N(f(t), g(t)) g'(t)\, dt = d\phi(f(t), g(t))$$

Si se sustituye de esta ecuación en (2) y después se aplica el segundo teorema fundamental del Cálculo se obtiene

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_{t_1}^{t_2} d\phi(f(t), g(t)) \\ &= \phi(f(t), g(t)) \Big]_{t_1}^{t_2} \\ &= \phi(f(t_2), g(t_2)) - \phi(f(t_1), g(t_1)) \\ &= \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1) \end{aligned}$$

lo cual es lo que se deseaba demostrar. ∎

Debido a la semejanza del teorema 14.3.1 con el segundo teorema fundamental del Cálculo, en ocasiones se le denomina **teorema fundamental para las integrales de línea.** Puesto que un campo vectorial conservador tiene un número infinito de funciones potenciales que se diferencian por una constante arbitraria K, se omitirá dicha constante para la función potencial ϕ cuando se aplique el teorema 14.3.1. Por supuesto, lo que en realidad se está haciendo es elegir la función potencial para la cual $K = 0$.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Se aplicará el teorema 14.3.1 para evaluar la integral de línea del ejemplo ilustrativo 1:

$$\int_C (y^2 + 2x + 4)\, dx + (2xy + 4y - 5)\, dy$$

Con la notación vectorial, esta integral de línea se expresa como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

donde

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j}$$

En el ejemplo ilustrativo 4 de la sección 14.1 se demostró que **F** es un campo vectorial conservador que tiene la función potencial

$$\phi(x, y) = y^2 x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y$$

Por tanto, del teorema 14.3.1, la integral de línea es independiente de la trayectoria, y C puede ser cualquier curva suave a trozos desde (0, 0) hasta (1, 1). Además, del teorema 14.3.1,

$$\begin{aligned}\int_C (y^2 + 2x + 4)\,dx + (2xy + 4y - 5)\,dy &= \phi(1, 1) - \phi(0, 0)\\ &= 3 - 0\\ &= 3\end{aligned}$$

Este resultado concuerda con el del ejemplo ilustrativo 1. ◀

▶ ***EJEMPLO 1*** Utilice el resultado del ejemplo 1 de la sección 14.1 para evaluar la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

si $\mathbf{F}(x, y) = (e^{-y} - 2x)\mathbf{i} - (xe^{-y} + \text{sen } y)\mathbf{j}$ y C es el arco en el primer cuadrante de la circunferencia

$$\mathbf{R}(t) = \pi \cos t\mathbf{i} + \pi \text{ sen } t\mathbf{j} \qquad 0 \le t \le \tfrac{1}{2}\pi$$

Solución Del ejemplo 1 de la sección 14.1, se sabe que

$$\nabla(xe^{-y} - x^2 + \cos y) = (e^{-y} - 2x)\mathbf{i} - (xe^{-y} + \text{sen } y)\mathbf{j}$$

Por tanto, $\mathbf{F}$ es un campo conservador, de modo que puede aplicarse el teorema 14.3.1 con $\phi(x, y) = xe^{-y} - x^2 + \cos y$. El punto para el cual $t = 0$ es $(\pi, 0)$ y el punto correspondiente a $t = \frac{1}{2}\pi$ es $(0, \pi)$.

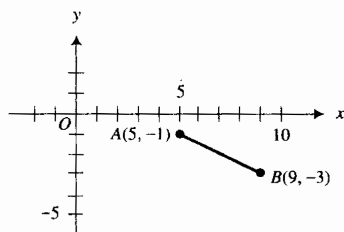
$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \phi(0, \pi) - \phi(\pi, 0)\\ &= \cos \pi - (\pi - \pi^2 + 1)\\ &= \pi^2 - \pi - 2\end{aligned}$$ ◀

Si el valor de una integral de línea es independiente de la trayectoria, entonces no es necesario determinar la función potencial para calcular el valor. El procedimiento para esto se muestra en el ejemplo siguiente.

▶ ***EJEMPLO 2*** Considere el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{y}\mathbf{i} - \frac{x}{y^2}\mathbf{j}$$

Si C es cualquier curva suave a trozos desde el punto $A(5, -1)$ al punto $B(9, -3)$, demuestre que el valor de la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ es independiente de la trayectoria y evalúela.



$x + 2y = 3$

FIGURA 4

Solución Sean

$$M(x, y) = \frac{1}{y} \qquad N(x, y) = -\frac{x}{y^2}$$

$$M_y(x, y) = -\frac{1}{y^2} \qquad N_x(x, y) = -\frac{1}{y^2}$$

Puesto que $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, entonces $\mathbf{F}$ es conservador. Por tanto, la integral de línea es independiente de la trayectoria.

Se toma como trayectoria el segmento de recta de A a B, mostrado en la figura 4. Una ecuación de la recta que pasa por A y B es $x + 2y = 3$. Al considerar $y = -t$ y $x = 3 + 2t$, una ecuación vectorial de esta recta es

$$\mathbf{R}(t) = (3 + 2t)\mathbf{i} - t\mathbf{j} \qquad 1 \le t \le 3$$

Ahora se calculará el valor de la integral de línea aplicando la definición 14.2.2.

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\, dt \\ &= \int_1^3 \mathbf{F}(3 + 2t, -t) \cdot \langle 2, -1 \rangle\, dt \\ &= \int_1^3 \left\langle -\frac{1}{t}, -\frac{3 + 2t}{t^2} \right\rangle \cdot \langle 2, -1 \rangle\, dt \\ &= \int_1^3 \left(-\frac{2}{t}, + \frac{3 + 2t}{t^2} \right) dt \\ &= \int_1^3 \frac{3}{t^2} dt \\ &= -\frac{3}{t}\Big]_1^3 \\ &= 2\end{aligned}$$

◀

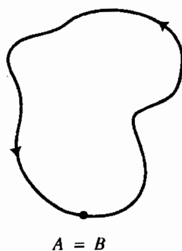


FIGURA 5

Recuerde de la definición 9.1.2 que si en una curva C definida por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, o la ecuación vectorial equivalente

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \qquad a \le t \le b$$

el punto inicial $A(f(a), g(a))$ y el punto $B(f(b), g(b))$ coinciden, entonces se dice que la *curva C es cerrada.* La figura 5 muestra una curva suave y cerrada.

El teorema siguiente se refiere a la integral de línea de un campo vectorial conservador sobre una curva cerrada y suave a trozos, y se deduce inmediatamente del teroema 14.3.1

14.3.2 Teorema

Si C es una curva cerrada y suave a trozos contenida en algún disco abierto B de R^2 y $\mathbf{F}$ es una campo vectorial conservador continuo en B, entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 0$$

Demostración Se aplicará el teorema 14.3.1, y como C es cerrada, entonces el punto (x_1, y_1) coincide con el punto (x_2, y_2). Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1) \\ &= 0\end{aligned}$$

■

▶ ***EJEMPLO 3*** Una partícula se mueve sobre la circunferencia

$$\mathbf{R}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Calcule el trabajo total realizado si el movimiento lo ocasiona el campo de fuerza

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{xe^{2y}}{x^2 + 2}\right)\mathbf{i} + e^{2y} \ln (x^2 + 2)\mathbf{j}$$

Solución Sean

$$M(x, y) = \frac{xe^{2y}}{x^2 + 2} \qquad N(x, y) = e^{2y} \ln (x^2 + 2)$$

$$M_y(x, y) = \frac{2xe^{2y}}{x^2 + 2} \qquad N_x(x, y) = \frac{2xe^{2y}}{x^2 + 2}$$

Como $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, entonces **F** es conservador. Además, la circunferencia es una curva cerrada y suave. Por tanto, si W es el trabajo realizado, del teorema 14.3.2 se tiene

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$
$$= 0$$

◀

Ahora se extenderá el estudio a las funciones de tres variables. El enunciado del teorema siguiente y su demostración son análogos a los del teorema 14.3.1. Se le pedirá que efectúe la demostración en el ejercicio 32.

14.3.3 Teorema

Sea C cualquier curva suave a trozos contenida en un disco B de R^3 desde el punto (x_1, y_1, z_1) hasta el punto (x_2, y_2, z_2). Si **F** es un campo vectorial conservador continuo sobre B y ϕ es una función potencial para **F**, entonces la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

es independiente de la trayectoria C, y

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1)$$

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** En el ejemplo 2 de la sección 14.1 se demostró que el campo vectorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \operatorname{sen} z + 2yz)\mathbf{i} + (2xz + 2y)\mathbf{j} + (e^x \cos z + 2xy + 3z^2)\mathbf{k}$$

es un gradiente $\nabla f(x, y, z)$, y

$$f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} z + 2xyz + y^2 + z^3$$

Así, **F** es un campo vectorial conservador. Por tanto, si C es cualquier curva suave a trozos desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, -2, \pi)$, entonces se infiere, por el teorema 14.3.3, que la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

es independiente de la trayectoria y su valor es

$$f(1, -2, \pi) - f(0, 0, 0) = (e \operatorname{sen} \pi - 4\pi + 4 + \pi^3) - 0$$
$$= \pi^3 - 4\pi + 4$$

En el próximo ejemplo, se evaluará una integral de línea independiente de la trayectoria cuando el integrando se ha expresado con la notación de la forma diferencial y se emplearán ecuaciones paramétricas de la curva C en lugar de una ecuación vectorial.

EJEMPLO 4 Demuestre que la integral de línea

$$\int_C (4x + 2y - z)\,dx + (2x - 2y + z)\,dy + (-x + y + 2z)\,dz$$

es independiente de la trayectoria, y evalúe la integral si C es una curva suave a trozos de $(4, -2, 1)$ a $(-1, 2, 0)$.

Solución Sean

$$M(x, y, z) = 4x + 2y - z \qquad N(x, y, z) = 2x - 2y + z \qquad R(x, y, z) = -x + y + 2z$$
$$M_y(x, y, z) = 2 \qquad N_x(x, y, z) = 2 \qquad R_x(x, y, z) = -1$$
$$M_z(x, y, z) = -1 \qquad N_z(x, y, z) = 1 \qquad R_y(x, y, z) = 1$$

Como

$$M_y(x, y, z) = N_x(x, y, z) \qquad M_z(x, y, z) = R_x(x, y, z) \qquad N_z(x, y, z) = R_y(x, y, z)$$

el campo vectorial $(4x + 2y - z)\mathbf{i} + (2x - 2y + z)\mathbf{j} + (-x + y + 2z)\mathbf{k}$ es conservador. Por tanto, del teorema 14.3.3, la integral de línea es independiente de la trayectoria. Se considerará la trayectoria como el segmento de recta de $(4, -2, 1)$ a $(-1, 2, 0)$. Un conjunto de números directores de la recta que pasa por esos dos puntos es $[5, -4, 1]$. Por tanto, las ecuaciones de la recta son

$$\frac{x + 1}{5} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z}{1}$$

En consecuencia, las ecuaciones paramétricas del segmento de recta son

$$x = -5t - 1 \qquad y = 4t + 2 \qquad z = -t \qquad -1 \le t \le 0$$

Así,

$$\int_C (4x + 2y - z)\,dx + (2x - 2y + z)\,dy + (-x + y + 2z)\,dz$$
$$= \int_{-1}^{0} [4(-5t - 1) + 2(4t + 2) - (-t)](-5\,dt)$$
$$+ \int_{-1}^{0} [2(-5t - 1) - 2(4t + 2) + (-t)](4\,dt)$$
$$+ \int_{-1}^{0} [-(-5t - 1) + (4t + 2) + 2(-t)](-dt)$$
$$= \int_{-1}^{0} (-28t - 27)dt$$
$$= -14^2 - 27t\Big]_{-1}^{0}$$
$$= -13$$

La integral de línea del ejemplo 4 también puede calcularse si se determina la función potencial del campo vectorial conservativo $(4x + 2y - z)\mathbf{i} + (2x - 2y + z)\mathbf{j} + (-x + y + 2z)\mathbf{k}$. Se le pedirá que haga esto en el ejercicio 31.

EJEMPLO 5 Suponga que $\mathbf{F}$ es el campo de fuerza gravitacional ejercido por una partícula de masa M unidades ubicado en el origen sobre una partícula de masa 1 unidad localizada en el punto $P(x, y, z)$. Entonces, de la sección 14.1,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Calcule el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}$ que mueve una partícula de masa 1 unidad a lo largo de una curva suave C desde el punto $(0, 3, 4)$ hasta el punto $(2, 2, 1)$.

Solución En el ejemplo ilustrativo 5 de la sección 14.1 se demostró que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservador y que una función potencial para $\mathbf{F}$ está determinada por

$$\phi(x, y, z) = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} GM$$

Si W es la medida del trabajo realizado al mover la partícula de masa 1 unidad a lo largo de C, entonces

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

Por el teorema 14.3.3, la integral de línea es independiente de la trayectoria, y

$$\begin{aligned} W &= \phi(2, 2, 1) - \phi(0, 3, 4) \\ &= \frac{GM}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} - \frac{GM}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{GM}{3} - \frac{GM}{5} \\ &= \tfrac{2}{15}GM \end{aligned}$$

◄

Ahora se mostrará cómo los resultados de esta sección conducen a una importante conclusión en física. Si el movimiento de una partícula es causado por un campo vectorial conservador $\mathbf{F}$, entonces la **energía potencial** de la partícula en el punto (x, y, z) está definida por un campo escalar E tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla E(x, y, z)$$

Esto es, $-E$ es una función potencial de $\mathbf{F}$. Se utilizará la notación $E(P)$ para denotar la energía potencial de la partícula en el punto P. Si W es la medida del trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al desplazar una partícula a lo largo de una curva suave a trozos C desde un punto A hasta un punto B, entonces, por el teorema 14.3.3,

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

$$W = -E(x, y, z)\Big]_A^B$$

$$W = -[E(B) - E(A)]$$

$$W = E(A) - E(B) \qquad (3)$$

Por tanto, W es la diferencia de las energías potenciales de la partícula en A y B.

Ahora suponga que la partícula está ubicada en un punto A en el tiempo t_1, y en el punto B en el tiempo t_2, y que la curva C tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \qquad t_1 \leq t \leq t_2$$

Entonces los vectores velocidad y aceleración en el tiempo t son $\mathbf{V}(t)$ y $\mathbf{A}(t)$ definidos por

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t) \quad \text{y} \quad \mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t)$$

La rapidez de la partícula en el tiempo t se denota por $v(t)$, donde $v(t) = \|\mathbf{V}(t)\|$. Entonces, otra fórmula para calcular W está dada por

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\, dt$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{V}(t)\, dt \qquad (4)$$

La segunda ley de Newton acerca del movimiento establece que si la fuerza $\mathbf{F}$ actúa sobre una partícula de masa m unidades, entonces

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) = m\mathbf{A}(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) = m\mathbf{V}'(t)$$

Al sustituir de esta ecuación en (4) se tiene

$$W = \int_{t_1}^{t_2} m[\mathbf{V}'(t) \cdot \mathbf{V}(t)]\, dt$$

Como $D_t[\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{V}(t)] = 2\mathbf{V}'(t) \cdot \mathbf{V}(t)$ y $\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{V}(t) = [v(t)]^2$, se tiene

$$W = \tfrac{1}{2}m \int_{t_1}^{t_2} D_t[\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{V}(t)]\, dt$$

$$W = \tfrac{1}{2}m \int_{t_1}^{t_2} D_t[v(t)]^2\, dt$$

$$W = \tfrac{1}{2}m[v(t)]^2 \Big]_{t_1}^{t_2}$$

$$W = \tfrac{1}{2}m[v(t_2)]^2 - \tfrac{1}{2}m[v(t_1)]^2 \qquad (5)$$

En física, la **energía cinética** de una partícula se define como $\frac{1}{2}mv^2$. Por tanto, la ecuación (5) afirma que el trabajo efectuado al desplazar una partícula a lo largo de C desde un punto A hasta un punto B es la variación en la energía cinética de una partícula. Si se emplea la notación $K(P)$ para denotar la energía cinética de una partícula ubicada en el punto P, entonces (5) puede expresarse como

$$W = K(B) - K(A)$$

Al igualar los valores de W de (3) y de esta ecuación se obtiene

$$E(A) - E(B) = K(B) - K(A)$$

$$E(A) + K(A) = E(B) + K(B)$$

La ecuación anterior establece que la suma de las energías potencial y cinética son iguales en el punto inicial A y en el punto final B. Como A y B pueden ser puntos cualesquiera de C, la suma de las dos energías es constante a lo largo de C; esto es, la energía total de la partícula permanece sin alteración durante el movimiento. Este hecho es un concepto muy importante en física denominado **ley de conservación de la energía.** Por esta razón, se utilizó el término *conservador* para un campo de fuerza que es un gradiente.

EJERCICIOS 14.3

En los ejercicios 1 a 12, utilice el resultado del ejercicio de la sección 14.1 indicado para demostrar que el valor de la integral de línea es independiente de la trayectoria. Después evalúe la integral de línea aplicando el teorema 14.3.1 o el teorema 14.3.3 y empleando la función potencial obtenida en el ejercicio indicado. En cada ejercicio C es cualquier curva suave a trozos desde el punto A hasta el punto B.

1. $\int_C y\,dx + x\,dy$; A es $(1, 4)$ y B es $(3, 2)$; ejercicio 21.

2. $\int_C x\,dx + y\,dy$; A es $(-5, 2)$ y B es $(1, 3)$; ejercicio 22.

3. $\int_C e^x \operatorname{sen} y\,dx + e^x \cos y\,dy$; A es $(0, 0)$ y B es $(2, \frac{1}{2}\pi)$; ejercicio 23.

4. $\int_C (\operatorname{sen} y \operatorname{senh} x + \cos y \cosh x)\,dx + (\cos y \cosh x - \operatorname{sen} 2y \operatorname{senh} x)\,dy$; A es $(1, 0)$ y B es $(2, \pi)$; ejercicio 24.

5. $\int_C (2xy^2 - y^3)\,dx + (2x^2y - 3xy^2 + 2)\,dy$; A es $(-3, -1)$ y B es $(1, 2)$; ejercicio 25.

6. $\int_C (3x^2 + 2y - y^2e^x)\,dx + (2x - 2ye^x)\,dy$; A es $(0, 2)$ y B es $(1, -3)$; ejercicio 26.

7. $\int_C (x^2 - y)\,dx - (x - 3z)\,dy + (z + 3y)\,dz$; A es $(-3, 1, 2)$ y B es $(3, 0, 4)$; ejercicio 27.

8. $\int_C yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$; A es $(0, -2, 5)$ y B es $(4, 1, -3)$; ejercicio 28.

9. $\int_C (ze^x + e^y)\,dx + (xe^y - e^z)\,dy + (-ye^z + e^x)\,dz$; A es $(1, 0, 2)$ y B es $(0, 2, 1)$; ejercicio 29.

10. $\int_C (\tan y + 2xy \sec z)\,dx + (x \sec^2 y + x^2 \sec z)\,dy + \sec z(x^2 y \tan z - \sec z)\,dz$; A es $(2, \frac{1}{6}\pi, 0)$ y B es $(3, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi)$; ejercicio 30.

11. $\int_C (2x \cos y - 3)dx - (x^2 \operatorname{sen} y + z^2)dy - (2yz - 2)dz$; A es $(-1, 0, 3)$ y B es $(1, \pi, 0)$; ejercicio 31.

12. $\int_C (2y^3 - 8xz^2)dx + (6xy^2 + 1)dy - (8x^2z + 3z^2)dz$; A es $(2, 0, 0)$ y B es $(3, 2, 1)$; ejercicio 32.

En los ejercicios 13 a 20, demuestre que el valor de la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ *para el campo vectorial* **F** *y la curva C indicados es independiente de la trayectoria, y evalúe la integral de línea.*

13. $\mathbf{F}(x, y) = 2(x - y)\mathbf{i} + 2(3y - x)\mathbf{j}$; C es el arco ubicado en el primer cuadrante de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ desde el punto sobre el eje x hasta el punto sobre el eje y.

14. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 + 6xy - 2y^2)\mathbf{i} + (3x^2 - 4xy + 3y^2)\mathbf{j}$; C es el arco ubicado en el primer cuadrante de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ limitado por los puntos donde intersecta a los ejes coordenados.

15. $\mathbf{F}(x, y) = (4e^{2x} - 3e^xe^y)\mathbf{i} + (2e^{2y} - 3e^xe^y)\mathbf{j}$; C es el arco de la parábola $y^2 = 4x$ desde su vértice hasta el extremo del lado recto del primer cuadrante.

16. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \cos y\mathbf{i} - e^x \operatorname{sen} y\mathbf{j}$; C es el segmento de la recta $3x + 4y = 12$ desde el punto sobre el eje x hasta el punto sobre el eje y.

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$; C es la traza del elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 9$ en el plano xz desde la parte positiva del eje x hasta la parte positiva del eje z.

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2)\mathbf{i} + (x^2 - 2yz)\mathbf{j} + (2xz - y^2)\mathbf{k}$; C es la traza de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en el plano yz desde la parte positiva del eje y hasta la parte positiva del eje z.

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2ye^{2x}\mathbf{i} + e^{2x}\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}$; C es cualquier curva suave a trozos desde el punto $(\ln 2, 1, 1)$ hasta el punto $(\ln 2, 2, 2)$.

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{x} + \frac{z}{y^2}\right)\mathbf{j} - \left(\frac{1}{y} + \frac{x}{z^2}\right)\mathbf{k}$; C es cualquier curva suave a trozos desde el punto $(1, 2, -1)$ hasta el punto $(2, 4, -2)$.

En los ejercicios 21 a 30, demuestre que el valor de la integral de línea es independiente de la trayectoria, y calcule su valor de cualquier manera conveniente. En cada ejercicio, C es cualquier curva suave a trozos desde el punto A hasta el punto B.

21. $\int_C (2y - x)\,dx + (y^2 + 2x)\,dy$; A es $(0, -1)$ y B es $(1, 2)$.

22. $\int_C (\ln x + 2y)\,dx + (e^y + 2x)\,dy$; A es $(3, 1)$ y B es $(1, 3)$.

23. $\int_C \tan y\,dx + x \sec^2 y\,dy$; A es $(-2, 0)$ y B es $(4, \frac{1}{4}\pi)$.

24. $\int_C \operatorname{sen} y\, dx + (\operatorname{sen} y + x\cos y)\, dy$; A es $(-2, 0)$ y B es $(2, \frac{1}{6}\pi)$.

25. $\displaystyle\int_C \frac{2y}{(xy+1)^2}\, dx + \frac{2x}{(xy+1)^2}\, dy$; A es $(0, 2)$ y B es $(1, 0)$.

26. $\displaystyle\int_C \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\, dx + \frac{y}{x^2+y^2+z^2}\, dy + \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\, dz$; A es $(1, 0, 0)$ y B es $(1, 2, 3)$.

27. $\int_C (y + z)\, dx + (x + z)\, dy + (x + y)\, dz$; A es $(0, 0, 0)$ y B es $(1, 1, 1)$.

28. $\int_C (yz + x)\, dx + (xz + y)\, dy + (xy + z)\, dz$; A es $(0, 0, 0)$ y B es $(1, 1, 1)$.

29. $\int_C (e^x \operatorname{sen} y + yz)\, dx + (e^x \cos y + z \operatorname{sen} y + xz)\, dy + (xy - \cos y)\, dz$; A es $(2, 0, 1)$ y B es $(0, \pi, 3)$.

30. $\int_C (2x \ln yz - 5ye^x)\, dx - (5e^x - x^2y^{-1})\, dy + (x^2z^{-1} + 2z)\, dz$; A es $(2, 1, 1)$ y B es $(3, 1, e)$.

31. Evalúe la integral del ejemplo 4 determinando una función potencial para el campo vectorial conservador

$$(4x + 2y - z)\mathbf{i} + (2x - 2y + z)\mathbf{j} + (-x + y + 2z)\mathbf{k}$$

y aplicando el teorema 14.3.3.

32. Demuestre el teorema 14.3.3.

En los ejercicios 33 a 36, calcule el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de C si el movimiento es causado por el campo de fuerza **F**. *Suponga que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons. Sugerencia: primero demuestre que* **F** *es conservador.*

33. $\mathbf{F}(x, y) = 3(x + y)^2\mathbf{i} + 3(x + y)^2\mathbf{j}$; C: el arco de la parábola $y = x^2$ desde su vértice hasta el punto $(2, 4)$.

34. $\mathbf{F}(x, y) = (2xy - 5y + 2y^2)\mathbf{i} + (x^2 - 5x + 4xy)\mathbf{j}$; C: un cuarto de la circunferencia $\mathbf{R}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j}$, $0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$.

35. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y^2z^3\mathbf{i} + 4xyz^3\mathbf{j} + 6xy^2z^2\mathbf{k}$; C: el arco de $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ desde $t = 1$ hasta $t = 2$.

36. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4y^2z\mathbf{i} + 8xyz\mathbf{j} + 4(3z^3 + xy^2)\mathbf{k}$; C: el arco de $\mathbf{R}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ desde $t = 0$ hasta $t = \frac{1}{3}\pi$.

37. Si **F** es el campo de fuerza, con régimen de cuadrado inverso, definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

donde k es una constante positiva, calcule el trabajo realizado por **F** al desplazar una partícula a lo largo del segmento de recta desde el punto $(3, 0, 0)$ hasta el punto $(3, 0, 4)$. Evalúe la integral de línea mediante dos métodos: **(a)** utilice una función potencial para **F**; **(b)** no emplee una función potencial para **F**.

14.4 TEOREMA DE GREEN

El teorema de Green, así llamado en honor del matemático y físico inglés **George Green** (1793–1841) quien lo presentó en un trabajo sobre aplicaciones de las matemáticas a la electricidad y el magnetismo, expresa una doble integral sobre una región plana R en términos de una integral de línea sobre la curva frontera de R.

Antes de proseguir revise las definiciones 9.1.1–9.1.3 concernientes a curvas [redacted], [redacted] y [redacted] respectivamente. El enunciado del teorema de Green se refiere a una integral de línea sobre una curva cerrada, simple y suave a trozos que constituye la frontera de una región plana, y el sentido en que se recorre C es el contrario al giro de las manecillas del reloj. La figura 1 muestra una region R junto con la curva C la cuál es su frontera. La integral de línea sobre C, recorrida en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj, se denota por $\oint_C$.

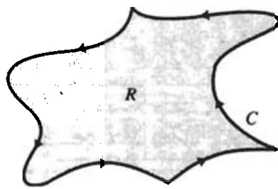


FIGURA 1

14.4.1 Teorema de Green

Sean M y N funciones de las dos variables x y y tales que sus primeras derivadas parciales son continuas en un disco abierto B de R^2. Si C es una curva cerrada, simple y suave a trozos contenida completamente en B, y si R es la región limitada por C, entonces

$$\oint_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

La demostración del teorema de Green para todas las regiones limitadas por curvas que son suaves a trozos, simples y cerradas pertenece a un curso de Cálculo avanzado. Sin embargo, se demostrará el teorema para

un tipo particular de regiones, aquellas para las cuales cada recta horizontal y cada recta vertical intersectan a su curva frontera a lo más en dos puntos. Enseguida se presenta la demostración

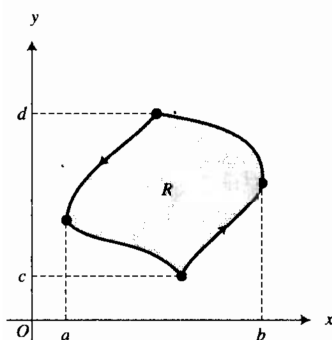


FIGURA 2

Demostración Sea R una región del plano xy que puede definirse por

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\} \tag{1}$$

o

$$R = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\} \tag{2}$$

donde las funciones f_1, f_2, g_1 y g_2 son suaves. La figura 2 muestra dicha región R, la cual se considera definida por (1) en la figura 3, y por (2) en la figura 4. La demostración consiste en probar que

$$\oint_C M(x, y)\, dx = \iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\, dA \tag{3}$$

y

$$\oint_C N(x, y)\, dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\, dA \tag{4}$$

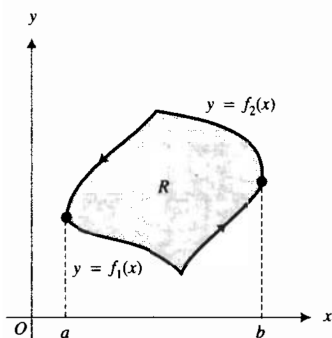


FIGURA 3

A fin de demostrar (3) se considera a R como una región [redacted]. Refiérase a la figura 3. Sea C_1 la gráfica de $y = f_1(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$; esto es, C_1 es la parte inferior de la curva frontera C recorrida de izquierda a derecha. Sea C_2 la gráfica de $y = f_2(x)$ desde $x = b$ hasta $x = a$; es decir, C_2 es la parte superior de la curva frontera C recorrida de derecha a izquierda. Considere la integral de línea $\oint_C M(x, y)\, dx$.

$$\begin{aligned}\oint_C M(x, y)\, dx &= \int_{C_1} M(x, y)\, dx + \int_{C_2} M(x, y)\, dx \\ &= \int_a^b M(x, f_1(x))dx + \int_b^a M(x, f_2(x))\, dx \\ &= \int_a^b M(x, f_1(x))dx - \int_a^b M(x, f_2(x))\, dx\end{aligned}$$

[redacted] $\displaystyle\int_a^b [M(x, f_1(x))dx - M(x, f_2(x))]\, dx$ (5)

Ahora se tratará la integral doble $\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\, dA$, donde R está [redacted]). Entonces

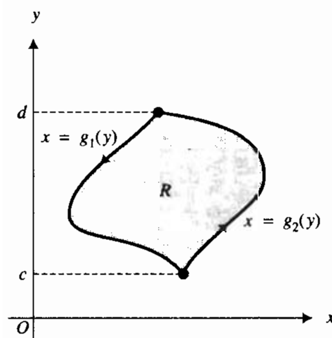


FIGURA 4

$$\begin{aligned}\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\, dA &= \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\, dy\, dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\, dy \right) dx \\ &= \int_a^b M(x, y) \Big]_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx \\ &= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))]\, dx\end{aligned} \tag{6}$$

Al comparar (5) y (6) se deduce que se cumple (3).

Para demostrar (4), se considera que R es una región definida por (2), como en la figura 4. Los detalles de la demostración se dejan como ejercicio (vea el ejercicio 43).

Si se suman los miembros correspondientes de las ecuaciones (3) y (4) se obtiene el teorema de Green para esta región R. ■

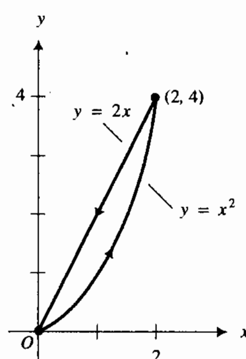


FIGURA 5

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Se aplicará el teorema de Green para evaluar la integral $\oint_C y^2\,dx + 4xy\,dy$, donde C es la curva cerrada que consiste del arco de parábola $y = x^2$ desde el origen hasta el punto (2, 4) y el segmento de recta desde el punto (2, 4) hasta el origen. La región R con la frontera C se muestra en la figura 5. Del teorema de Green,

$$\begin{aligned}\oint_C y^2\,dx + 4xy\,dy &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(4xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right] dA \\ &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4y - 2y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^2 y^2\Big]_{x^2}^{2x} dx \\ &= \int_0^2 (4x^2 - x^4)\,dx \\ &= \tfrac{4}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5\Big]_0^2 \\ &= \tfrac{64}{15}\end{aligned}$$

A fin de mostrar la ventaja de emplear el teorema de Green, se evaluará la misma integral de línea mediante el método de la sección 14.2. Si C_1 es el arco de la parábola $y = x^2$ desde (0, 0) hasta (2, 4) y C_2 es el segmento de recta desde (2, 4) hasta (0, 0), entonces

$$\oint_C y^2\,dx + 4xy\,dy = \int_{C_1} y^2\,dx + 4xy\,dy + \int_{C_2} y^2\,dx + 4xy\,dy$$

Las ecuaciones paramétricas para C_1 son

$$x = t \qquad y = t^2 \qquad 0 \le t \le 2$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_{C_1} y^2\,dx + 4xy\,dy &= \int_0^2 (t^2)^2\,dt + 4(t)(t^2)(2t\,dt) \\ &= \int_0^2 9t^4\,dt \\ &= \tfrac{9}{5}t^5\Big]_0^2 \\ &= \tfrac{288}{5}\end{aligned}$$

El arco C_2 puede representarse paramétricamente por

$$x = t \qquad y = 2t \qquad \text{de } t = 2 \text{ a } t = 0$$

Así,

$$\int_{C_2} y^2\,dx + 4xy\,dy = \int_2^0 (2t)^2\,dt + 4(t)(2t)(2\,dt)$$
$$= \int_2^0 20t^2\,dt$$
$$= \tfrac{20}{3}t^3\Big]_2^0$$
$$= -\tfrac{160}{3}$$

En consecuencia,

$$\oint_C y^2\,dx + 4xy\,dy = \tfrac{288}{5} - \tfrac{160}{3}$$
$$= \tfrac{64}{15}$$

lo cual concuerda con el resultado obtenido al utilizar el teorema de Green. ◀

▶ ***EJEMPLO 1*** Utilice el teorema de Green para calcular el trabajo total realizado al mover un objeto en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj una vez sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ si el movimiento es causado por el campo de fuerza $\mathbf{F}(x, y) = (\text{sen } x - y)\mathbf{i} + (e^y - x^2)\mathbf{j}$. Suponga que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons.

Solución Si W joules es el trabajo realizado, entonces

$$W = \oint_C (\text{sen } x - y)\,dx + (e^y - x^2)\,dy$$

donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. Del teorema de Green,

$$W = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(e^y - x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(\text{sen } x - y)\right] dA$$
$$= \iint_R (-2x + 1)\,dA$$

Se emplearán coordenadas polares para evaluar la integral doble. Con $x = r\cos\theta$ y $dA = r\,dr\,d\theta$ se tiene

$$W = \int_0^{2\pi}\int_0^a (-2r\cos\theta + 1)r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a (-2r^2\cos\theta + r)\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} -\frac{2}{3}r^3\cos\theta + \frac{r^2}{2}\Big]_0^a\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{2}{3}a^3\cos\theta + \frac{a^2}{2}\right)d\theta$$
$$= -\frac{2}{3}a^3\,\text{sen }\theta + \frac{a^2}{2}\theta\Big]_0^{2\pi}$$
$$= \pi a^2$$

<u>**Conclusión:**</u> El trabajo realizado es πa^2 joules. ◀

El teorema siguiente, el cual es una consecuencia del teorema de Green, proporciona un método útil para calcular el área de una región limitada por una curva cerrada, simple y suave a trozos.

14.4.2 Teorema

Si R es una región que tiene como su frontera una curva C cerrada, simple y suave a trozos, y A unidades cuadradas es el área de R, entonces

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

Demostración En el enunciado del teorema de Green, considere $M(x, y) = -\frac{1}{2}y$ y $N(x, y) = \frac{1}{2}x$. Entonces

$$\oint_C -\frac{1}{2}y\,dx + \frac{1}{2}x\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{2}y\right)\right] dA$$

$$= \iint_R \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) dA$$

$$= \iint_R dA$$

Como $\iint_R dA$ es la medida del área de R, entonces

$$\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = A$$

■

▶ ***EJEMPLO 2*** Utilice el teorema 14.4.2 para calcular el área de la región acotada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solución Las ecuaciones paramétricas para la elipse son

$$x = a\cos t \qquad y = b\,\text{sen}\,t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Entonces $dx = -a\,\text{sen}\,t\,dt$ y $dy = b\cos t\,dt$. Si C es la elipse y A unidades cuadradas es el área de la región limitada por C, entonces, por el teorema 14.4.2,

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(a\cos t)(b\cos t\,dt) - (b\,\text{sen}\,t)(-a\,\text{sen}\,t\,dt)]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt$$

$$= \pi ab$$

<u>**Conclusión:**</u> El área es πab unidades cuadradas. ◀

EJEMPLO 3 Utilice el teorema de Green para evaluar la integral

$$\oint_C (x^4 - 3y)\,dx + (2y^3 + 4x)\,dy$$

si C es la elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Solución Del teorema de Green,

$$\oint_C (x^4 - 3y)\,dx + (2y^3 + 4x)\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(2y^3 + 4x) - \frac{\partial}{\partial y}(x^4 - 3y)\right] dA$$

$$= \iint_R (4 + 3)\,dA$$

$$= 7 \iint_R dA$$

La doble integral $\iint_R dA$ es la medida del área de la región acotada por la elipse. Del ejemplo 2 con $a = 3$ y $b = 2$, el área de región limitada por la elipse es 6π unidades cuadradas. Por tanto,

$$\oint_C (x^4 - 3y)\,dx + (2y^3 + 4x)\,dy = 42\pi$$

Existen dos formas vectoriales del teorema de Green, las cuales se obtendrán a continuación. Sea C una curva cerrada, simple y suave a trozos del plano xy. Suponga que una ecuación vectorial de C es

$$\mathbf{R}(s) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

con $x = f(s)$ y $y = g(s)$, donde s unidades es la longitud de arco medida en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj a partir de un punto particular P_0 de C hasta un punto P de C. Entonces si $\mathbf{T}(s)$ es el vector tangente unitario de C en P, $\mathbf{T}(s) = D_s\mathbf{R}(s)$. Así,

$$\mathbf{T}(s) = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} \tag{7}$$

El vector normal $\mathbf{N}(s)$ definido por

$$\mathbf{N}(s) = \frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j} \tag{8}$$

es un vector normal unitario de C en P. Este vector normal unitario se ha elegido en lugar de su valor negativo debido a que cuando el sentido en que se recorre C es contrario al giro de las manecillas del reloj, $\mathbf{N}(s)$ apuntará hacia afuera de la región R limitada por C. A este vector se le denomina **vector normal saliente unitario.** Vea la figura 6. Sea

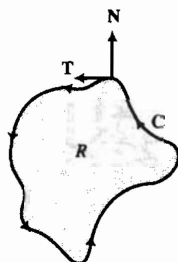


FIGURA 6

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

donde M y N satisfacen la hipótesis del teorema de Green. Como

$$\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s)\,ds = [M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}] \cdot \left(\frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}\right) ds$$

$$= M(x, y)\,dy - N(x, y)\,dx$$

entonces

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s)\, ds = \oint_C -N(x, y)\, dx + M(x, y)\, dy$$

Al aplicar el teorema de Green a la integral de línea del miembro derecho de esta ecuación se obtiene

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s)\, ds &= \iint_R \left[\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(-N)\right] dA \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA \\ &= \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA\end{aligned}$$

Esta forma vectorial del teorema de Green se enuncia formalmente en el teorema siguiente, llamado *teorema de la divergencia de Gauss* en honor al matemático y científico alemán **Karl Gauss** (1777–1855).

14.4.3 Teorema de la divergencia de Gauss en el plano

Considere las funciones M y N, la curva C y la región R como se definieron en el teorema de Green. Si $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ y $\mathbf{N}(s)$ es el vector normal saliente unitario de C en P, donde s unidades es la longitud de arco medida en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj desde un punto particular P_0 de C hasta P, entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA$$

EJEMPLO 4 Verifique el teorema de la divergencia de Gauss en el plano si

$$\mathbf{F}(x, y) = 2y\mathbf{i} + 5x\mathbf{j}$$

y R es la región limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Solución La frontera de R es la circunferencia unitaria que puede representarse paramétricamente por las ecuaciones

$$x = \cos s \qquad y = \operatorname{sen} s \qquad 0 \le s \le 2\pi$$

donde s es la longitud de arco desde el punto donde $s = 0$ hasta el punto P de C. Entonces una ecuación vectorial de C es

$$\mathbf{R}(s) = \cos s\mathbf{i} + \operatorname{sen} s\mathbf{j} \qquad 0 \le s \le 2\pi$$

De (8), el vector normal saliente unitario es

$$\mathbf{N}(s) = \cos s\mathbf{i} + \operatorname{sen} s\mathbf{j}$$

En un punto $P(\cos s, \operatorname{sen} s)$ de C, $\mathbf{F}$ tiene el valor $2 \operatorname{sen} s\mathbf{i} + 5 \cos s\mathbf{j}$. Por tanto,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds = \int_0^{2\pi} (2 \operatorname{sen} s\mathbf{i} + 5 \cos s\mathbf{j}) \cdot (\cos s\mathbf{i} + \operatorname{sen} s\mathbf{j})\, ds$$
$$= \int_0^{2\pi} (2 \operatorname{sen} s \cos s + 5 \operatorname{sen} s \cos s)\, ds$$
$$= 7 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} s \cos s\, ds$$
$$= \frac{7}{2} \operatorname{sen}^2 s \Big]_0^{2\pi}$$
$$= 0$$

Como $M = 2y$, $\dfrac{\partial M}{\partial x} = 0$, y puesto que $N = 5x$, $\dfrac{\partial N}{\partial y} = 0$. Así,

$$\iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA$$
$$= 0$$

De esta manera se ha verificado el teorema de la divergencia de Gauss en el plano para **F** y R. ◀

Observe en el ejemplo 4 que $\iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA$ es más fácil de calcular que $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds$.

Si **F** es un campo vectorial y div **F** = 0, entonces se dice que **F** está **libre de divergencia.** El campo vectorial del ejemplo 4 está libre de divergencia. En el estudio de hidrodinámica (moviento de los fluidos), si el campo de velocidad de un fluido está libre de divergencia, entonces el fuido se denomina **incompresible.** En la teoría de la electricidad y el magnetismo, un campo vectorial que está libre de divergencia se dice que es **solenoidal.**

A continuación se utilizará el teorema de la divergencia de Gauss en el plano para dar una interpretación física de la divergencia de un campo vectorial. Considere las funciones M y N, la región R y la curva C como se definieron en el teorema de Green. Suponga que **F** es el campo de velocidad de un fluido bidimensional (es decir, con profundidad constante) y que **F** está definido por $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$. Además suponga que el fluido fluye a través de la región R que tiene la curva C como su frontera, para la cual el sentido en que se recorre C es contrario al giro de las manecillas del reloj. Se asumirá que el fluido tiene una densidad constante en R, y por conveniencia, la densidad es de valor unitario. El flujo del campo vectorial **F** a través de C es la tasa a la que el fluido atraviesa C en dirección perpendicular a C. Se mostrará cómo este flujo puede expresarse como una integral de línea.

Sea s la longitud de arco de la curva C medida desde un punto particular P_0 hasta un punto P. Divida la curva C en n arcos y sea $\Delta_i s$ la longitud del i-ésimo arco que contiene al punto $P_i(x_i, y_i)$, donde s_i es la longitud del arco de C desde P_0 hasta P_i. Como **F** es continuo, entonces una aproximación de la velocidad del fluido en cada punto del i-ésimo arco es $\mathbf{F}(x_i, y_i)$. La cantidad de fluido que cruza el arco por unidad de tiempo está dada aproximadamente por el área de un paralelogramo que tiene un par de lados opuestos de longitud $\Delta_i s$ y una altura de longitud $\mathbf{F}(x_i, y_i) \cdot \mathbf{N}(s_i)$ unidades, donde $\mathbf{N}(s_i)$ es el vector normal saliente unitario de C en $P_i(x_i, y_i)$. Vea la figura 7. El área del parelelogramo es $\mathbf{F}(x_i, y_i) \cdot \mathbf{N}(s_i)\, \Delta_i s$ unidades cuadradas. La cantidad total de fluido que atraviesa C por unidad de tiempo está dada aproximadamente por

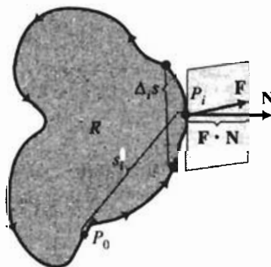


FIGURA 7

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(x_i, y_i) \cdot \mathbf{N}(s_i)\, \Delta_i s$$

Al tomar el límite de esta suma conforme n se incrementa sin límite y como cada $\Delta_i s$ tiende a cero, se obtiene la integral de línea

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s)\, ds$$

la cual se denomina **flujo** de **F** a través de C.

Ahora bien, sea $\overline{P}(\overline{x}, \overline{y})$ un punto particular de R. Considere una circunferencia que tiene centro en $\overline{P}$ y radio pequeño δ, y denótela por C_δ. Sea R_δ la región limitada por C_δ. Entonces

$$\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } C_\delta = \oint_{C_\delta} \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}\, ds$$

Al aplicar el teorema 14.4.3 se tiene

$$\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } C_\delta = \iint_{R_\delta} \text{div } \mathbf{F}\, dA$$

Si M_x y N_y son continuas en R_δ, entonces div **F** es continua en esa región, y para una δ pequeña, div **F** en R_δ es aproximadamente $\mathbf{F}(\overline{x}, \overline{y})$. Así,

$$\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } C_\delta \approx \iint_{R} \text{div } \mathbf{F}(\overline{x}, \overline{y})\, dA$$

Como div $\mathbf{F}(\overline{x}, \overline{y})$ es constante y $\iint_R dA$ es la medida del área de una circunferencia de radio δ, entonces se tiene

$$\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } C_\delta \approx \text{div } \mathbf{F}(\overline{x}, \overline{y})\, (\pi\delta^2) \tag{9}$$

Recuerde que el flujo de **F** a través de C_δ es la cantidad total de fluido que atraviesa C_δ por unidad de tiempo. Por tanto, de (9), div $\mathbf{F}(\overline{x}, \overline{y})$ puede interpretarse como la medida aproximada de la tasa de flujo del fluido por unidad de área que sale del punto $(\overline{x}, \overline{y})$. Si div $\mathbf{F}(x, y) > 0$, se dice que el fluido tiene una **fuente** en $(\overline{x}, \overline{y})$. Si div $\mathbf{F}(\overline{x}, \overline{y}) < 0$, entonces el fluido tiene una **antifuente** o **sumidero** en $(\overline{x}, \overline{y})$. Si **F** está libre de divergencia en todos los puntos de una región, entonces no existen fuentes ni antifuentes en la región. Como se mencionó anteriormente, el fluido es incompresible.

La palabra *flujo* normalmente significa escurrimiento o fluencia; sin embargo, el término *flujo* se aplica a campos vectoriales en general, no sólo a aquellos asociados con la velocidad de un fluido. De esta manera, si **F** es un campo vectorial, entonces

$$\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } C = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds \tag{10}$$

▶ ***EJEMPLO 5*** El campo de velocidad de un fluido está definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = (5x - y)\mathbf{i} + (x^2 - 3y)\mathbf{j}$$

Calcule la intensidad (tasa) de fluencia del fluido cuando sale de una región limitada por una curva C cerrada, simple y suave cuya área es de 150 cm^2.

Solución La intensidad de fluencia del fluido está dada por el flujo de **F** a través de C. De (10) y del teorema de la divergencia de Gauss en el plano se tiene

$$\begin{aligned}
\text{flujo} &= \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds \\
&= \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA \\
&= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(5x - y) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 3y)\right] dA \\
&= \iint_R (5 - 3)\, dA \\
&= 2 \iint_R dA
\end{aligned}$$

Como el área de R es de 150 cm^2, entonces $\iint_R dA = 150$. Así,

$$\text{flujo} = 300$$

<u>Conclusión:</u> La intensidad de fluencia (o flujo) del fluido que sale de la región es 300 cm^2 por unidad de tiempo. ◀

A fin de obtener la segunda forma vectorial del teorema de Green se considerará el producto punto de $\mathbf{F}(x, y)$ y el vector tangente unitario $\mathbf{T}(s)$ definido por la ecuación (7). De este modo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{T}(s)\, ds &= [M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}] \cdot \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}\right) ds \\
&= M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy
\end{aligned}$$

De donde

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{T}(s) ds = \oint_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy \tag{11}$$

El rotacional de **F** en dos dimensiones se definió en la sección 14.1 como

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{k} &= \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \\
\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{k} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}
\end{aligned}$$

En consecuencia, de esta ecuación y (11), la ecuación del teorema de Green puede escribirse como

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{T}(s)\, ds = \iint_R \operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{k}\, dA$$

Esta forma vectorial del teorema de Green se enuncia formalmente en el teorema siguiente denominado *teorema de Stokes*, en honor al matemático y físico irlandés **George Stokes** (1819–1903).

14.4.4 Teorema de Stokes en el plano

Considere las funciones M y N, la curva C y la región R como se definieron en el teorema de Green. Si $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ y $\mathbf{T}(s)$ es el vector tangente unitario de C en P, donde s unidades es la longitud de arco medida desde un punto particular P_0 de C hasta P, entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_R \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA$$

EJEMPLO 6 Verifique el teorema de Stokes en el plano para $\mathbf{F}$ y la región R del ejemplo 4.

Solución Como en el ejemplo 4, el campo vectorial $\mathbf{F}$ está definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = 2y\mathbf{i} + 5x\mathbf{j}$$

y una ecuación vectorial de C es

$$\mathbf{R}(s) = \cos s\mathbf{i} + \operatorname{sen} s\mathbf{j} \qquad 0 \le s \le 2\pi$$

Como $\mathbf{T}(s) = D_s\mathbf{R}(s)$,

$$\mathbf{T}(s) = -\operatorname{sen} s\mathbf{i} + \cos s\mathbf{j}$$

En un punto $P(\cos s, \operatorname{sen} s)$ de C, $\mathbf{F}$ tiene el valor $2 \operatorname{sen} s\mathbf{i} + 5 \cos s\mathbf{j}$. Por tanto,

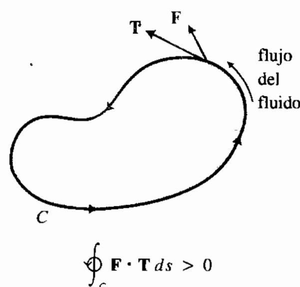
$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds &= \int_0^{2\pi} (2 \operatorname{sen} s\mathbf{i} + 5 \cos s\mathbf{j}) \cdot (-\operatorname{sen} s\mathbf{i} + \cos s\mathbf{j})\, ds \\
&= \int_0^{2\pi} (-2 \operatorname{sen}^2 s + 5 \cos^2 s)\, ds \\
&= -2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2s}{2} ds + 5 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2s}{2} ds \\
&= -s + \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2s + \tfrac{5}{2}s + \tfrac{5}{4} \operatorname{sen} 2s \Big]_0^{2\pi} \\
&= \tfrac{3}{2}s + \tfrac{7}{4} \operatorname{sen} 2s \Big]_0^{2\pi} \\
&= 3\pi
\end{aligned}$$

Como $N = 5x$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 5$, y como $M = 2y$, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2$. Así

$$\begin{aligned}
\iint_R \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\
&= \iint_R (5 - 2)\, dA
\end{aligned}$$

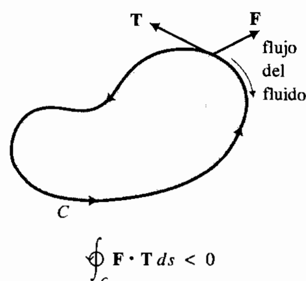
$$= 3 \iint_R dA$$
$$= 3\pi$$

De esta manera se ha verificado el teorema de Stokes para este campo vectorial **F** y esta región R. ◀



$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds > 0$

FIGURA 8



$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds < 0$

FIGURA 9

Si **F** es el campo de velocidad de un fluido, entonces el producto punto $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ es la componente tangencial de **F** y la integral de línea $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ se denomina **circulación** de **F** sobre o alrededor de C. De manera intuitiva, se puede pensar que la circulación es la suma de las componentes tangenciales de **F** alrededor de C. Si el desplazamiento alrededor de C se efectúa en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj y $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds > 0$, entonces el fluido circula en ese sentido; refiérase a la figura 8. Si $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds < 0$, la circulación del fluido se efectúa en el mismo sentido que el giro de las manecillas del reloj; consulte la figura 9.

Sea $\overline{P}(\overline{x}, \overline{y})$ un punto particular de la región R y sea C_δ la circunferencia de centro $\overline{P}$ y radio pequeño δ. Si R_δ es la región limitada por C_δ, entonces

$$\oint_{C_\delta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_{R_\delta} \text{rot}\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA$$

Si M_y y N_x son continuas en R_δ, entonces rot $\mathbf{F} \cdot \mathbf{k}$ es continua en esa región y para un valor pequeño de δ, rot $\mathbf{F} \cdot \mathbf{k}$ en R_δ es aproximadamente igual a rot $\mathbf{F}(\overline{x}, \overline{y}) \cdot \mathbf{k}$. Por tanto,

$$\oint_{C_\delta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \approx \text{rot}\, \mathbf{F}(\overline{x}, \overline{y}) \cdot \mathbf{k} \iint_{R_\delta} dA$$

$$\oint_{C_\delta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \approx \text{rot}\, \mathbf{F}(\overline{x}, \overline{y}) \cdot \mathbf{k}(\pi\delta^2)$$

De esta forma se interpreta rot $\mathbf{F}(\overline{x}, \overline{y}) \cdot \mathbf{k}$ como la medida aproximada de la intensidad (o tasa) de circulación por unidad de área en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj en el punto P. Cuando **F** y **T** son vectores ortogonales, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = 0$ por lo que rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. En tal caso se dice que **F** es **irrotacional.** Este término se emplea aún si **F** no es el campo de velocidad de un fluido.

EJERCICIOS 14.4

En los ejercicios 1 a 8, evalúe la integral de línea mediante el teorema de Green. Después verifique el resultado por medio del método de la sección 14.2.

1. $\oint_C 4y\, dx + 3x\, dy$, donde C es el cuadrado cuyos vértices son (0, 0), (1, 0), (1, 1) y (0, 1).
2. $\oint_C y^2\, dx + x^2\, dy$, donde C es el cuadrado del ejercicio 1.
3. $\oint_C 2xy\, dx - x^2y\, dy$, donde C es el triángulo cuyos vértices son (0, 0), (1, 0) y (0, 1).
4. La integral de línea del ejercicio 3, donde C es el triángulo cuyos vértices son (0, 0), (1, 0) y (1, 1).
5. $\oint_C x^2y\, dx - y^2x\, dy$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.
6. $\oint_C (x^2 - y^2)\, dx + 2xy\, dy$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.
7. La integral de línea del ejercicio 5, donde C es la curva cerrada que consiste del arco de $4y = x^3$ de (0, 0) a (2, 2) y el segmento de recta de (2, 2) a (0, 0).
8. La integral de línea del ejercicio 6, donde C es la curva cerrada del ejercicio 7.

En los ejercicios 9 a 20, utilice el teorema de Green para evaluar la integral de línea.

9. $\oint_C (x + y)\,dx + xy\,dy$, donde C es la curva cerrada determinada por el eje x, la recta $x = 2$ y la curva $4y = x^3$.

10. $\oint_C y^2\,dx + x^2\,dy$, donde C es la curva cerrada determinada por el eje x, la recta $x = 1$ y la curva $y = x^2$.

11. $\oint_C (-x^2 + x)\,dy$, donde C es la curva cerrada determinada por la recta $x - 2y = 0$ y la parábola $x = 2y^2$.

12. $\oint_C (x^2 + y)\,dx$, donde C es la curva cerrada determinada por el eje x y la parábola $y = 4 - x^2$.

13. $\oint_C \cos y\,dx + \cos x\,dy$, donde C es el rectángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}\pi, 0)$, $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ y $(0, \frac{1}{4}\pi)$.

14. $\oint_C e^{x+y}\,dx + e^{x+y}\,dy$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

15. $\oint_C (\operatorname{sen}^4 x + e^{2x})\,dx + (\cos^3 y - e^y)\,dy$, donde C es la curva $x^4 + y^4 = 16$.

16. $\oint_C x \operatorname{sen} y\,dx - y \cos x\,dy$, donde C es el rectángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}\pi, 0)$, $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ y $(0, \frac{1}{4}\pi)$.

17. $\oint_C \dfrac{x^2 y}{x^2 + 1}\,dx - \tan^{-1} x\,dy$, donde C es la elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$.

18. $\oint_C e^y \cos x\,dx + e^y \operatorname{sen} x\,dy$, donde C es la curva $x^6 + y^4 = 10$.

19. $\oint_C (e^x - x^2 y)\,dx + 3x^2 y\,dy$, donde C es la curva cerrada determinada por $y = x^2$ y $x = y^2$.

20. $\oint_C \tan y\,dx - x \tan^2 y\,dy$, donde C es la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$.

En los ejercicios 21 a 26, emplee el teorema 14.4.2 para calcular el área de la región.

21. La región limitada por el cuadrilátero cuyos vértices son $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(3, 2)$ y $(1, 1)$.

22. La región cuya frontera es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

23. La región limitada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$.

24. La región acotada por la parábola $y = 2x^2$ y la recta $y = 8x$.

25. La región limitada por la hipocicloide cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = a\cos^3 t \qquad y = a\operatorname{sen}^3 t$$

donde $a > 0$ y $0 \le t \le 2\pi$.

26. La región acotada inferiormente por el eje x y superiormente por un arco de la cicloide que tiene ecuaciones paramétricas

$$x = t - \operatorname{sen} t \qquad y = 1 - \cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

En los ejercicios 27 a 30, verifique el teorema de la divergencia de Gauss en el plano y el teorema de Stokes en el plano para **F** *y* R.

27. $\mathbf{F}(x, y) = 3x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ y R es la región acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

28. $\mathbf{F}(x, y) = 3y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}$ y R es la región limitada por $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

29. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ y R es la región acotada por la elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$.

30. $\mathbf{F}(x, y) = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ y R es la región limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

En los ejercicios 31 a 34, utilice el teorema de Green para calcular el trabajo total realizado al mover una vez un objeto en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj alrededor de la curva C si el movimiento es causado por el campo de fuerza $\mathbf{F}(x, y)$. *Suponga que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons.*

31. C es la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$;
$\mathbf{F}(x, y) = (3x + y)\mathbf{i} + (4x - 5y)\mathbf{j}$.

32. C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$;
$\mathbf{F}(x, y) = (e^x + y^2)\mathbf{i} + (x^2 y + \cos y)\mathbf{j}$.

33. C es el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 2)$;
$\mathbf{F}(x, y) = (e^{x^2} + y^2)\mathbf{i} + (e^{y^2} + x^2)\mathbf{j}$.

34. C consiste de la mitad superior de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ y el intervalo $[-2, 2]$ sobre el eje x;
$\mathbf{F}(x, y) = (xy + y^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$.

En los ejercicios 35 a 38, determine la intensidad (o tasa) de fluencia (o flujo) del fluido que sale de la región R limitada por la curva C si **F** *es el campo de velocidad del fluido. Suponga que la velocidad se mide en centímetros por segundo y el área de R en centímetros cuadrados.*

35. $\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 6x)\mathbf{i} + (2y - x^2)\mathbf{j}$; C es la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

36. $\mathbf{F}(x, y) = (5x - y^2)\mathbf{i} + (3x - 2y)\mathbf{j}$; C es el triángulo rectángulo cuyos vértices son $(1, 2)$, $(4, 2)$ y $(4, 6)$.

37. $\mathbf{F}(x, y) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}$; C es la curva determinada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

38. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + yx^2\mathbf{j}$; C es la curva determinada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

En los ejercicios 39 a 42, **F** *es el campo de velocidad de un fluido alrededor de la curva cerrada C, donde el movimiento alrededor de C se efectúa en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj. Emplee el teorema de Stokes en el plano para calcular* $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds$ *y del resultado determine cual de los siguientes enunciados es correcto; (i) la circulación del fluido es en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj; (ii) la circulación del fluido es en el sentido del giro de las manecillas del reloj; (iii)* **F** *es irrotacional.*

39. $\mathbf{F}(x, y) = 4y\mathbf{i} + 6x\mathbf{j}$; C es el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(3, 5)$.

40. $\mathbf{F}(x, y) = 8y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$; C es la elipse $4x^2 + 9y^2 = 1$.

41. $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{sen}^2 x\mathbf{i} + \cos^2 y\mathbf{j}$; C es la curva determinada por la elipse $9x^2 + y^2 = 9$.

42. $\mathbf{F}(x, y) = y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$; C es la curva determinada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$.

43. Demuestre que $\oint_C N(x, y)\,dy = \iint_R \dfrac{\partial N}{\partial x}\,dA$ si R es la región definida por

$$R = \{(x, y) \mid c \le y \le d, g_1(y) \le x \le g_2(y)\}$$

donde g_1 y g_2 son suaves.

14.5 INTEGRALES DE SUPERFICIE

El concepto de *integral de superficie* es una extensión del concepto de integral de línea en tres dimensiones. Se inicia el estudio de las integrales de superficie al considerar una región cerrada en el plano xy. Denote esta región por D, en lugar de R, a fin de evitar confusiones con la función definida por $R(x, y, z)$ empleada posteriormente en la discusión. Suponga que S es una superficie que se encuentra sobre D y que tiene la ecuación $z = f(x, y)$, donde f y sus primeras derivadas parciales son continuas en D. Entonces, si σ es la medida del área de la superficie S, por el teorema 13.3.4 se tiene

$$\sigma = \iint_D \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\, dx\, dy \tag{1}$$

Se puede generalizar la integral de (1) si se considera una función G de las tres variables x, y y z, donde G es continua sobre S. Se procede de manera semejante a la discusión de la sección 13.3 que precede al teorema 13.3.4. Sea Δ una partición de la región D en subregiones rectangulares, donde el i-ésimo rectángulo tiene las dimensiones de medidas $\Delta_i x$ y $\Delta_i y$, y un área de medida $\Delta_i A$. Sea (u_i, v_i) cualquier punto del i-ésimo rectángulo, y considere el plano tangente a la superficie en el punto $Q(u_i, v_i, f(u_i, v_i))$ de S. Proyecte verticalmente hacia arriba el i-ésimo rectángulo en el plano tangente, y sea $\Delta_i\sigma$ la medida del área de esta proyección. Vea la figura 1. El número $\Delta_i\sigma$ es una aproximación de la medida del área correspondiente a la porción de la superficie ubicada sobre el i-ésimo rectángulo. En la sección 13.3 se demostró que

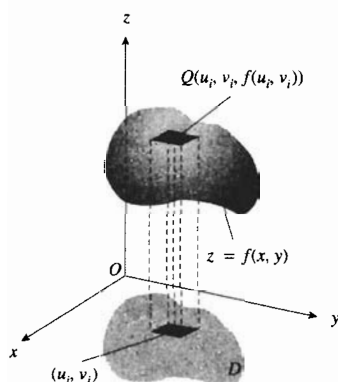


FIGURA 1

$$\Delta_i\sigma = \sqrt{f_x^2(u_i, v_i) + f_y^2(u_i, v_i) + 1}\, \Delta_i A \tag{2}$$

Si se forma la suma

$$\sum_{i=1}^{n} G(u_i, v_i, f(u_i, v_i))\, \Delta_i\sigma$$

y se toma el límite de ésta conforme la norma de la partición tiende a cero, se tiene

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i-1}^{n} G(u_i, v_i, f(u_i, v_i))\, \Delta_i\sigma \tag{3}$$

Este límite se denomina **integral de superficie** de G sobre S y se denota mediante

$$\iint_S G(x, y, z)\, d\sigma$$

A fin de obtener una fórmula para evaluar esta integral de superficie, se sustituye de (2) en (3) y se obtiene

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i-1}^{n} G(u_i, v_i, f(u_i, v_i)) \sqrt{f_x^2(u_i, v_i) + f_y^2(u_i, v_i) + 1}\, \Delta_i A$$

Este límite es una doble integral sobre la región D del plano xy. De modo que,

$$\iint_S G(x, y, z)\, d\sigma = \iint_D G(x, y, f(x, y)) \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\, dA \tag{4}$$

Si $G(x, y, z) = 1$, entonces (4) se transforma en

$$\iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\, dA$$

Al comparar esta ecuación con (1), se observa que para esta G la integral de superficie de G sobre S proporciona la medida del área de la superficie S.

Para la integral de superficie de (4), $z = f(x, y)$ es una ecuación de la superficie S que se proyecta sobre la región D del plano xy. Si una ecuación de la superficie S es de la forma $y = g(x, z)$ y S se proyecta sobre la región D del plano xz, y si g y sus primeras derivadas parciales son continuas en D, entonces

$$\iint_S G(x, y, z)\, d\sigma = \iint_D G(x, g(x, z), z)\sqrt{g_x^2(x, z) + g_z^2(x, z) + 1}\, dA \qquad (5)$$

Además, si una ecuación de la superficie S es de la forma $x = h(y, z)$ y S se proyecta sobre la región D del plano yz, y si h y sus primeras derivadas parciales son continuas en D, entonces

$$\iint_S G(x, y, z)\, d\sigma = \iint_D G(h(y, z), y, z)\sqrt{h_y^2(y, z) + h_z^2(y, z) + 1}\, dA \qquad (6)$$

EJEMPLO 1 Evalúe la integral de superficie

$$\iint_S x^2 z^2\, d\sigma$$

donde S es la porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$ ubicada entre los planos $z = 1$ y $z = 2$.

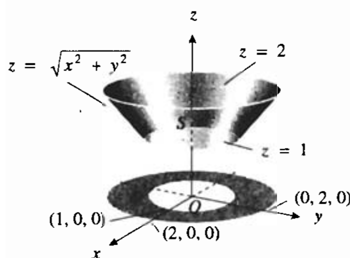


FIGURA 2

Solución La figura 2 muestra la superficie S y la proyección de S sobre la región D del plano xy. La región D está limitada por las dos circunferencias de radios 1 y 2, y cuyos centros están en el origen. Al despejar z de la ecuación de S, donde $z \geq 0$, se obtiene $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por tanto,

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad f_y(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

De (4), con $G(x, y, z) = x^2 z^2$ se obtiene

$$\iint_S x^2 z^2\, d\sigma = \iint_D x^2(x^2 + y^2)\sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1}\, dA$$

$$= \iint_D x^2(x^2 + y^2)\sqrt{2}\, dA$$

Se evalúa la integral doble empleando coordenadas polares. Con $x = r\cos\theta$, $x^2 + y^2 = r^2$ y $dA = r\, dr\, d\theta$ se tiene

$$\iint_S x^2z^2\,d\sigma = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 (r^2\cos^2\theta)r^2(r\,dr\,d\theta)$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 \cos^2\theta r^5\,dr\,d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos^2\theta\,\frac{r^6}{6}\right]_1^2 d\theta$$

$$= \frac{21\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{21\sqrt{2}}{4}\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{21\pi}{\sqrt{2}}$$ ◀

Si la medida de la densidad superficial en el punto (x, y, z) de la superficie S es $\rho(x, y, z)$, y si M es la medida de la masa de S, entonces

$$M = \iint_S \rho(x, y, z)\,d\sigma \tag{7}$$

▶ **EJEMPLO 2** Calcule la masa de la porción del plano $x + y + z = 1$ que se encuentra en el primer octante si la densidad superficial en cualquier punto (x, y, z) de la superficie es kx^2 kilogramos por metro cuadrado, donde k es una constante.

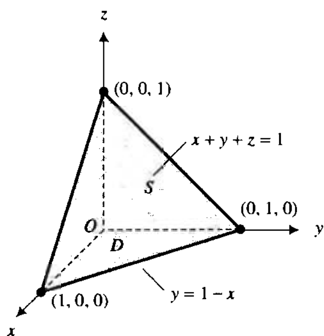


FIGURA 3

Solución La figura 3 muestra S, la cual es la superficie del plano dado en el primer octante, la región D, que es la proyección de S en el plano xy. Si se despeja z en la ecuación del plano se obtiene $z = 1 - x - y$. De esta manera,

$$f(x, y) = 1 - x - y \qquad f_x(x, y) = -1 \qquad f_y(x, y) = -1$$

De (7), con $\rho(x, y, z) = kx^2$, si M kilogramos es la masa de la superficie, entonces

$$M = \iint_S kx^2\,d\sigma$$

$$= \iint_D kx^2\sqrt{f_x{}^2(x, y) + f_y{}^2(x, y) + 1}\,dA$$

$$= \iint_D kx^2\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1}\,dA$$

$$= \sqrt{3}k\int_0^1\int_0^{1-x} x^2\,dy\,dx$$

$$= \sqrt{3}k\int_0^1\left[x^2y\right]_0^{1-x} dx$$

$$= \sqrt{3}k\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$$

$$= \sqrt{3}k\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \tfrac{1}{12}\sqrt{3}k$$

Conclusión: La masa es $\frac{1}{12}\sqrt{3}k$ kilogramos. ◀

Ahora se presentará una aplicación de las integrales de superficie para determinar el flujo de un fluido. Sea **F** el campo de velocidad de un fluido definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Además, suponga que el fluido fluye a través de la superficie S cuya ecuación es $z = f(x, y)$, la cual se encuentra sobre la región D del plano xy. También suponga que f y sus primeras derivadas parciales son continuas en D. En cada punto de S existen dos vectores normales unitarios a S. El vector normal unitario que tiene la componente k positiva se denomina **vector normal superior unitario** y el que tiene la componente k negativa recibe el nombre de **vector normal inferior unitario.**

Como en la discusión anterior a la ecuación (2), tome una partición de la región D que consiste de n subregiones rectangulares. Elija un punto (u_i, v_i) en el i-ésimo rectángulo. Proyecte verticalmente hacia arriba el i-ésimo rectángulo sobre el plano tangente a la superficie S en el punto $Q(u_i, v_i, f(u_i, v_i))$ y sea $\Delta_i\sigma$, dado por (2), una aproximación de la medida del área de esta proyección. Otra vez refiérase a la figura 1. Ahora sea $\mathbf{N}_i$ el vector normal superior unitario a S en el punto Q y sea $\mathbf{F}_i$ el vector velocidad del fluido en Q. La cantidad del fluido que atraviesa la proyección por unidad de tiempo está dada aproximadamente por el volumen del paralelepípedo que tiene una base de área $\Delta_i\sigma$ unidades cuadradas y una altura de longitud $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N}_i$ unidades. Refiérase a la figura 4. La medida del volumen del paralelepípedo es $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N}_i\ \Delta_i\sigma$. La cantidad total de fluido que atraviesa S por unidad de tiempo está dada aproximadamente por

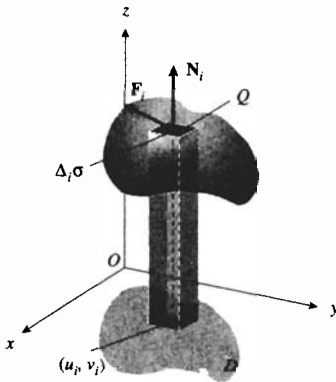


FIGURA 4

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N}_i\Delta_i\sigma$$

Al tomar el límite de esta suma conforme n crece sin límite y cada $\Delta_i\sigma$ se aproxima a cero, se obtiene la integral de superficie

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma \qquad \textbf{(8)}$$

la cual se denomina **flujo** de **F** a través de S.

Con el fin de evaluar la integral de superficie (8), se escribe la ecuación de S en la forma $g(x, y, z) = 0$, donde

$$g(x, y, z) = z - f(x, y)$$

Del teorema 12.7.2, un vector normal unitario de la superficie definida por $g(x, y, z) = 0$ es

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}$$

$$= \frac{-f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{f_x^{\,2}(x, y) + f_y^{\,2}(x, y) + 1}}$$

De modo que

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma = \iint_S (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + R\mathbf{k})\cdot\left(\frac{-f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2} + 1}}\right)d\sigma$$

$$= \iint_D \frac{-Mf_x - Nf_y + R}{\sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2} + 1}}\left(\sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2} + 1}\right)dA$$

Por tanto, se concluye que

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma = \iint_D (-Mf_x - Nf_y + R)\,dA \qquad \textbf{(9)}$$

donde **N** es un vector normal superior unitario. Si **N** es un vector normal inferior unitario (donde la componente **k** es negativa), entonces se tiene

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma = \iint_D (Mf_x + Nf_y - R)\,dA \qquad \textbf{(10)}$$

Esta fórmula se demuestra de manera semejante a la empleada al deducir (9).

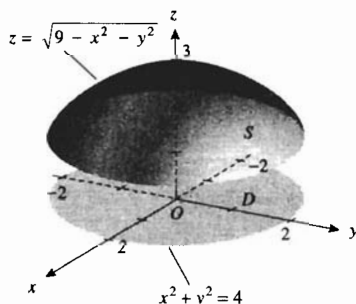


FIGURA 5

▶ ***EJEMPLO 3*** El campo de velocidad de un fluido está dada por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

y la superficie S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ubicada sobre la región D del plano xy acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Calcule el flujo de **F** a través de S.

Solución La figura 5 muestra la superficie S y la región D del plano xy. Al despejar z de la ecuación de la esfera, con $z > 0$, se obtiene $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Por tanto,

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \qquad f_x = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \qquad f_y = \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$$

$$f_x = -\frac{x}{z} \qquad f_y = -\frac{y}{z}$$

De la definición de flujo se tiene

$$\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma$$

Del campo de velocidad dado, $M = y$, $N = -x$ y $R = 8$. Por tanto, de (9),

$$\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S = \iint_D (-Mf_x - Nf_y + R)\,dA$$

$$= \iint_D \left[-y\left(-\frac{x}{z}\right) - (-x)\left(-\frac{y}{z}\right) + 8\right]dA$$

$$= 8\iint_D dA$$

Como D es la región limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, entonces $A = 4\pi$. Así,

$$\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S = 8(4\pi) = 32\pi$$

<u>**Conclusión:**</u> La intensidad de fluencia (tasa de flujo) a través de S es 32π unidades cúbicas de volumen por unidad de tiempo. ◀

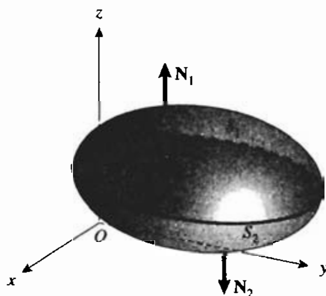


FIGURA 6

Suponga que S es una superficie cerrada, como lo son los paralelepípedos rectangulares, las esferas y los elipsoides. Cuando se utiliza (8) para calcular el flujo de $\mathbf{F}$ a través de una superficie cerrada, se elige $\mathbf{N}$ como un **vector normal saliente unitario,** el cual es un vector normal cuya dirección es hacia afuera del sólido limitado por la superficie. En particular, si S es un elipsoide, como el mostrado en la figura 6, se considera que S consiste de una susperficie superior S_1 y una superficie inferior S_2, como se indica en la figura. En tal caso el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2\, d\sigma$$

Para la integral de superficie a través de S_1, $\mathbf{N}_1$ es un vector normal superior unitario y para la integral de superficie a través de S_2, $\mathbf{N}_2$ es un vector normal inferior unitario.

▶ ***EJEMPLO 4*** El campo de velocidad de un fluido está dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = 5z\mathbf{k}$, y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S si la longitud se mide en centímetros y el tiempo en horas.

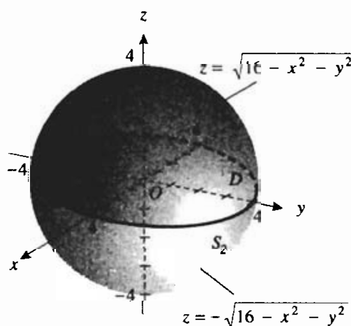


FIGURA 7

Solución La figura 7 muestra la esfera y la región D del plano xy, la cual es el círculo limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Como $\mathbf{F}(x, y, z) = 5z\mathbf{k}$, $M = 0$, $N = 0$ y $R = 5z$. El flujo de $\mathbf{F}$ a través de S es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2\, d\sigma \tag{11}$$

donde S_1 es la mitad superior de la esfera y S_2 es la mitad inferior. Para S_1, $\mathbf{N}_1$ es un vector normal superior unitario y una ecuación de S_1 es $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. Así, $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. De (9),

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, d\sigma &= \iint_D [-Mf_x - Nf_y + R]\, dA \\ &= \iint_D 5z\, dA \\ &= 5 \iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2}\, dA \\ &= 5 \int_0^{2\pi} \int_0^4 \sqrt{16 - r^2}\, r\, dr\, d\theta\end{aligned}$$

$$= 5\int_0^{2\pi} -\frac{1}{3}(16 - r^2)^{3/2}\Big]_0^4 \, d\theta$$

$$= \frac{320}{3}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \tfrac{640}{3}\pi$$

Para S_2, $\mathbf{N}_2$ es un vector normal inferior unitario y una ecuación de S_2 es $z = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$. Por tanto, $f(x, y) = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$. De (10),

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 \, d\sigma = \iint_D [Mf_x + Nf_y - R] \, dA$$

$$= \iint_D -5z \, dA$$

$$= 5\iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2} \, dA$$

De igual modo que en el cálculo del flujo de $\mathbf{F}$ a través de S_1, se tiene

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 \, d\sigma = \tfrac{640}{3}\pi$$

En consecuencia, de (11),

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \tfrac{640}{3}\pi + \tfrac{640}{3}\pi$$

$$= \tfrac{1280}{3}\pi$$

Conclusión: La intensidad de fluencia (tasa de flujo) del fluido a través de la esfera es $\frac{1280}{3}\pi$ cm^3/hr. ◀

El concepto de flujo no se limita sólo a campos de velocidad de fluidos. Por ejemplo, si $\mathbf{F}$ es un campo eléctrico, entonces la integral de superficie (8) es un flujo eléctrico, y si $\mathbf{F}$ es un campo magnético, entonces dicha integral es un flujo magnético. La integral de superficie (8) también puede representar un flujo de calor.

EJERCICIOS 14.5

En los ejercicios 1 a 14, evalúe la integral de superficie $\iint_S G(x, y, z)\, d\sigma$ *para* G *y* S.

1. $G(x, y, z) = z$; S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra por arriba del plano xy.

2. $G(x, y, z) = x$; S es la porción del plano $x + y + z = 1$ del del primer octante.

3. $G(x, y, z) = x + 2y - z$; S es la porción del plano $x + y + z = 2$ del primer octante.

4. $G(x, y, z) = z$; S es la porción del plano $2x + 3y + z = 6$ del primer octante.

5. $G(x, y, z) = xyz$; S se define como en el ejercicio 4.

6. $G(x, y, z) = x^2$; S es la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ ubicado entre el plano xy y el plano $z = 1$ en el primer octante.

7. $G(x, y, z) = x$; S es la porción del cilindro $z = x^2$ del primer octante limitada por los planos coordenados y los planos $x = 1$ y $y = 2$.

8. $G(x, y, z) = y$; S es la porción del cilindro $z = 4 - y^2$ del primer octante limitada por los planos coordenados y el plano $x = 3$.

9. $G(x, y, z) = z^2$; S es la porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$ que está entre los planos $z = 1$ y $z = 2$.

10. $G(x, y, z) = xyz$; S es la porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$ que se encuentra entre los planos $z = 1$ y $z = 2$.

11. $G(x, y, z) = x + y$; S es la porción del plano $4x + 3y + 6z = 12$ del primer octante.

12. $G(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; S es la porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$ ubicada entre el plano xy y el plano $z = 2$.

13. $G(x, y, z) = xyz$; S es la porción del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ que se encuentra entre los planos $y = 1$ y $y = 3$.

14. $G(x, y, z) = x^2$; S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que está por arriba del plano xy. *Sugerencia:* la integral de superficie es impropia. Vea el ejemplo 7 de la sección 13.4.

En los ejercicios 15 a 20, calcule la masa de la superficie S si la densidad superficial en cualquier punto (x, y, z) es ρ(x, y, z) kilogramos por metro cuadrado.

15. S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ubicada por arriba de la región limitada por circunferencia $x^2 + y^2 = 1$; $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, donde k es una constante.

16. S es la porción del plano $3x + 2y + z = 6$ del primer octante; $\rho(x, y, z) = y + 2z$.

17. S es la porción del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ que se encuentra por arriba del plano xy; $\rho(x, y, z) = 1/\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$.

18. S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que está debajo del plano xy; $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$. Consulte la sugerencia del ejercicio 14.

19. S es la porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$ ubicada entre los planos $z = 2$ y $z = 3$; $\rho(x, y, z) = y^2z^2$.

20. S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ del primer octante; $\rho(x, y, z) = kz^2$, donde k es una constante.

En los ejercicios 21 a 24 calcule el flujo de **F** *a través de la superficie S donde* **F***(x, y, z) proporciona el campo de velocidad de un fluido.*

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la porción del plano $3x + 2y + z = 6$ del primer octante.

22. $\mathbf{F}(x, y, z)$ está definido del mismo modo que en el ejercicio 21; S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ubicada por arriba de la región del plano xy acotada por la circunferencia $4x^2 + 4y^2 = 1$.

23. $\mathbf{F}(x, y, z) = -2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que se encuentra sobre la región del plano xy limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

24. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 6z\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ ubicada por arriba del plano xy.

25. Suponga que $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ y S es el cubo del primer octante limitado por los planos coordenados y los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$. Calcule el flujo de **F** a través de S evaluando seis integrales de superficie, una para cada cara del cubo.

26. Si $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ y S es el cubo del ejercicio 25, calcule el flujo de **F** a través de S evaluando seis integrales de superficie, una para cada cara del cubo.

14.6 TEOREMA DE LA DIVERGENCIA DE GAUSS Y TEOREMA DE STOKES

Las dos formas vectoriales del teorema de Green, el teorema de la divergencia de Gauss en el plano y el teorema de Stokes en el plano, pueden generalizarse a tres dimensiones. Una exposición rigurosa de estos teoremas pertenece a un curso de Cálculo avanzado. Sin embargo, en esta sección se proporcionará una breve introducción a estos teoremas.

14.6.1 Teorema de la divergencia de Gauss

Sean M, N y R funciones de las tres variables x, y y z, y suponga que tienen primeras derivadas parciales continuas en una bola abierta B de R^3. Sea S una superficie cerrada y suave a trozos contenida en B, y sea E la región limitada por S. Si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

y **N** es un vector normal saliente unitario de S, entonces

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

Este teorema afirma que el flujo de **F** a través de la frontera S de una región E de R^3 es la integral triple de la divergencia de **F** sobre E. La demostración de este teorema está más allá del alcance de este libro. En el ejemplo siguiente se verifica este teorema para una **F** y una S particulares.

▶ *EJEMPLO 1* Utilice el teorema de la divergencia de Gauss para resolver el ejemplo 4 de la sección 14.5.

Solución $\mathbf{F}(x, y, z) = 5z\mathbf{k}$ y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Del teorema de la divergencia de Gauss, el flujo de **F** a través de S es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

Como $\mathbf{F}(x, y, z) = 5z\mathbf{k}$, $\operatorname{div} \mathbf{F} = \dfrac{\partial}{\partial z}(5z)$; esto es, $\operatorname{div} \mathbf{F} = 5$. De este modo,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma = 5 \iiint_E dV$$

Debido a que el volumen de E es el volumen de una esfera de radio 4, se tiene

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma &= 5\left[\tfrac{4}{3}\pi(4)^3\right] \\ &= \tfrac{1280}{3}\pi\end{aligned}$$

◀

Al comparar la solución del ejemplo anterior con la del ejemplo 4 de la sección 14.5, se observa cómo el teorema de la divergencia de Gauss simplifica el cálculo de una integral de superficie.

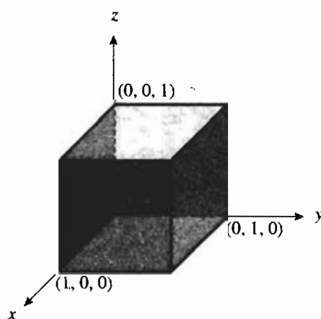


FIGURA 1

▶ *EJEMPLO 2* Si $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\mathbf{i} + y^2\mathbf{i} + xz\mathbf{k}$, y S es el cubo del primer octante limitado por los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$, y los planos coordenados, calcule el flujo de **F** a través de S.

Solución El cubo se muestra en la figura 1. El flujo de **F** a través de S es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma$$

Al calcular esta integral de superficie directamente se tendrían que evaluar seis integrales de superficie, una por cada cara del cubo. Si se aplica el teorema de la divergencia de Gauss con

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) \\ &= 2xy + 2y + x\end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma &= \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2xy + 2y + x)\, dz\, dy\, dx\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (2xy + 2y + x)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[xy^2 + y^2 + xy\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 (2x + 1)\,dx$$

$$= x^2 + x\Big]_0^1$$

$$= 2$$

Conclusión: La tasa de flujo del fluido a través de S es 2 unidades cúbicas de volumen por unidad de tiempo. ◀

La segunda forma vectorial del teorema de Green, conocida como teorema de Stokes en el plano, afirma que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = \iint_D \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\,dA$$

donde C es una curva cerrada simple y suave a trozos de R^2 y D es la región limitada por C. A continuación se extenderá este teorema al espacio tridimensional.

14.6.2 Teorema de Stokes

Sean M, N y R funciones de las tres variables x, y y z, y suponga que tienen primeras derivadas parciales continuas en una bola abierta B de R^3. Sea S una superficie suave a trozos contenida en B y C una curva cerrada, simple y suave a trozos que es la frontera de S. Si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

y si $\mathbf{N}$ es un vector normal saliente unitario de S, y $\mathbf{T}$ es un vector tangente unitario de C donde s unidades es la longitud de arco medida a partir de un punto particular P_0 de C hasta P, entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = \iint_D \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,d\sigma$$

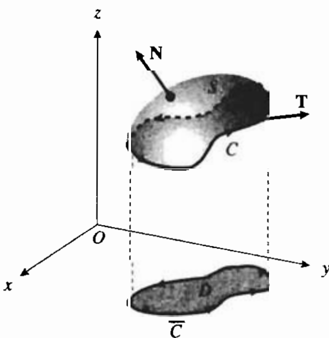


FIGURA 2

El teorema de Stokes afirma que la integral de línea de la componente tangencial de un campo vectorial $\mathbf{F}$ alrededor de la frontera C de una superficie S puede calcularse evaluando la integral de superficie de la componente normal del rotacional de $\mathbf{F}$ sobre S. El teorema 14.6.2 se ha restringido a superficies para las cuales $\mathbf{N}$ es un vector normal saliente de S. Un enunciado completo del teorema de Stokes, que involucra superficies orientadas y para las cuales puede definirse adecuadamente un vector normal unitario $\mathbf{N}$, puede encontrarse en un texto de Cálculo avanzado. La demostración de este teorema también puede hallarse en dicho texto.

La figura 2 muestra una superficie S, con la curva C como frontera, a la cual se aplica el teorema 14.6.2. Una ecuación de S es de la forma $z = f(x, y)$, donde las primeras derivadas parciales de f son continuas en la región D, que es la proyección de S en el plano xy. La curva $\overline{C}$ es la proyección de C en el plano xy, y D y $\overline{C}$ satisfacen las condiciones del teorema

de Green. El sentido positivo a lo largo de C es el mismo que el sentido positivo a lo largo de $\overline{C}$, el cual es contrario al giro de las manecillas del reloj. La figura 2 también muestra representaciones de **N** y **T**.

Otra forma de la ecuación del teorema de Stokes se obtiene al escribir $d\mathbf{R}$ en lugar de $\mathbf{T}\,ds$ en la integral de línea de la izquierda. De modo que,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma \tag{1}$$

EJEMPLO 3 Sea **F** el campo de fuerza definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -4y\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} + 3x\mathbf{k}$$

y sea $\mathbf{R}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ una ecuación vectorial de C. Suponga que S es la porción del paraboloide $z = 10 - x^2 - y^2$ ubicada arriba del plano $z = 1$. Verifique el teorema de Stokes para estas **F**, C y S al determinar cada una de las expresiones siguientes: **(a)** $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; **(b)** $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$; **(c)** $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma$.

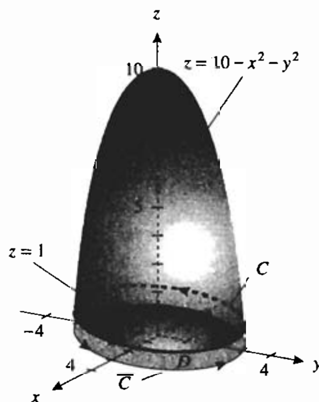


FIGURA 3

Solución La figura 3 muestra la superficie S y la región D, la cual es la proyección de S en el plano xy. La región D está limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$. La curva C, la cual es la frontera de S, es la circunferencia con centro en $(0, 0, 1)$ y radio 3, del plano $z = 1$.

(a) La curva C tiene la siguiente ecuación vectorial:

$$\mathbf{R}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad 0 \le t \le 2\pi \tag{2}$$

Así,

$$\mathbf{R}'(t) = -3 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 3 \cos t\mathbf{j}$$

Por tanto, (3)

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-12 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9 \cos t\mathbf{k}) \cdot (-3 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 3 \cos t\mathbf{j})\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (36 \operatorname{sen}^2 t + 6 \cos t)\, dt \\ &= 36 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt + 6 \int_0^{2\pi} \cos t\, dt \\ &= 18 - 9 \operatorname{sen} 2t + 6 \Big]_0^{2\pi} \\ &= 36\pi\end{aligned}$$

(b) Para calcular $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$, se obtiene una ecuación vectorial de C que tenga a s como parámetro, donde s es la longitud de arco medida a partir del punto donde $t = 0$. Como $\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{R}'(t)\|$, de (3) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \sqrt{9 \operatorname{sen}^2 t + 9 \cos^2 t} \\ &= 3\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} \\ &= 3\end{aligned}$$

Por tanto, $s = 3t + k$, y puesto que $s = 0$ cuando $t = 0$, entonces $k = 0$. De esta manera,

$$s = 3t$$

De (2) con $t = \frac{1}{3}s$, se obtiene

$$\mathbf{R}(s) = 3\cos\tfrac{1}{3}s\mathbf{i} + 3\operatorname{sen}\tfrac{1}{3}s\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad 0 \le s \le 6\pi$$

Debido a que $\mathbf{T}(s) = D_s\mathbf{R}(s)$, se tiene

$$\mathbf{T}(s) = -\operatorname{sen}\tfrac{1}{3}s\mathbf{i} + \cos\tfrac{1}{3}s\mathbf{j} \qquad 0 \le s \le 6\pi$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds &= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{R}(s))\cdot\mathbf{T}(s)\,ds \\
&= \int_0^{6\pi} (-12\operatorname{sen}\tfrac{1}{3}s\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\cos\tfrac{1}{3}s\mathbf{k})\cdot(-\operatorname{sen}\tfrac{1}{3}s\mathbf{i} + \cos\tfrac{1}{3}s\mathbf{j})\,ds \\
&= \int_0^{6\pi} (12\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{3}s + 2\cos\tfrac{1}{3}s)\,ds \\
&= 12\int_0^{6\pi} \frac{1-\cos\frac{2}{3}s}{2}\,ds + 2\int_0^{6\pi}\cos\tfrac{1}{3}s\,ds \\
&= 6s - 9\operatorname{sen}\tfrac{2}{3}s + 6\operatorname{sen}\tfrac{1}{3}s\Big]_0^{6\pi} \\
&= 36\pi
\end{aligned}$$

(c) Primero se calculará rot $\mathbf{F}$.

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -4y & 2z & 3x \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

De donde,

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma = \iint_S (-2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})\cdot\mathbf{N}\,d\sigma$$

A fin de evaluar esta integral de superficie se aplica (9) de la sección 14.5 ya que $\mathbf{N}$ es un vector normal superior unitario. El campo vectorial es $-2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; por lo que $M = -2$, $N = -3$ y $R = 4$. Puesto que una ecuación de la superficie es $z = 10 - x^2 - y^2$, entonces

$$f(x, y) = 10 - x^2 - y^2 \qquad f_x(x, y) = -2x \qquad f_y(x, y) = -2y$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma &= \iint_D [-(-2)(-2x) - (-3)(-2y) + 4]\,dA \\
&= \iint_D (-4x - 6y + 4)\,dA
\end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (-4r\cos\theta - 6r \operatorname{sen}\theta + 4) r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{4}{3} r^2 \cos\theta - 2r^3 \operatorname{sen}\theta + 2r^2 \right]_0^3 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (-36\cos\theta - 54 \operatorname{sen}\theta + 18)\, d\theta$$

$$= -36 \operatorname{sen}\theta + 54\cos\theta + 18\theta \Big]_0^{2\pi}$$

$$= 36\pi$$

Los resultados de los incisos (a), (b) y (c) son iguales a 36π. De modo que así se ha verificado el teorema de Stokes para estas **F**, C y S. ◀

 ***EJEMPLO 4*** Utilice el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

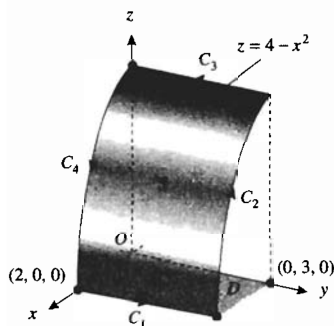


FIGURA 4

si $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ y C es la frontera de la superficie que consiste de la porción del cilindro $z = 4 - x^2$ del primer octante determinada por los planos coordenados y el plano $y = 3$.

Solución La figura 4 muestra la superficie S y la curva C, que es su frontera, compuesta por C_1, C_2, C_3 y C_4. Del teorema de Stokes,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, d\sigma$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & y^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

De modo que,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_S (2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}) \cdot \mathbf{N}\, d\sigma$$

Como **N** es un vector normal superior unitario, se calcula el valor de la integral de superficie aplicando (9) de la sección 14.5. Debido a que el campo vectorial es $2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, entonces $M = 2y$, $N = x$ y $R = y$. Una ecuación de S es $z = 4 - x^2$. Por tanto,

$$f(x, y) = 4 - x^2 \qquad f_x(x, y) = -2x \qquad f_y(x, y) = 0$$

En consecuencia, se tiene

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_D [-(2y)(-2x) - x(0) + y]\, dA$$

$$= \iint_D (4xy + y)\, dA$$

La región D está acotada por el rectángulo del plano xy delimitado por los ejes x y y, y las rectas $x = 2$ y $y = 3$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds &= \int_0^2 \int_0^3 (4xy + y)\, dy\, dx \\ &= \int_0^2 \left[2xy^2 + \frac{1}{2} y^2\right]_0^3 dx \\ &= \int_0^2 (18x + \tfrac{9}{2})\, dx \\ &= 9x^2 + \tfrac{9}{2}x\Big]_0^2 \\ &= 45\end{aligned}$$

◀

EJERCICIOS 14.6

En los ejercicios 1 a 4, verifique el teorema de la divergencia de Gauss para **F** *y* S.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{k}$; S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
3. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$; S es el cubo delimitado por los planos coordenados y los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$.
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la frontera de la región limitada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$.

En los ejercicios 5 a 8, para **F** *y* S *del ejercicio indicado de la sección 14.5, calcule el flujo de* **F** *a través de* S *mediante el teorema de la divergencia de Gauss.*

5. Ejercicio 21
6. Ejercicio 22
7. Ejercicio 25
8. Ejercicio 26

En los ejercicios 9 a 16, utilice el teorema de la divergencia de Gauss para evaluar la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma$ *para* **F** *y* S.

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$; S es el cubo del primer octante limitado por los planos coordenados y los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 3$.
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = 6x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; S es el tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos $(3, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 2)$.
11. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
12. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la frontera de la región limitada lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$, inferiormente por el plano xy y superiormente por el plano $z = 4$.
13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la superficie del ejercicio 12.
14. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la superficie del ejercicio 11.
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S es la frontera de la región acotada por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.
16. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$; S es la frontera de la región exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que se encuentra dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

En los ejercicios 17 a 22, verifique el teorema de Stokes para **F** *y* S.

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que se encuentra arriba del plano xy.
18. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que está debajo del plano xy.
19. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ ubicado por debajo del plano $z = 1$.
20. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; S es la superficie del ejercicio 19.
21. $\mathbf{F}(x, y, z) = -3y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; S es la porción del plano $z = 1$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$.
22. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que se encuentra arriba del plano xy.

En los ejercicios 23 a 28, utilice el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ *para* **F** *y* C.

23. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4y\mathbf{i} + 3z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$; C es el triángulo cuyos vértices son $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.
24. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y - x)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$; C es el triángulo cuyos vértices son $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 1)$.
25. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ del plano xy.
26. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; C es el cuadrado cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(2, 2, 0)$.
27. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y + \operatorname{sen}^{-1} x)\mathbf{i} + e^{y^2}\mathbf{j} + (x + \ln(z^2 + 4))\mathbf{k}$; C es el triángulo con vértices en $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 2)$.
28. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2z - e^x)\mathbf{i} + (x^3 + \operatorname{sen} y)\mathbf{j} + (y^2 - \tan z)\mathbf{k}$; C tiene la ecuación $\mathbf{R}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$.
29. Explique por qué el teorema de la divergencia de Gauss y el teorema de Stokes son versiones tridimensionales del teorema de Green.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 14

▶ SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 14

1. Establezca una condición que pueda emplearse para determinar si un vector del plano es un gradiente. Invente un ejemplo.
2. Realice la sugerencia 1 para un vector de tres dimensiones. Invente un ejemplo.
3. ¿Qué es un *campo vectorial*? Invente un ejemplo de un campo vectorial en el plano y otro en tres dimensiones.
4. ¿Qué es un campo vectorial *conservador* (o *conservativo*) y qué es una *función potencial* para un campo vectorial consevador? Invente un ejemplo de cada uno.
5. Defina el *rotacional* de un campo vectorial en tres dimensiones. Invente un ejemplo.
6. Defina la *divergencia* de un campo vectorial en tres dimensiones. Invente un ejemplo.
7. Establezca un truco nemotécnico, que involucre la notación de determinantes, para calcular rot **F**. Invente un ejemplo.
8. ¿Cómo se calcula el trabajo realizado por un campo de fuerza sobre una partícula que la desplaza a lo largo de una curva? Invente un ejemplo.
9. ¿Qué es una *integral de línea*? Invente un ejemplo de una integral de línea expresada tanto con la notación de la forma diferencial como con la notación vectorial.
10. ¿Qué significa que una integral de línea sea *independiente de la trayectoria*? Invente un ejemplo.
11. Enuncie un teorema que proporcione condiciones para que una integral de línea de un campo vectorial del plano sea independiente de la trayectoria. Invente un ejemplo.
12. Realice la sugerencia 11 para una integral de línea de un campo vectorial en tres dimensiones.
13. Establezca la fórmula del teorema fundamental de la integral de línea que proporciona el valor de una integral de línea independiente de la trayectoria. Invente un ejemplo para el plano y otro para el espacio tridimensional.
14. Enuncie el *teorema de Green*.
15. Invente un ejemplo que muestre cómo se aplica el teorema de Green para evaluar una integral de línea.
16. Enuncie un teorema que proporcione un método para calcular el área de una región plana limitada por una curva cerrada, simple y suave a trozos. Invente un ejemplo.
17. Enuncie el teorema de *la divergencia de Gauss* para el plano. Invente un ejemplo que muestre cómo este teorema relaciona el flujo con la divergencia de un campo vectorial en el plano.
18. Enuncie el *teorema de Stokes* para el plano. Invente un ejemplo que muestre cómo relaciona este teorema la circulación y el rotacional de un campo vectorial en el plano.
19. ¿Qué es una *integral de superficie*? Invente un ejemplo.
20. ¿Cómo puede calcularse la masa de una superficie mediante una integral de superficie? Invente un ejemplo.
21. ¿Cómo se aplican las integrales de superficie para calcular el flujo de un campo vectorial a través de la superficie?
22. Enuncie el teorema de la divergencia de Gauss en tres dimensiones. Invente un ejemplo que muestre cómo relaciona este teorema el flujo y la divergencia de un campo vectorial en tres dimensiones.
23. Enuncie el teorema de Stokes en tres dimensiones. Invente un ejemplo que muestre cómo relaciona este teorema la circulación y el rotacional de un campo vectorial en tres dimensiones.

▶ EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 14

En los ejercicios 1 a 4, determine si el vector es un gradiente, y si lo es, obtenga una función que tenga ese gradiente.

1. $2xe^{x^2}\ln y\,\mathbf{i} + \dfrac{e^{x^2}}{y}\mathbf{j}$
2. $(e^x \tan y - \sec y)\mathbf{i} - \sec y(x\tan y - e^x \sec y)\mathbf{j}$
3. $\left(\dfrac{-y}{(x+z)^2} + \dfrac{1}{x^2}\right)\mathbf{i} + \dfrac{1}{x+z}\mathbf{j} + \left(\dfrac{-y}{(x+z)^2} + \dfrac{2}{z^2}\right)\mathbf{k}$
4. $y(\cos x - z \operatorname{sen} x)\mathbf{i} + z(\cos x + \operatorname{sen} y)\mathbf{j} - (\cos y - y\cos x)\mathbf{k}$

En los ejercicios 5 y 6, obtenga un campo vectorial conservador que tenga como una función potencial a la función f.

5. (a) $f(x, y) = 2x^2y + 3xy^3$;
   (b) $f(x, y, z) = xe^y - yze^y$.
6. (a) $f(x, y) = e^x \cos y + x \operatorname{sen} y$;
   (b) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

En los ejercicios 7 a 10, demuestre que el campo vectorial **F** *es conservador, y después obtenga una función potencial.*

7. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{2y^2}{1 + 4x^2y^4}\mathbf{i} + \dfrac{4xy}{1 + 4x^2y^4}\mathbf{j}$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = (6x - 4y)\mathbf{i} + (z - 4x)\mathbf{j} + (y - 8z)\mathbf{k}$
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2 \sec^2 x\,\mathbf{i} + 2ye^{3z}\mathbf{j} + (3y^2e^{3z} + 2z\tan x)\mathbf{k}$
10. $\mathbf{F}(x, y) = (y \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)\mathbf{i} - (x\cos y + \cos x)\mathbf{j}$

En los ejercicios 11 a 14, calcule rot **F** *y* div **F**.

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{yz}\mathbf{i} + e^{xz}\mathbf{j} + e^{xy}\mathbf{k}$
12. $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} x\,\mathbf{k}$

13. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{y}\mathbf{i} - \frac{2x}{y}\mathbf{j}$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{y}\mathbf{i} + \frac{y}{z}\mathbf{j} + \frac{z}{x}\mathbf{k}$

En los ejercicios 15 a 22, evalúe la integral de línea sobre la curva C.

15. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = 3y\mathbf{i} - 4x\mathbf{j}$;
C: $\mathbf{R}(t) = 2t^2\mathbf{i} - t\mathbf{j}, 0 \le t \le 1$.

16. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$;
C: $\mathbf{R}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ del punto (8, 4) al punto (1, 1).

17. $\int_C (2x + 3y)\, dx + xy\, dy$;
C: $\mathbf{R}(t) = 4 \operatorname{sen} t\mathbf{i} - \cos t\mathbf{j}, 0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$.

18. $\int_C (2x + y)\, dx + (x - 2y)\, dy$; C: $x^2 + y^2 = 9$.

19. $\int_C y^2\, dx + z^2\, dy + x^2\, dz$;
C: $\mathbf{R}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + (t + 1)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, 0 \le t \le 1$.

20. $\int_C xe^y\, dx - xe^z\, dy + e^z\, dz$;
C: $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, 0 \le t \le 1$.

21. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy\mathbf{i} + (4y^2 - xz)\mathbf{j} + 6z\mathbf{k}$;
C: la cúbica alabeada $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, 0 \le t \le 1$.

22. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{i} + z\mathbf{k}$; C: la hélice circular $\mathbf{R}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, 0 \le t \le 2\pi$.

En los ejercicios 23 a 30, demuestre que el valor de la integral de línea es independiente de la trayectoria, después calcule el valor en cualquier forma conveniente. En cada ejercicio C es cualquier curva suave a trozos desde el punto A hasta el punto B.

23. $\int_C 2xe^y\, dx + x^2e^y\, dy$; A es (1, 0) y B es (3, 2).

24. $\int_C \left(\frac{1}{y} - y\right) dx + \left(-\frac{x}{y^2} - x\right) dy$; A es (0, 1) y B es (6, 3).

25. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$;

$$\mathbf{F}(x, y) = (\cos y - y\cos x)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} y)\mathbf{j}$$

A es $(0, \frac{1}{2}p)$ y B es $(p, 0)$.

26. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$;

$$\mathbf{F}(x, y) = (2xy - 2y)\mathbf{i} + (x^2 - 2x + 3y^2)\mathbf{j};$$

A es (2, −1) y B es (3, 2).

27. $\int_C 3y\, dx + (3x + 4y)\, dy - 2z\, dz$; A es (0, 1, −1) y B es (1, 2, 0).

28. $\int_C z \operatorname{sen} y\, dx + xz\cos y\, dy + x \operatorname{sen} y\, dz$; A es (0, 0, 0) y B es $(2, 3, \frac{1}{2}\pi)$.

29. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$;

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{y} - \frac{2z}{x^2}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{1}{z} + \frac{x}{y^2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{2}{x} + \frac{y}{z^2}\right)\mathbf{k};$$

A es (2, −1, 1) y B es (4, 2, −2).

30. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + 3yz)\mathbf{i} + (x^2 - 4yz + 3xz)\mathbf{j} + (3xy - 2y^2)\mathbf{k}$;

A es (0, 2, 1) y B es (1, −1, 4).

En los ejercicios 31 a 34, utilice el teorema de Green para evaluar la integral de línea.

31. $\oint_C (3x + 2y)\, dx + (3x + y^2)\, dy$, donde C es la elipse $16x^2 + 9y^2 = 144$.

32. $\oint_C \ln(y + 1)\, dx - \frac{xy}{y + 1}\, dy$, donde C es la curva cerrada determinada por la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ y los intervalos [0, 4] en los ejes x y y.

33. $\oint_C e^x \operatorname{sen} y\, dx + e^x \cos y\, dy$, donde C es cualquier curva cerrada y suave.

34. $\oint_C (x^2 - y^3)\, dx + (y^2 + x^3)\, dy$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

En los ejercicios 35 y 36, utilice el teorema 14.4.2 para calcular el área de la región.

35. La región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$.

36. La región acotada por las dos parábolas $y = x^2$ y $x^2 = 18 - y$.

En los ejercicios 37 a 40, calcule el trabajo total efectuado al mover un objeto a lo largo de C si el movimiento es causado por el campo de fuerza **F**. *Suponga que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons.*

37. $\mathbf{F}(x, y) = 2x^2y\mathbf{i} + (x^2 + 3y)\mathbf{j}$; C: el arco de la parábola $y = 3x^2 + 2x + 4$ desde (0, 4) hasta (1, 9).

38. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j}$; C: el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ desde (2, 0) hasta (0, 2).

39. $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy - z)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; C: el segmento de recta desde el origen hasta el punto (4, 1, 2).

40. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + (x + z)\mathbf{k}$;
C: $\mathbf{R}(t) = 3t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}; 0 \le t \le 3$.

En los ejercicios 41 y 42, verifique los teoremas de la divergencia de Gauss y de Stokes en el plano para **F** *y R.*

41. $\mathbf{F}(x, y) = 4y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$ y R es la region limitada por $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

42. $\mathbf{F}(x, y) = 3x^2\mathbf{i} + 4y^2\mathbf{j}$ y R es la región acotada por la elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$.

En los ejercicios 43 y 44, emplee el teorema de Green para calcular el trabajo total realizado al mover un objeto en el sentido contrario al del giro de las manecillas del reloj una vez alrededor de C si el movimiento es causado por el campo de fuerza **F**(*x, y*). *Suponga que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons.*

43. C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$;
$\mathbf{F}(x, y) = (xy^2 + \cos x)\mathbf{i} + (x^2 + e^y)\mathbf{j}$.

44. C es la elipse $9x^2 + y^2 = 9$;
$\mathbf{F}(x, y) = (2x - 3y)\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j}$.

En los ejercicios 45 y 46, calcule la tasa de flujo (o intensidad de fluencia) de un fluido fuera de la región R limitada por C si **F**(*x, y*) *es el campo de velocidad del fluido. Suponga que la*

velocidad se mide en centímetros por segundo y el área de R en centímetros cuadrados.

45. $\mathbf{F}(x, y) = (4x - 3y)\mathbf{i} + (5y - 4x^2)\mathbf{j}$; C es el triángulo rectángulo cuyos vértices son (0, 1), (0, 4) y (4, 4).

46. $\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 12x)\mathbf{i} + (4y - x^2)\mathbf{j}$; C es la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$.

47. Obtenga el valor de la integral de línea

$$\int_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy$$

si C es el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ desde $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ hasta $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

48. Aplique el teorema de Green para calcular el área del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos (0, 0), (3, 2), (1, 5) y (−2, 1).

49. Evalúe la integral de superficie $\iint_S xy\,d\sigma$, donde S es la porción del plano $3x + 2y - z = 0$ del primer octante y que se encuentra debajo del plano $z = 6$.

50. Calcule la integral de superficie $\iint_S x^2\,d\sigma$, donde S es la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ del primer octante limitada por el plano xy y el plano $z = 1$.

51. Determine la integral de superficie $\iint_S x\,d\sigma$, donde S es la porción del cilindro $z = 9 - x^2$ del primer octante limitada por los planos coordenados y el plano $y = 2$.

52. Evalúe la integral de superficie $\iint_S xyz\,d\sigma$, donde S es la porción del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ ubicada entre los planos $x = 1$ y $x = 4$.

53. Calcule la masa de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ del primer octante si la densidad superficial en cualquier punto (x, y, z) de la supercie es kz^2 kilogramos por metro cuadrado, donde k es una constante.

54. Determine la masa de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra arriba del plano xy si la densidad superficial en cualquier punto (x, y, z) de la superficie es $(4 - z)$ kilogramos por metro cuadrado. *Sugerencia:* la integral de superficie es impropia. Consulte el ejemplo 7 de la sección 13.4.

55. Un embudo tiene la forma de la porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$ que está entre los planos $z = 1$ y $z = 4$. Si la densidad superficial en cualquier punto (x, y, z) de la superficie es $(10 - z)$ kilogramos por metro cuadrado, obtenga la masa del embudo.

56. Suponga que la superficie S es parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que se encuentra por arriba de la región D del plano xy limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Si el campo de velocidad de un fluido está determinado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S.

57. El campo de velocidad de un fluido está definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$$

y la superficie S es la porción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ ubicada arriba del plano xy. Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S.

58. Verifique el teorema de la divergencia de Gauss si $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{2}z\mathbf{i}$ y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

En los ejercicios 59 y 60, emplee el teorema de la divergencia de Gauss para calcular la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma$ *para* $\mathbf{F}$ *y* S.

59. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; S es la frontera de la región limitada lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = 16$, inferiormente por el plano xy y superiormente por el plano $z = 2$.

60. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la frontera de la región limitada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 1$.

En los ejercicios 61 y 62, verifique el teorema de Stokes para $\mathbf{F}$ *y* S.

61. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + 4x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ ubicada arriba del plano xy.

62. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que está arriba del plano xy.

En los ejercicios 63 y 64, utilice el teorema de Stokes para evaluar la integral $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$ *para* $\mathbf{F}$ *y* C.

63. $\mathbf{F}(x, y, z) = (z + \ln(x^2 + 1))\mathbf{i} + \cos(y - x^2)\mathbf{j} + (3y^2 - e^z)\mathbf{k}$;
C: $\mathbf{R}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}, 0 \le t \le 2\pi$.

64. $\mathbf{F}(x, y, z) = -2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ del plano xy.

En los ejercicios 65 y 66, demuestre la identidad si f es una función real y $\mathbf{V}$ *es una función vectorial.*

65. $\operatorname{div}(f\mathbf{V}) = \nabla f \cdot \mathbf{V} + f \operatorname{div}\mathbf{V}$

66. $\operatorname{rot}(f\mathbf{V}) = \nabla f \times \mathbf{V} + f \operatorname{rot}\mathbf{V}$

Apéndice

Temas de matemáticas previas al Cálculo

VISIÓN PRELIMINAR

En este apéndice se encuentran en forma concisa los conocimientos previos al estudio del Cálculo necesarios para una mejor comprensión de este libro.

La habilidad para resolver ecuaciones y desigualdades es crucial en Cálculo; por esto, en la sección A.1 se tratan aspectos relativos al *conjunto de los números reales* entre ellos las *relaciones de orden*, los *intervalos* y el *valor absoluto*.

La geometría analítica es fundamental para el estudio del Cálculo. Los conceptos elementales de esta rama de las matemáticas tales como el *sistema de coordenadas cartesianas rectangulares*, la *distancia entre dos puntos* y *punto medio de un segmento*, así como los de *gráfica de una ecuación* y *simetría de una gráfica*, se presentan en la sección A.2.

La sección A.3 está dedicada al estudio de la recta. Aquí se muestran algunas formas de sus ecuaciones y los conceptos sobre *paralelismo* y *perpendicularidad*.

En la sección A.4 se inicia el análisis de las *secciones cónicas* (o *cónicas*) con el estudio de la *parábola* y sus propiedades, mientras que en la sección A.5 se aborda la *circunferencia*. Con el objeto de obtener las ecuaciones generales de las cónicas, se ha destinado la sección A.6 a la *traslación de ejes*. En las secciones A.7 y A.8 se tratan las *elipses* e *hipérbolas*, respectivamente.

En la sección A.9 se estudian las *funciones trigonométricas* de manera general, es decir, definidas en la *circunferencia unitaria*.

En la sección A.10 se analiza la *ecuación general de segundo grado en dos variables* y se estudia la *rotación de ejes*. Estos dos temas están ligados debido a que una ecuación del tipo mencionado representa una cónica, o cónica degenerada, cuyo eje principal no es paralelo a ninguno de los ejes coordenados. A fin de eliminar el término en xy de una ecuación de esta clase y de que el eje principal de la cónica sea paralelo a alguno de los ejes coordenados, es necesario rotar los ejes mediante un ángulo conveniente.

El estudio de las *fracciones parciales*, indispensable para ciertas manipulaciones en Cálculo integral, se presenta en la sección final de este apéndice, en el A.11.

A.1 NÚMEROS REALES Y DESIGUALDADES

El **sistema numérico real** consiste de un conjunto R de elemetnos deniminados **números reales** y dos operaciones llamadas **adición** y **multiplicación,** denotadas por los símbolos + y ·, respectivamente. Si a y b son elementos del conjunto R, $a + b$ indica la **suma** de a y b, y $a \cdot b$ (o ab) representa su **producto.** La operación **sustracción** se define mediante la ecuación

$$a - b = a + (-b)$$

donde $-b$ denota el **negativo** de b el cual es el número para el que $b + (-b) = 0$. La operación **división** se define mediante la ecuación

$$a \div b = a \cdot b^{-1} \qquad b \neq 0$$

donde b^{-1} representa el **recíproco** de b, que es el número para el cual $b \cdot b^{-1} = 1$.

El sistema numérico real puede describirse completamente mediante un conjunto de axiomas (la palabra **axioma** se emplea para indicar una proposición formal que se considera verdadera sin demostración). Con base en estos axiomas se pueden deducir las propiedades de los números reales de las que se obtienen las conocidas operaciones algebraicas de adición, sustracción, multiplicación y división, así como los conceptos algebraicos de resolución de ecuaciones y factorización, entre otros.

Las propiedades que pueden obtenerse como consecuencias lógicas de los axiomas se denominan **teoremas.** En los enunciados de la mayoría de los teoremas se presentan dos partes: la parte del "si", llamada **hipótesis,** y la parte del "entonces", denominada **conclusión.** El argumento que verifica un teorema recibe el nombre de **demostración** (o **prueba**). Una demostración consiste en mostrar que la conclusión se infiere de la supuesta verdad de la hipótesis.

Un número real es positivo, negativo o cero, y cualquier número real puede clasificarse como *racional* o *irracional*. Un **número racional** es aquel que puede expresarse como la razón de dos número enteros. Esto es, un número racional es de la forma p/q, donde p y q son números enteros y $q \neq 0$. Los números racionales consisten de:

Los números **enteros** (positivos, negativos y cero)

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Las **fracciones** positivas y negativas, tales como

$$\tfrac{2}{7} \qquad -\tfrac{4}{5} \qquad \tfrac{83}{5}$$

Los números **decimales finitos** positivos y negativos, por ejemplo,

$$2.36 = \frac{236}{100} \qquad -0.003251 = -\frac{3251}{1000000}$$

Los números **decimales infinitos periódicos** positivos y negativos, tales como

$$0.333\ldots = \tfrac{1}{3} \qquad -0.549549549\ldots = -\tfrac{61}{111}$$

Los números reales que no son racionales se denominan **números irracionales.** Éstos son los números **decimales infinitos no periódicos** positivos y negativos, por ejemplo,

$\sqrt{3} = 1.732\ldots \qquad \pi = 3.14159\ldots$

En ocasiones se utilizará notación y terminología de conjuntos. La idea de *conjunto* se emplea extensivamente en matemáticas y se considera un concepto básico, del que no se presenta una definición formal. Se puede decir que un **conjunto** es una colección de objetos, y los objetos de un conjunto se denominan **elementos.** Si cada elemento de un conjunto S es también un elemento de un conjunto T, entoces se dice que S es un **subconjunto** de T. En Cálculo se tratará con el conjunto R de los números reales. Dos subconjuntos importantes de R son el conjunto N de los *números naturales* (o *enteros positivos*) y el conjunto Z de los *números enteros*.

Se utilizará el símbolo $\in$ para indicar que un elemento específico pertenece a un conjunto. En consecuencia, se puede escribir $8 \in N$, lo cual se lee "8 es un elemento de N". La notación $a, b \in S$ expresa que tanto a como b son elementos de S. El símbolo $\notin$ se lee "no es elemento de". Así, $\frac{1}{2} \notin N$ se lee "$\frac{1}{2}$ no es elemento de N".

Un par de llaves { }, empleado junto con palabras o símbolos, puede describir un conjunto. Si S es el conjunto de los números naturales menores que 6, puede escribirse el conjunto S como

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

También puede expresarse el conjunto S como

$$\{x, \text{ tales que } x \text{ es un número natural menor que } 6\}$$

donde el símbolo x se denomina *variable*. Una **variable** es un símbolo que se emplea para representar cualquier elemento de un conjunto dado.

El conjunto S también se puede expresar por medio de la **notación por construcción** como sigue, donde se emplea una barra vertical en lugar de las palabras *tales que*:

$$\{x \mid x \text{ es un número natural menor que } 6\}$$

lo cual se lee "el conjunto de todas las x tales que x es un número natural menor que 6".

Dos conjuntos A y B se dice que son **iguales,** lo que se escribe como $A = B$, si A y B tiene elementos idénticos. La **unión** de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$ y que se lee "A unión B", es el conjunto de todos los elementos que están en A o en B, o en ambos. La **intersección** de A y B, denotada por $A \cap B$ y que se lee "A intersección B", es el conjunto de sólo aquellos elementos que están tanto en A como en B. El conjunto que no contiene elementos recibe el nombre de **conjunto vacío** y se denota por $\varnothing$.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Considere los siguientes conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{1, 4, 9, 16\}$ y $C = \{2, 10\}$. Entonces

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 16\} \qquad A \cap B = \{4\}$$

$$B \cup C = \{1, 2, 4, 9, 10, 16\} \qquad B \cap C = \varnothing$$ ◀

Los elementos del conjunto R pueden *ordenarse* mediante una relación denotada por los símbolos $<$ (léase "menor que") y $>$ (léase "mayor que"), los cuales se definen a continuación.

A.1.1 Definición de < y >

Dados $a, b \in R$,

(i) $a < b$ si y sólo si $b - a$ es positivo;
(ii) $a > b$ si y sólo si $a - b$ es positivo.



EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

(a) $3 < 5$ porque $5 - 3 = 2$, y 2 es positivo.
(b) $-10 < -6$ porque $-6 - (-10) = 4$, y 4 es positivo.
(c) $7 > 2$ porque $7 - 2 = 5$ y 5 es positivo.
(d) $-2 > -7$ porque $-2 - (-7) = 5$, y 5 es positivo.
(e) $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ porque $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$, y $\frac{1}{12}$ es positivo. ◀

Ahora se definirán los símbolos $\leq$ (léase "es menor que o igual a") y $\geq$ (léase "es mayor que o igual a").

A.1.2 Definición de ≤ y ≥

Dados $a, b \in R$,

(i) $a \leq b$ si y sólo si $a < b$ o $a = b$;
(ii) $a \geq b$ si y sólo si $a > b$ o $a = b$.

Las proposiciones $a < b$, $a > b$, $a \leq b$ y $a \geq b$ se denominan **desigualdades.** En particular, $a < b$ y $a > b$ se llaman **desigualdades estrictas,** mientras que $a \leq b$ y $a \geq b$ reciben el nombre de **desigualdades no estrictas.**

De la definición de < y >,

$a > 0$ si y sólo si a es positivo
$a < 0$ si y sólo si a es negativo

El teorema siguiente proporciona algunas porpiedades de las desigualdades. Estas propiedades pueden demostrarse utilizando los axiomas del conjunto R y las definiciones anteriores.

A.1.3 Teorema Propiedades de < y >

Dados $a, b, c, d \in R$,

(i) si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a + b > 0$;
(ii) si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $ab > 0$;
(iii) si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$; (propiedad transitiva)
(iv) si $a < b$, entonces $a + c < b + c$;
(v) si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$;
(vi) si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$;
(vii) si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

La propiedad (i) anterior establece que la suma de dos números positivos es positiva, y la propiedad (ii) establece que el producto de dos números positivos es positivo.



EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

(**a**) Si $x < 5$ y $5 < y$, entonces, por la propiedad (iii), $x < y$.

(**b**) Si $x < y$, entonces, por la propiedad (iv), $x + 4 < y + 4$. Por ejemplo, $3 < 9$; de modo que $3 + 4 < 9 + 4$ o, equivalentemente, $7 < 13$. Además, si $x < y$, entonces $x - 11 < y - 11$. Por ejemplo, $3 < 9$, por lo que $3 - 11 < 9 - 11$ o, equivalentemente, $-8 < -2$.

(**c**) Si $x < 8$ y $y < -3$, entonces, de la propiedad (v), $x + y < 8 + (-3)$; esto es, $x + y < 5$.

(**d**) Si $x < y$, entonces, de la propiedad (v), $7x < 7y$. Por ejemplo, como $5 < 8$, entonces $7 \cdot 5 < 7 \cdot 8$ o, equivalentemente, $35 < 56$.

(**e**) Como $4 < 6$, y si $z < 0$, entonces, de la propiedad (vii), $4z > 6z$. Por ejemplo, como $4 < 6$, entonces $4(-3) > 6(-3)$ o, equivalentemente, $-12 > -18$. ◀

La propiedad (vi) establece que si los dos miembros de una desigualdad se multiplican por un número positivo, entonces el sentido de la desigualdad no se altera, mientras que la propiedad (vii) establece que si los dos miembros de una desigualdad se multiplican por un número negativo, entonces el sentido de la desigualdad se invierte. Las propiedades (vi) y (vii) también se cumplen para la división en vista de que al dividir los dos miembros de una desigualdad entre un número $d (d \neq 0)$ equivale a multiplicarlos por $1/d$.

Se dice que un número x **está entre** a y b si $a < x$ y $x < b$. Esto se puede expresar como la **desigualdad continua** $a < x < b$. Otra desigualdad continua es $a \leq x \leq b$ la cual significa que $a \leq x$ y $x \leq b$. Además de éstas, otras desigualdades continuas son $a \leq x < b$ y $a < x \leq b$.



EJEMPLO 1 Exprese los siguientes conjuntos con la notación de conjuntos y uno o más de los símbolos <, >, ≤ y ≥: (**a**) el conjunto de todas las x tales que x está entre -2 y 2; (**b**) el conjunto de todas las t tales que $4t - 1$ es no negativo; (**c**) el conjunto de todas las y tales que $y + 3$ es positivo y menor que o igual a 15; (**d**) el conjunto de todas las z tales que $2z$ es mayor que o igual a -5 y menor que -1.

Solución

(**a**) $= \{x \mid -2 < x < 2\}$ (**b**) $= \{t \mid 4t - 1 \geq 0\}$

(**c**) $= \{y \mid 0 < y + 3 \leq 15\}$ (**d**) $= \{z \mid -5 \leq 2z < -1\}$ ◀

A continuación se presentará una interpretación geométrica del conjunto R de los números reales al asociarlos con puntos de una recta horizontal denominada **eje.** Se elige un punto, llamado **origen,** para representar el número 0. Se selecciona arbitrariamente una unidad de distancia. Después, cada núme-ro entero positivo n se representa por el punto situado a n unidades a la derecha del origen, y cada número entero negativo $-n$ se representa por el punto ubicado a una distancia de n unidades a la izquierda del origen. A estos puntos se les conoce como **puntos unidad** y se designan mediante los números con los cuales se asocian. Por ejemplo, 4 se representa por el punto que está 4 unidades a la derecha del origen, y -4 se representa por el punto ubicado a 4 unidades a la izquierda del origen. La figura 1 muestra

los puntos unidades que representan a 0 y los primeros doce números enteros positivos y sus correspondientes enteros negativos.

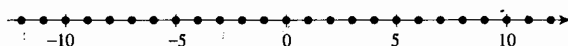


FIGURA 1

Los números racionales se asocian con puntos del eje de la figura 1 al dividir los segmentos cuyos extremos son puntos que representan números enteros sucesivos. Por ejemplo, si el segmento de 0 a 1 se divide en siete partes iguales, el extremo derecho de la primera subdivisión se asocia con $\frac{1}{7}$, el extremo derecho de la segunda se asocia con $\frac{2}{7}$, y así sucesivamente. El punto asociado con el número $\frac{24}{7}$ está a tres séptimos de la distancia del punto unitario 3 al punto unitario 4. De manera semejante, un número racional negativo se asocia con un punto situado a la izquierda del origen. La figura 2 muestra algunos puntos asociados con números racionales.

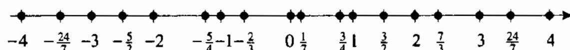


FIGURA 2

Las construcciones geométricas pueden utilizarse para determinar puntos que corresponden a ciertos números irracionales, tales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etcétera. Consulte los ejercicios 35 y 36. Los puntos que corresponden a otros números irracionales pueden determinarse empleando aproximaciones decimales. Por ejemplo, el punto que corresponde al número π puede aproximarse empleando algunos de los dígitos de la representación decimal 3.14159. . . .

Todo número irracional puede asociarse con un único punto del eje y cada punto que no corresponde a un número racional puede asociarse con un número irracional. Este hecho está garantizado por el axioma de completez (axioma 8.2.9), cuyo enunciado se presenta en la sección 8.2 debido a que se requiere cierta terminología presentada y discutida ahí. De esta manera, existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto R y el conjunto de los puntos de un eje. Por esta razón, al eje horizontal se le conoce como **recta numérica real** (**recta real** o **eje real**). Como los puntos de esta recta están identificados con los números que representan, se utiliza el mismo símbolo para representar el número y el punto.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** Considere el conjunto $\{x \mid -6 < x \leq 4\}$. Este conjunto está representado en la recta numérica real de la figura 3. El corchete en 4 indica que el 4 pertenece al conjunto, y el paréntesis en -6 indica que -6 no está en el conjunto. ◀

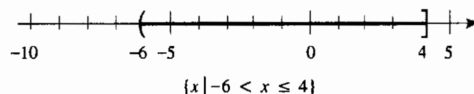


FIGURA 3

El conjunto de los números x que satisfacen la desigualdad $a < x < b$ se denomina **intervalo abierto** y se denota por (a, b). Por tanto,

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

El **intervalo cerrado** de a a b es el intervalo abierto (a, b) junto con los dos extremos del segmento a y b, y se denota por $[a, b]$. Así,

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$



FIGURA 4

La figura 4 muestra el intervalo abierto (a, b), y la figura 5 presenta el intervalo cerrado $[a, b]$.

El **intervalo semiabierto por la izquierda** es el intervalo abierto (a, b) junto con el extremo derecho b. Este intervalo se denota por $(a, b]$; de modo que

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$



FIGURA 5

Se define el **intervalo semiabierto por la derecha** de manera similar y se denota por $[a, b)$. Así,

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

El intervalo $(a, b]$ se muestra en la figura 6, y el intervalo $[a, b)$ se presenta en la figura 7.

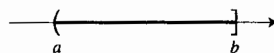


FIGURA 6

Se utilizará el símbolo $+\infty$ (infinito positivo o más infinito) y el símbolo $-\infty$ (infinito negativo o menos infinito); sin embargo, tenga cuidado en no confundir estos símbolos con números reales, ya que no cumplen las propiedades de dichos números. Así, se tienen los siguientes intervalos:

$$\begin{aligned} (a, +\infty) &= \{x \mid x > a\} \\ (-\infty, b) &= \{x \mid x < b\} \\ [a, +\infty) &= \{x \mid x \geq a\} \\ (-\infty, b] &= \{x \mid x \leq b\} \\ (-\infty, +\infty) &= R \end{aligned}$$



FIGURA 7

La figura 8 muestra el intervalo $(a, +\infty)$, mientras que la figura 9 presenta el intervalo $(-\infty, b)$. Observe que $(-\infty, +\infty)$ representa el conjunto de todos los números reales.

Para cada uno de los intervalos (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ y $(a, b]$ los números a y b se denominan **extremos** del intervalo. El intervalo cerrado $[a, b]$ contiene a los dos extremos, mientras que el intervalo abierto (a, b) no contiene a ninguno de sus extremos. El intervalo $[a, b)$ contiene a su extremo izquierdo pero no al derecho, y el intervalo $(a, b]$ contiene a su extremo derecho pero no al izquierdo. Un intervalo abierto puede considerarse como el intervalo que no contiene a sus extremos; por el contrario, un intervalo cerrado puede considerarse como el intervalo que contiene a todos sus extremos. En consecuencia, el intervalo $[a, +\infty)$ se considera como un intervalo cerrado porque contiene a su único extremo a. De forma semejante, $(-\infty, b]$ es un intervalo cerrado, en tanto que $(a, +\infty)$ y $(-\infty, b)$ son abiertos. Los intervalos $[a, b)$ y $(a, b]$ no son abiertos ni cerrados. El intervalo $(-\infty, +\infty)$ no tiene extremos, y se considera tanto abierto como cerrado.



FIGURA 8

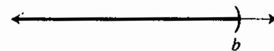


FIGURA 9

EJEMPLO 2 Muestre el conjunto sobre una recta numérica real y exprese el conjunto en notación de intervalos.

(a) $\{x \mid -7 \leq x < -2\}$
(b) $\{x \mid x > 1 \text{ y } x < 10\}$
(c) $\{x \mid x \leq -5 \text{ o } x \geq 5\}$
(d) $\{x \mid x \geq 2\} \cap \{x \mid x < 9\}$
(e) $\{x \mid x < 0\} \cup \{x \mid x \geq 3\}$

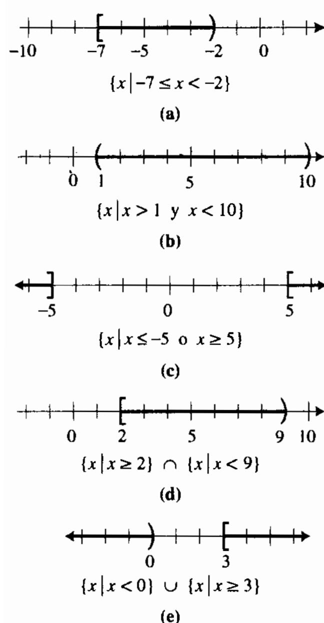


FIGURA 10

Solución Las figuras 10(a), (b), (c), (d) y (e) muestran los conjuntos sobre la recta numérica real, respectivamente. Con la notación de intervalos, se tiene

(a) $\{x \mid -7 \le x < -2\} = [-7, -2)$
(b) $\{x \mid x > 1 \text{ y } x < 10\} = (1, 10)$
(c) $\{x \mid x \le -5 \text{ o } x \ge 5\} = (-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$
(d) $\{x \mid x \ge 2\} \cap \{x \mid x < 9\} = [2, 9)$
(e) $\{x \mid x < 0\} \cup \{x \mid x \ge 3\} = (-\infty, 0) \cup [3, +\infty)$ ◀

▶ ***EJEMPLO 3*** Muestre el intervalo sobre la recta real y utilice la notación de conjuntos y los símbolos de desigualdad para expresar: **(a)** $(-2, 4)$; **(b)** $[3, 7]$; **(c)** $[1, 6)$; **(d)** $(-4, 0]$; **(e)** $[0, +\infty)$; **(f)** $(-\infty, 5)$.

Solución Los intervalos se muestran en la recta real de las figuras 11(a), (b), (c), (d), (e) y (f), respectivamente. Con la notación de conjuntos se tiene

(a) $(-2, 4) = \{x \mid -2 < x < 4\}$ **(b)** $[3, 7] = \{x \mid 3 \le x \le 7\}$
(c) $[1, 6) = \{x \mid 1 \le x < 6\}$ **(d)** $(-4, 0] = \{x \mid -4 < x \le 0\}$
(e) $[0, +\infty) = \{x \mid x \ge 0\}$ **(f)** $(-\infty, 5) = \{x \mid x < 5\}$ ◀

El concepto de *valor absoluto* de un número se emplea en algunas definiciones importantes del Cálculo.

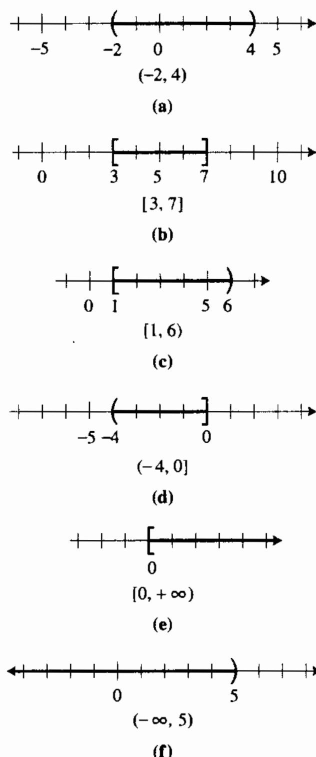


FIGURA 11

A.1.4 Definición de valor absoluto

Si a es un número real, entonces el **valor absoluto** de a, denotado por $|a|$, es a si a es no negativo, y es $-a$ si a es negativo. Con símbolos se escribe

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \ge 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** Si en la definición anterior se toma a como 6, 0 y −6, se tiene, respectivamente,

$$|6| = 6 \qquad |0| = 0 \qquad |-6| = -(-6) = 6$$ ◀

El valor absoluto de un número puede considerarse como su distancia (sin tener en cuenta el sentido, a la derecha o a la izquierda) desde el origen. En particular, los puntos 6 y −6 están cada uno a seis unidades del origen.

De la definición de valor absoluto, se tiene

$$|a - b| = \begin{cases} a - b & \text{si } a - b \ge 0 \\ -(a - b) & \text{si } a - b < 0 \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$|a - b| = \begin{cases} a - b & \text{si } a \ge b \\ b - a & \text{si } a < b \end{cases}$$

En la recta numérica real, $|a - b|$ unidades puede interpretarse como la distancia entre a y b sin tener en cuenta el sentido. Refiérase a la figura 12.

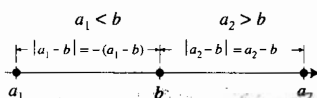


FIGURA 12

▶ EJEMPLO 4

Muestre en la recta real los puntos que corresponden a los números −10, −7, −5, −3, 0, 3, 5, 7 y 10. Calcule la distancia entre u y v en los siguientes casos: **(a)** $u = 10, v = 3$; **(b)** $u = 3, v = 7$; **(c)** $u = 5, v = -3$; **(d)** $u = -7, v = 0$; **(e)** $u = -3, v = -5$; **(f)** $u = -10, v = -7$.

Solución La figura 13 muestra en la recta real los puntos que corresponden a los números dados. En cada inciso la distancia entre u y v es $|u - v|$ unidades:

(a) $|u - v| = |10 - 3|$
$= |7|$
$= 7$

(b) $|u - v| = |3 - 7|$
$= |-4|$
$= 4$

(c) $|u - v| = |5 - (-3)|$
$= |8|$
$= 8$

(d) $|u - v| = |-7 - 0|$
$= |-7|$
$= 7$

(e) $|u - v| = |-3 - (-5)|$
$= |2|$
$= 2$

(f) $|u - v| = |-10 - (-7)|$
$= |-3|$
$= 3$ ◀

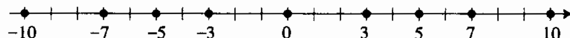


FIGURA 13

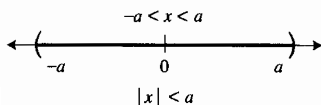


FIGURA 14

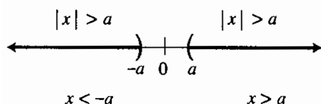


FIGURA 15

Ahora se trabajará con desigualdades que contienen valores absolutos. La desigualdad $|x| < a$, donde $a > 0$, establece que en la recta numérica real la distancia del origen al punto x es menor que a unidades; esto es, $-a < x < a$. Consulte la figura 14. La desigualdad $|x| > a$, donde $a > 0$, indica que en la recta real la distancia del origen al punto x es mayor que a unidades; esto es, $x > a$ o $x < -a$. Refiérase a la figura 15. A continuación se establecen estos dos resultados formalmente. La flecha doble ⇔ se utiliza aquí y a lo largo del texto para indicar que la proposición anterior al símbolo y la proposición posterior son equivalentes. Así,

$$|x| < a \iff -a < x < a \qquad \text{donde } a > 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$|x| > a \iff x > a \text{ o } x < -a \qquad \text{donde } a > 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Recuerde de álgebra que el símbolo $\sqrt{a}$, donde $a \geq 0$, está definido como el único número *no negativo* x tal que $x^2 = a$. Se lee $\sqrt{a}$ como "la raíz cuadrada principal de a". Por ejemplo,

$$\sqrt{4} = 2 \qquad \sqrt{0} = 0 \qquad \sqrt{\tfrac{9}{25}} = \tfrac{3}{5}$$

Nota: $\sqrt{4} \neq -2$ aunque $(-2)^2 = 4$, debido a que $\sqrt{4}$ denota sólo la raíz cuadrada *positiva* de $\sqrt{4}$. La raíz cuadrada *negativa* de 4 se representa por $-\sqrt{4}$.

Como se tratarán únicamente números reales en Cálculo, $\sqrt{a}$ no está definida si $a < 0$.

De la definición de $\sqrt{a}$ se deduce que

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

$\sqrt{5^2} = |5|$
$= 5$

$\sqrt{(-3)^2} = |-3|$
$= 3$ ◀

Las propiedades del valor absoluto dadas en el teorema siguiente son útiles en Cálculo.

A.1.5 Teorema

Sean $a, b \in R$, entonces
(i) $|ab| = |a|\,|b|$
(ii) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ si $b \neq 0$

Demostración de (i)

$$\begin{aligned} |ab| &= \sqrt{(ab)^2} \\ &= \sqrt{a^2b^2} \\ &= \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} \\ &= |a| \cdot |b| \end{aligned}$$ ■

La demostración de (ii) es similar.

En Cálculo, con frecuencia se desea reemplazar una desigualdad por otra equivalente y más simple, como se muestra en el ejemplo siguiente.

▶ ***EJEMPLO 5*** Muestre que la desigualdad

$$|(3x + 2) - 8| < 1 \quad \text{es equivalente a} \quad |x - 2| < \tfrac{1}{3}$$

Solución Las desigualdades siguientes son equivalentes:

$$\begin{aligned} |(3x + 2) - 8| &< 1 \\ |3x - 6| &< 1 \\ |3(x - 2)| &< 1 \\ |3|\,|x - 2| &< 1 \\ 3|x - 2| &< 1 \\ |x - 2| &< \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$ ◀

En el teorema siguiente, denominado *desigualdad del triángulo* (o *triangular*), y sus dos corolarios dados en el teorema A.1.7, se emplean regularmente en la demostración de teoremas del Cálculo.

A.1.6 Teorema La desigualdad del triángulo

Dados $a, b \in R$, entonces

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Demostración Por la definición de valor absoluto, $a = |a|$ o $a = -|a|$; así

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

Además,

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

De estas dos desigualdades continuas y la propiedad (v) del teorema A.1.3, resulta

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

En consecuencia, de la proposición (1) con $\leq$ en lugar de $<$, se tiene

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$ ■

En el ejemplo ilustrativo siguiente se muestra el contenido de la desigualdad del triángulo para cuatro casos particulares.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 7** Si $a = 3$ y $b = 4$, entonces

$$|a + b| = |3 + 4| = |7| = 7 \qquad |a| + |b| = |3| + |4| = 3 + 4 = 7$$

Si $a = -3$ y $b = 4$, entonces

$$|a + b| = |-3 + 4| = |1| = 1 \qquad |a| + |b| = |-3| + |4| = 3 + 4 = 7$$

Si $a = 3$ y $b = -4$, entonces

$$|a + b| = |3 + (-4)| = |-1| = 1 \qquad |a| + |b| = |3| + |-4| = 3 + 4 = 7$$

Si $a = -3$ y $b = -4$, entonces

$$|a + b| = |-3 + (-4)| = |-7| = 7 \qquad |a| + |b| = |-3| + |-4| = 3 + 4 = 7$$

En cada caso $|a + b| \leq |a| + |b|$ ◀

A.1.7 Teorema

Sean $a, b \in R$, entonces

(i) $|a - b| \leq |a| + |b|$
(ii) $|a| - |b| \leq |a - b|$

Demostración de (i)

$$|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |(-b)| = |a| + |b|$$

Demostración de (ii)

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$$

De este modo, al restar $|b|$ de los dos miembros de la desigualdad, se tiene

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$ ■

EJERCICIOS A.1

En los ejercicios 1 y 2, acomode los elementos del subconjunto dado de R en el mismo orden que sus puntos correspondientes de la recta númerica real de izquierda a derecha.

1. $\{-2, 3, 21, 5, -7, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, -\frac{7}{4}, -\sqrt{5}, -10, 0, \frac{3}{4}, -\frac{5}{3}, -1\}$

2. $\{\frac{11}{3}, \pi, -8, -\sqrt{2}, 3, -\sqrt{3}, 4, \frac{21}{4}, -\frac{3}{2}, 1.26, \frac{1}{2}\pi\}$

En los ejercicios 3 a 6, utilice la notación de conjuntos y uno o más de los símbolos $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$ para denotar el conjunto.

3. **(a)** El conjunto de todas las x tales que x es mayor que -9 y menor que 8; **(b)** el conjunto de todas las y entre -12 y -3; **(c)** el conjunto de todas las z tales que $4z - 5$ es negativo.

4. **(a)** El conjunto de todas las x entre -5 y 3; **(b)** el conjunto de todas las y tales que y es mayor que o igual a -26 y menor que -16; **(c)** el conjunto de todas las t tales que $8t - 4$ es positivo.

5. **(a)** El conjunto de todas las x tales que $2x + 4$ es no negativo; **(b)** el conjunto de todas las r tales que r es mayor que o

igual a 2 y menor que 8; (c) el conjunto de todas las a tales que $a - 2$ es mayor que -5 y menor que o igual a 7.

6. (a) El conjunto de todas las s tales que $2s + 3$ es no positivo; (b) el conjunto de todas las x tales que $3x$ es mayor que 10 y menor que o igual a 20; (c) el conjunto de todas las z tales que $2z + 5$ está entre -1 y 5, incluyendo estos números.

En los ejercicios 7 a 14, haga lo siguiente: (i) muestre el conjunto sobre la recta real; (ii) represente el conjunto por medio de notación de intervalos; (iii) describa el conjunto en palabras, de manera semejante a la descripción de los ejercicios 3 a 6.

7. (a) $\{x \mid x > 2\}$ (b) $\{x \mid -4 < x \leq 4\}$

8. (a) $\{x \mid x \leq 8\}$ (b) $\{x \mid 3 < x < 9\}$

9. (a) $\{x \mid x > 2 \text{ y } x < 12\}$
(b) $\{x \mid x \leq -4 \text{ o } x > 4\}$

10. (a) $\{x \mid x \geq -5 \text{ y } x \leq 5\}$
(b) $\{x \mid x < 3 \text{ o } x > 6\}$

11. (a) $\{x \mid x > 2\} \cap \{x \mid x < 12\}$
(b) $\{x \mid x \leq -4\} \cup \{x \mid x > 4\}$

12. (a) $\{x \mid x \geq -5\} \cap \{x \mid x \leq 5\}$
(b) $\{x \mid x < 3\} \cup \{x \mid x > 6\}$

13. (a) $\{x \mid x > -4\} \cap \{x \mid x \leq 0\}$
(b) $\{x \mid x \leq 0\} \cup \{x \mid x \leq 7\}$

14. (a) $\{x \mid x > -8\} \cap \{x \mid x \leq 0\}$
(b) $\{x \mid x > 2\} \cup \{x \mid x > 10\}$

En los ejercicios 15 a 18, muestre el intervalo sobre la recta numérica real y utilice la notación de conjuntos y símbolos de desigualdad para denotar el intervalo indicado.

15. (a) $(2, 7)$ (b) $[-3, 6]$
(c) $(-5, 4]$ (d) $[-10, -2)$

16. (a) $(-5, 5)$ (b) $[1, 9]$
(c) $[-8, 3)$ (d) $(-7, 0]$

17. (a) $[3, +\infty)$ (b) $(-\infty, 0]$
(c) $(-4, +\infty)$ (d) $(-\infty, +\infty)$

18. (a) $(-\infty, -2]$ (b) $(-1, +\infty)$
(c) $(-\infty, 10)$ (d) $[0, +\infty]$

En los ejercicios 19 y 20, determine el valor absoluto en cada inciso.

19. (a) $|7|$ (b) $\left|-\frac{3}{4}\right|$
(c) $|3 - \sqrt{3}|$ (d) $|\sqrt{3} - 3|$

20. (a) $\left|\frac{1}{3}\right|$ (b) $|-8|$
(c) $|\pi - 2|$ (d) $|3 - \pi|$

En los ejercicios 21 a 24, muestre los puntos que corresponden a u y v sobre la recta real y después calcule la distancia entre ellos.

21. (a) $u = 8, v = 2$ (b) $u = -8, v = 2$
(c) $u = 8, v = -2$ (d) $u = -8, v = -2$

22. (a) $u = 6, v = 4$ (b) $u = -6, v = 4$
(c) $u = 6, v = -4$ (d) $u = -6, v = -4$

23. (a) $u = t, v = 2t, \text{ y } t > 0$
(b) $u = t, v = 2t, \text{ y } t < 0$

24. (a) $u = t, v = \frac{1}{2}t, \text{ y } t > 0$
(b) $u = t, v = \frac{1}{2}t, \text{ y } t < 0$

En los ejercicios 25 a 30, demuestre que las dos desigualdades son equivalentes.

25. $|(2x - 3) - 9| < 1$; $|x - 6| < \frac{1}{2}$

26. $|(2x + 3) - 1| < 1$; $|x + 6| < \frac{1}{2}$

27. $|(3x - 5) - 1| < \frac{1}{2}$; $|x - 2| < \frac{1}{6}$

28. $|(5x - 2) - 3| < \frac{1}{2}$; $|x - 1| < \frac{1}{10}$

29. $|(\frac{1}{2}x - 5) + 7| < \frac{1}{8}$; $|x + 4| < \frac{1}{4}$

30. $|(\frac{1}{4}x - 1) + 2| < \frac{1}{6}$; $|x + 4| < \frac{2}{3}$

En los ejercicios 31 y 32, verifique la desigualdad del triángulo para los valores de a y b.

31. (a) $a = 5$ y $b = 7$ (b) $a = 5$ y $b = -7$
(c) $a = -5$ y $b = 7$ (d) $a = -5$ y $b = -7$

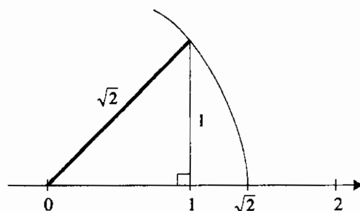
32. (a) $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{3}$ (b) $a = -\frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{3}$
(c) $a = \frac{1}{2}$ y $b = -\frac{1}{3}$ (d) $a = -\frac{1}{2}$ y $b = -\frac{1}{3}$

En los ejercicios 33 y 34, utilice la desigualdad del triángulo para demostrar la proposición indicada.

33. Si $|x - 1| < \frac{1}{3}$ y $|y + 1| < \frac{1}{4}$, entonces $|x + y| < \frac{7}{12}$.

34. Si $|x - 1| < \frac{1}{3}$ y $|y - 1| < \frac{1}{4}$, entonces $|x - y| < \frac{7}{12}$.

35. Para determinar el punto de la recta númerica real que corresponde al número $\sqrt{2}$, utilice la construcción indicada en la figura adjunta: desde el punto 1, se dibuja un segmento de recta perpendicular al eje. Al unir el extremo superior de este segmento con el origen se forma un triángulo rectángulo. La longitud de la hipotenusa de este triángulo es $\sqrt{2}$ unidades. Este hecho se deduce del teorema de Pitágoras, el cual establece que c^2 tiene el mismo valor que $a^2 + b^2$, donde c unidades es la longitud de la hipotenusa, y a unidades y b unidades son las longitudes de los otros dos lados. Después se dibuja un arco de la circunferencia que tiene su centro en el origen y radio $\sqrt{2}$; el punto donde este arco intersecta al eje es $\sqrt{2}$. Utilice este método para determinar el punto correspondiente a $\sqrt{5}$.



36. Determine el punto de la recta real que corresponde al número irracional $\sqrt{10}$. *Sugerencia:* consulte el ejercicio 35.

A.2 COORDENADAS Y GRÁFICAS DE ECUACIONES

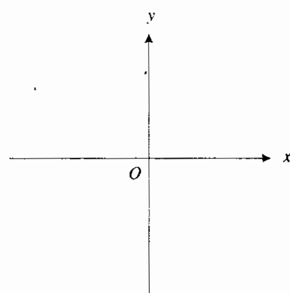


FIGURA 1

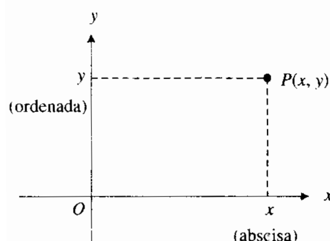


FIGURA 2

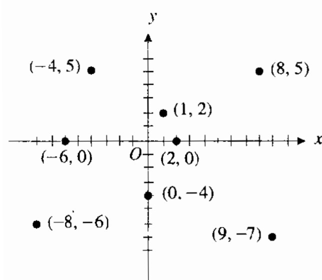


FIGURA 3

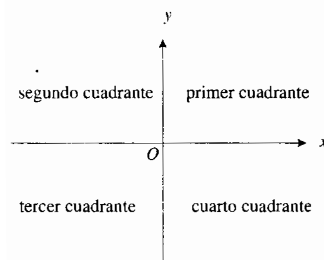


FIGURA 4

La creación de la *geometría analítica* se atribuye a **René Descartes** (1596−1650), matemático y filósofo francés. En su libro *Geometría*, publicado en 1637, Descartes estableció la unión del álgebra y de la geometría mediante un *sistema de coordenadas cartesianas rectangulares* (llamado así en su honor). Este sistema de coordenadas utiliza *pares ordenados* de números reales.

Dos números reales cualesquiera forman un par, y cuando el orden en que aparecen los números es significante, se le denomina **par ordenado.** Si x es el primer número real y y es el segundo, este par ordenado se denota por (x, y). Observe que el par ordenado (5, 2) es diferente del par ordenado (2, 5).

El conjunto de todos los pares ordenados de números reales recibe el nombre de **plano numérico,** el cual se denota por R^2, y cada par ordenado (x, y) es un **punto** del plano numérico. De la misma forma en que R, el conjunto de los números reales, se identifica con los puntos de un eje (espacio unidimensional), puede identificarse R^2 con los puntos de un plano geométrico (espacio bidimensional). Para ello se eligen dos rectas en el plano geométrico, una horizontal, llamada **eje x,** y la otra vertical, denominada **eje y.** El punto de intersección de los ejes x y y recibe el nombre de **origen,** y se denota por O. Por lo común, las unidades de medición a lo largo de los dos ejes es la misma. Se establece que el sentido positivo del eje x es hacia la derecha del origen, y el sentido positivo del eje y es hacia arriba del origen. Refiérase a la figura 1.

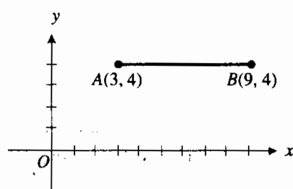
Ahora se asociará un par ordenado de números reales (x, y) con un punto del plano geométrico. En el punto x del eje horizontal y en el punto y del eje vertical, se dibujan segmentos de recta perpendiculares a los ejes respectivos. La intersección de estos dos segmentos de recta perpendiculares es el punto P asociado con el par ordenado (x, y). Consulte la figura 2. El primer número x del par se denomina **abscisa** (o **coordenada x**) de P, y el segundo número y se llama **ordenada** (o **coordenada y**) de P. Si la abscisa es positiva, P estará a la derecha el eje y; y si es negativa, P se hallará a la izquierda del eje y. Si la ordenada es positiva, P estará arriba del eje x, y si es negativa, P se hallará debajo del eje x. La abscisa y la ordenada de un punto reciben el nombre de **coordenadas cartesianas rectangulares** del punto. Existe una correspondencia uno a uno entre los puntos de un plano geométrico y R^2; esto es, a cada punto le corresponde un único par ordenado (x, y), y cada par ordenado (x, y) está asociado con un único punto. Esta correspondencia uno a uno se denomina **sistema coordenado cartesiano rectangular.** La figura 3 ilustra un sistema coordenado cartesiano rectangular con algunos puntos indicados.

A los ejes x y y se les llama **ejes coordenados.** Estos dividen al plano en cuatro partes denominadas **cuadrantes.** El primer cuadrante es aquel en el que las abscisas y las ordenadas son positivas, es decir el cuadrante superior derecho. Los otros cuadrantes se numeran en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj, por lo que el cuarto cuadrante es el cuadrante inferior derecho. Vea la figura 4.

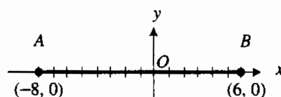
Debido a la correspondencia uno a uno, se identifica R^2 con el plano geométrico. Por esta razón a un par ordenado (x, y) se le llama también punto.

A continuación se discutirá el problema de calcular la distancia entre dos puntos de R^2. Si A es el punto (x_1, y_1) y B es el punto (x_2, y_1) (es decir, A y B tiene la misma ordenada pero diferente abscisa), entonces la **distancia dirigida** de A a B se denota por $\overline{AB}$ y se define como

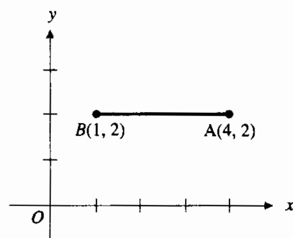
$$\overline{AB} = x_2 - x_1$$



(a)



(b)



(c)

FIGURA 5

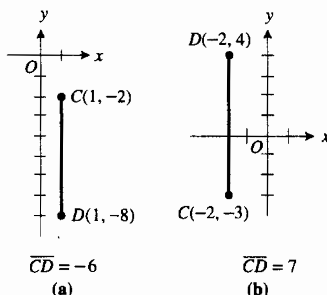


FIGURA 6

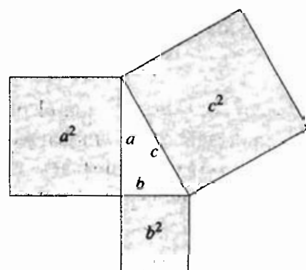


FIGURA 7

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Refiérase a las figuras 5(a), (b) y (c). Si A es el punto (3, 4) y B es el punto (9, 4), entonces $\overline{AB} = 9 - 3$; esto es, $\overline{AB} = 6$. Si A es el punto (−8, 0) y B es el punto (6, 0), entonces $\overline{AB} = 6 - (-8)$; es decir, $\overline{AB} = 14$. Si A es el punto (4, 2) y B es el punto (1, 2), entonces $\overline{AB} = 1 - 4$; esto es, $\overline{AB} = -3$. Se observa que $\overline{AB}$ es positiva si B está a la derecha de A, y $\overline{AB}$ es negativa si B se encuentra a la izquierda de A. ◀

Si C es el punto (x_1, y_1) y D es el punto (x_1, y_2), entonces la **distancia dirigida** de C a D, denotada por $\overline{CD}$, se define por

$$\overline{CD} = y_2 - y_1$$

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Refiérase a las figuras 6(a) y (b). Si C es el punto (1, −2) y D es el punto (1, −8), entonces $\overline{CD} = -8 - (-2)$; esto es, $\overline{CD} = -6$. Si C es el punto (−2, −3) y D es el punto (−2, 4), entonces $\overline{CD} = 4 - (-3)$; es decir, $\overline{CD} = 7$. El número $\overline{CD}$ es positivo si D está por arriba de C, y $\overline{CD}$ es negativo si D se encuentra debajo de C. ◀

Observe que el término *distancia dirigida* indica tanto la distancia como el sentido (positivo o negativo). Si sólo interesa la longitud del segmento de recta entre los punto P_1 y P_2 sin considerar el sentido, entonces se emplea el término *distancia no dirigida*. La **distancia no dirigida** de P_1 a P_2 se denota por $|\overline{P_1P_2}|$, la cual es un número no negativo. Si se utiliza la palabra *distancia* sin el adjetivo *dirigida* o *no dirigida*, debe entenderse que se hace referencia a la distancia no dirigida.

Ahora se obtendrá una fórmula para calcular la distancia $|\overline{P_1P_2}|$ si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera del plano. Se empleará el teorema de Pitágoras de la geometría plana, el cual se enuncia a continuación. Consulte la figura 7.

A.2.1 Teorema El teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, si a y b son las longitudes de los lados perpendiculares y c es la longitud de la hipotenusa, entonces

$$a^2 + b^2 = c^2$$

La figura 8 muestra a P_1 y P_2 en el primer cuadrante y el punto $R(x_2, y_1)$. Observe que $|\overline{P_1P_2}|$ es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo P_1RP_2. Del teorema de pitágoras, se tiene

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{P_1R}|^2 + |\overline{RP_2}|^2$$

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{|\overline{P_1R}|^2 + |\overline{RP_2}|^2}$$

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En esta fórmula no se considera el símbolo ± frente al radical debido a que $|\overline{P_1P_2}|$ es un número no negativo. La fórmula se cumple para todas las posiciones posibles de P_1 y P_2 en los cuatro cuadrantes. La longitud de la hipotenusa siempre es $|\overline{P_1P_2}|$, y las longitudes de los catetos siempre son $|\overline{P_1R}|$ y $|\overline{RP_2}|$. En consecuencia, se tiene el teorema siguiente.

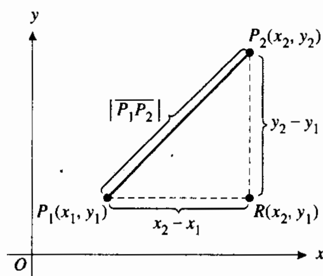


FIGURA 8

A.2.2 Teorema La fórmula de la distancia

La distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está determinada por

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Si P_1 y P_2 están en la misma recta horizontal, como en la figura 9, entonces $y_2 = y_1$ y

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0^2}$$

$$\Leftrightarrow |\overline{P_1P_2}| = |x_2 - x_1| \quad (\text{porque } \sqrt{a^2} = |a|)$$

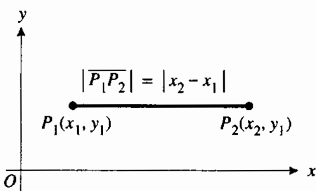


FIGURA 9

Además, si P_1 y P_2 están en la misma recta vertical, como se muestra en la figura 10, entonces $x_2 = x_1$ y

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{0^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overline{P_1P_2}| = |y_2 - y_1|$$

A continuación se obtendrán las fórmulas para determinar el punto medio de un segmento de recta. Sea $M(x, y)$ el punto medio del segmento de recta de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$. Consulte la figura 11. Como los triángulos P_1RM y MTP_2 son congruentes, entonces

$$|\overline{P_1R}| = |\overline{MT}| \quad \text{y} \quad |\overline{RM}| = |\overline{TP_2}|$$

Así,

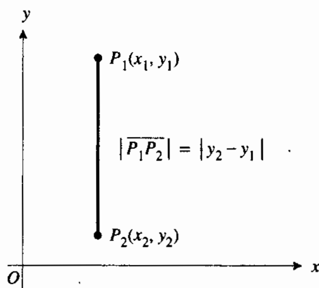


FIGURA 10

$$x - x_1 = x_2 - x \qquad y - y_1 = y_2 - y$$
$$2x = x_1 + x_2 \qquad 2y = y_1 + y_2$$
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

De este modo se ha demostrado el teorema siguiente.

A.2.3 Teorema Fórmulas del punto medio

Si $M(x, y)$ es el punto medio del segmento de recta de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$, entonces

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

En la deducción de las fórmulas, se supuso que $x_2 > x_1$ y $y_2 > y_1$. Las fórmulas también se cumplen al considerar cualquier otro orden de estos números.

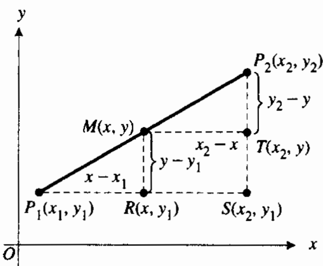


FIGURA 11

EJEMPLO 1 (a) Determine las coordenadas del punto medio M del segmento de recta de $A(5, -3)$ a $B(-1, 6)$. (b) Ubique los puntos A, M y B en un sistema coordenado y demuestre que $|\overline{AM}| = |\overline{MB}|$.

Solución

(a) Si M es el punto (x, y), de las fórmulas del punto medio, se tiene

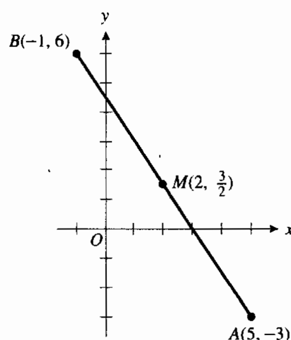


FIGURA 12

$$x = \frac{5-1}{2} \qquad\qquad y = \frac{-3+6}{2}$$
$$= 2 \qquad\qquad\qquad = \tfrac{3}{2}$$

De modo que M es el punto $(2, \frac{3}{2})$.

(b) La figura 12 muestra los puntos A, M y B. De la fórmula de la distancia se obtiene

$$|\overline{AM}| = \sqrt{(2-5)^2 + (\tfrac{3}{2}+3)^2} \qquad |\overline{MB}| = \sqrt{(-1-2)^2 + (6-\tfrac{3}{2})^2}$$
$$= \sqrt{9 + \tfrac{81}{4}} \qquad\qquad = \sqrt{9 + \tfrac{81}{4}}$$
$$= \tfrac{3}{2}\sqrt{13} \qquad\qquad = \tfrac{3}{2}\sqrt{13}$$

Por tanto, $|\overline{AM}| = |\overline{MB}|$. ◀

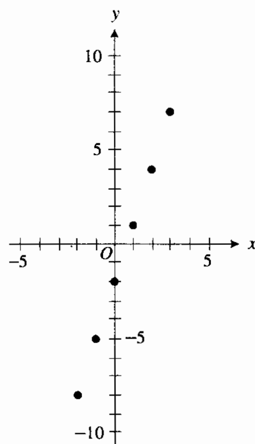


FIGURA 13

Se ha mostrado cómo el sistema coordenado cartesiano puede emplearse para obtener hechos geométricos mediante álgebra. Ahora se mostrará cómo dicho sistema permite asociar una *gráfica* (un concepto geométrico) con una ecuación (un concepto algebraico).

Una **ecuación algebraica** en dos variables x y y es un enunciado en el que se establece que dos expresiones en x y y son iguales. Cuando x y y se sustituyen por números específicos, por decir a y b, entonces el enunciado que resulta puede ser verdadero o falso. Si es verdadero, entonces el par ordenado (a, b) se denomina **solución de la ecuación.**



EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Considere la ecuación

$$y = 3x - 2 \tag{1}$$

donde (x, y) es un punto en R^2. Si x se sustituye por 2 en la ecuación, se observa que y es igual a 4; así, el par ordenado (2, 4) es una solución de esta ecuación. Si cualquier número se sustituye por x en el miembro derecho de (1), se obtiene un valor correspondiente para y. Por tanto, (1) tiene un número ilimitado de soluciones. Las soluciones que se obtienen de la tabla 1 son (−2, −8), (−1, −5), (0, −2), (1, 1), (2, 4) y (3, 7). ◀

Tabla 1

x	−2	−1	0	1	2	3
$y = 3x - 2$	−8	−5	−2	1	4	7

A.2.4 Definición de la gráfica de una ecuación

La **gráfica de una ecuación** en R^2 es el conjunto de todos los puntos de R^2 cuyas coordenadas son soluciones de la ecuación.

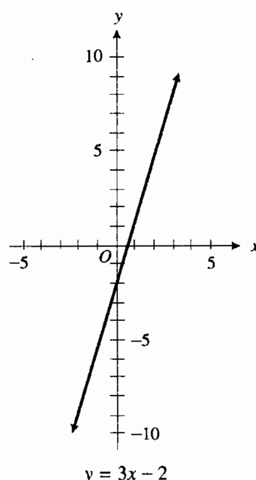
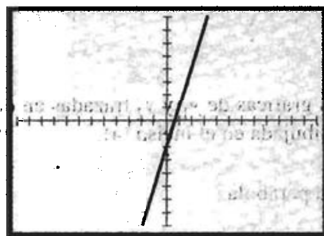


FIGURA 14

Debido a que la ecuación (1) tiene un número ilimitado de soluciones, su gráfica consiste de un número infinito de puntos. Los seis puntos proporcionados por la tabla 1 y mostrados en la figura 13, parecen estar sobre un recta. De hecho, aprenderá en la sección A.3 del apéndice que cada solución de la ecuación (1) corresponde a un punto sobre una recta, y recíprocamente, las coordenadas de cada punto de la recta satisfacen (1). Por tanto, la recta es la gráfica de la ecuación. Esta gráfica se muestra en la figura 14, donde las puntas de flecha indican que la recta continúa en los dos sentidos. Las coordenadas de cualquier punto (x, y) de la recta satisfacen (1), y las coordenadas de cualquier punto que no pertenece a la recta no satisfacen la ecuación.



$[-12, 12]$ por $[-8, 8]$

$y = 3x - 2$

FIGURA 15

Recuerde, de la sección del principio del libro titulada *Preparación para el estudio del Cálculo*, que se indicó que las gráficas se obtendrían en dos formas: (i) a mano, donde se utilizan los términos *dibuje la gráfica*; (ii) en una calculadora gráfica o graficadora, donde se indica *trace la gráfica*.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** La gráfica de la ecuación

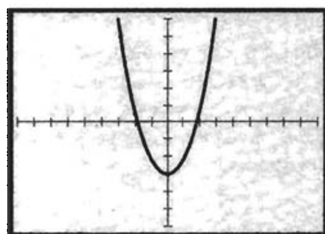
$$y = 3x - 2$$

trazada en el rectángulo de inspección de $[-12, 12]$ por $[-8, 8]$, se muestra en la figura 15. Compare las figuras 14 y 15, las cuales muestran la misma recta. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** La gráfica de la ecuación

$$y = x^2 - 3$$

trazada en el rectángulo de inspección de $[-9, 9]$ por $[-6, 6]$, se muestra en la figura 16. ◀



$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

$y = x^2 - 3$

FIGURA 16

La gráfica de la ecuación del ejemplo ilustrativo 5 es una *parábola*. Las parábolas se estudian con detalle en la sección A.4 del apéndice.

La mayoría de las graficadoras pueden trazar gráficas para más de una ecuación en el mismo rectángulo de inspección. Esto se realiza en el ejemplo siguiente.

▶ ***EJEMPLO 2*** **(a)** Dibuje la gráfica de la ecuación

$$y^2 = 4x$$

localizando en un sistema coordenado los puntos para los cuales x es igual a 0, 1, 2, 3 y 4 y uniendo estos puntos mediante una curva. **(b)** Trace las gráficas de las dos ecuaciones

$$y = 2\sqrt{x} \quad \text{y} \quad y = -2\sqrt{x}$$

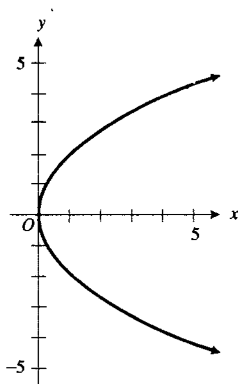
en el mismo rectángulo de inspección. **(c)** ¿Por qué son idénticas las curvas obtenidas en los incisos (a) y (b)?

Solución

(a) Como y^2 es no negativo, los valores de x están restringidos a números no negativos. Para cada valor positivo de x existen dos valores de y. La tabla 2 proporciona los valores de y cuando x es igual a 0, 1, 2, 3 y 4. Al localizar y unir los puntos cuyas coordenadas son los valores x y y de la tabla se obtiene la gráfica dibujada en la figura 17.

Tabla 2

x	0	1	1	2	2	3	3	4	4
$y^2 = 4x$	0	2	-2	$2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	4	-4

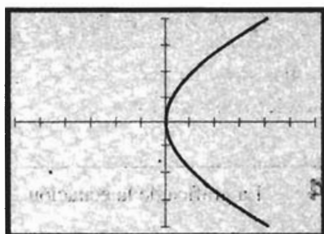


$y^2 = 4x$

FIGURA 17

(b) En la graficadora se consideran

$$y_1 = 2\sqrt{x} \quad \text{y} \quad y_2 = -2\sqrt{x}$$



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

$y_1 = 2\sqrt{x}$ y $y_2 = -2\sqrt{x}$

FIGURA 18

y se trazan las gráficas de estas dos ecuaciones en el mismo rectángulo de inspección de $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$, como se muestra en la figura 18.

(c) La ecuación $y^2 = 4x$ es equivalente a las dos ecuaciones $y = 2\sqrt{x}$ y $y = -2\sqrt{x}$. Por tanto, la unión de las gráficas de y_1 y y_2 trazadas en el inciso (b) es la misma que la gráfica dibujada en el inciso (a). ◀

La curva del ejemplo 2 también es una parábola.

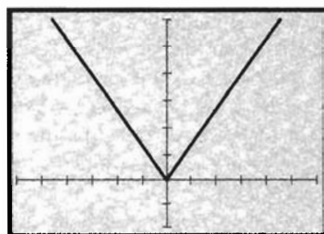
▶ ***EJEMPLO 3*** **(a)** Trace la gráfica de la ecuación $y = |x|$ **(b)** Dibuje la gráfica de la ecuación del inciso (a).

Solución

(a) El cálculo del valor absoluto de un número se efectúa internamente en la graficadora y en la mayoría de las calculadoras se denota por ABS. Sea

$$y = \text{ABS}(x)$$

y trace la gráfica en el rectángulo de inspección de $[-6, 6]$ por $[-2, 6]$, mostrada en la figura 19.



$[-6, 6]$ por $[-2, 6]$

$y = \text{ABS}(x)$

FIGURA 19

(b) De la definición de valor absoluto de un número,

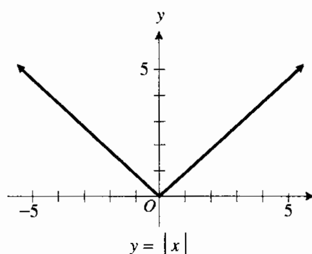
$$y = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La tabla 3 proporciona algunos valores de x y y que satisfacen la ecuación, y la gráfica se muestra en la figura 20, la cual concuerda con la figura 19.

Tabla 3

x	0	1	2	3	4	−1	−2	−3	−4
$y = \|x\|$	0	1	2	3	4	1	2	3	4

◀



$y = |x|$

FIGURA 20

La *simetría* es una propiedad de las gráficas, especialmente útil cuando se dibujan las gráficas de ciertas ecuaciones.

A.2.5 Definición de simetría de dos puntos

Se dice que los dos puntos P y Q son **simétricos con respecto a una recta** si y sólo si la recta es la bisectriz perpendicular (mediatriz) del segmento PQ. Dos puntos P y Q se dicen **simétricos con respecto a un tercer punto** si y sólo si el tercer punto es el punto medio del segmento PQ.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 6** Los puntos (3, 2) y (3, −2) son simétricos con respecto al eje x, los puntos (3, 2) y (−3, 2) son simétricos con respecto al eje y, y los puntos (3, 2) y (−3, −2) son simétricos con respecto al origen. Refiérase a la figura 21. ◀

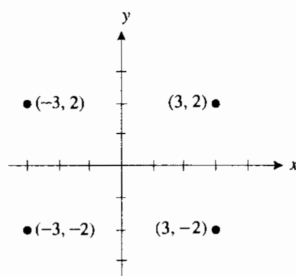


FIGURA 21

En general, los puntos (x, y) y $(x, -y)$ son simétricos con respecto al eje x; (x, y) y $(-x, y)$ son simétricos con respecto al eje y; y (x, y) y $(-x, -y)$ son simétricos con respecto al origen.

A.2.7 Definición de simetría de una gráfica

La gráfica de una ecuación es **simétrica con respecto a una recta *l*** si y sólo si para cada punto P de la gráfica existe un punto Q también de la gráfica tal que P y Q son simétricos con respecto a la recta l. La gráfica de una ecuación es **simétrica con respecto a un punto *R*** si y sólo si para cada punto P de la gráfica existe un punto S también de la gráfica tal que P y S son simétricos con respecto al punto R.

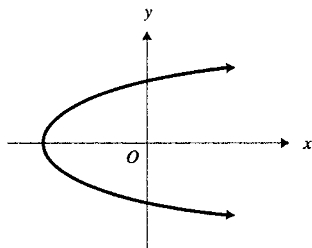


FIGURA 22

La figura 22 muestra una gráfica simétrica con respecto al eje x, la figura 23 presenta una gráfica simétrica con respecto al eje y, y la figura 24 muestra otra gráfica simétrica con respecto al origen.

De la definición de simetría de una gráfica, se deduce que si un punto (x, y) está en una gráfica simétrica con respecto al eje x, entonces el punto $(x, -y)$ también debe estar en la gráfica. Si los puntos (x, y) y $(x, -y)$ están en la gráfica, entonces la gráfica es simétrica con respecto al eje x. Por tanto, las coordenadas del punto $(x, -y)$ así como las del punto (x, y) deben satisfacer la ecuación de la gráfica. En consecuencia, la gráfica de una ecuación en x y y es simétrica con respecto al eje x si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente cuando y se sustituye por $-y$ en la ecuación. De esta forma, se ha demostrado el inciso (i) del siguiente criterio de simetría. Las demostraciones de los incisos (ii) y (iii) son semejantes.

A.2.7 Teorema Criterios de simetría

La gráfica de una ecuación en x y y es

(i) simétrica con respecto al eje x si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente cuando se sustituye y por $-y$ en la ecuación;

(ii) simétrica con respecto al eje y si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente cuando se sustituye x por $-x$ en la ecuación;

(iii) simétrica con respecto al origen si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente cuando se sustituye x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación.

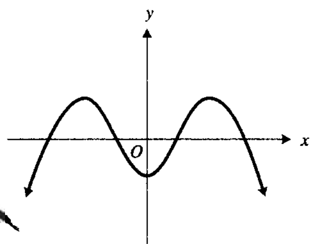


FIGURA 23

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 7** Refiérase a la gráfica de la figura 16, la cual es simétrica con respecto al eje y, y cuya ecuación es

$$y = x^2 - 3$$

Si x se reemplaza por $-x$, se obtiene la ecuación

$$y = (-x)^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow \quad y = x^2 - 3$$ ◀

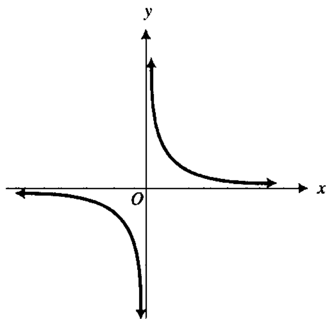


FIGURA 24

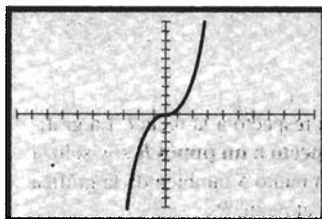
▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 8** La gráfica dibujada en la figura 17 es simétrica con respecto al eje x, y su ecuación es

$$y^2 = 4x$$

Al sustituir y por $-y$ en esta ecuación, se obtiene

$$(-y)^2 = 4x$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = 4x$$ ◀



[−10, 10] por [−10, 10]

$y = \frac{1}{2}x^3$

FIGURA 25

▶ EJEMPLO 4

Verifique la simetría de la gráfica cuya ecuaciónres

$$y = \tfrac{1}{2}x^3$$

Después trace su gráfica.

Solución Se verificará la simetría. Si x se reemplaza por $-x$ y y se sustituye por $-y$ en la ecuación dada, se tiene

$$-y = \tfrac{1}{2}(-x)^3$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \tfrac{1}{2}x^3$$

Por tanto, por el criterio de simetría (iii), la gráfica es simétrica con respecto al origen. La gráfica no es simétrica con respecto al eje x ni con respecto al eje y como se puede verificar al aplicar los criterios de simetría (i) y (ii).

La gráfica de la ecuación dada, trazada en el rectángulo de inspección de [−10, 10] por [−10, 10], se muestra en la figura 25. Observe la simetría con respecto al origen. ◀

EJERCICIOS A.2

En los ejercicios 1 y 2, localice el punto P en un sistema coordenado cartesiano rectangular y determine el cuadrante en el que se encuentra.

1. **(a)** $P(3, 7)$ **(b)** $P(-4, -6)$
(c) $P(2, -5)$ **(d)** $P(-1, 4)$

2. **(a)** $P(5, 6)$ **(b)** $P(8, -1)$
(c) $P(-7, -2)$ **(d)** $P(-9, 3)$

En los ejercicios 3 a 8, localice el punto P y cada uno de los puntos siguientes en un sistema coordenado cartesiano rectangular. (a) El punto Q tal que el segmento de recta de P a Q sea perpendicular al eje x y bisecado por dicho eje. Proporcione las coordenadas de Q. (b) El punto R tal que el segmento de recta de P a R sea perpendicular al eje y y bisecado por este eje. Dé las coordenadas de R. (c) El punto S tal que el segmento de recta de P a S sea bisecado por el origen. Proporcione las coordenadas de S. (d) El punto T tal que el segmento de recta de P a T sea perpendicular a la recta a 45° que pasa por el origen y biseca los cuadrantes primero y tercero, y que biseque al segmento PT. Dé las coordenadas de T.

3. $P(1, -2)$ **4.** $P(-2, 2)$ **5.** $P(2, 2)$

6. $P(-2, -2)$ **7.** $P(-1, -3)$ **8.** $P(0, -3)$

En los ejercicios 9 y 10, haga lo siguiente: (a) determine las coordenadas del punto medio M del segmento de recta de A a B; (b) localice los puntos A, M y B en un sistema coordenado cartesiano rectangular y demuestre que $|\overline{AM}| = |\overline{MB}|$.

9. $A(-4, 7)$ y $B(1, -3)$ **10.** $A(3, 4)$ y $B(4, -3)$

En los ejercicios 11 y 12, dibuje el triángulo que tiene vértices en A, B y C y calcule las longitudes de los lados.

11. $A(4, -5)$, $B(-2, 3)$, $C(-1, 7)$

12. $A(2, 3)$, $B(3, -3)$, $C(-1, -1)$

13. Una **mediana** de un triángulo es un segmento de recta trazada desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto. Calcule la longitud de las medianas del triángulo cuyos vértices son $A(2, 3)$, $B(3, -3)$ y $C(-1, -1)$.

14. Calcule las longitudes de las medianas del triángulo que tiene vértices $A(-3, 5)$, $B(2, 4)$ y $C(-1, -4)$.

15. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $A(3, -6)$, $B(8, -2)$ y $C(-1, -1)$ es un triángulo rectángulo. *Sugerencia:* utilice el recíproco del teorema de Pitágoras.

16. Determine los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero cuyos vértices son (0, 0), (0, 4), (3, 5) y (3, 1).

17. Demuestre que los puntos $A(-7, 2)$, $B(3, -4)$ y $C(1, 4)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

18. Demuestre que los puntos $A(-4, -1)$, $B(-2, -3)$, $C(4, 3)$ y $D(2, 5)$ son los vértices de un rectángulo.

19. Demuestre que los puntos (−3, 2), (1, −2) y (9, −10) son colineales utilizando la fórmula de la distancia.

20. Determine si los puntos (14, 7), (2, 2) y (−4, −1) son colineales empleando la fórmula de la distancia.

21. Demuestre que los puntos $A(6, -13)$, $B(-2, 2)$, $C(13, 10)$ y $D(21, -5)$ son los vértices de un cuadrado. Calcule la longitud de una diagonal.

22. Si un extremo de un segmento de recta es el punto $(-4, 2)$ y el punto medio del segmento es $(3, -1)$, determine las coordenadas del otro extremo del segmento.

23. La abscisa de un punto es -6, y su distancia desde el punto $(1, 3)$ es $\sqrt{74}$. Obtenga la ordenada del punto.

24. Dados los dos puntos $A(-3, 4)$ y $B(2, 5)$, determine las coordenadas de un punto P en la recta que pasa por A y B y que no se encuentra entre A y B tal que **(a)** la distancia de P a A sea el doble que la de P a B y **(b)** la distancia de P a B sea el doble que la de P a A.

En los ejercicios 25 a 32, haga lo siguiente: (a) verifique la simetría de la gráfica de la ecuación (i); (b) dibuje la gráfica de la ecuación (i); (c) trace las gráficas de las ecuaciones (ii) y (iii) en el mismo rectángulo de inspección; (d) compare las curvas obtenidas en los incisos (b) y (c).

25. **(i)** $y^2 = 9x$ **(ii)** $y = 3\sqrt{x}$ **(iii)** $y = -3\sqrt{x}$

26. **(i)** $y^2 = \frac{1}{4}x$ **(ii)** $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ **(iii)** $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$

27. **(i)** $y^2 = -\frac{1}{4}x$ **(ii)** $y = \frac{1}{2}\sqrt{-x}$
(iii) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{-x}$

28. **(i)** $y^2 = -4x$ **(ii)** $y = 2\sqrt{-x}$
(iii) $y = -2\sqrt{-x}$

29. **(i)** $y^2 = 1 - x^2$ **(ii)** $y = \sqrt{1 - x^2}$
(iii) $y = -\sqrt{1 - x^2}$

30. **(i)** $y^2 = 9 - x^2$ **(ii)** $y = \sqrt{9 - x^2}$
(iii) $y = -\sqrt{9 - x^2}$

31. **(i)** $y^2 = x^2 - 4$ **(ii)** $y = \sqrt{x^2 - 4}$
(iii) $y = -\sqrt{x^2 - 4}$

32. **(i)** $y^2 = x^2 - 16$ **(ii)** $y = \sqrt{x^2 - 16}$
(iii) $y = -\sqrt{x^2 - 16}$

En los ejercicios 33 y 34, dibuje la gráfica de la ecuación.

33. **(a)** $y = |x - 2|$ **(b)** $y = |x + 2|$
(c) $y = |x| - 2$ **(d)** $y = |x| + 2$

34. **(a)** $y = 2|x - 3|$ **(b)** $y = 2|x + 3|$
(c) $y = 2|x| - 6$ **(d)** $y = 2|x| + 6$

En los ejercicios 35 a 38, verifique la simetría de la gráfica de la ecuación y después trace la gráfica.

35. **(a)** $y = x^3$ **(b)** $y = -x^3$
(c) $y = \frac{1}{8}x^3$ **(d)** $y = -\frac{1}{8}x^3$

36. **(a)** $y = 2x^3$ **(b)** $y = -2x^3$
(c) $y = \frac{1}{6}x^3$ **(d)** $y = -\frac{1}{6}x^3$

37. **(a)** $y = 2x^4$ **(b)** $y = -2x^4$
(c) $y = \frac{1}{4}x^4$ **(d)** $y = -\frac{1}{4}x^4$

38. **(a)** $y = 4x^4$ **(b)** $y = -4x^4$
(c) $y = \frac{1}{2}x^4$ **(d)** $y = -\frac{1}{2}x^4$

En los ejercicios 39 a 44, trace las gráficas de las ecuaciones de cada ejercicio en el mismo rectángulo de inspección.

39. $y = x^2, y = (x + 2)^2, y = (x - 2)^2, y = (x - 4)^2$

40. $y = x^2, y = x^2 + 2, y = x^2 - 2, y = x^2 - 4$

41. $y = x^2, y = 2x^2, y = -2x^2, y = 4x^2$

42. $y = x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = -\frac{1}{2}x^2, y = \frac{1}{4}x^2$

43. $y = |x|, y = |x| + 3, y = |x| - 3,$
$y = |x| - 4$

44. $y = |x|, y = |x + 3|, y = |x - 3|,$
$y = |x - 4|$

45. Describa en qué son similares las gráficas del ejercicio 39 y en que son diferentes. Haga lo mismo para las gráficas del ejercicio 41.

46. Siga las instrucciones del ejercicio 45 para las gráficas de los ejercicios 40 y 42.

47. Siga las instrucciones para el ejercicio 45 para las gráficas de los ejercicios 43 y 44.

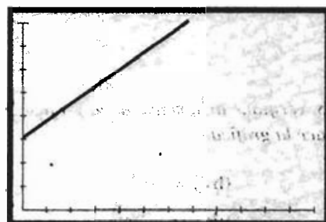
48. Utilice las definiciones de simetría para explicar por qué una gráfica simétrica con respecto a los dos ejes coordenados también es simétrica con respecto al origen.

A.3 RECTAS

Suponga que el costo de alquiler de un avión de una plaza, de una aerolínea privada, es de \$310 por el avión y el piloto, más 75 centavos por milla de vuelo. Si y dólares es el costo de un viaje de x millas, entonces

$$y = 0.75x + 310$$

La figura 1 muestra la gráfica de esta ecuación trazada en el rectángulo de inspección de $[0, 1200]$ por $[0, 800]$, con una escala de 100 en los ejes. La gráfica parece ser una recta. En el teorema A.3.4 se establece que la gráfica de una



[0, 1200] por [0, 800]

$y = 0.75x + 310$

FIGURA 1

ecuación de este tipo es una recta. Observe que para cada incremento de 100 unidades en x, y se incrementa en 75 unidades, o, equivalentemente, por cada unidad de incremento en x, y se incrementa en 0.75 unidades. De este modo, la razón de cambio en y al cambio en x es la constante 0.75. Esta razón constante se denomina *pendiente* de la recta. A continuación se obtendrá una definición formal de la pendiente de una recta.

Sean l una recta no vertical, y $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos distintos cualesquiera de l. La figura 2 muestra esta recta. En la figura, R es el punto (x_2, y_1), y los puntos P_1, P_2 y R son vértices de un triángulo rectángulo; además, $\overline{P_1R} = x_2 - x_1$ y $\overline{RP_2} = y_2 - y_1$. El número $y_2 - y_1$ mide el cambio en las ordenadas de P_1 a P_2, y puede ser positivo, negativo o cero. El número $x_2 - x_1$ mide el cambio en las abscisas de P_1 a P_2, y también puede ser positivo o negativo. Como la recta l no es vertical, $x_2 \quad x_1$, y por tanto, $x_2 - x_1$ no puede ser cero. Sea

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{1}$$

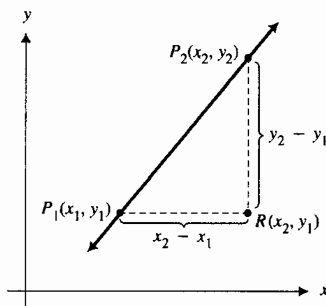


FIGURA 2

El valor de m calculado a partir de esta ecuación es independiente de la elección de los dos puntos P_1 y P_2 de l. A fin de mostrar esto, suponga que se eligen dos puntos diferentes $\overline{P}_1(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$ y $\overline{P}_2(\overline{x}_2, \overline{y}_2)$ de la recta l, y se calcula un número $\overline{m}$ a partir de (1)

$$\overline{m} = \frac{\overline{y}_2 - \overline{y}_1}{\overline{x}_2 - \overline{x}_1}$$

Se probará que $\overline{m} = m$. Refiérase a la figura 3. Los triángulos $\overline{P}_1\overline{R}\overline{P}_2$ y P_1RP_2 son semejantes; por lo que las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales. Por tanto,

$$\frac{\overline{y}_2 - \overline{y}_1}{\overline{x}_2 - \overline{x}_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

o bien,

$$\overline{m} = m$$

Así, el valor de m calculado a partir de (1) es el mismo número sin importar cuales dos puntos de l se eligieron. Este número m se denomina *pendiente* de la recta.

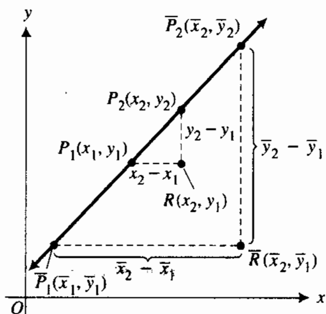


FIGURA 3

A.3.1 Definición de la pendiente de una recta

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera de la recta l, la cual no es paralela al eje y, entonces la **pendiente de l, denotada por m,** está determinada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación anterior por $x_2 - x_1$, se obtiene

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

De esta ecuación se deduce que si se considera una partícula que se mueve a lo largo de una recta, el cambio en la ordenada de la partícula es igual al producto de la pendiente y el cambio en la abscisa.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Si l es la recta que pasa por los puntos $P_1(2, 1)$ y $P_2(4, 7)$ y m es la pendiente de l, entonces

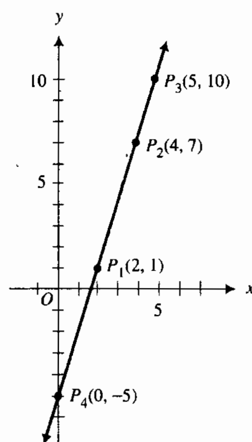


FIGURA 4

$$m = \frac{7 - 1}{4 - 2}$$
$$= 3$$

Refiérase a la figura 4. Si una partícula se mueve a lo largo de la recta l, el cambio en la ordenada es 3 veces el cambio en la abscisa. Esto es, si la partícula está en $P_2(4, 7)$ y la abscisa se incrementa una unidad, entonces la ordenada se incrementará en 3 unidades, y la partícula estará en $P_3(5, 10)$. De igual manera, si la partícula está en $P_1(2, 1)$ y la abscisa se disminuye en 2 unidades, entonces la ordenada se disminuirá en 6 unidades, y la partícula estará en $P_4(0, -5)$. ◀

Si la pendiente de una recta es positiva, entonces conforme la abscisa de un punto de la recta se incrementa, la ordenada se incrementa también, tal como se muestra en la figura 5. En la figura 6 se presenta una recta cuya pendiente es negativa. Para esta recta, conforme la abscisa de un punto de la recta se incrementa, la ordenada disminuye.

Si una recta es paralela al eje x, entonces $y_2 = y_1$, de modo que la pendiente es cero. Si una recta es paralela al eje y, entonces $x_2 = x_1$, por lo que la fracción $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ carece de significado debido a que no puede dividirse entre cero. Por esta razón, las rectas paralelas al eje y se excluyen de la definición de pendiente. Por tanto, la pendiente de una recta vertical no está definida.

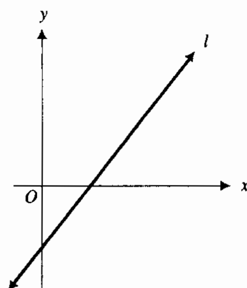


FIGURA 5

▶ ***EJEMPLO 1*** Para cada par de puntos, dibuje la recta que pasa por ellos y determine su pendiente: **(a)** $A(3, 7)$ y $B(-2, -4)$; **(b)** $A(-2, 5)$ y $B(2, -3)$; **(c)** $A(-3, 4)$ y $B(5, 4)$; **(d)** $A(5, 3)$ y $B(5, -1)$.

Solución Las rectas se muestran en las figuras 7(a)–(d). Al calcular la pendiente se obtiene

(a) $m = \frac{-4 - 7}{-2 - 3} = \frac{-11}{-5} = \frac{11}{-5}$

(b) $m = \frac{-3 - 5}{2 - (-2)} = -\frac{8}{4} = -2$

(c) $m = \frac{4 - 4}{5 - (-3)} = \frac{0}{8} = 0$

(d) Como la recta es vertical, la pendiente no está definida. Si se intenta emplear la definición para calcular la pendiente, se obtendrá cero en el denominador. ◀

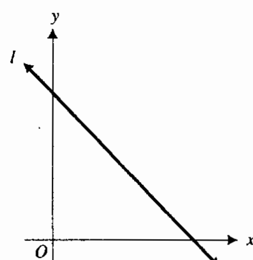
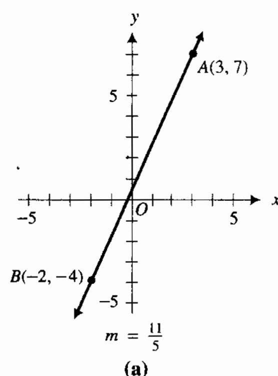


FIGURA 6

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

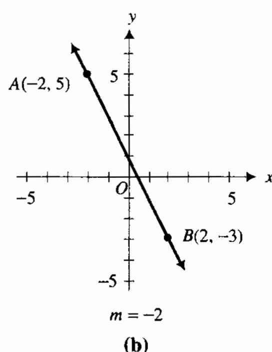
(a) Suponga que una recta contiene al punto $P(5, 2)$ y su pendiente es $\frac{3}{4}$. Para determinar otro punto de la recta, se inicia en P y como la pendiente es $\frac{3}{4}$, se desplaza 4 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba. Entonces se tiene el punto $Q(9, 5)$, que también está en la recta. La recta se dibuja de modo que pase por los puntos P y Q, como se muestra en la figura 8.

(b) Si una recta pasa por el punto $P(5, 2)$ y tiene la pendiente negativa $-\frac{3}{4}$, se obtiene otro punto de la recta desplazándose, a partir de P, 4 unidades a la derecha y 3 unidades hacia abajo. Esto proporciona el punto $Q(9, -1)$. La figura 9 muestra la recta que pasa por P y Q. ◀



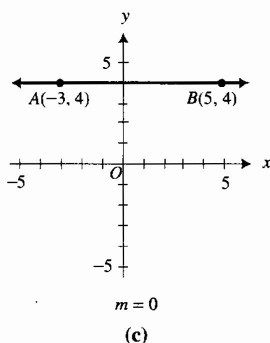
$m = \frac{11}{5}$

(a)



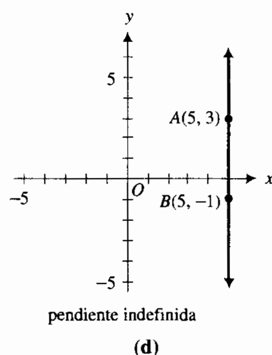
$m = -2$

(b)



$m = 0$

(c)



pendiente indefinida

(d)

FIGURA 7

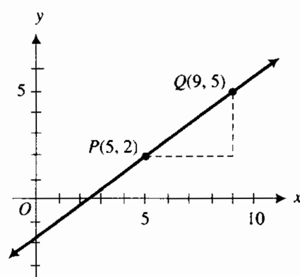


FIGURA 8

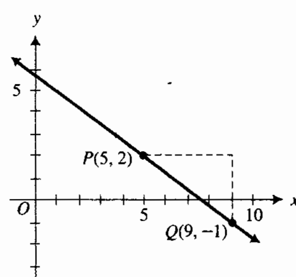


FIGURA 9

En la sección A.2 del apéndice se definió la gráfica de una ecuación. Ahora se explicará lo que se entiende por *ecuación de una gráfica.*

A.3.2 Definición de ecuación de una gráfica

Una **ecuación de una gráfica** es una ecuación que es satisfecha por las coordenadas de aquellos, y sólo aquellos, puntos de la gráfica.

A partir de esta definición, se deduce que una ecuación de una gráfica tiene las siguientes propiedades:

1. Si un punto $P(x, y)$ está en la gráfica, entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación.
2. Si un punto $P(x, y)$ no está en la gráfica, entonces sus coordenadas no satisfacen la ecuación.

A fin de obtener la ecuación de una recta, se emplea el hecho de que un punto $P_1(x_1, y_1)$ y la pendiente m determinan sólo una recta. Sea $P(x, y)$ cualquier punto de la recta diferente de P_1. Entonces, como la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es m, de la definición de pendiente, se tiene

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

$$\Leftrightarrow \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

Esta ecuación se denomina **forma punto-pendiente** de la ecuación de la recta. Esta forma proporciona la ecuación de la recta si se conocen un punto $P_1(x_1, y_1)$ de la recta y la pendiente de la misma.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Con el fin de obtener una ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(6, -3)$ y $B(-2, 3)$, primero se calcula m.

$$m = \frac{3 - (-3)}{-2 - 6}$$

$$= \frac{6}{-8}$$

$$= -\frac{3}{4}$$

Al emplear la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta con A como P_1, resulta

$$y - (-3) = -\tfrac{3}{4}(x - 6)$$
$$4y + 12 = -3x + 18$$
$$3x + 4y - 6 = 0$$

Si se considera B como P_1 en la forma punto-pendiente, se obtiene

$$y - 3 = -\tfrac{3}{4}[x - (-2)]$$
$$4y - 12 = -3x - 6$$
$$3x + 4y - 6 = 0$$

la cual, por supuesto, es la misma ecuación obtenida anteriormente ◀

Si en la forma punto-pendiente se elige el punto particular $(0, b)$ (es decir, el punto donde la recta intersecta al eje y) como el punto (x_1,y_1), se tiene

$$y - b = m(x - 0)$$
$$\Leftrightarrow \quad y = mx + b$$

El número b, la ordenada del punto donde la recta corta al eje y, se llama **intercepción y** (u **ordenada al origen**) de la recta. En consecuencia, la ecuación anterior recibe el nombre de **forma pendiente-intercepción** de la ecuación de la recta. Esta forma es especialmente útil debido a que expresa de manera explícita la coordenada y de un punto de la recta en términos de su coordenada x.

▶ ***EJEMPLO 2*** Determine la pendiente de la recta que tiene la ecuación

$$6x + 5y - 7 = 0$$

Solución Al resolver la ecuación para y, se obtiene.

$$5y = -6x + 7$$
$$y = -\tfrac{6}{5}x + \tfrac{7}{5}$$

Esta ecuación está en la forma pendiente-intercepción, donde $m = -\frac{6}{5}$ y $b = \frac{7}{5}$. Por tanto, la pendiente es $-\frac{6}{5}$. ◀

Como la pendiente de una recta vertical no está definida, no se puede aplicar la forma punto-pendiente para obtener su ecuación. En lugar de esta forma se utiliza el teorema siguiente, el cual también proporciona una ecuación de una recta horizontal.

A.3.3 Teorema

(i) Una ecuación de la recta vertical que tiene intercepción x igual a a es

$$x = a$$

(ii) Una ecuación de la recta horizontal que tiene intercepción y igual a b es

$$y = b$$

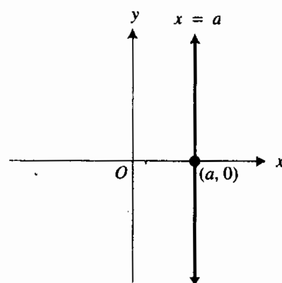


FIGURA 10

Demostración

(i) La figura 10 muestra la recta vertical que intersecta al eje x en el punto $(a, 0)$. Esta recta consta de aquellos puntos del plano y sólo aquellos que tienen la misma abscisa a. De este modo, $P(x, y)$ es cualquier punto de la recta si y sólo si

$$x = a$$

(ii) La recta horizontal que intersecta al eje y en el punto $(0, b)$ se muestra en la figura 11. Para esta recta, $m = 0$. Por tanto, de la forma pendiente intercepción, una ecuación de esta recta es

$$y = b$$ ■

Se ha mostrado que una ecuación de una recta no vertical es de la forma $y = mx + b$, y una ecuación de una recta vertical es $x = a$. Como cada una de estas ecuaciones es un caso especial de una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0 \quad (2)$$

donde A, B y C son constantes y A y B no son cero simultáneamente, se deduce que cada recta tiene una ecuación de la forma (2). El recíproco de este hecho se presenta en el teorema siguiente.

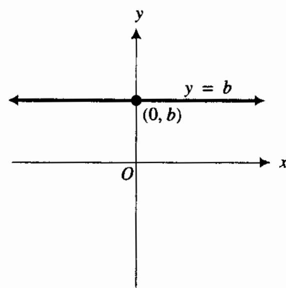


FIGURA 11

A.3.4 Teorema

La gráfica de la ecuación

$$Ax + By + C = 0$$

donde A, B y C son constantes, y A y B no son ambas cero, es una recta.

La demostración de este teorema se deja como ejercicio. Vea el ejercicio 51.

Como la gráfica de (2) es una recta, esta ecuación se denomina **ecuación lineal;** y es la ecuación general de primer grado en x y y.

A fin de trazar una recta en la graficadora, primero se escribe la ecuación en la forma punto-pendiente, como se hizo con la figura 1. Para dibujar a mano una recta, sólo se necesita determinar las coordenadas de dos puntos de la recta, localizar los puntos y después dibujar la recta. Cualesquiera dos puntos serán suficientes, pero por conveniencia, usualmente se eligen los puntos donde la recta corta a los ejes.

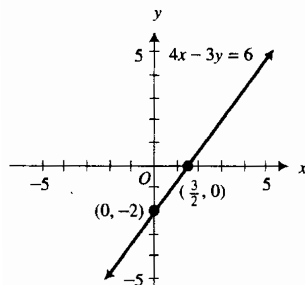


FIGURA 12

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** Con el fin de dibujar la recta que tiene ecuación

$$4x - 3y = 6$$

primero se obtiene la intercepción x igual a a y la intercepción y igual a b. Para ello, se sustituye en la ecuación 0 por y y se obtiene $a = \frac{3}{2}$. Al reemplazar 0 por x resulta $b = -2$. Así, se tiene la recta que se muestra en la figura 12. ◀

Una aplicación de la pendiente se presenta en el teorema siguiente.

A.3.5 Teorema

Si l_1 y l_2 son dos rectas no verticales diferentes que tiene pendientes m_1 y m_2, respectivamente, entonces l_1 y l_2 son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$.

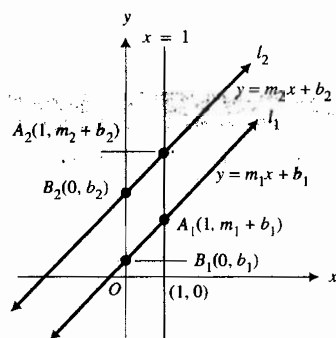


FIGURA 13

Demostración Sean las ecuaciones de l_1 y l_2, respectivamente,

$$y = m_1x + b_1 \quad \text{y} \quad y = m_2x + b_2$$

Refiérase a la figura 13, la cual muestra las dos rectas que intersectan al eje y en los puntos $B_1(0, b_1)$ y $B_2(0, b_2)$. La recta vertical $x = 1$ intersecta a l_1 en el punto $A_1(1, m_1 + b_1)$, y a l_2 en el punto $A_2(1, m_2 + b_2)$. Entonces

$$|\overline{B_1B_2}| = b_2 - b_1 \quad \text{y} \quad |\overline{A_1A_2}| = (m_2 + b_2) - (m_1 + b_1)$$

Las dos rectas son paralelas si y sólo si las distancias verticales $|\overline{B_1B_2}|$ y $|\overline{A_1A_2}|$ son iguales; esto es, l_1 y l_2 son paralelas si y sólo si

$$b_2 - b_1 = (m_2 + b_2) - (m_1 + b_1)$$
$$b_2 - b_1 = m_2 + b_2 - m_1 - b_1$$
$$m_1 = m_2$$

Así, l_1 y l_2 son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$. ■

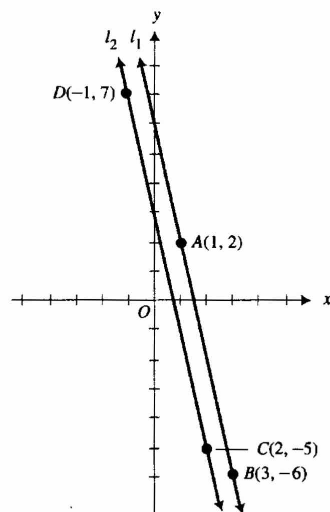


FIGURA 14

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** Sean l_1 la recta que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(3, -6)$, y m_1 la pendiente de l_1; y sean l_2 la recta que pasa por los puntos $C(2, -5)$ y $D(-1, 7)$, y m_2 la pendiente de l_2. Consulte la figura 14. Entonces

$$m_1 = \frac{-6 - 2}{3 - 1} = \frac{-8}{2} = -4 \qquad m_2 = \frac{7 - (-5)}{-1 - 2} = \frac{12}{-3} = -4$$

Como $m_1 = m_2$, entonces, por el teorema A.3.5, l_1 y l_2 son paralelas. ◀

Dos puntos distintos cualesquiera determinan una recta. Tres puntos diferentes pueden o no estar en una recta. Si tres o más puntos están en la misma recta se les llama **colineales.** En consecuencia, tres puntos A, B y C son colineales si y sólo si la recta que pasa por los puntos A y B es la misma que la que pasa por los puntos B y C. Como la recta que pasa por A y B y la recta que pasa por B y C contienen al punto B, ellas serán la misma recta si y sólo si sus pendientes son iguales.

▶ ***EJEMPLO 3*** Determine por medio de pendientes si los puntos $A(-3, -4)$, $B(2, -1)$ y $C(7, 2)$ son colineales.

Solución Si m_1 es la pendiente de la recta que pasa por A y B, y m_2 es la pendiente de la recta que pasa B y C, entonces

$$m_1 = \frac{-1 - (-4)}{2 - (-3)} = \frac{3}{5} \qquad m_2 = \frac{2 - (-1)}{7 - 2} = \frac{3}{5}$$

En consecuencia, $m_1 = m_2$. Por tanto, la recta que pasa por A y B y la recta que pasa por B y C tienen la misma pendiente y contienen al punto común B. Así, ellas son la misma recta, y por tanto, A, B y C son colineales. ◀

A continuación se demostrará un teorema acerca de las pendientes de dos rectas perpendiculares.

A.3.6 Teorema

Dos rectas no verticales l_1 y l_2 que tienen pendientes m_1 y m_2, respectivamente, son perpendiculares si y sólo si $m_1 m_2 = -1$.

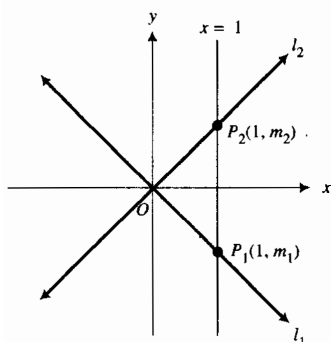


FIGURA 15

Demostración Considere los ejes coordenados de modo que el origen coincida con el punto de intersección de l_1 y l_2. Vea la figura 15. Puesto que las rectas l_1 y l_2 no son verticales, las dos rectas intersectan a la recta $x = 1$ en los puntos P_1 y P_2, respectivamente. Las abscisas de P_1 y P_2 son iguales a 1. Sea $\bar{y}$ la ordenada de P_1. Como l_1 contiene a los puntos (0, 0) y $(1, \bar{y})$ y su pendiente es m_1, entonces

$$m_1 = \frac{\bar{y} - 0}{1 - 0}$$

Así, $\bar{y} = m_1$. De manera semejante, se muestra que la ordenada de P_2 es m_2. Del teorema de Pitágoras y de su recíproco, el triángulo P_1OP_2 es un triángulo rectángulo si y sólo si

$$|\overline{OP_1}|^2 + |\overline{OP_2}|^2 = |\overline{P_1P_2}|^2 \tag{3}$$

Al aplicar la fórmula de la distancia, se obtiene

$$|\overline{OP_1}|^2 = (1 - 0)^2 + (m_1 - 0)^2 \qquad |\overline{OP_2}|^2 = (1 - 0)^2 + (m_2 - 0)^2$$
$$= 1 + m_1^2 \qquad\qquad = 1 + m_2^2$$
$$|\overline{P_1P_2}|^2 = (1 - 1)^2 + (m_2 - m_1)^2$$
$$= m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2$$

Si se sustituye en (3), se puede concluir que P_1OP_2 es un triángulo rectángulo si y sólo si

$$1 + m_1^2 + 1 + m_2^2 = m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2$$
$$2 = -2m_1m_2$$
$$m_1m_2 = -1$$

■

Como la condición $m_1 m_2 = -1$ equivale a

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

el teorema A.3.6 establece que dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si la pendiente de una de ellas es el recíproco negativo de la pendiente de la otra.

▶ EJEMPLO 4 Dada la recta l que tiene la ecuación

$$5x + 4y - 20 = 0$$

obtenga una ecuación de la recta que pasa por el punto (2, −3) y es (**a**) paralela a l, y (**b**) perpendicular a l.

Solución En primer lugar se determina la pendiente de l al escribir su ecuación en la forma pendiente-intercepción. Si se resuelve la ecuación para y se tiene

$$4y = -5x + 20$$
$$y = -\frac{5}{4}x + 5$$

La pendiente de l es el coeficiente de x, el cual es $-\frac{5}{4}$.

(a) La pendiente de una recta paralela a l es también $-\frac{5}{4}$. Como la recta requerida contiene al punto (2, −3), se emplea la forma punto-pendiente, de donde resulta

$$y - (-3) = -\frac{5}{4}(x - 2)$$
$$4y + 12 = -5x + 10$$
$$5x + 4y + 2 = 0$$

(b) La pendiente de una recta perpendicular a l es el recíproco negativo de $-\frac{5}{4}$, el cual es $\frac{4}{5}$. De la forma punto-pendiente, una ecuación de la recta que pasa por (2, −3) y que tiene pendiente $\frac{4}{5}$ es

$$y - (-3) = \frac{4}{5}(x - 2)$$
$$5y + 15 = 4x - 8$$
$$4x - 5y - 23 = 0$$

◀

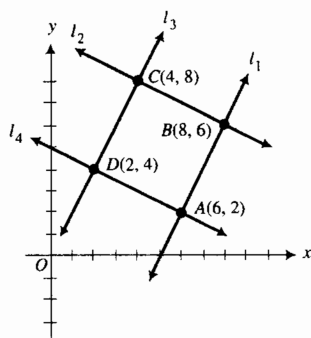


FIGURA 16

▶ ***EJEMPLO 5*** Demuestre por medio de pendientes que los cuatro puntos $A(6, 2)$, $B(8, 6)$, $C(4, 8)$ y $D(2, 4)$ son vértices de un rectángulo.

Solución Consulte la figura 16, donde l_1 es la recta que pasa por A y B, l_2 es la recta que pasa por B y C, l_3 es la recta que pasa por D y C, y l_4 es la recta que pasa por A y D; m_1, m_2, m_3 y m_4 son sus pendientes respectivas. Entonces

$$m_1 = \frac{6-2}{8-6} = 2 \qquad m_2 = \frac{8-6}{4-8} = -\frac{1}{2} \qquad m_3 = \frac{8-4}{4-2} = 2 \qquad m_4 = \frac{4-2}{2-6} = -\frac{1}{2}$$

Como $m_1 = m_3$, l_1 es paralela a l_3; y debido a que $m_2 = m_4$, l_2 es paralela a l_4. Puesto que $m_1m_2 = -1$, l_1 y l_2 son perpendiculares. Por tanto, el cuadrilátero tiene sus lados opuestos paralelos y un par de lados adyacentes perpendiculares. En consecuencia, el cuadrilátero es un rectángulo. ◀

EJERCICIOS A.3

En los ejercicios 1 a 6, dibuje la recta que pasa por los puntos A y B y determine la pendiente de la recta.

1. **(a)** $A(1, 4)$, $B(6, 5)$ **(b)** $A(2, -3)$, $B(-4, 3)$

2. **(a)** $A(5, 2)$, $B(-2, -3)$ **(b)** $A(-4, 2)$, $B(8, 5)$

3. **(a)** $A(-4, 3)$, $B(0, 0)$ **(b)** $A(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, $B(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3})$

4. **(a)** $A(7, 0)$, $B(0, -6)$ **(b)** $A(-\frac{3}{4}, \frac{1}{8})$, $B(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2})$

5. **(a)** $A(1, 5)$, $B(-2, 5)$ **(b)** $A(-2.1, 0.3)$, $B(2.3, 1.4)$

6. **(a)** $A(3, -5)$, $B(3, 4)$ **(b)** $A(5.2, -3.5)$, $B(-6.3, -1.4)$

En los ejercicios 7 y 8, dibuje la recta que pasa por el punto P y tiene pendiente m.

7. **(a)** $P(3, 4)$, $m = \frac{2}{5}$ **(b)** $P(-1, 6)$, $m = -3$

8. **(a)** $P(4, 3)$, $m = 2$ **(b)** $P(2, -5)$, $m = -\frac{4}{3}$

En los ejercicios 9 a 20, obtenga una ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

9. **(a)** La pendiente es 4 y pasa por el punto (2, −3);
(b) pasa por los dos puntos (−1, −5) y (3, 6).

10. **(a)** La pendiente es −2 y pasa por el punto (−4, 3);
(b) pasa por los dos puntos (3, 1) y (−5, 4).

11. **(a)** La pendiente es $-\frac{2}{3}$ y la intercepción y es igual a 1;
(b) la pendiente es 2 y la intercepción x es igual a $-\frac{4}{3}$.

12. (a) La pendiente es $\frac{3}{5}$ y la intercepción y es igual a -4;

(b) la pendiente es -2 y la intercepción x es igual a 4.

13. (a) Pasa por el punto $(1, -7)$ y es paralela al eje x;

(b) pasa por el punto $(2, 6)$ y es paralela al eje y.

14. (a) Pasa por el punto $(-5, 2)$ y es paralela al eje x;

(b) pasa por el punto $(-3, -4)$ y es paralela al eje y.

15. (a) La intercepción x es igual a -3 y la intercepción y es igual a 4; (b) pasa por el origen y biseca al ángulo entre los ejes en los cuadrantes primero y tercero.

16. (a) La intercepción x es igual a 5 y la intercepción y es igual a -6; (b) pasa por el origen y biseca al ángulo entre los ejes en los cuadrantes segundo y cuarto.

17. Pasa por el punto $(-2, 3)$ y es paralela a la recta cuya ecuación es $2x - y - 2 = 0$.

18. Pasa por el punto $(1, 4)$ y es paralela a la recta cuya ecuación es $2x - 5y + 7 = 0$.

19. Pasa por el punto $(2, 4)$ y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $x - 5y + 10 = 0$.

20. Pasa por el origen y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $2x - 5y + 6 = 0$.

En los ejercicios 21 a 24, obtenga tanto la pendiente como la intercepción y de la recta que tiene la ecuación dada. Dibuje la recta.

21. (a) $x + 3y - 6 = 0$ (b) $4y - 9 = 0$

22. (a) $8x - 4y = 5$ (b) $3y - 5 = 0$

23. (a) $7x - 8y = 0$ (b) $x = 6 - 2y$

24. (a) $x = 4y - 2$ (b) $4x = 3y$

En los ejercicios 25 y 26, obtenga una ecuación de la recta que pase por los dos puntos indicados, y exprese la ecuación en la forma pendiente-intercepción; dibuje la recta.

25. $(1, 3)$ y $(2, -2)$ 26. $(3, -5)$ y $(1, -2)$

27. Compruebe que las rectas que tienen ecuaciones $3x + 5y + 7 = 0$ y $6x + 10y - 5 = 0$ son paralelas; dibuje sus gráficas.

28. Demuestre que las rectas que tienen ecuaciones $4x - 3y + 12 = 0$ y $8x - 6y + 15 = 0$ son paralelas; y dibuje sus gráficas.

29. Pruebe que las rectas que tienen ecuaciones $2x - 3y + 6 = 0$ y $3x + 2y - 12 = 0$ son perpendiculares; dibuje sus gráficas.

30. Demuestre que las rectas que tiene ecuaciones $2y = 10 - 5x$ y $5y = 2x + 20$ son perpendiculares; dibuje sus gráficas.

31. Obtenga el valor de k tal que las rectas cuyas ecuaciones son $3x + 6ky = 7$ y $9kx + 8y = 15$ sean paralelas.

32. Determine el valor de k tal que las rectas cuyas ecuaciones son $3kx + 8y = 5$ y $6y - 4kx = -1$ sean perpendiculares.

En los ejercicios 33 a 36, determine por medio de pendientes si los puntos son colineales.

33. (a) $(2, 3), (-4, -7), (5, 8)$

(b) $(2, -1), (1, 1), (3, 4)$

34. (a) $(4, 6), (1, 2), (-5, -4)$

(b) $(-3, 6), (3, 2), (9, -2)$

35. (a) $(2, 5), (-1, 4), (3, -2)$

(b) $(0, 2), (-3, -1), (4, 6)$

36. (a) $(-1, 2), (7, 4), (2, -1)$

(b) $(4, -9), (4, 1), (4, 8)$

37. Demuestre por medio de pendientes que los cuatro puntos $(0, 0)$, $(-2, 1)$, $(3, 4)$ y $(5, 3)$ son los vértices de un paralelogramo (cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos).

38. Compruebe mediante pendientes que los cuatro puntos $(-4, -1)$, $(3, \frac{8}{3})$, $(8, -4)$ y $(2, -9)$ son los vértices de un trapecio (cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos).

39. Pruebe por medio de pendientes que los tres puntos $(3, 1)$, $(6, 0)$ y $(4, 4)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, y calcule el área del triángulo.

40. Demuestre mediante pendientes que los puntos $(-6, 1)$, $(-4, 6)$, $(4, -3)$ y $(6, 2)$ son los vértices de un rectángulo.

41. El fabricante de un artículo de primera necesidad tiene un costo total que consiste de un costo general semanario de $3 000 y un costo de producción de $25 por unidad. (a) Si x unidades se producen por semana y y dólares es el costo total semanario, escriba una ecuación que involucre a x y y. (b) Dibuje la gráfica de la ecuación del inciso (a).

42. El costo total de un fabricante consiste de un costo de $20 por unidad manufacturada y un costo general de producción diario fijo. (a) Si el costo total de producción de 200 unidades en un día es de $4 500, determine el costo general diario fijo. (b) Si se producen x unidades por día y y dólares es el costo total diario, escriba una ecuación que contenga a x y y. (c) Dibuje la gráfica de la ecuación del inciso (b).

43. Haga el ejercicio 42 si el costo de producción es $30 por unidad, y el costo total de producción de 200 unidades en un día es de $6 600.

44. La gráfica de una ecuación que relaciona la temperatura en grados Celsius y la temperatura en grados Fahrenheit es una recta. El agua se congela a 0° Celsius y 32° Fahrenheit, y hierve a 100° Celsius y 212° Fahrenheit. (a) Si y grados Fahrenheit corresponden a x grados Celsius, escriba una ecuación que contenga a x y y. (b) Dibuje la gráfica de la ecuación del inciso (a). (c) ¿Cuál es la temperatura Fahrenheit que corresponde a 20° Celsius? (d) ¿Cuál es la temperatura Celsius que corresponde a 86° Fahrenheit?

45. Obtenga la ordenada del punto cuya abscisa es -3 y es colineal con los puntos $(3, 2)$ y $(0, 5)$.

46. La ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

donde a y b son las intercepciones x y y, respectivamente, es la *forma intercepción* (o *simétrica*) de la ecuación de una recta. Explique cómo puede obtenerse esta forma a partir de la forma punto-intercepción y de la relación entre la pendiente y las intercepciones.

47. Si se conocen las coordenadas de los tres vértices A, B y C de un triángulo, explique cómo obtendría la ecuación de la mediana que va desde A hasta el lado que pasa por B y C.

48. Para el triángulo del ejercicio 47, explique cómo obtendría una ecuación de la altura trazada desde A hasta el lado que pasa por B y C.

49. Aplique la explicación del ejercicio 47 para obtener ecuaciones de las tres medianas del triángulo que tiene vértices en (3, −2), (2, 4) y (−1, 1).

50. Aplique la explicación del ejercicio 48 para obtener ecuaciones de las tres alturas del triángulo del ejercicio 49.

51. Demuestre el teorema A.3.4: La gráfica de la ecuación $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son constantes y A y B no son ambas cero, es una recta. *Sugerencia:* considere dos casos, $B \neq 0$ y $B = 0$. Si $B \neq 0$, pruebe que la ecuación corresponde a una recta que tiene pendiente $-A/B$ e intercepción y igual a $-C/B$. Si $B = 0$, muestre que la ecuación corresponde a una recta vertical.

A.4 PARÁBOLAS

En la sección A.2 se presentaron las *parábolas*. Las gráficas de las figuras 16 y 17 de esa sección son parábolas. Estas curvas tienen muchas aplicaciones importantes. Por ejemplo, se emplean en el diseño de espejos parabólicos, reflectores y faros de automóvil. La trayectoria de un proyectil es una parábola si se considera que el movimiento se lleva a cabo en un plano y se desprecia la resistencia del aire. Los arcos tiene algunas veces apariencia parabólica; y los cables de un puente colgante pueden pender en forma de parábola. Las antenas para la recepción de señales de televisión provenientes de satélites son también de forma parabólica.

En la definición de una parábola se hace referencia a la *distancia de un punto a una recta.* Se entiende por tal distancia la longitud del segmento de recta perpendicular del punto a la recta. Consulte la figura 1, donde $|\overline{PQ}|$ es la distancia de P a la recta l.

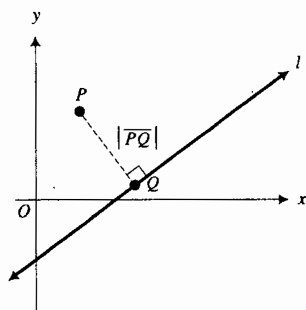


FIGURA 1

A.4.1 Definición de parábola

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo y una recta fija. El punto fijo se denomina **foco,** y la recta fija se llama **directriz.**

A continuación se deducirá una ecuación de una parábola a partir de la definición. Para que esta ecuación sea lo más simple posible, se elige el eje y perpendicular a la directriz de modo que contenga al foco. El origen se toma como el punto sobre eje y a la mitad de la distancia entre el foco y la directriz. Observe que se han elegido los ejes (*no* la parábola) de manera especial. Refiérase a la figura 2.

Sea p la distancia dirigida $\overline{OF}$. El foco es el punto $F(0, p)$, y la directriz es la recta que tiene la ecuación $y = -p$. Un punto $P(x, y)$ está en la parábola si y sólo si P equidista de F y de la directriz. Esto es, si $Q(x, -p)$ es el pie de la recta perpendicular de P a la directriz, entonces P está en la parábola si y sólo si

$$|\overline{FP}| = |\overline{QP}|$$

Como

$$|\overline{FP}| = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

y

$$|\overline{QP}| = \sqrt{(x - x)^2 + (y + p)^2}$$

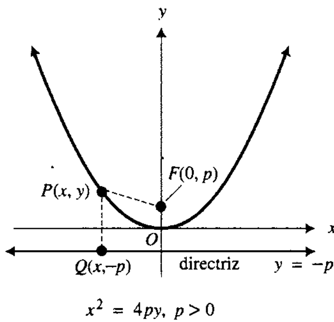


FIGURA 2

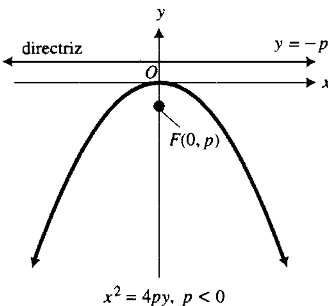


FIGURA 3

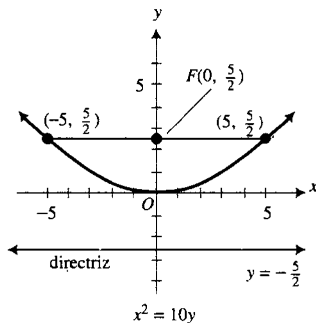


FIGURA 4

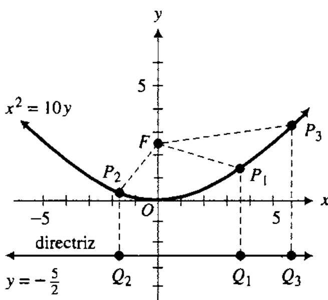


FIGURA 5

el punto P está en la parábola si y sólo si

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = \sqrt{(y + p)^2}$$

Al elevar al cuadrado los dos miembros de la ecuación, se obtiene

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$
$$x^2 = 4py$$

Este resultado se establece formalmente en el teorema siguiente.

A.4.2 Teorema Ecuación de una parábola

Una ecuación de una parábola cuyo foco está en $(0, p)$ y tiene como su directriz a la recta $y = -p$ es

$$x^2 = 4py$$

En la figura 2, p es positivo; sin embargo, p puede ser negativo debido a que es la distancia dirigida $\overline{OF}$. La figura 3 muestra una parábola para la cual $p < 0$.

De las figuras 2 y 3 se observa que para la ecuación $x^2 = 4py$ la parábola abre hacia arriba si $p > 0$, y abre hacia abajo si $p < 0$. La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz se denomina **eje** de la parábola. El eje de las parábolas de las figuras 2 y 3 es el eje y. La intersección de la parábola con su eje se llama **vértice,** el cual, por supuesto, está a la mitad de la distancia entre el foco y la directriz. El vértice de las parábolas de las figuras 2 y 3 es el origen.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** La gráfica de la ecuación

$$x^2 = 10y$$

es una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje es el eje y. Como $4p = 10$, $p = \frac{5}{2} > 0$, por lo que la parábola abre hacia arriba. El foco se encuentra en el punto $F(0, \frac{5}{2})$, y la ecuación de la directriz es $y = -\frac{5}{2}$. Dos puntos de la parábola son $(5, \frac{5}{2})$ y $(-5, \frac{5}{2})$. Estos puntos son los extremos de la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje de la parábola. Esta cuerda se denomina **lado recto** (*latus rectum*) de la parábola. En el ejercicio 41 se le pedirá que demuestre que la longitud del lado recto de una parábola es $|4p|$. Cuando se dibuja una parábola, es útil localizar los extremos del lado recto. La figura 4 muestra la parábola, el foco, la directriz y el lado recto. ◀

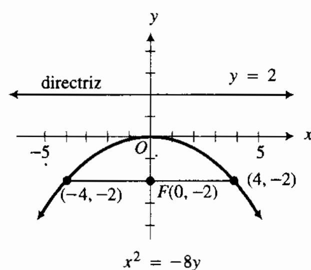
La parábola de la figura 4 junto con los tres puntos P_1, P_2 y P_3 se muestran en la figura 5. Como la definición de una parábola establece que cualquier punto de la parábola equidista del foco y de la directriz, entonces

$$|\overline{FP_1}| = |\overline{Q_1P_1}| \quad |\overline{FP_2}| = |\overline{Q_2P_2}| \quad |\overline{FP_3}| = |\overline{Q_3P_3}|$$

▶ ***EJEMPLO 1*** Dibuje la parábola cuya ecuación es

$$x^2 = -8y$$

y determine el foco, una ecuación de la directriz y los extremos del lado recto.

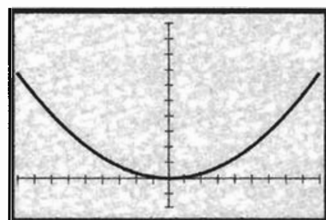


$x^2 = -8y$

FIGURA 6

Solución La gráfica es una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje es el eje y. Como $4p = -8$, $p = -2$, y ya que $p < 0$, la parábola abre hacia abajo. El foco está en el punto $F(0, -2)$, y una ecuación de la directriz es $y = 2$. Los extremos del lado recto son $(4, -2)$ y $(-4, -2)$. Estos puntos se obtienen al sustituir -2 por y en la ecuación de la parábola y resolver la ecuación para x. La parábola se presenta en la figura 6, la cual también muestra el foco y la directriz. ◀

Por supuesto, se puede verificar la parábola del ejemplo 1 trazando la gráfica de la ecuación $y = -\frac{1}{8}x^2$ en la graficadora.



$[-9, 9]$ por $[-2, 10]$

$y = \frac{1}{12}x^2$

FIGURA 7

▶ ***EJEMPLO 2*** Obtenga una ecuación de la parábola que tiene su foco en $(0, 3)$ y como su directriz la recta $y = -3$. Trace la parábola.

Solución Puesto que el foco está sobre el eje y y está también por arriba de la directriz, la parábola abre hacia arriba y $p = 3$. El vértice es el origen. Una ecuación de la parábola es de la forma $x^2 = 4py$, con $4p = 12$. Así, la ecuación pedida es

$$x^2 = 12y$$

A fin de trazar la parábola, se escribe la ecuación como $y = \frac{1}{12}x^2$. Consulte la figura 7. ◀

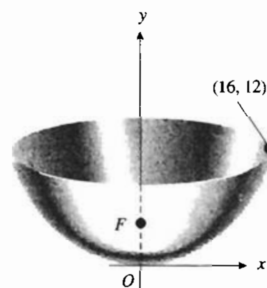


FIGURA 8

▶ ***EJEMPLO 3*** Un espejo parabólico tiene una profundidad de 12 cm en el centro y el diámetro en la parte superior del espejo mide 32 cm. Obtenga la distacia del vértice al foco.

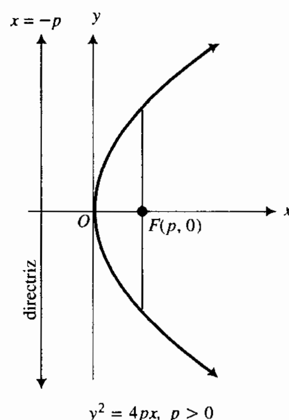
Solución Refiérase a la figura 8. Se eligen los ejes coordenados de modo que la parábola tenga su vértice en el origen, su eje coincida con el eje y, y abra hacia arriba. Por tanto, una ecuación de la parábola es de la forma

$$x^2 = 4py$$

donde p centímetros es la distancia del vértice al foco. Como el punto $(16, 12)$ está en la parábola, sus coordenadas satifacen la ecuación, por lo que se tiene

$$16^2 = 4p(12)$$
$$p = \tfrac{16}{3}$$

Conclusión: La distancia del vértice al foco es $\frac{16}{3}$ cm. ◀



$y^2 = 4px,\ p > 0$

FIGURA 9

Algunas parábolas tiene ejes horizontales. La parábola que tiene la ecuación

$$y^2 = 7x$$

es un ejemplo. Esta ecuación es de la forma

$$y^2 = 4px$$

la cual puede obtenerse a partir de la ecuación $x^2 = 4py$ al intercambiar x y y. Una parábola que tiene la ecuación $y^2 = 4px$ tiene su vertice en el origen, el eje x como su eje y su foco está en el punto $F(p, 0)$; una ecuación de su directriz es $x = -p$. Si $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha, como en la figura 9, y si $p < 0$ la parábola abre hacia la izquierda, como en la figura 10.

Estos resultados se resumen en el teorema siguiente.

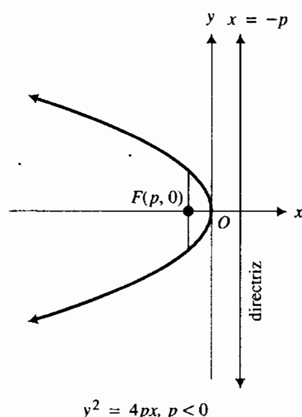


FIGURA 10

A.4.3 Teorema Ecuación de una parábola

Una ecuación de una parábola cuyo foco está en $(p, 0)$ y tiene como su directriz a la recta $x = -p$ es

$$y^2 = 4px$$

Trazo de una parábola

A fin de trazar la gráfica de una ecuación de la forma $y^2 = 4px$:

1. Resuelva para y considerando la raíz cuadrada en los dos miembros de la ecuación, obteniéndose las dos ecuaciones

$$y = \sqrt{4px} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{4px}$$

2. La unión de las gráficas de estas dos ecuaciones proporciona la gráfica de

$$y^2 = 4px$$

EJEMPLO 4 Dibuje la parábola cuya ecuación es

$$y^2 = 7x$$

y determine el foco, una ecuacion de la directriz y los extremos del lado recto. Verifique la gráfica al trazarla en la graficadora.

Solución La ecuación dada es de la forma $y^2 = 4px$; por tanto, el origen es el vértice y el eje x es el eje de la parábola. Como $4p = 7, p = \frac{7}{4} > 0$; de modo que la parábola abre hacia la derecha. El foco está en el punto $F(\frac{7}{4}, 0)$ y una ecuación de la directriz es $x = -\frac{7}{4}$. Para determinar los extremos del lado recto, se considera $x = \frac{7}{4}$ en la ecuación, de donde se obtiene

$$y^2 = \frac{49}{4}$$
$$y = \pm\frac{7}{2}$$

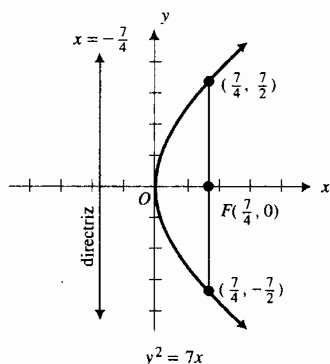


FIGURA 11

Por tanto, los extremos del lado recto son $(\frac{7}{4}, \frac{7}{2})$ y $(\frac{7}{4}, -\frac{7}{2})$. En la figura 11 se presenta la parábola, también se muestran el foco y la directriz.

A fin de trazar la parábola, se obtienen las gráficas de

$$y = \sqrt{7x} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{7x}$$

en el mismo rectángulo de inspección ◀

EJERCICIOS A.4

En los ejercicios 1 a 16, para la parábola que tiene la ecuación dada, obtenga (a) el vértice, (b) el eje, (c) el foco, (d) una ecuación de la directriz y (e) los extremos del lado recto. Dibuje la parábola.

1. $x^2 = 4y$
2. $x^2 = 8y$
3. $x^2 = -16y$
4. $x^2 = -12y$
5. $x^2 - y = 0$
6. $x^2 - 2y = 0$
7. $y^2 = 12x$
8. $y^2 = -6x$
9. $y^2 = -8x$
10. $y^2 = x$
11. $y^2 - 5x = 0$
12. $y^2 + 3x = 0$
13. $3x^2 + 8y = 0$
14. $2x^2 + 5y = 0$
15. $2y^2 - 9x = 0$
16. $3y^2 - 4x = 0$

En los ejercicios 17 a 22, trace la parábola que tiene la ecuación indicada.

17. **(a)** $y = 4x^2$ **(b)** $y = -4x^2$
(c) $x = 4y^2$ **(d)** $x = -4y^2$

18. **(a)** $y = 2x^2$ **(b)** $y = -2x^2$
(c) $x = 2y^2$ **(d)** $x = -2y^2$

19. **(a)** $y = \frac{1}{4}x^2$ **(b)** $y = -\frac{1}{4}x^2$
(c) $x = \frac{1}{4}y^2$ **(d)** $x = -\frac{1}{4}y^2$

20. **(a)** $y = \frac{1}{2}x^2$ **(b)** $y = -\frac{1}{2}x^2$
(c) $x = \frac{1}{2}y^2$ **(d)** $x = -\frac{1}{2}y^2$

21. **(a)** $x^2 - 16y = 0$ **(b)** $x^2 + 16y = 0$
(c) $y^2 - 16x = 0$ **(d)** $y^2 + 16x = 0$

22. **(a)** $4x^2 - 3y = 0$ **(b)** $4x^2 + 3y = 0$
(c) $4y^2 - 3x = 0$ **(d)** $4y^2 + 3x = 0$

En los ejercicios 23 a 36, obtenga una ecuación de la parábola que tiene las propiedades dadas. Dibuje la parábola y despúes verifique la gráfica trazándola en la graficadora.

23. Foco (0, 4); directriz, $y = -4$

24. Foco (0, –2); directriz, $y = 2$

25. Foco (0, –5); directriz, $y - 5 = 0$

26. Foco $(0, -\frac{1}{2})$; directriz, $2y - 1 = 0$

27. Foco (2, 0); directriz, $x = -2$

28. Foco (1, 0); directriz, $x = -1$

29. Foco $(-\frac{5}{3}, 0)$; directriz, $5 - 3x = 0$

30. Foco $(-\frac{3}{2}, 0)$; directriz, $2x - 3 = 0$

31. Vértice en el origen; abre hacia arriba; pasa por el punto (6, 3).

32. Vértice en el origen; abre hacia abajo; pasa por el punto (–4, –2).

33. Vértice en el origen; directriz, $2x = 3$.

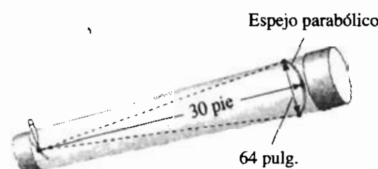
34. Vértice en el origen; directriz, $2y + 5 = 0$.

35. Vértice en el origen; el eje y es su eje; pasa por el punto (–2, 4).

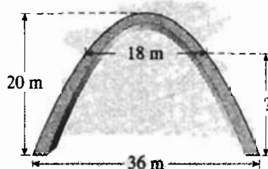
36. Vértice en el origen; el eje x es su eje; pasa por el punto (–3, 3).

En los ejercicios 37 a 40, resuelva el problema verbal y obtenga una ecuación de una parábola como modelo matemático de la situación. Complete el ejercicio, escriba una conclusión.

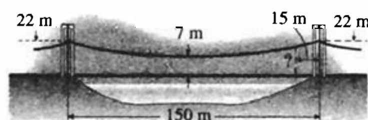
37. Un telescopio refractante tiene un espejo parabólico para el cual la distancia del vértice al foco es de 30 pie. Si el diámetro de la parte superior del espejo es de 64 pulg, ¿cuál es la profundidad del espejo en el centro?



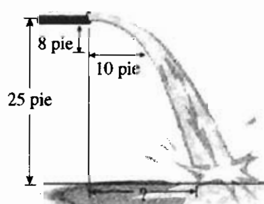
38. Un arco parabólico tiene una altura de 20 m y un ancho de 36 m en la base. Si el vértice de la parábola está en la parte superior del arco, ¿a qué altura sobre la base tiene un ancho de 18 m?



39. Uno de los cables de un puente colgante pende en forma de parábola cuando la carga está uniformente distribuida de manera horizontal. La distancia entre las dos torres es de 150 m, los puntos de soporte del cable están 22 m arriba de la carretera, y el punto más bajo del cable está 7 m sobre dicha carretera. Determine la distancia vertical de la carretera al cable de un punto que se encuentra a 15 m de la base de una torre.



40. Suponga que el agua que fluye del extremo de un tubo, el cual se encuentra a 25 pie del suelo, describe una curva parabólica, de modo que el vértice de la parábola es el extremo del tubo. Si en un punto 8 pie debajo del tubo el flujo de agua en su trayectoria curva se localiza a 10 pie de distancia de la recta vertical que pasa por el extremo del tubo, ¿qué tan alejado de esta recta llega el agua al piso?



41. Demuestre que la longitud del lado recto de una parábola es $|4p|$.

42. Obtenga una ecuación de la parábola cuyo vértice esté en el origen y para la cual los extremos del lado recto sean (–8, 4) y (8, 4).

43. Los extremos del lado recto de una parábola son $(5, k)$ y $(-5, k)$. Si el vértice de la parábola está en el origen y la parábola abre hacia abajo, obtenga **(a)** el valor de k; **(b)** una ecuación de la parábola.

44. Obtenga todos los puntos de la parábola $y^2 = 8x$ tales que el foco, el punto mismo y el pie de la perpendicular dibujada desde el punto a la directriz sean los vértices de una triángulo equilátero.

45. Trace las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^4$. Explique por qué la gráfica de la primera ecuación es una parábola y por qué la gráfica de la segunda ecuación no lo es. Utilice la definición de parábola en la explicación.

A.5 CIRCUNFERENCIAS

En la sección anterior aprendió que las parábolas se representan mediante ecuaciones de segundo grado que sólo contienen un término de segundo grado. Otra curva que tiene ecuaciones de segundo grado es la *circunferencia*, pero estas ecuaciones contienen dos términos de segundo grado, uno en la variable x y el otro en la variable y.

A.5.1 Definición de circunferencia

Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo. El punto fijo se denomina **centro** de la circunferencia, y a la distancia constante se le llama **radio** de la circunferencia.

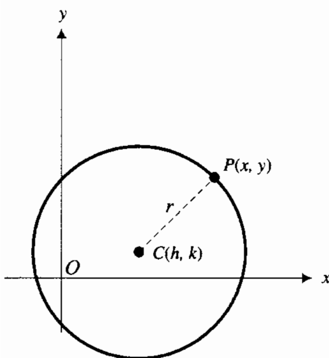


FIGURA 1

Con el fin de obtener una ecuación de la circunferencia que tiene centro en $C(h, k)$ y radio r, se utiliza la fórmula de distancia. Refiérase a la figura 1. El punto $P(x, y)$ está en la circunferencia si y sólo si $|\overline{PC}| = r$; esto es, si y sólo si

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

Esto es cierto si y sólo si

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \qquad (r > 0)$$

Esta ecuación es satisfecha por las coordenadas de aquellos puntos y sólo aquellos que se encuentran en la circunferencia. Este resultado se establece en el teorema siguiente.

A.5.2 Teorema Ecuación de una circunferencia

Una ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(h, k)$ y radio r es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Si el centro de una circunferencia está en el origen, entonces $h = 0$ y $k = 0$; por tanto, su ecuación es

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Tal circunferencia se muestra en la figura 2. Si el radio de una circunferencia es 1, se le llama **circunferencia unitaria.**

Si se conocen el centro y el radio de una circunferencia, entonces la circunferencia puede dibujarse con ayuda de un compás.

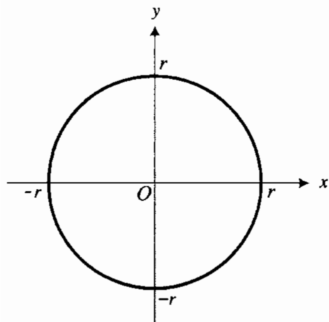


FIGURA 2

Trazo de una circunferencia

Para trazar la circunferencia que tiene ecuación

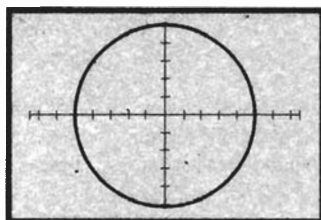
$$x^2 + y^2 = r^2$$

1. Se resuelve esta ecuación para y y se obtiene

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

La gráfica de cada una de estas ecuaciones es una semicircunferencia.

2. Se trazan estas dos semicircunferencias en el mismo rectángulo de inspección, obteniéndose así la circunferencia deseada.



[−7.5, 7.5] por [−5, 5]

$y = \sqrt{16 - x^2}$ y $y = -\sqrt{16 - x^2}$

FIGURA 3

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** La gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 = 16$$

es la circunferencia con centro en el origen y radio 4. Al resolver esta ecuación para y se obtiene

$$y = \sqrt{16 - x^2} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{16 - x^2}$$

Al trazar estas dos semicircunferencias en el mismo rectángulo de inspección, se obtiene la circunferencia mostrada en la figura 3. ◀

 ***EJEMPLO 1*** Obtenga la ecuación de la circunferencia que tiene un diámetro con extremos en $A(-2, 3)$ y $B(4, 5)$. Trace la circunferencia.

Solución El punto medio del segmento de A a B es el centro de la circunferencia. Vea la figura 4. Si $C(h, k)$ es el centro de la circunferencia, entonces

$$h = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \qquad k = \frac{3 + 5}{2} = 4$$

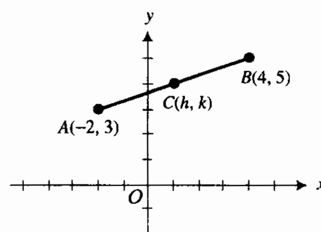


FIGURA 4

Por tanto, el centro está en $C(1, 4)$. El radio de la circunferencia puede calcularse como $|\overline{CA}|$ o $|\overline{CB}|$. Si $r = |\overline{CA}|$, entonces

$$r = \sqrt{(1 + 2)^2 + (4 - 3)^2}$$
$$= \sqrt{10}$$

Por tanto, una ecuación de la circunferencia es

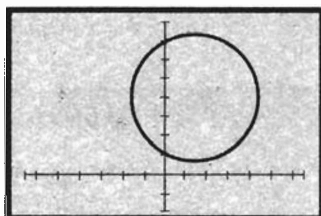
$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 10$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 7 = 0$$

A fin de trazar la circunferencia, primero se resuelve la ecuación para y considerándola como una ecuación cuadrática en y:

$$y^2 - 8y + (x^2 - 2x + 7) = 0$$

De la fórmula cuadrática, donde $a = 1$, $b = -8$ y $c = x^2 - 2x + 7$, resulta

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(x^2 - 2x + 7)}}{2(1)}$$
$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4x^2 + 8x - 28}}{2}$$
$$= \frac{8 \pm \sqrt{36 + 8x - 4x^2}}{2}$$
$$= \frac{8 \pm 2\sqrt{9 + 2x - x^2}}{2}$$
$$= 4 \pm \sqrt{9 + 2x - x^2}$$



[−7.5, 7.5] por [−2, 8]

$y = 4 + \sqrt{9 + 2x - x^2}$
y $y = -\sqrt{9 + 2x - x^2}$

FIGURA 5

Si se trazan en el mismo rectángulo de inspección las gráficas de

$$y = 4 + \sqrt{9 + 2x - x^2} \quad \text{y} \quad y = 4 - \sqrt{9 + 2x - x^2}$$

se obtiene la circunferencia mostrada en la figura 5. ◀

La ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ se denomina **forma centro-radio*** de la ecuación de una circunferencia. Si se eliminan los paréntesis y se reducen los términos semejantes se tiene

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

Al considerar $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$, esta ecuación se transforma en

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

la cual se denomina **forma general** de la ecuación de una circunferencia. Puesto que toda circunferencia tiene centro y radio, su ecuación puede expresarse en la forma centro-radio , y en consecuencia, en la forma general, como se hizo en el ejemplo 1. Si se inicia con una ecuación de una circunferencia en la forma general, ésta puede expresarse en la forma centro-radio completando los cuadrados. El ejemplo siguiente muestra el procedimiento a seguir.

▶ *EJEMPLO 2* Obtenga el centro y el radio de la circunferencia que tiene la ecuación

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$$

Solución La ecuación dada puede escribirse como

$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 4y) = 23$$

Si se completan los cuadrados de los términos entre paréntesis al sumar 9 y 4 en ambos miembros de la ecuación, se tiene

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 23 + 9 + 4$$
$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 36$$

La ecuación anterior está en la forma centro-radio; de modo que es una ecuación de una circunferencia con centro en $(-3, 2)$ y radio 6. ◀

Algunas ecuaciones de la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

tienen gráficas que no son circunferencias. Suponga que cuando se completan los cuadrados se obtiene

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = d \qquad \text{donde } d < 0$$

No hay valores reales de x y y que satisfagan esta ecuación; así, la ecuación no tiene gráfica. En este caso se establece que la gráfica es el conjunto vacío. Consulte el ejercicio 32.

Si cuando se completan los cuadrados se obtiene

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = 0$$

los únicos valores reales de x y y que satisfacen esta ecuación son $x = h$ y $y = k$. De este modo, la gráfica consta del simple punto (h, k). Refiérase al ejercicio 31.

La definición de la recta tangente a una curva general en un punto de la curva requiere del concepto de *límite*. Sin embargo, para una circunferencia la definición de geometría plana establece que una recta tangente en un punto P de una circunferencia es la recta que intersecta la circunferencia en sólo un punto.

***N. del T.** Esta forma también se conoce como *canónica* o *estándar*.

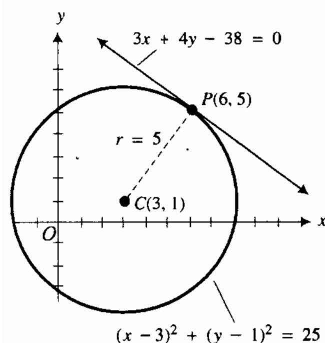


FIGURA 6

▶ ***EJEMPLO 3*** Obtenga una ecuación de la recta tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

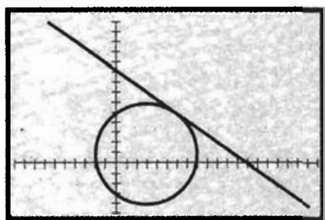
en el punto (6, 5). Trace la circunferencia y la recta tangente en el mismo rectángulo de inspección.

Solución Se escribe la ecuación de la circunferencia en la forma centro-radio al completar los cuadrados:

$$(x^2 - 6x) + (y^2 - 2y) = 15$$
$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = 15 + 9 + 1$$
$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

De esta ecuación, el centro es $C(3, 1)$ y el radio es 5. La figura 6 muestra la circunferencia y una porción de la recta tangente en $P(6, 5)$. Si m_1 es la pendiente de la recta que pasa por C y P, entonces

$$m_1 = \frac{5 - 1}{6 - 3} = \frac{4}{3}$$



[−10, 20] por [−5, 15]

$y = 1 + \sqrt{25 - (x - 3)^2}$,

$y = 1 - \sqrt{25 - (x - 3)^2}$ y

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{38}{4}$

FIGURA 7

De geometría plana, se sabe que la recta tangente es perpendicular a la recta que pasa por C y P. Por tanto, si m_2 es la pendiente de la recta tangente, entonces

$$m_2 m_1 = -1$$
$$m_2(\tfrac{4}{3}) = -1$$
$$m_2 = -\tfrac{3}{4}$$

En consecuencia, de la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta que pasa por (6, 5) con pendiente $-\frac{3}{4}$, se tiene como la ecuación requerida

$$y - 5 = -\tfrac{3}{4}(x - 6)$$
$$4y - 20 = -3x + 18$$
$$3x + 4y - 38 = 0$$

La figura 7 muestra la circunferencia y la recta tangente trazadas en el mismo rectángulo de inspección. ◀

EJERCICIOS A.5

En los ejercicios 1 a 8, dibuje la gráfica de la ecuación.

1. **(a)** $y = \sqrt{4 - x^2}$ **(b)** $y = -\sqrt{4 - x^2}$
(c) $x^2 + y^2 = 4$

2. **(a)** $y = \sqrt{25 - x^2}$ **(b)** $y = -\sqrt{25 - x^2}$
(c) $x^2 + y^2 = 25$

3. $9x^2 + 9y^2 = 1$

4. $4x^2 + 4y^2 = 1$

5. $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$

6. $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 36$

7. $(x + 4)^2 + y^2 = 1$

8. $x^2 + (y - 2)^2 = 9$

En los ejercicios 9 a 14, trace la gráfica de la ecuación.

9. $x^2 + y^2 = 36$ **10.** $x^2 + y^2 = 16$

11. $4x^2 + 4y^2 = 81$

12. $9x^2 + 9y^2 = 49$

13. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 100$

14. $(x - 4)^2 + (y + 7)^2 = 64$

En los ejercicios 15 a 20, obtenga una ecuación de la circunferencia con centro C y radio r. Exprese la ecuación en la forma centro-radio y en la forma general. Trace la circunferencia.

15. $C(4, -3), r = 5$

16. $C(0, 0), r = 8$

17. $C(-5, -12), r = 3$

18. $C(-1, 1), r = 2$

19. $C(0, 7), r = 1$

20. $C(-3, 0), r = 4$

En los ejercicios 21 a 24, obtenga una ecuación de la circunferencia que satisface las condiciones dadas. Trace la circunferencia.

21. El centro está en $(1, 2)$ y pasa por el punto $(3, -1)$.

22. El centro está en $(-3, 4)$ y pasa por el punto $(2, 0)$.

23. Un diámetro tiene extremos en $(3, -4)$ y $(7, 2)$.

24. Un diámetro tiene extremos en $(-1, -5)$ y $(4, -6)$.

En los ejercicios 25 a 30, obtenga el centro y el radio de la circunferencia. Dibuje la circunferencia.

25. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$

26. $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$

27. $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 18 = 0$

28. $x^2 + y^2 + 6x - 1 = 0$

29. $3x^2 + 3y^2 + 4y - 7 = 0$

30. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y + 7 = 0$

31. Demuestre que la gráfica de

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 29 = 0$$

es un punto.

32. Demuestre que la gráfica de

$$x^2 + y^2 + 8x - 6y + 30 = 0$$

es el conjunto vacío.

En los ejercicios 33 a 38, determine si la gráfica es una circunferencia, un punto o el conjunto vacío.

33. $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 19 = 0$

34. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$

35. $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 36 = 0$

36. $4x^2 + 4y^2 + 24x - 4y + 1 = 0$

37. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$

38. $9x^2 + 9y^2 + 6x - 6y + 5 = 0$

En los ejercicios 39 a 42, obtenga una ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P. Trace la circunferencia y la recta tangente en el mismo rectángulo de inspección.

39. $x^2 + y^2 = 25; P(-4, 3)$

40. $16x^2 + 16y^2 = 25; P(\frac{3}{4}, -1)$

41. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0; P(5, 1)$

42. $x^2 + y^2 + 14x - 8y - 35 = 0; P(-1, -4)$

43. Utilice geometría analítica para demostrar que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

44. Utilice la geometría analítica para demostrar que una recta que parte desde el centro de cualquier circunferencia que biseque a cualquier cuerda, es perpendicular a la cuerda.

45. ¿Qué desigualdad, que relaciona a D, E y F, debe cumplirse para que la ecuación

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

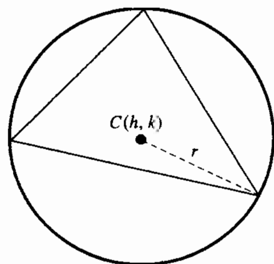
sea una circunferencia.

46. A partir del origen se dibujan cuerdas de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 4x = 0$$

Demuestre que el conjunto de los puntos medios de estas cuerdas es una circunferencia.

47. La circunferencia circunscrita a un triángulo es la circunferencia que contiene los tres vértices del triángulo. Dados los tres vértices del triángulo, explique cómo puede determinarse el centro y el radio de la circunferencia circunscrita.



48. Utilice la explicación del ejercicio 47 para obtener el centro y radio de la circunferencia circunscrita al triángulo que tiene vértices en $(-3, 2)$, $(4, -1)$ y $(5, 2)$.

49. Describa el conjunto de puntos (x, y) de R^2 para los que

(a) $x^2 + y^2 \leq 1$ **(b)** $1 < x^2 + y^2 \leq 4$

(c) $x^2 + y^2 > 4$

50. Utilice el hecho de que $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$ para escribir una ecuación de cada una de las siguientes gráficas: **(a)** la gráfica que consiste de todos los puntos de cualquiera de las dos circunferencias que tienen su centro en el origen y una tiene radio 2 y la otra radio 3; **(b)** la gráfica que consiste del origen y todos los puntos de la circunferencia unitaria cuyo centro es el origen.

A.6 TRASLACIÓN DE EJES

La forma de una gráfica no es afectada por la posición de los ejes coordenados, en cambio su ecuación sí. Por ejemplo una circunferencia de radio 3 y centro en el punto $(4, -1)$ tiene la ecuación

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

Sin embargo, si se eligen los ejes coordenados de modo que el origen esté en el centro, la misma circunferencia tiene la ecuación más simple

$$x^2 + y^2 = 9$$

Si pueden elegirse los ejes a voluntad, generalmente se hará en tal forma que las ecuaciones sean lo más simples posible. Sin embargo, si los ejes están dados puede ser deseable encontrar ecuaciones más sencillas de una gráfica particular relativa a un sistema diferente de ejes. Si estos ejes diferentes se eligen paralelos a los ejes dados, se dice que se ha realizado una **traslación de ejes.**

En particular, considere que los ejes x y y se trasladan a los nuevos ejes x' y y' que tienen origen (h, k) con respecto a los ejes dados. También considere que los números positivos se encuentran en el mismo lado del origen de los ejes x' y y', como en los ejes x y y. Consulte la figura 1. Un punto P del plano que tiene coordenadas (x, y) con respecto a los ejes coordenados dados tendrá coordenadas (x', y') con respecto a los nuevos ejes. A continuación se obtendrán las relaciones entre estos conjuntos de coordenadas. Para ello, se dibujan dos rectas que pasen por P, una paralela a los ejes y y y' y la otra paralela a los ejes x y x'. Sean A y A' los puntos de intersección de la primera recta con los ejes x y x', respectivamente, y B y B' las intersecciones de la segunda recta con los ejes y y y', respectivamente. Estas rectas se muestran en la figura 1.

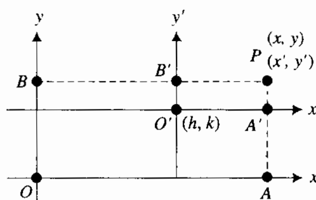


FIGURA 1

Con respecto a los ejes x y y, las coordenadas de P son (x, y), las coordenadas de A son $(x, 0)$ y las de A' son (x, k). Como $\overline{A'P} = \overline{AP} - \overline{AA'}$,

$$y' = y - k$$

Con respecto a los ejes x y y, las coordenadas de B son $(0, y)$ y las de B' son (h, y). Debido a que $\overline{B'P} = \overline{BP} - \overline{BB'}$,

$$x' = x - h$$

Estos resultados se establecen formalmente en el teorema siguiente.

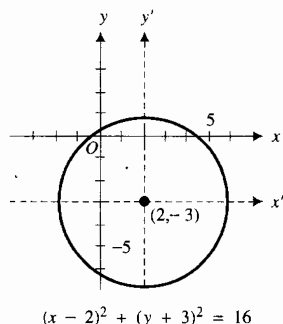
A.6.1 Teorema Ecuaciones para la traslación de ejes

Si (x, y) representan al punto P con respecto a un sistema de ejes dado, y (x', y') es una representación de P después de que los ejes se trasladaron a un nuevo origen de coordenadas (h, k) con respecto a los ejes dados, entonces

$$x' = x - h \quad \text{y} \quad y' = y - k$$

 ***EJEMPLO 1*** Dada la ecuación

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$



$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

FIGURA 2

traslade los ejes de modo que la ecuación de la gráfica con respecto a los ejes x' y y' no contenga términos de primer grado.

Solución Se escribe la ecuación dada como

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = 3$$

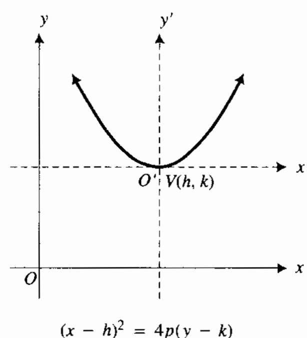
Si se completan los cuadrados de los términos entre paréntesis al agregar 4 y 9 en ambos miembros de la ecuación, se tiene

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 3 + 4 + 9$$
$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

Si se considera $x' = x - 2$ y $y' = y + 3$, se obtiene

$$x'^2 + y'^2 = 16$$

La gráfica de esta ecuación con respecto a los ejes x' y y' es una circunferencia con su centro en el origen y radio 4. Debido a las sustituciones de x' por $x - 2$ y y' por $y + 3$, el resultado es una traslación de ejes al nuevo origen (2, −3), la gráfica de la ecuación dada con respecto a los ejes x y y es una circunferencia con centro en (2, −3) y radio 4. Este resultado concuerda con la discusión acerca de las circunferencias en la sección A.5 de este apéndice. La figura 2 muestra la circunferencia junto con los dos sistemas de ejes. ◀



$(x - h)^2 = 4p(y - k)$

FIGURA 3

Ahora se aplicará la traslación de ejes a fin de obtener la ecuación general de una parábola que tiene su vértice en el punto (h, k) y su eje vertical u horizontal. En particular, considere que el eje es vertical. Se toman los ejes x' y y' de modo que el origen esté en $V(h, k)$. Consulte la figura 3. Con respecto a los ejes x' y y', una ecuación de la parábola de esta figura es

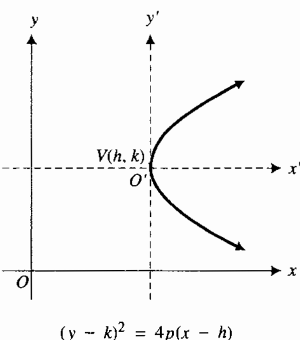
$$x'^2 = 4py'$$

Con el propósito de obtener una ecuación de esta parábola con respecto a los ejes x y y, se considera $x' = x - h$ y $y' = y - k$, lo cual proporciona

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

En la figura 4, el eje de la parábola es horizontal y el vértice se encuentra en $V(h, k)$. Mediante un argumento similar, su ecuación con respecto a los ejes x y y es

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$



$(y - k)^2 = 4p(x - h)$

FIGURA 4

De este modo, se han obtenido las *formas estándar* de las ecuaciones de las parábolas, las cuales se establecen formalmente en el teorema siguiente.

A.6.2 Teorema Formas estándar de las ecuaciones de las parábolas

Si p es la distancia dirigida del vértice al foco de una parábola, una ecuación de esta parábola, con vértice en (h, k) y eje vertical, es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Una parábola con el mismo vértice y con su eje horizontal tiene la ecuación

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

La gráfica de cualquier ecuación cuadrática de la forma

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \textbf{(1)}$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$, es una parábola cuyo eje es vertical. Esta proposición puede probarse al mostrar que (1) es equivalente a una ecuación de la forma

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Se le pedirá que realice esto en el ejercicio 49. La ecuación del ejemplo siguiente es un caso especial de (1) donde $a = -\frac{1}{4}$, $b = 1$ y $c = 6$.

EJEMPLO 2 Dada la parábola que tiene ecuación

$$y = -\tfrac{1}{4}x^2 + x + 6$$

determine el vértice, una ecuación del eje, el foco y los extremos del lado recto. Dibuje la parábola a partir de estas propiedades, y verifique la gráfica en la graficadora.

Solución La ecuación dada es equivalente a

$$4y = -x^2 + 4x + 24$$
$$x^2 - 4x = -4y + 24$$

Si se completa el cuadrado del lado izquierdo al sumar 4 a cada miembro, resulta

$$x^2 - 4x + 4 = -4y + 24 + 4$$
$$(x - 2)^2 = -4y + 28$$
$$(x - 2)^2 = -4(y - 7)$$

Esta ecuación es de la forma

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

en donde $h = 2$, $k = 7$ y $p = -1$. Por tanto, su gráfica es una parábola con vértice en (2, 7), y su eje es vertical. Así, el eje tiene la ecuación $x = 2$. Como $p < 0$, la parábola abre hacia abajo. Además, el foco es el punto del eje a 1 unidad debajo del vértice; por lo que el foco se encuentra en (2, 6). Debido a que la longitud del lado recto es $|4p| = 4$, sus extremos están 2 unidades a la derecha e izquierda del foco, por lo que se encuentran en (4, 6) y (0, 6).

La figura 5 muestra la parábola dibujada a partir de estas propiedades. En la graficadora se obtiene esta misma gráfica. ◀

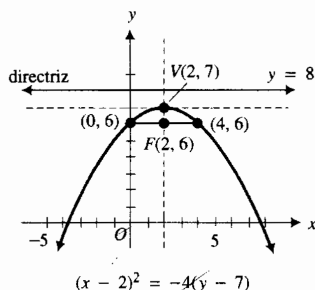


FIGURA 5

Si x y y se intercambian en (1), se tiene la ecuación

$$x = ay^2 + by + c \qquad \textbf{(2)}$$

La gráfica de cualquier ecuación de esta forma es una parábola cuyo eje es horizontal. Este hecho puede verificarse al probar que (2) es equivalente a una ecuación de la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

EJEMPLO 3 Siga las instrucciones del ejemplo 2 para la parábola cuya ecuación es

$$x = 2y^2 + 8y + 11$$

Solución La ecuación dada es equivalente a

$$2y^2 + 8y = x - 11$$
$$2(y^2 + 4y) = x - 11$$

A fin de completar el cuadrado de la expresión entre paréntesis del miembro izquierdo, se suma 4 a $y^2 + 4y$. En realidad se agrega 8 al miembro izquierdo; de modo que también se suma 8 al miembro derecho, y se obtiene

$$2(y^2 + 4y + 4) = x - 11 + 8$$
$$2(y + 2)^2 = x - 3$$
$$(y + 2)^2 = \tfrac{1}{2}(x - 3)$$

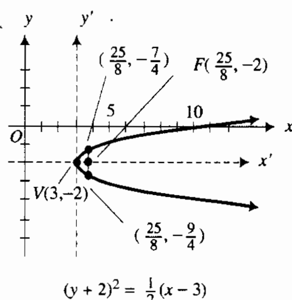


FIGURA 6

Esta ecuación es de la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

con $h = 3$, $k = -2$ y $p = \frac{1}{8}$. Por tanto, la parábola tiene su vértice en $(3, -2)$, su eje es la recta horizontal $y = -2$, y como $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha. Debido a que el foco está a $\frac{1}{8}$ de unidad a la derecha del vértice, dicho foco se encuentra en el punto $(\frac{25}{8}, -2)$. La longitud del lado recto es $|4p| = \frac{1}{2}$; de modo que los extremos del lado recto están a $\frac{1}{4}$ de unidad por arriba y debajo del foco, por lo que se encuentran en $(\frac{25}{8}, -\frac{7}{4})$ y $(\frac{25}{8}, -\frac{9}{4})$.

En la figura 6 se muestra la parábola dibujada a partir de estas propiedades. Para trazar la parábola en la graficadora, primero se escribe la ecuación dada como

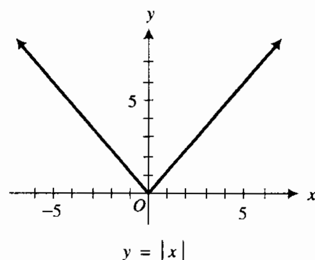


FIGURA 7

$$2y^2 + 8y + (11 - x) = 0$$

y después se resuelve para y en términos de x mediante la fórmula cuadrática con $a = 2$, $b = 8$ y $c = (11 - x)$, obteniéndose dos valores para y:

$$y = -2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2x - 6} \quad \text{y} \quad y = -2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2x - 6}$$

Cuando se trazan las gráficas de estas dos ecuaciones en el mismo rectángulo de inspección, se obtiene la parábola de la figura 6. ◀

En los dos ejemplos siguientes, se aplica la traslación de ejes a otras dos gráficas.

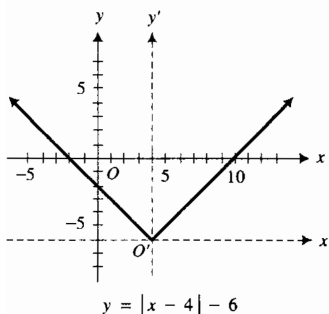
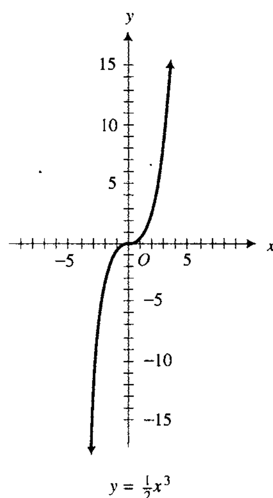


FIGURA 8

EJEMPLO 4 A partir de la gráfica de $y = |x|$ y una traslación de ejes conveniente, obtenga la gráfica de $y = |x - 4| - 6$.

Solución La gráfica de $y = |x|$ se muestra en la figura 20 de la sección A.2 del apéndice. Aquí se reproduce en la figura 7. La ecuación

$$y = |x - 4| - 6$$



$y = \frac{1}{2}x^3$

FIGURA 9

es equivalente a

$$y + 6 = |x - 4|$$

A fin de obtener la gráfica de esta ecuación se considera

$$x' = x - 4 \quad \text{y} \quad y' = y + 6$$

De esta manera, se han trasladado los ejes al nuevo origen (4, −6), y la ecuación se transforma en $y' = |x'|$. La gráfica de esta ecuación con respecto a los ejes x' y y' es la misma que la gráfica de la figura 7 con respecto a los ejes x y y. De este modo se obtiene la gráfica mostrada en la figura 8. ◀

▶ ***EJEMPLO 5*** Utilice la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^3$ del ejemplo 4 de la sección A.2 del apéndice junto con una traslación de ejes adecuada para obtener la gráfica de la ecuación

$$y = \tfrac{1}{2}(x + 5)^3 + 3$$

Solución La figura 9 muestra la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^3$. La ecuación

$$y = \tfrac{1}{2}(x + 5)^3 + 3$$

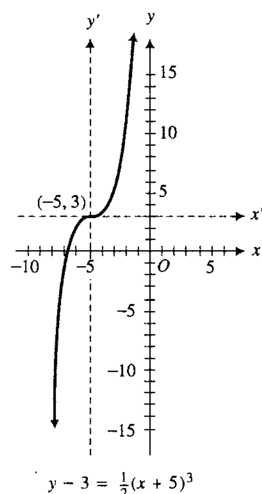
equivale a

$$y - 3 = \tfrac{1}{2}(x + 5)^3$$

Con el propósito de obtener la gráfica de esta ecuación, se consideran

$$x' = x + 5 \quad \text{y} \quad y' = y - 3$$

De esta manera se han trasladado los ejes al nuevo origen (−5, 3), y la ecuación se transforma en $y' = \frac{1}{2}x'^3$. La figura 10 muestra la gráfica de esta ecuación con respecto a los ejes x' y y'. Es la misma que la gráfica de la figura 9 con respecto a los ejes x y y. ◀



$y - 3 = \frac{1}{2}(x + 5)^3$

FIGURA 10

EJERCICIOS A.6

En los ejercicios 1 a 4, traslade los ejes de modo que la ecuación de la gráfica con respecto a los nuevos ejes no contenga términos de primer grado. Trace los ejes originales y los nuevos. Dibuje la gráfica.

1. $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$
2. $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 1 = 0$
3. $x^2 + y^2 + x - 2y + 1 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 13 = 0$

En los ejercicios 5 y 6, traslade los ejes de modo que la ecuación de la gráfica con respecto a los nuevos ejes x' y y' no contenga término de primer grado en x' y tampoco término constante. Trace los ejes originales y los nuevos. Dibuje la gráfica.

5. $x^2 - 4x - 8y - 28 = 0$ **6.** $x^2 + 4x + 2y = 0$

En los ejercicios 7 y 8, traslade los ejes de modo que la ecuación de la gráfica con respecto a los nuevos ejes x' y y' no contenga término de primer grado en y' y tampoco término constante. Trace los ejes originales y los nuevos. Dibuje la gráfica.

7. $y^2 + 6x + 7y +$ [illegible] $=$ [illegible]

8. $2y^2 -$ [illegible] $- 4y -$ [illegible]

En los ejercicios 9 a [illegible] *para las parábolas dadas, determine (a) el vértice, (b)* [illegible] *ción del eje, (c) el foco, (d) una ecuación de la directriz y* [illegible] *los extremos del lado recto. (f) Dibuje la parábola a partir de estas propiedades y verifique la gráfica en la graficad*[illegible]

9. $y =$ [illegible]

10. $y = x^2 + 4x$

11. $y = -$ [illegible] $+ 4x - 5$

12. $y = x^2 + 6x - 2$

13. $x =$ [illegible] $- 6y$

14. $x = -y^2 + 1$

15. $x^2 -$ [illegible] $- 4y + 13 = 0$

16. $x^2 - 4x + 8y + 28 = 0$

17. $y^2 +$ [illegible] $x + 12y = 0$

18. $y^2 - 12x - 14y + 25 = 0$

19. $y = -\frac{[illegible]}{2}x^2 + 4x - 5$

20. $y = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}x$

21. [illegible] $= \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

22. $x = 2y^2 + 10y + 3$

23. [illegible] $= -2y^2 - 8y - 5$

24. $x = -\frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{2}y - 2$

[illegible] *ejercicios 25 a 28, trace la parábola que tiene la ecuación* [illegible]*dicada.*

25. $y^2 - 4x - 2y + 9 = 0$

26. $4y^2 - x + 16y + 12 = 0$

27. $5y^2 - 4x + 10y + 17 = 0$

28. $3y^2 + 8x - 12y + 20 = 0$

En los ejercicios 29 a 46, haga lo siguiente: (a) dibuje la gráfica de la primera ecuación; (b) de la gráfica obtenida en el inciso (a) y una traslación de ejes adecuada, dibuje la gráfica de la segunda ecuación. (c) Verifique las gráficas de los incisos (a) y (b) trazándolas en el mismo rectángulo de inspección.

29. $y = |x|; y = |x - 2|$

30. $y = |x|; y = |x + 3|$

31. $y = |x|; y = |x| + 3$

32. $y = |x|; y = |x| - 2$

33. $y = |x|; y = |x + 4| - 5$

34. $y = |x|; y = |x - 1| + 6$

35. $y = x^3; y = (x - 4)^3$

36. $2y = -x^3; 2y + 2 = -x^3$

37. $y = x^3; y = (x + 1)^3 + 1$

38. $2y = -x^3; 2y = -(x - 4)^3 + 4$

39. $y = \sqrt{x}; y = \sqrt{x - 2} + 4$

40. $y = \sqrt{x}; y = \sqrt{x + 3} - 2$

41. $y = x^2; y = (x - 4)^2$

42. $y = x^2; y = (x + 3)^2$

43. $y = x^2; y = x^2 + 3$

44. $y = x^2; y = x^2 - 4$

45. $y = x^2; y = (x + 1)^2 - 5$

46. $y = x^2; y = (x - 2)^2 + 1$

47. Dada la parábola de ecuación
$$y = ax^2 + bx + c$$
con $a \neq 0$, obtenga las coordenadas del vértice.

48. Determine las coordenadas del foco de la parábola del ejercicio 47.

49. Muestre que la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ es equivalente a una ecuación de la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ al resolver la segunda ecuación para y.

50. Si una parábola tiene su foco en el origen y el eje x como su eje, demuestre que dicha parábola debe tener una ecuación de la forma $y^2 = 4kx + 4k^2, k \neq 0$.

51. **(a)** Muestre que la ecuación $y = x^2 + bx + c$ puede escribirse en la forma $y = (x - h)^2 + k$. **(b)** Explique cómo se dibuja la gráfica de $y = (x - h)^2 + k$ a partir de la gráfica de $y = x^2$. En la explicación invente un ejemplo particular.

A.7 ELIPSES

A fin de referirse al aspecto geométrico de las secciones cónicas, se debe considerar que un cono tiene dos mantos, cada uno extendiéndose indefinidamente. Una porción de un cono circular recto de dos mantos se muestra en la figura 1. Se denomina **generatriz** (o **elemento**) del cono a una recta que esté contenida completamente en el cono. Todas las generatrices de un cono contienen el punto V llamado **vértice.**

Una *elipse* se obtiene como una sección cónica si el plano cortante no es paralelo a ninguna generatriz, en cuyo caso el plano cortante intersecta a cada generatriz como en la figura 2. Un caso especial de la elipse es la circunferencia, la cual se forma si el plano cortante intersecta a cada generatriz y también es perpendicular al eje del cono. Refiérase a la figura 3. A continuación se definirá una elipse como un conjunto de puntos del plano. Al final de esta sección se demostrará que esta definición es una consecuencia de considerar a la elipse como sección de un cono.

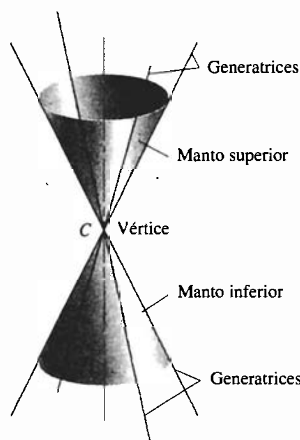


FIGURA 1

A.7.1 Definición de elipse

Una **elipse** es el conjunto de puntos de un plano tales que la suma de sus distancias desde dos punto fijos es constante. Cada punto fijo se denomina **foco.**

Considere $2c$ como la distancia no dirigida entre los focos, donde $c > 0$. Para obtener una ecuación de una elipse, se elige el eje x como la recta que pasa por F y F', de modo que el origen sea el punto medio del segmento entre F y F'. Vea la figura 4. Los focos F y F' tienen coordenadas $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente. Si $2a$ es la suma constante referida en la definición, entonces $a > c$ y el punto $P(x, y)$ de la figura 4 es cualquier punto de la elipse si y sólo si

$$|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 2a$$

Como

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \quad \text{y} \quad |\overline{F'P}| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

P está en la elipse si y sólo si

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

Con objeto de simplificar esta ecuación, es necesario eliminar los radicales y realizar algunas manipulaciones algebraicas, lo cual se le pedirá que haga en el ejercicio 35. Al efectuar esto, se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $b^2 = a^2 - c^2$. El teorema siguiente establece este resultado formalmente.



Elipse

FIGURA 2

A.7.2 Teorema Ecuación de una elipse

Si $2a$ es la constante referida en la definición de la elipse, si los focos se encuentran en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ y si $b^2 = a^2 - c^2$, entonces una ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A fin de dibujar la elipse, primero observe de la ecuación que la gráfica es simétrica con respecto a los dos ejes. Si se sustituye y por 0 en la ecuación, se obtiene $x = \pm a$, y si se reemplaza x por 0, se obtiene $y = \pm b$. Por tanto, la gráfica intersecta al eje x en $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ y corta al eje y en $(0, b)$ y $(0, -b)$. Como $b^2 = a^2 - c^2$, se deduce que $a > b$. Consulte la figura 5 y refiérase a ella conforme lea el párrafo siguiente.

La recta que pasa por los focos se denomina **eje principal.** Para esta elipse el eje x es el eje principal. Los puntos de intersección de la elipse con su eje principal se llaman **vértices.** Así, para esta elipse los vértices están en $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$. El punto del eje principal que se encuentra a la mitad de la distancia entre los dos vértices recibe el nombre de **centro.** El origen es el centro de esta elipse. El segmento del eje principal entre los dos vértices se denomina **eje mayor,** y su longitud es $2a$ unidades. Para esta elipse el segmento del eje y entre los puntos $(0, b)$ y $(0, -b)$ se llama **eje menor.** Su longitud es $2b$ unidades.

Una elipse recibe el nombre de **cónica central** en contraste con una parábola, la cual no tiene centro debido a que sólo tiene un vértice.



Circunferencia

FIGURA 3

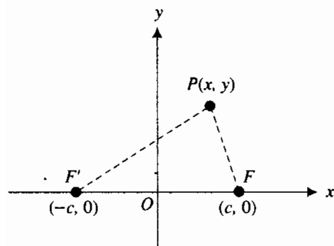
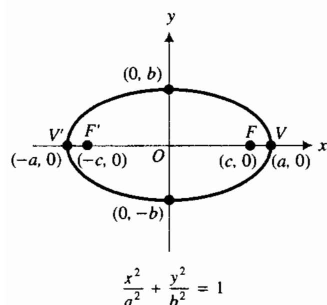
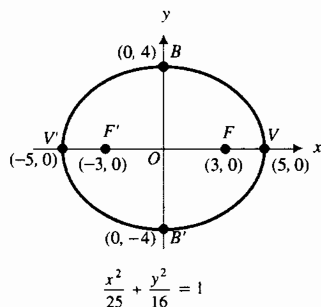


FIGURA 4



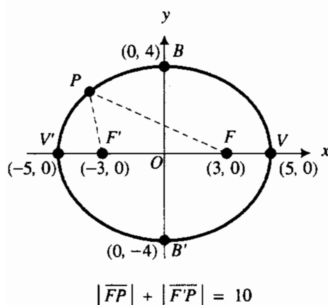
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

FIGURA 5



$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

FIGURA 6



$|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 10$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

FIGURA 7

EJEMPLO 1 Para la elipse que tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

obtenga los vértices, los extremos del eje menor y los focos. Dibuje la elipse y muestre los focos.

Solución Como la ecuación es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

el centro de la elipse está en el origen y su eje principal es el eje x. Debido a que $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$, $a = 5$ y $b = 4$. Por tanto, los vértices se encuentran en $V(5, 0)$ y $V'(-5, 0)$, y los extremos del eje menor están en $B(0, 4)$ y $B'(0, -4)$.

A fin de determinar los focos, se resuelve la ecuación $b^2 = a^2 - c^2$ para c con $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$. De este modo, puesto que $c > 0$,

$$\begin{aligned} 16 &= 25 - c^2 \\ c^2 &= 9 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

Por tanto, los focos se encuentran en $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$.

Como una ayuda al dibujar la elipse, se determina un punto del primer cuadrante al sustituir 3 por x en la ecuación y resolverla para y. Por supuesto, cualquier otro valor de x entre 0 y 5 puede emplearse. Por la simetría se tienen puntos correspondientes en los otros tres cuadrantes. La figura 6 muestra la elipse y los focos. ◀

Observe de la definición de elipse que si P es cualquier punto de la elipse del ejemplo 1, entonces $|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 10$. En la figura 7 se ha tomado P en el segundo cuadrante.

Con objeto de trazar la elipse en la graficadora, puede hacerse lo mismo que se hizo en la sección A.5 del apéndice para las gráficas de las circunferencias. Esto es, se considera la ecuación de la elipse como cuadrática en y y se resuelve para esta variable a fin de obtener dos ecuaciones que definen a y como dos funciones de x.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Al resolver la ecuación de la elipse del ejemplo 1 para y, primero se multiplican los dos miembros de la ecuación por 400, por lo que se tiene

$$\begin{aligned} 16x^2 + 25y^2 &= 400 \\ 25y^2 &= 400 - 16x^2 \\ 25y^2 &= 16(25 - x^2) \\ y^2 &= \tfrac{16}{25}(25 - x^2) \\ y &= \pm\tfrac{4}{5}\sqrt{25 - x^2} \end{aligned}$$

En el mismo rectángulo de inspección de la graficadora se trazan las gráficas de

$$y_1 = \tfrac{4}{5}\sqrt{25 - x^2} \quad \text{y} \quad y_2 = -\tfrac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}$$

para obtener la elipse que se muestra en la figura 6. ◀

En la sección A.9 del apéndice se explica otro método para trazar una elipse en la graficadora. Este método emplea ecuaciones paramétricas de la elipse que contienen funciones trigonométricas.

Las trayectorias de muchos cometas y las órbitas de lós planetas y satélites son elipses. Algunas veces los arcos de puentes tienen forma elíptica, y también se utilizan las elipses en los engranajes de algunas máquinas. Una aplicación de la elipse en arquitectura se tiene en las llamadas *galerías del susurro,* en donde se utiliza su propiedad reflexiva. En estas galerías las bóvedas tienen secciones transversales que son arcos de elipses con focos comunes. Una persona ubicada en un foco F puede escuchar el susurro de otra colocada en el foco F' debido a que las ondas sonoras originadas por el murmurador de F' chocan contra la boveda y son reflejadas por ésta al oyente ubicado en F. Un ejemplo famoso de estas galerías del susurro se encuentra bajo la cúpula del Capitolio en Washington D. C. Otro ejemplo más es el Tabernáculo Mormón en Salt Like City.

EJEMPLO 2 Un arco en forma de semielipse mide 48 pie de ancho en la base y tiene una altura de 20 pie. ¿Qué tan ancho es el arco a una altura de 10 pie sobre la base?

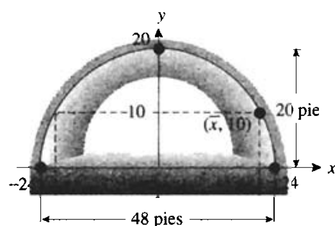


FIGURA 8

Solución La figura 8 muestra un dibujo del arco y los ejes coordenados, los cuales se han elegido de modo que el eje x yace a lo largo de la base y el origen se encuentra en el punto medio de la base. Entonces, la elipse tiene su eje principal sobre el eje x, su centro en el origen, $a = 24$ y $b = 20$. Así, una ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{576} + \frac{y^2}{400} = 1$$

Sea $2\bar{x}$ pies la medida del ancho del arco a la altura de 10 pie sobre la base. Por tanto, el punto $(\bar{x}, 10)$ está en la elipse. De modo que

$$\frac{\bar{x}^2}{576} + \frac{100}{400} = 1$$
$$\bar{x}^2 = 432$$
$$\bar{x} = 12\sqrt{3}$$

Conclusión: A la altura de 10 pie sobre la base, el ancho del arco mide $24\sqrt{3}$ pie.

Si una elipse tiene su centro en el origen y su eje principal sobre el eje y, entonces una ecuación de la elipse es de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

esta ecuación se obtiene al intercambiar x y y en la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

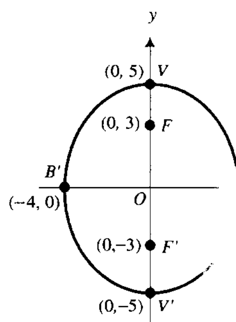


FIGURA 9

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Puesto que para una elipse $a > b$, se deduce que la elipse que tiene ecuación

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

tiene su eje principal sobre el eje y. Esta elipse tiene la misma forma de la elipse del ejemplo 1. Los vértices se encuentran en (0, 5) y (0, −5), los extremos del eje menor están en (4, 0) y (−4, 0), y los focos se encuentran en (0, 3) y (0, −3). La figura 9 muestra esta elipse. ◀

Suponga que el centro de una elipse está en el punto (h, k) en lugar del origen, y que el eje principal es paralelo a uno de los ejes coordenados. Entonces, mediante una traslación de ejes, de modo que el punto (h, k) sea el nuevo origen, una ecuación de la elipse es

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

si el eje principal es horizontal, y

$$\frac{y'^2}{a^2} + \frac{x'^2}{b^2} = 1$$

si el eje principal es vertical. Como $x' = x - h$ y $y' = y - k$, se tienen las formas estándar siguientes para las ecuaciones de las elipses.

A.7.3 Teorema Formas estándar de las ecuaciones de las elipses

Si el centro de una elipse está en (h, k) y la distancia entre los vértices es $2a$, entonces una ecuación de la elipse es de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad (a > b) \qquad \textbf{(1)}$$

si el eje principal es horizontal, y

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1 \quad (a > b) \qquad \textbf{(2)}$$

si el eje principal es vertical.

Al desarrollar $(x - h)^2$ y $(y - k)^2$ y simplificar, se pueden escribir cada una de las ecuaciones (1) y (2) en la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3)$$

donde A y C tienen el mismo signo. En el ejemplo siguiente se comienza con una ecuación en esta forma y se completan los cuadrados a fin de expresarla en alguna de las formas estándar.

▶ ***EJEMPLO 3*** Demuestre que la gráfica de la ecuación

$$25x^2 + 16y^2 + 150x - 128y - 1119 = 0$$

es una elipse. Determine el centro, una ecuación del eje principal, los vértices, los extremos del eje menor y los focos. Dibuje la elipse y verifique la gráfica en la graficadora.

Solución Con objeto de escribir la ecuación dada en una de las formas estándar, se comienza por completar los cuadrados en x y y. Al hacerlo se tiene

$$25(x^2 + 6x) + 16(y^2 - 8y) = 1119$$

$$25(x^2 + 6x + 9) + 16(y^2 - 8y + 16) = 1119 + 225 + 256$$

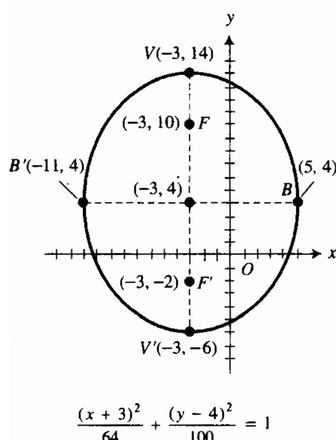


FIGURA 10

$$25(x+3)^2+16(y-4)^2=1600$$

$$\frac{25(x+3)^2}{1600}+\frac{16(y-4)^2}{1600}=1$$

$$\frac{(x+3)^2}{64}+\frac{(y-4)^2}{100}=1$$

Esta ecuación es de la forma

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \qquad (a>b)$$

donde (h, k) es $(-3, 4)$, $a^2 = 100$ y $b^2 = 64$. Por tanto, la gráfica es una elipse cuyo centro se encuentra en $(-3, 4)$ y cuyo eje principal tiene la ecuación $x = -3$. Como $a = 10$ y $b = 8$, los vértices están en $V(-3, 14)$ y $V'(-3, -6)$, y los extremos del eje menor se encuentran en $B(5, 4)$ y $B'(-11, 4)$. Para determinar los focos se emplea la ecuación $b^2 = a^2 - c^2$ con $c > 0$, de donde resulta

$$64 = 100 - c^2$$
$$c^2 = 36$$
$$c = 6$$

De esta forma, los focos están en $F(-3, 10)$ y $F'(-3, -2)$. Al localizar algunos puntos más (en particular donde la elipse intersecta a los ejes x y y) se obtiene la elipse que se muestra en la figura 10. ◀

En los ejemplos ilustrativos siguientes también se tienen ecuaciones de la forma (3).

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Suponga que (3) es

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 115 = 0$$

la cual puede escribirse como

$$6(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 6y) = -115$$

Al completar los cuadrados en x y y, se tiene

$$6(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) = -115 + 24 + 81$$
$$6(x-2)^2 + 9(y-3)^2 = -10$$

Puesto que el miembro derecho de esta ecuación es negativo y el miembro izquierdo es no negativo para todos los puntos (x, y), la gráfica es el conjunto vacío. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** Debido a que la ecuación

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 105 = 0$$

puede expresarse como

$$6(x-2)^2 + 9(y-3)^2 = 0$$

su gráfica consiste del punto (2, 3). ◀

Se puede demostrar en general que la gráfica de cualquier ecuación de la forma (3) es una elipse, como en el ejemplo 3, un punto o el conjunto vacío. Cuando la gráfica consiste de sólo un punto o es el conjunto vacío, como en los ejemplos ilustrativos 3 y 4, se dice que la elipse es **degenerada.**

Observe que (3) es el caso especial de la ecuación general de segundo grado en dos variables

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \textbf{(4)}$$

donde $B = 0$ y $AC > 0$ (esto es, A y C tienen el mismo signo).

Las conclusiones de la discusión anterior se resumen en el teorema siguiente.

A.7.4 Teorema

Si en la ecuación general de segundo grado (4), $B = 0$ y $AC > 0$, entonces la gráfica es una elipse, un punto o el conjunto vacío.



Punto

FIGURA 11

El caso degenerado de una elipse, un punto, se obtiene como una sección cónica si el plano cortante contiene al vértice del cono pero sin contener a ninguna generatriz. Consulte la figura 11.

Si $A = C$ en (3), entonces la ecuación se transforma en

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

de la cual, al dividirse entre A, resulta

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

En la sección A.5 del apéndice se dijo que la gráfica de esta ecuación es una circunferencia, un punto o el conjunto vacío. Esta proposición concuerda con el teorema A.7.4 debido a que una circunferencia es una forma límite de una elipse. Este hecho puede demostrarse al considerar la ecuación que relaciona a, b y c para una elipse:

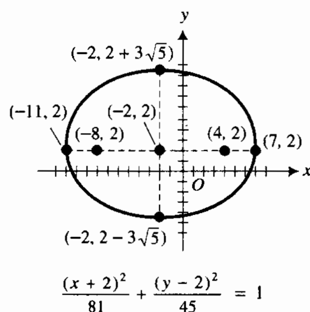
$$b^2 = a^2 - c^2$$

De esta ecuación se observa que si $c = 0$, entonces $b^2 = a^2$, y en consecuencia, la forma estándar de la ecuación de una elipse se convierte en

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

la cual es una ecuación de una circunferencia con centro en (h, k) y radio a. Además, cuando $c = 0$, los focos coinciden con el centro de la circunferencia.

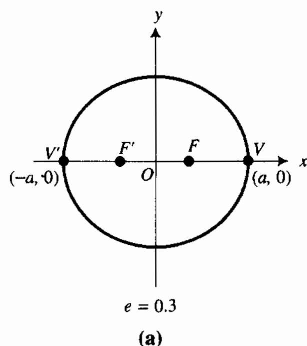


$$\frac{(x+2)^2}{81} + \frac{(y-2)^2}{45} = 1$$

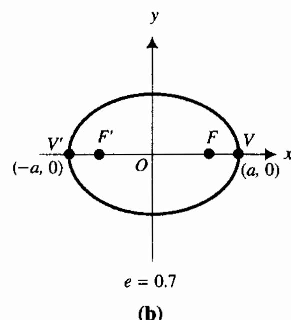
FIGURA 12

EJEMPLO 4 Obtenga una ecuación de la elipse que tiene focos en $(-8, 2)$ y $(4, 2)$, para la cual la constante referida en la definición es 18. Dibuje la elipse.

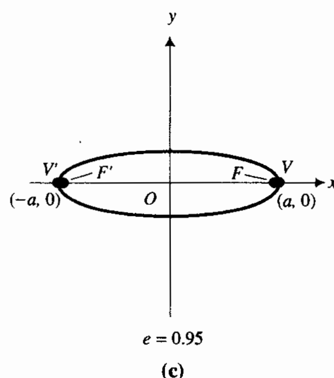
Solución El centro de la elipse está a la mitad de la distancia entre los focos y es el punto $(-2, 2)$. La distancia entre los focos de la elipse es $2c$, y la distancia entre $(-8, 2)$ y $(4, 2)$ es 12. Por tanto, $c = 6$. La constante referida en



(a)



(b)



(c)

FIGURA 13

la definición es $2a$; de modo que $2a = 18$ y $a = 9$. Como $b^2 = a^2 - c^2$, entonces

$$b^2 = 81 - 36$$
$$b^2 = 45$$
$$b = 3\sqrt{5}$$

El eje principal es paralelo al eje x; en consecuencia, una ecuación de la elipse es de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Debido a que el punto (h, k) es el punto $(-2, 2)$, $a = 9$ y $b = 3\sqrt{5}$, la ecuación requerida es

$$\frac{(x + 2)^2}{81} + \frac{(y - 2)^2}{45} = 1$$

Esta elipse se muestra en la figura 12. ◀

Algunas elipses son casi circulares, lo cual ocurre cuando los focos están muy próximos entre sí. Otras elipses son "aplastadas" lo cual sucede cuando los vértices y los focos están muy cerca unos de otros. La forma de una elipse (su "redondez" o "aplastamiento") está determinada por la *excentricidad*, la cual se define formalmente a continuación.

A.7.5 Definición de la excentricidad de una elipse

La **excentricidad** e de una elipse es la razón de la distancia no dirigida entre los focos a la distancia no dirigida entre los vértices; esto es,

$$e = \frac{c}{a}$$

Puesto que $c^2 = a^2 - b^2$, entonces $c < a$; por tanto, $0 < e < 1$. Cuando los focos están muy próximos entre sí, e está muy cerca de cero, y la forma de la elipse es muy parecida a una circunferencia. Vea la figura 13(a), que muestra una elipse para la cual $e = 0.3$. Si a permanece fija, entonces conforme e se incrementa, el aplastamiento de la elipse también aumenta. Las figuras 13(b) y 13(c) muestran elipses con excentricidades de 0.7 y 0.95, respectivamente, cada una con el mismo valor de a como en la figura 13(a). Las formas límite de la elipse son una circunferencia de diámetro $2a$ y un segmento de recta de longitud $2a$.

Como se prometió, ahora se demostrará que la definición de elipse como conjunto de puntos de un plano se deduce de la definición de elipse como sección cónica. Esta demostración, a veces llamada **demostración del cono de helado,** fue presentada en 1822 por el matemático belga **G. P. Dandelin** (1794–1847). Refiérase a la figura 14, la cual muestra un manto de un cono que tiene vértice en O y un plano cortante que intersecta al cono en una elipse. En el cono se encuentran inscritas las dos esferas S_1 y S_2. La esfera S_1 es tangente al cono a lo largo de la circunferencia C_1, y es tangente al plano cortante en el punto F_1. La esfera S_2 es tangente al cono a lo largo de la circunferencia C_2, y es tangente al plano cortante en el punto F_2. Los planos de las circunferencias C_1 y C_2 son paralelos. Se demostrará que F_1 y F_2 son los focos de la elipse al probar que si P es cualquier punto de la elipse, entonces $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}|$ es una constante. Para

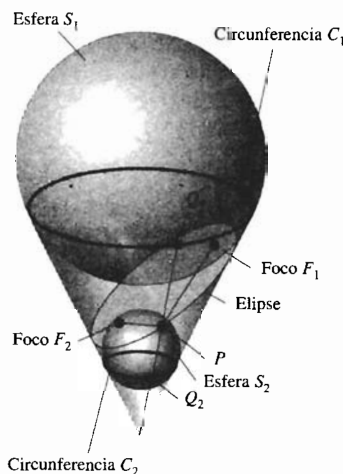


FIGURA 14

demostrar esto, se dibuja la recta que pasa por los puntos O y P de la superficie del cono. Los puntos Q_1 y Q_2 son las intersecciones de esta recta con las circunferencias C_1 y C_2, respectivamente. Como PF_1 y PQ_1 son dos rectas tangentes a la esfera S_1 trazadas desde P, se deduce que

$$|\overline{PF_1}| = |\overline{PQ_1}|$$

También PF_2 y PQ_2 son dos rectas tangentes a la esfera S_2 trazadas desde P. Así,

$$|\overline{PF_2}| = |\overline{PQ_2}|$$

Por tanto,

$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = |\overline{PQ_1}| + |\overline{PQ_2}|$$

Observe que $|\overline{PQ_1}| + |\overline{PQ_2}| = |\overline{Q_1Q_2}|$, la cual es la distancia medida a lo largo de la superficie del cono entre los planos paralelos de las circunferencias C_1 y C_2. Esta distancia será la misma para cualquier otra elección del punto P de la elipse. Por tanto, $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}|$ es una constante, y F_1 y F_2 son los focos de la elipse.

EJERCICIOS A.7

En los ejercicios 1 a 16, para la elipse que tiene la ecuación indicada, determine (a) el centro, (b) el eje principal, (c) los vértices, (d) los extremos del eje menor y (e) los focos. (f) Dibuje la elipse y muestre los focos. Verifique la gráfica en la graficadora.

1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

2. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

4. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$

5. $9x^2 + 25y^2 = 900$

6. $4x^2 + 9y^2 = 36$

7. $9x^2 + y^2 = 9$

8. $25x^2 + 4y^2 = 100$

9. $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 11 = 0$

10. $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 3 = 0$

11. $4x^2 + y^2 + 8x - 4y - 92 = 0$

12. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 18y + 33 = 0$

13. $4x^2 + 4y^2 + 20x - 32y + 89 = 0$

14. $25x^2 + y^2 - 4y - 21 = 0$

15. $x^2 + 3y^2 - 4x - 23 = 0$

16. $2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y + 2 = 0$

En los ejercicios 17 y 18, determine si la gráfica de la ecuación es una elipse, un punto o el conjunto vacío.

17. $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 5 = 0$

18. $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 20 = 0$

En los ejercicios 19 a 28, obtenga una ecuación de la elipse que tiene las propiedades indicadas y dibuje la elipse. Verifique la gráfica en la graficadora.

19. Vértices en $(-\frac{5}{2}, 0)$ y $(\frac{5}{2}, 0)$, y un foco en $(\frac{3}{2}, 0)$.

20. Focos en $(-5, 0)$ y $(5, 0)$ y para la cual la constante referida en la definición es 20.

21. Focos en $(0, 3)$ y $(0, -3)$ y para la cual la constante referida en la definición es $6\sqrt{3}$.

22. Centro en el origen, sus focos sobre el eje x, la longitud del eje mayor es 3 veces la longitud del eje menor, y pasa por el punto $(3, 3)$.

23. Vértices en $(2, 0)$ y $(-2, 0)$, y pasa por el punto $(-1, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

24. Vértices en $(0, 5)$ y $(0, -5)$, y pasa por el punto $(2, -\frac{5}{3}\sqrt{3})$.

25. Centro en $(4, -2)$, un vértice en $(9, -2)$ y un foco en $(0, -2)$.

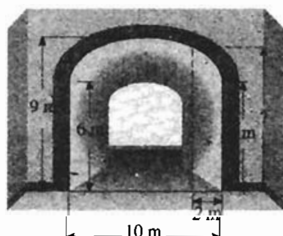
26. Un foco en $(2, -3)$, un vértice en $(2, 4)$ y el centro sobre el eje x.

27. Focos en $(-1, -1)$ y $(-1, 7)$, y la longitud del semieje mayor es de 8 unidades.

28. Focos en $(2, 3)$ y $(2, -7)$, y la longitud del semieje menor es dos tercios de la longitud del simieje mayor.

En los ejercicios 29 a 32, resuelva el problema verbal y no olvide escribir una conclusión.

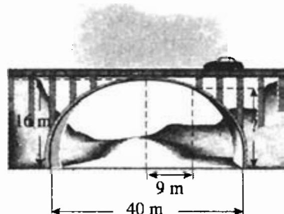
29. El techo de un vestíbulo de 10 m de ancho tiene la forma de una semielipse de 9 m de altura en el centro y 6 m de altura de las paredes laterales. Determine la altura del techo a 2 metros de cualquier pared.



30. La órbita de la Tierra alrededor del Sol es de forma elíptica, con el Sol en uno de los focos y un semieje mayor de longitud de 92.96 millones de millas. Si la excentricidad de la elipse es 0.0167, determine **(a)** la distancia mínima de la Tierra al Sol y **(b)** la mayor distancia posible entre la Tierra y el Sol.

31. Suponga que la órbita de un planeta tiene la forma de una elipse con un eje mayor cuya longitud es de 500 millones de kilómetros. Si la distancia entre los focos es de 400 millones de kilómetros, obtenga una ecuación de la órbita.

32. El arco de un puente es de forma semielíptica y tiene una amplitud horizontal de 40 m y una altura de 16 m en su centro. ¿Qué altura tiene el arco a 9 m a la derecha o izquierda del centro?



33. A fin de trazar la elipse definida por la ecuación $4x^2 + 9y^2 = 36$, utilice el procedimiento siguiente y explique por qué funciona: primero determine los puntos de intersección de la elipse con los ejes coordenados. Obtenga los focos sobre el eje x empleando un compás, con centro en uno de los puntos de intersección con el eje y y radio 3. Después clave una "chinche" en cada foco. Tome una cuerda de longitud 6 y ate cada uno de sus extremos a una chinche. Apoye un lápiz contra la cuerda y haga que se tense, deslice el lápiz manteniendo tensa la cuerda y trace la elipse.

34. Utilice un procedimiento semejante al del ejercicio 33 para trazar la elipse cuya ecuación es $16x^2 + 9y^2 = 144$. Explique por qué funciona el procedimiento.

35. Demuestre que la ecuación

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

puede simplificarse y expresarse como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $b^2 = a^2 - c^2$.

36. Para la elipse cuya ecuación es

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

donde $a > b > 0$, obtenga las coordenadas de los focos en términos de h, k, a y b.

A.8 HIPÉRBOLAS

Cuando un plano cortante de un cono es paralelo a dos generatrices, dicho plano intersecta los dos mantos del cono y la sección cónica que se obtiene es una *hipérbola*, la cual se muestra en la figura 1. La definición de hipérbola como un conjunto de puntos de un plano puede deducirse a partir de su definición como sección cónica. La demostración, es semejante a la utilizada para la elipse en la sección A.7 del apéndice, e implica una esfera en cada manto del cono.

A.8.1 Definición de hipérbola

Una **hipérbola** es un conjunto de puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es constante. Los dos puntos fijos se denominan **focos.**



Hipérbola

FIGURA 1

A fin de obtener una ecuación de una hipérbola se comienza, como se hizo con la elipse, considerando la distancia entre los focos como $2c$, donde $c > 0$. Después se elige el eje x como la recta que pasa por los focos F y F'. Consulte la figura 2. Los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ son los focos F y F', respectivamente. Sea $2a$ la constante referida en la definición. Se puede demostrar que $c > a$. El punto (x, y) de la figura 2 es un punto de la hipérbola si y sólo si

$$\left| |\overline{FP}| - |\overline{F'P}| \right| = 2a$$

Como

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \quad \text{y} \quad |\overline{F'P}| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

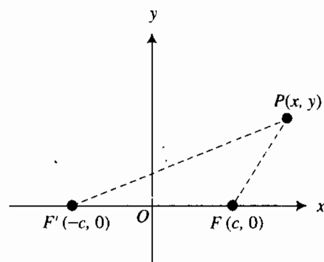


FIGURA 2

P está en la hipérbola si y sólo si

$$\left| \sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

o, equivalentemente, sin las barras de valor absoluto,

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Esta ecuación puede simplificarse al eliminar los radicales y efectuar algunas manipulaciones algebraicas. Se le pedirá que haga esto en el ejercicio 43. La ecuación que resulta es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$. Así, se tiene el teorema siguiente.

A.8.2 Teorema Ecuación de una hipérbola

Si $2a$ es la constante referida en la definición, si los focos están en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, y si $b^2 = c^2 - a^2$, entonces una ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

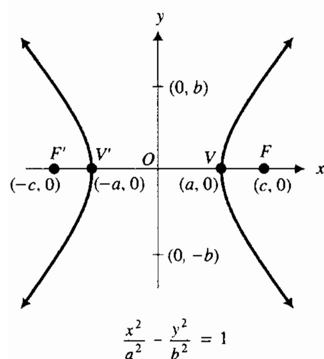


FIGURA 3

Ahora se mostrará cómo se dibuja esta hipérbola, la cual se presenta en la figura 3. Observe de la ecuación que la gráfica es simétrica con respecto a los ejes x y y. Como con la elipse, la recta que pasa por los focos se denomina **eje principal.** Así, para esta hipérbola el eje x es el eje principal. Los puntos donde la hipérbola intersecta al eje principal se llaman **vértices** y el punto que se encuentra a la mitad de la distancia entre los vértices recibe el nombre de **centro.** Para esta hipérbola los vértices están en $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ y el centro se encuentra en el origen. El segmento $V'V$ del eje principal se denomina **eje transverso** y su longitud es $2a$ unidades.

Al sustituir 0 por x en la ecuación de la hipérbola se obtiene la ecuación $y^2 = -b^2$, la cual no tiene soluciones reales. En consecuencia, la hipérbola no intersecta al eje y. Sin embargo, el segmento de recta que tiene sus extremos en los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$ se llama **eje conjugado,** y su longitud es $2b$ unidades. Si se resuelve la ecuación de la hipérbola para y en términos de x; se tiene

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

De esta ecuación se concluye que si $|x| < a$, no existe valor real para y. Por lo que no existen puntos (x, y) de la hipérbola para los cuales $-a < x < a$. También se observa que si $|x| > a$, entonces a y le corresponden dos valores reales. Así, la hipérbola tiene dos *ramas*. Una rama contiene al vértice $V(a, 0)$ y se extiende indefinidamente hacia la derecha de V. La otra rama contiene al vértice $V'(-a, 0)$ y se extiende indefinidamente hacia la izquierda de V'.

Como en el caso de la elipse, debido a que la hipérbola también tiene un centro se le llama **cónica central.**

▶ ***EJEMPLO 1*** Determine los vértices y focos de la hipérbola cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

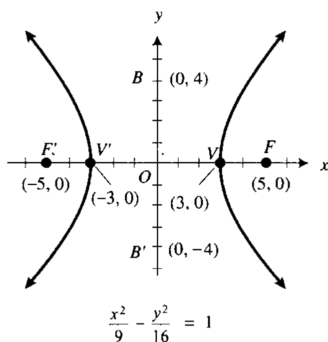


FIGURA 4

Dibuje la hipérbola y muestre los focos.

Solución Como la ecuación es de la forma

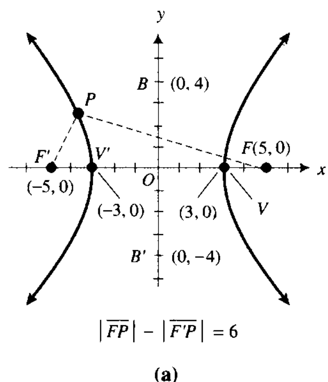
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

el centro de la hipérbola está en el origen y el eje principal es el eje x. Debido a que $a^2 = 9$ y $b^2 = 16$, entonces $a = 3$ y $b = 4$. Por tanto, los vértices se encuentran en $V(3, 0)$ y $V'(-3, 0)$. El número de unidades de la longitud del eje transverso es $2a = 6$, y el número de unidades del eje conjugado es $2b = 8$. Como $b^2 = c^2 - a^2$, con $c > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} 16 &= c^2 - 9 \\ c^2 &= 16 + 9 \\ c^2 &= 25 \\ c &= 5 \end{aligned}$$

En consecuencia, los focos están en $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$. La hipérbola dibujada junto con los focos se muestra en la figura 4. ◀

De la definición de la hipérbola, si P es cualquier punto de la hipérbola del ejemplo 1, entonces $\left| |\overline{FP}| - |\overline{F'P}| \right| = 6$. Consulte las figuras 5(a) y (b); en (a) P está en el segundo cuadrante y $|\overline{FP}| - |\overline{F'P}| = 6$; en (b) P está en el cuarto cuadrante y $|\overline{F'P}| - |\overline{FP}| = 6$.



(a)

▶ *EJEMPLO 2* Obtenga una ecuación de la hipérbola que tiene un foco en (5, 0) y los extremos de su eje conjugado se encuentran en (0, 2) y (0, −2).

Solución Como los extremos del eje conjugado se encuentran en (0, 2) y (0, −2), $b = 2$, el eje principal coincide con el eje x, y el centro está en el origen. En consecuencia, una ecuación de esta hipérbola es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Debido a que un foco se encuentra en (5, 0), $c = 5$, y como $b^2 = c^2 - a^2$, entonces $a^2 = 25 - 4$. Así, $a = \sqrt{21}$ y una ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{4} = 1$$ ◀

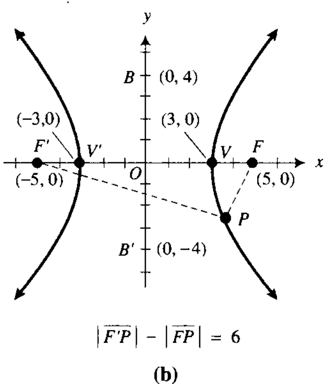
Si en la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se intercambian x y y, se obtiene

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

la cual es la ecuación de una hipérbola que tiene su centro en el origen y su eje principal coincide con el eje y.



(b)

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

FIGURA 5

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 La ecuación

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

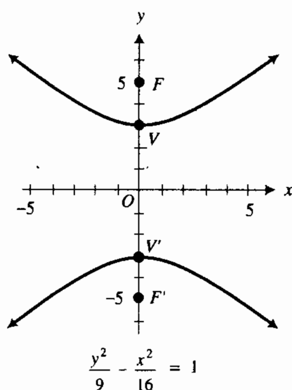


FIGURA 6

puede obtenerse a partir de la del ejemplo 1 al intercambiar x y y. La gráfica de esta ecuación es una hipérbola que tiene su centro en el origen, el eje y como su eje principal, sus vértices en $V(0, 3)$ y $V'(0, -3)$ y su focos en $F(0, 5)$ y $F'(0, -5)$. La figura 6 muestra la hipérbola y sus focos. ◀

Como se hizo con las circunferencias y con las elipses en las secciones A.5 y A.6, respectivamente, se puede trazar una hipérbola en la graficadora. Primero se define y como dos funciones de x, las cuales se obtienen al resolver la ecuación de la hipérbola para y. Sin embargo, como con la elipse, es fácil trazar la gráfica de la hipérbola a partir de sus ecuaciones paramétricas, el método se explica en la sección A.9 del apéndice.

En la ecuación estándar de una elipse, se sabe que $a > b$. Sin embargo, para una hipérbola no existe una desigualdad general que relacione a a y b. Por ejemplo, en el ejemplo 1, donde $a = 3$ y $b = 4$, $a < b$; pero en el ejemplo 2, donde $a = \sqrt{21}$ y $b = 2$, $a > b$. Además, a puede ser igual a b, en este caso la hipérbola se denomina **equilátera.** La hipérbola equilátera cuya ecuación es

$$x^2 - y^2 = 1$$

se conoce como **hipérbola unitaria.**

Refiérase a la figura 7, la cual muestra la hipérbola que tiene la ecuacuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

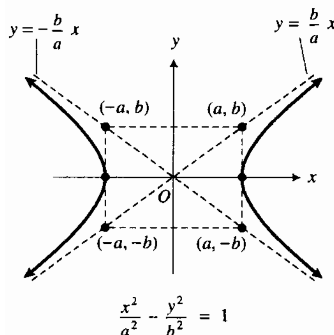


FIGURA 7

Las rectas diagonales punteadas son las *asíntotas* de la hipérbola. En las secciones 1.7 y 3.7, se estudiaron asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de una gráfica, y se presentaron las definiciones formales, las cuales implican el concepto de *límite*. Sin embargo, intuitivamente puede establecerse que si la distancia no dirigida entre una gráfica y una recta se hace más pequeña (sin llegar a ser cero) conforme $|x|$ o $|y|$ se hacen cada vez más grandes, entonces la recta es una asíntota de la gráfica.

Observe en la figura 7 que las diagonales del rectángulo cuyos vértices se encuentran en (a, b), $(a, -b)$, $(-a, b)$ y $(-a, -b)$ pertenecen a las asíntotas de la hipérbola. Este rectángulo se denomina **rectángulo auxiliar;** sus lados tienen longitudes de $2a$ y $2b$. Los vértices de la hipérbola son los puntos de intersección del eje principal y el rectángulo auxiliar. Una gráfica bastante buena de una hipérbola puede obtenerse dibujando primero el rectángulo auxiliar. Las asíntotas se tienen al prolongar las diagonales del rectángulo. Después, por cada vértice se dibuja una rama de la hipérbola empleando las asíntotas como guías. Observe que como $a^2 + b^2 = c^2$, la circunferencia que tiene su centro en el origen y pasa por los vértices del rectángulo auxiliar también pasa por los focos de la hipérbola.

▶ **EJEMPLO 3** Determine los vértices de la hipérbola cuya ecuación es

$$x^2 - 4y^2 = 16$$

Dibuje la hipérbola y muestre el rectángulo auxiliar y las asíntotas.

Solución La ecuación dada es equivalente a

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

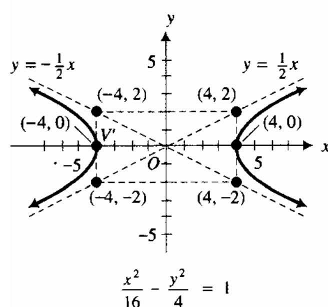


FIGURA 8

Por tanto, la hipérbola tiene su centro en el origen, y su eje principal es el eje x. Como $a^2 = 16$ y $b^2 = 4$, entonces $a = 4$ y $b = 2$. Los vértices se encuentran en $V(4, 0)$ y $V'(-4, 0)$, y los lados del rectángulo auxiliar tienen longitudes de $2a = 8$ y $2b = 4$. La figura 8 muestra el rectángulo auxiliar y las asíntotas. Estas asíntotas se utilizan como guías para dibujar la hipérbola, la cual se muestra en la figura. ◀

Se puede utilizar un truco nemotécnico para obtener las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola. Por ejemplo, para la hipérbola que tiene la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, se sustituye el miembro derecho por cero, obteniéndose

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Al factorizar, esta ecuación se transforma en

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$$

que es equivalente a las dos ecuaciones

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

las cuales son las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola dada.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Una ecuación de la hipérbola del ejemplo 3 es

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

A fin de obtener las ecuaciones de las asíntotas se sustituye el miembro derecho por cero, por lo que se obtiene

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 0$$

$$\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right) = 0$$

$$\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 0 \qquad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 0$$

$$y = \tfrac{1}{2}x \qquad \text{y} \qquad y = -\tfrac{1}{2}x$$

Suponga que el centro de una hipérbola está en (h, k) y que su eje principal es paralelo a uno de los ejes coordenados. Entonces, por medio de una traslación de ejes, de modo que el punto (h, k) sea el nuevo origen, una ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

si el eje principal es horizontal, y

$$\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$$

si el eje principal es vertical. Si se sustituye x' por $x - h$ y y' por $y - k$, se obtienen las siguientes formas estándar de las ecuaciones de las hipérbolas.

A.8.3 Teorema Formas estándar de las ecuaciones de las hipérbolas

Si el centro de una hipérbola se encuentra en (h, k) y la distancia entre los vértices es $2a$, entonces una ecuación de la hipérbola es de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

si el eje principal es horizontal, y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

si el eje principal es vertical.

Al desarrollar $(x - h)^2$ y $(y - k)^2$ y simplificar, se piede escribir cada una de estas ecuaciones en la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

donde A y C tienen signos opuestos. El ejemplo siguiente presenta una ecuación de esta forma.

▶ EJEMPLO 4

Muestre que la gráfica de la ecuación

$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$$

es una hipérbola. Obtenga el centro, una ecuación del eje principal y los vértices. Dibuje la hipérbola y muestre el rectángulo auxiliar y las asíntotas.

Solución Se comienza completando los cuadrados en x y y. Así,

$$9(x^2 - 2x) - 4(y^2 + 4y) = -29$$
$$9(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 + 4y + 4) = -29 + 9 - 16$$
$$9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = -36$$
$$\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

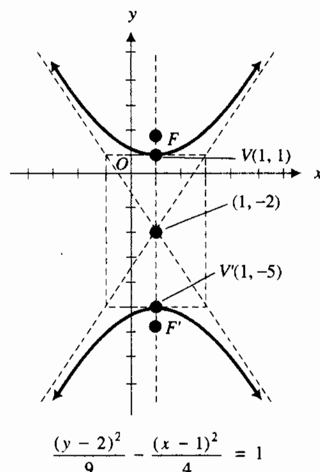


FIGURA 9

Esta ecuación es la de una hipérbola cuyo centro está en $(1, -2)$ y cuyo eje principal es la recta vertical que tiene ecuación $x = 1$. Como $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, entonces $a = 3$ y $b = 2$. Los vértices se encuentran en el eje principal a 3 unidades arriba y debajo del centro; ellos están en $V(1, 1)$ y $V'(1, -5)$. El rectángulo auxiliar tiene lados de longitudes $2a = 6$ y $2b = 4$; éste se muestra en la figura 9 junto con las asíntotas y la hipérbola. ◀

En el ejemplo ilustrativo siguiente se tiene otra ecuación de la forma (1).

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

La ecuación

$$4x^2 - 12y^2 + 24x + 96y - 156 = 0$$

puede escribirse como

$$4(x^2 + 6x) - 12(y^2 - 8y) = 156$$

y al completar los cuadrados en x y y se tiene

$$\begin{aligned} 4(x^2 + 6x + 9) - 12(y^2 - 8y + 16) &= 156 + 36 - 192 \\ 4(x + 3)^2 - 12(y - 4)^2 &= 0 \\ (x + 3)^2 - 3(y - 4)^2 &= 0 \\ [(x + 3) - (y - 4)][(x + 3) + (y - 4)] &= 0 \end{aligned}$$

$$x + 3 - \sqrt{3}(y - 4) = 0 \quad \text{y} \quad x + 3 + (y - 4) = 0$$

las cuales son ecuaciones de dos rectas que pasan por el punto (–3, 4).



Dos rectas que se intersectan

FIGURA 10

Se puede demostrar en general que la gráfica de cualquier ecuación de la forma (1) es una hipérbola o dos rectas que se intersectan. Los resultados del ejemplo 4 y del ejemplo ilustrativo 3 son casos particulares de este hecho.

La ecuación (1) es el caso especial de la ecuación general de segundo grado en dos variables

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

donde $B = 0$ y $AC < 0$ (es decir, A y C tienen signo opuesto).

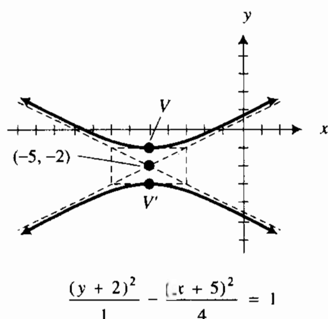
El teorema siguiente resume las conclusiones de la discusión anterior.

A.8.4 Teorema

Si en la ecuación general de segundo grado (2), $B = 0$ y $AC < 0$, entonces la gráfica es una hipérbola o dos rectas que se intersectan.

El caso degenerado de la hipérbola, dos rectas que se intersectan, se obtiene como una sección cónica si el plano cortante contiene al vértice y dos generatrices del cono, como se muestra en la figura 10.

▶ ***EJEMPLO 5*** Los vértices de una hipérbola se encuentran en (–5, –3) y (–5, –1), y los extremos de su eje conjugado están en (–7, –2) y (–3, –2). Obtenga una ecuación de la hipérbola y las ecuaciones de las asíntotas. Dibuje la hipérbola y las asíntotas.



$$\frac{(y+2)^2}{1} - \frac{(x+5)^2}{4} = 1$$

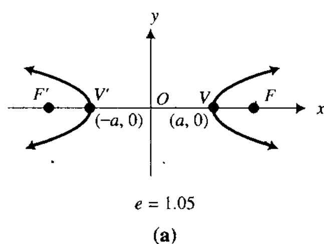
FIGURA 11

Solución La distancia entre los vértices es $2a$; por tanto, $2a = 2$ y $a = 1$. La longitud del eje conjugado es $2b$; de modo que $2b = 4$ y $b = 2$. Debido a que el eje principal es vertical, una ecuación de la hipérbola es de la forma

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

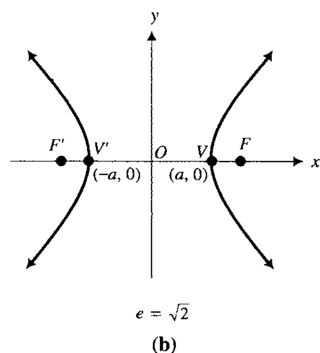
El centro (h, k) está la mitad de la distancia entre los vértices y, por tanto, se encuentra en el punto (–5, –2). En consecuencia, una ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(y + 2)^2}{1} - \frac{(x + 5)^2}{4} = 1$$



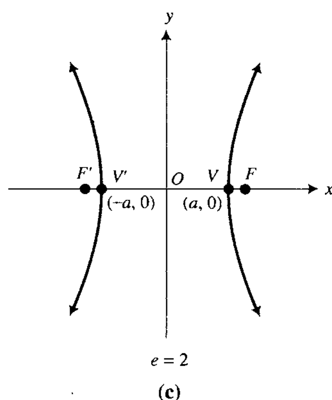
$e = 1.05$

(a)



$e = \sqrt{2}$

(b)



$e = 2$

(c)

FIGURA 12

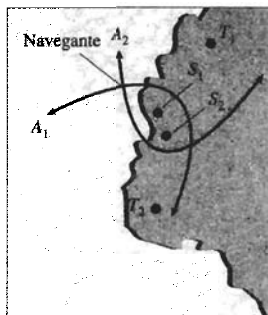


FIGURA 13

Al sustituir el miembro derecho por cero, a fin de obtener las ecuaciones de las asíntotas, se tiene

$$\left(\frac{y+2}{1} - \frac{x+5}{2}\right)\left(\frac{y+2}{1} + \frac{x+5}{2}\right) = 0$$

$$y + 2 = \tfrac{1}{2}(x + 5) \quad \text{y} \quad y + 2 = -\tfrac{1}{2}(x + 5)$$

La hipérbola y las asíntotas se muestran en la figura 11. ◀

Como con la elipse, la forma de una hipérbola está determinada por su excentricidad, definida de igual manera que para la elipse, esto es, si e es la **excentricidad** de una hipérbola, entonces

$$e = \frac{c}{a}$$

Sin embargo, para una hipérbola $e > 1$. Esto es una consecuencia de que $c > a$, debido a que para una hipérbola

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{3}$$

A partir de esta ecuación, cuando $a = b$, se obtiene $c = \sqrt{2}a$. Por lo que la excentricidad de una hipérbola equilátera es $\sqrt{2}$. Consulte la figura 12(b). Si e se aproxima a 1, mientras que a permanece fija, entonces c se aproxima a a y, de la ecuación (3), b se aproxima a 0, por lo que la forma de la hipérbola se hace "flaca" en torno a su eje principal. La figura 12(a) muestra una hipérbola con $e = 1.05$ y el mismo valor de a como en la figura 12(b). Si e se incrementa conforme a permanece fija, entonces c y b se incrementan, y la forma de la hi-pérbola se hace "gorda" en torno a su eje principal. Refiérase a la figura 12(c), la cual presenta una hipérbola con $e = 2$ y el mismo valor de a como en las figuras 12(a) y 12(b).

La propiedad de la hipérbola dada en su definición constituye la base de varios sistemas de navegación. Estos sistemas están constituidos por una red de pares de radiotransmisores en posiciones fijas y a una distancia conocida entre sí. Los radiotransmisores envían señales de radio que son recibidas por un navegante. La diferencia de tiempo de llegada de las dos señales determinan la diferencia $2a$ de las distancias con relación al navegante. Así, se sabe que la posición del navegante se encuentra en algún punto a lo largo de un arco de una hipérbola cuyos focos están en las posiciones de los radiotransmisores. Se determina un arco, y no ambos, debido al retraso de la señal de los radiotransmisores que integran el sistema. El procedimiento se repite para un par diferente de radiotransmisores y se determina otro arco de hipérbola que proporciona la posición del navegante. El punto de intersección de los dos arcos hiperbólicos es la posición real del navegante. Por ejemplo, en la figura 13 suponga que un par de radiotransmisores se localizan en los puntos T_1 y S_1 y las señales desde este par determinan el arco hiperbólico A_1. Otro par de radiotransmisores ubicados en los puntos T_2 y S_2 determinan, a par de sus señales, el arco hiperbólico A_2. Entonces, la intersección de A_1 y A_2 es la posición del navegante.

La hipérbola posee una propiedad de reflexión que se emplea en el diseño de ciertos telescopios. Las hipérbolas también se utilizan en la guerra para localizar la artillería enemiga mediante el ruido de sus disparos, este método se denomina *localización acústica*. Algunos cometas se desplazan en órbitas hiperbólicas. Si una cantidad varía inversamente con respecto a

otra, tales como la presión y el volumen en la ley de Boyle para un gas ideal ($PV = k$), la gráfica correspondiente a esta variación es una hipérbola, como se verá en la sección A.10 del apéndice.

EJERCICIOS A.8

En los ejercicios 1 a 6, para la hipérbola que tiene la ecuación indicada, determine (a) el centro, (b) el eje principal, y (c) los vértices. (d) Dibuje la hipérbola y muestre los focos.

1. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ **2.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

3. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$ **4.** $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

5. $9x^2 - 4y^2 = 36$ **6.** $25y^2 - 4x^2 = 100$

En los ejercicios 7 a 20, para la hipérbola cuya ecuación se indica, obtenga (a) el centro, (b) el eje principal, y (c) los vértices. (d) Dibuje la hipérbola y muestre el rectángulo auxiliar y las asíntotas.

7. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ **8.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$

9. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$ **10.** $\frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{49} = 1$

11. $25y^2 - 36x^2 = 900$

12. $4x^2 - 9y^2 = 144$

13. $x^2 - y^2 + 6x - 4y - 4 = 0$

14. $9y^2 - 4x^2 + 32x - 36y - 64 = 0$

15. $9x^2 - 16y^2 + 54x - 32y - 79 = 0$

16. $9y^2 - 25x^2 - 50x - 72y - 106 = 0$

17. $3y^2 - 4x^2 - 8x - 24y - 40 = 0$

18. $2x^2 - y^2 + 12x + 8y - 6 = 0$

19. $4y^2 - 9x^2 + 16y + 18x = 29$

20. $4x^2 - y^2 + 56x + 2y + 195 = 0$

En los ejercicios 21 a 26, obtenga las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola del ejercicio indicado.

21. Ejercicio 7 **22.** Ejercicio 10

23. Ejercicio 13 **24.** Ejercicio 16

25. Ejercicio 19 **26.** Ejercicio 18

En los ejercicios 27 a 36, obtenga una ecuación de la hipérbola que satisface las condiciones señaladas y dibújela.

27. Vértices en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$, y eje conjugado de longitud 6.

28. Focos en $(0, 5)$ y $(0, -5)$, y un vértice en $(0, 4)$.

29. Centro en el origen, sus focos sobre el eje y, y pasa por los puntos $(-2, 4)$ y $(-6, 7)$.

30. Extremos del eje conjugado en $(0, -3)$ y $(0, 3)$, y un foco en $(5, 0)$.

31. Un foco en $(26, 0)$ y como asíntotas las rectas $12y = \pm 5x$.

32. Centro en $(3, -5)$, un vértice en $(7, -5)$ y un foco en $(8, -5)$.

33. Centro en $(-2, -1)$, un vértice en $(-2, 11)$ y un foco en $(-2, 14)$.

34. Focos en $(3, 6)$ y $(3, 0)$, y pasa por el punto $(5,\ 3 + \frac{6}{5}\sqrt{5})$.

35. Focos en $(-1, 4)$ y $(7, 4)$, y la longitud del eje transverso es $\frac{8}{3}$.

36. Un foco en $(-3 - 3\sqrt{13}, 1)$, las asíntotas se intersectan en $(-3, 1)$ y una asíntota pasa por el punto $(1, 7)$.

37. Los vértices de una hipérbola se encuentran en $(-3, -1)$ y $(-1, -1)$ y la distancia entre los focos es $2\sqrt{5}$. Obtenga **(a)** una ecuación de la hipérbola, y **(b)** las ecuaciones de las asíntotas.

38. Los focos de una hipérbola están en $(2, 7)$ y $(2, -7)$, y la distancia entre los vértices es $8\sqrt{3}$. Obtenga **(a)** una ecuación de la hipérbola, y **(b)** ecuaciones de las asíntotas.

39. Obtenga una ecuación de la hipérbola cuyos focos son los vértices de la elipse $7x^2 + 11y^2 = 77$ y cuyos vértices son los focos de esta elipse.

40. Obtenga una ecuación de la elipse cuyos focos están en los vértices de la hipérbola $11x^2 - 7y^2 = 77$ y cuyos vértices son los focos de esta hipérbola.

41. El costo de producción de un artículo es \$12 menos en un punto A que un punto B, y la distancia entre A y B es de 100 km. Suponga que la ruta de entrega del producto es una línea recta y que el costo de entrega es de 20 centavos por unidad por kilómetro, determine la curva en cualquier punto al cual pueda surtirse el artículo desde A o B al mismo costo. *Sugerencia:* considere los puntos A y B en $(-50, 0)$ y $(50, 0)$, respectivamente.

42. Dos estaciones LORAN (*long-range navigation*, es decir, *navegación de largo alcance*) A y B están situadas en una línea recta este-oeste y A está a 80 mi al este de B. Un avión vuela en una línea recta ubicada a 60 mi al norte de la recta que pasa por A y B. Se envían señales simultáneamente desde A y B, y la señal de A llega al avión 350 μs (350 microsegundos) antes que la señal de B. Si las señales viajan a razón de 0.2 mi/μs, localice la posición del avión por medio de la definición de una hipérbola.

43. Demuestre que la ecuación

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

puede simplificarse y expresarse como

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$

44. Para una hipérbola la excentricidad e es mayor que 1, y para una elipse $0 < e < 1$. Explique por qué la excentricidad de una parábola es igual a 1.

A.9 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

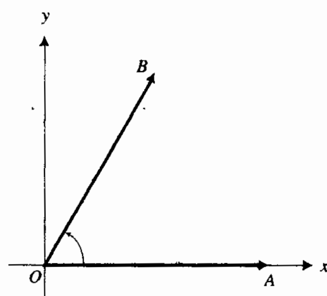


FIGURA 1

Es posible que haya estudiado trigonometría en algún curso anterior al de Cálculo; sin embargo, en esta sección se presenta una breve revisión de las funciones trigonométricas debido a su importancia en Cálculo.

En geometría, un **ángulo** se define como la unión de dos rayos, denominados **lados,** que tienen un origen o extremo común, llamado **vértice.** Cualquier ángulo es congruente a algún ángulo cuyo vértice esté en el origen y tenga un lado, denominado **lado inicial,** que coincida con la parte positiva del eje x. De dicho ángulo se dice que está en la **posición estándar.** La figura 1 muestra un ángulo AOB en la posición estándar con OA como lado inicial. El otro lado, OB, recibe el nombre de **lado terminal.** El ángulo AOB puede generarse al rotar el lado OA hasta el lado OB, y bajo tal rotación el punto A se desplaza, sobre la circunferencia cuyo centro está en O y tiene radio $|\overline{OA}|$, hasta el punto B.

Al tratar con ángulos de triángulos, a menudo la medida de un ángulo se da en grados. Sin embargo, en Cálculo se estudian las funciones trigonométricas de números reales, y éstas se definen en términos de *medidas en radianes.*

La longitud de un arco de una circunferencia se emplea para definir la medida en radianes de un ángulo.

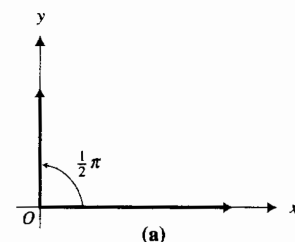
A.9.1 Definición de medida en radianes

Sea AOB un ángulo en posición estándar y $|\overline{OA}| = 1$. Si s unidades es la longitud de un arco de la circunferencia recorrido por un punto A conforme el lado inicial se rota hasta el lado terminal OB, la **medida en radianes,** t, del ángulo AOB está dada por

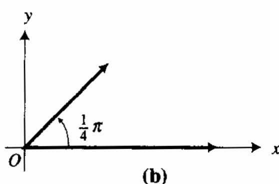
$t = s$ si la rotación se efectúa en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj

y

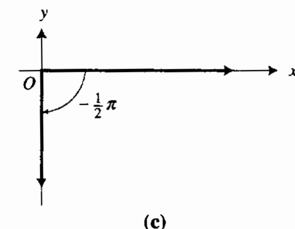
$t = -s$ si la rotación se efectúa en el mismo sentido del giro de las manecillas del reloj



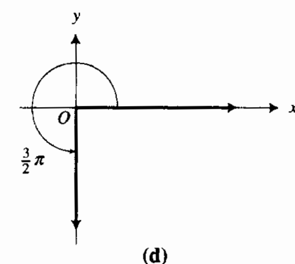
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 2

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Del hecho de que la medida de la longitud de la circunferencia unitaria es 2π, puede determinarse la medida en radianes de los ángulos de las figuras 2(a)−(f), éstas son $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{3}{4}\pi$ y $\frac{7}{4}\pi$, respectivamente. ◀

En la definición A.9.1, puede haber más de una revolución completa en la rotación de OA, como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

La figura 3(a) muestra un ángulo cuya medida en radianes es $\frac{5}{2}\pi$ y la figura 3(b) presenta un ángulo cuya medida en radianes es $-\frac{13}{4}\pi$. ◀

Un ángulo formado por una revolución completa, de modo que OA coincida con OB, tiene una medida en grados de 360 y una medida en radianes de 2π. En consecuencia, se tiene la siguiente correspondencia entre medidas en grados y medidas en radianes (donde el símbolo ~ indica que las mediciones dadas son para el mismo ángulo o para ángulos congruentes):

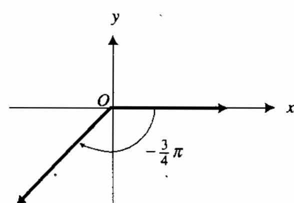
$$360° \sim 2\pi \text{ rad} \qquad 180° \sim \pi \text{ rad}$$

De esto se deduce que

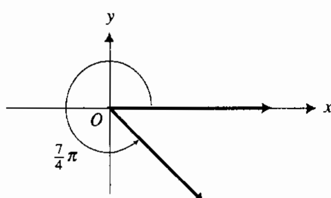
$$1° \sim \frac{1}{180}\pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} \sim \frac{180°}{\pi}$$
$$\approx 57°18'$$

Observe que el símbolo $\approx$ antes de 57°18′ indica que 1 rad y aproximadamente 57°18′ son medidas para el mismo ángulo o para ángulos congruentes.

A partir de esta correspondencia la medida de un ángulo puede convertirse de un sistema de unidades a otro.



(e)



(f)

FIGURA 2

EJEMPLO 1 Obtenga: **(a)** la medida en radianes equivalente a 162°; **(b)** la medida en grados equivalente a $\frac{5}{12}\pi$.

Solución

(a) $162° \sim 162 \cdot \frac{1}{180}\pi \text{ rad}$

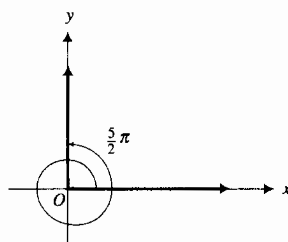
$162° \sim \frac{9}{10}\pi \text{ rad}$

(b) $\frac{5}{12}\pi \text{ rad} \sim \frac{5}{12}\pi \cdot \frac{180°}{\pi}$

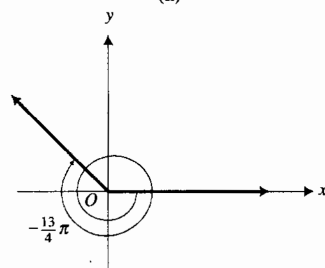
$\frac{5}{12}\pi \text{ rad} \sim 75°$

La tabla 1 proporciona las medidas correspondientes en grados y radianes de ciertos ángulos.

A continuación se definirán las funciones *seno* y *coseno* de cualquier número real.



(a)



(b)

FIGURA 3

A.9.2 Definición de seno y coseno de un número real

Suponga que t es un número real. Coloque un ángulo que mida t radianes en posición estándar y sea P la intersección del lado terminal del ángulo y la circunferencia unitaria cuyo centro es el origen. Si P es el punto (x, y), entonces la función **seno** está definida por

$$\text{sen } t = y$$

y la función **coseno** está definida por

$$\cos t = x$$

De esta definición, sen t y cos t están definidas para cualquier valor de t. Por tanto, el dominio del seno y del coseno es el conjunto de todos los números reales. La figura 4 muestra el punto (cos t, sen t) cuando $0 < t < \frac{1}{2}\pi$, mientras que la figura 5 presenta el punto (cos t, sen t) cuando $-\frac{3}{2}\pi < t < -\pi$.

Tabla 1

Medida en grados	*Medida en radianes*
30	$\frac{1}{6}\pi$
45	$\frac{1}{4}\pi$
60	$\frac{1}{3}\pi$
90	$\frac{1}{2}\pi$
120	$\frac{2}{3}\pi$
135	$\frac{3}{4}\pi$
150	$\frac{5}{6}\pi$
180	π
270	$\frac{3}{2}\pi$
360	2π

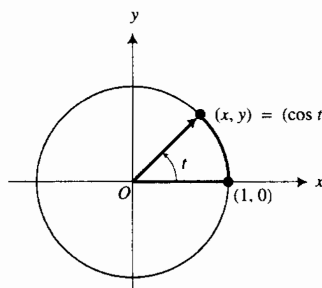


FIGURA 4

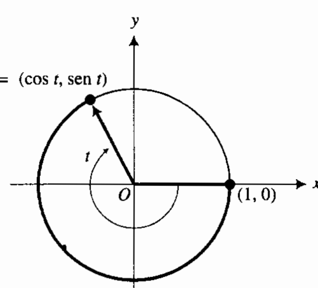


FIGURA 5

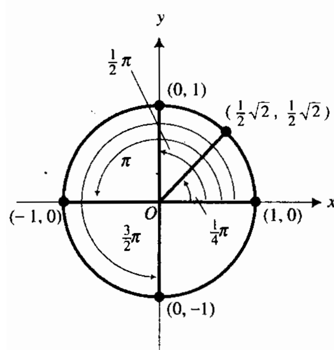


FIGURA 6

El valor más grande que estas funciones pueden tener es 1 y el valor más pequeño es -1. Se demostrará después que las funciones seno y coseno toman todos los valores entre -1 y 1, y de este hecho se deduce que el contradominio de las dos funciones es $[-1, 1]$.

Para ciertos valores de t, el seno y el coseno se pueden obtener fácilmente a partir de una figura. En la figura 6 se observa que sen $0 = 0$ y cos $0 = 1$, sen $\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y cos $\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, sen $\frac{1}{2}\pi = 1$ y cos $\frac{1}{2}\pi = 0$, sen $\pi = 0$ y cos $\pi = -1$, sen $\frac{3}{2}\pi = -1$ y cos $\frac{3}{2}\pi = 0$. La tabla 2 contiene estos valores y algunos otros que se utilizan con frecuencia.

Una ecuación de la circunferencia unitaria que tiene centro en el origen es $x^2 + y^2 = 1$. Como $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$, se infiere que

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \tag{1}$$

Observe que $\operatorname{sen}^2 t$ y $\cos^2 t$ significan $(\operatorname{sen} t)^2$ y $(\cos t)^2$, respectivamente. La ecuación (1) es una identidad debido a que es válida para cualquier número real t. Esta identidad se denomina **identidad pitagórica fundamental** y muestra la relación entre los valores de seno y coseno, además, puede emplearse para calcular uno de ellos cuando el otro se conoce.

Tabla 2

t	sen t	cos t
0	0	1
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\pi$	1	0
$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
π	0	-1
$\frac{3}{2}\pi$	-1	0
2π	0	1

Las figuras 7 y 8 presentan ángulos que tienen una medida negativa de $-t$ radianes y ángulos correspondientes que tienen una medida positiva de t radianes. En estas figuras observe que

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad \cos(-t) = \cos t$$

Estas ecuaciones se cumplen para cualquier número real t porque los puntos donde los lados terminales de los ángulos (que tienen medidas de t y $-t$ radianes) intersectan a la circunferencia unitaria tienen abscisas iguales y ordenadas que difieren sólo en signo. En consecuencia, estas ecuaciones son identidades. A partir de estas identidades se infiere que el seno es una función impar y el coseno es una función par.

De la definición A.9.2 se pueden obtener las siguientes identidades:

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad \cos(t + 2\pi) = \cos t \tag{2}$$

La propiedad del seno y del coseno establecida en las ecuaciones (2) recibe el nombre de **periodicidad.**

A.9.3 Definición de función periódica

Se dice que una función f es **periodica** si existe un número real positivo p tal que siempre que x esté en el dominio de f, entonces $x + p$ también estará en el dominio de f y

$$f(x + p) = f(x)$$

Al valor más pequeño del número real positivo p se le llama **periodo** de f.

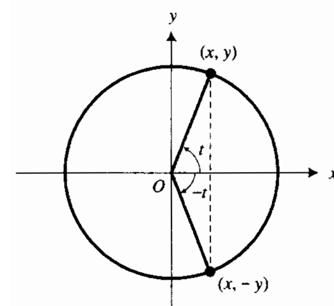


FIGURA 7

Compare esta definición con las ecuaciones (2). Ya que puede demostrarse que 2π es el menor valor del número real positivo p que tiene la propiedad de que $\operatorname{sen}(t + p) = \operatorname{sen} t$ y $\cos(t + p) = \cos t$, el seno y el coseno son funciones periódicas con periodo 2π; es decir, siempre que el valor de la va-

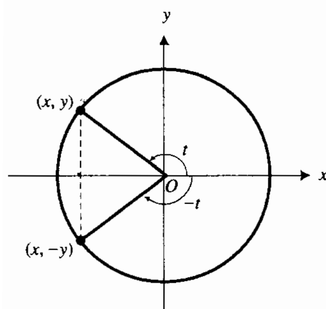


FIGURA 8

riable independiente t se incremente en 2π, el valor de cada una de las funciones se repetirá. Debido a la periodicidad del seno y del coseno, estas funciones tie-nen aplicaciones importantes en relación con fenómenos que se repiten periódicamente, tales como el movimiento ondulatorio, corriente eléctrica alterna, vibraciones, oscilación de péndulos, ciclos en los negocios y ritmos biológicos.

EJEMPLO 2 Utilice la periodicidad de las funciones seno y coseno así como los valores de sen t y cos t, donde $0 \leq t < 2\pi$, para determinar el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones: **(a)** sen $\frac{17}{4}\pi$; **(b)** cos $\frac{7}{3}\pi$; **(c)** sen $\frac{15}{2}\pi$; **(d)** $\cos(-\frac{7}{6}\pi)$.

Solución

(a)
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \tfrac{17}{4}\pi &= \operatorname{sen}(\tfrac{1}{4}\pi + 2 \cdot 2\pi) \\ &= \operatorname{sen} \tfrac{1}{4}\pi \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \cos \tfrac{7}{3}\pi &= \cos(\tfrac{1}{3}\pi + 2\pi) \\ &= \cos \tfrac{1}{3}\pi \\ &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \tfrac{15}{2}\pi &= \operatorname{sen}(\tfrac{3}{2}\pi + 3 \cdot 2\pi) \\ &= \operatorname{sen} \tfrac{3}{2}\pi \\ &= -1 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} \cos(-\tfrac{7}{6}\pi) &= \cos[\tfrac{5}{6}\pi + (-1)2\pi] \\ &= \cos \tfrac{5}{6}\pi \\ &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

A continuación se definirán las otras cuatro funciones trigonométricas en términos de seno y coseno.

A.9.4 Definición de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante de un número real

Las funciones **tangente** y **secante** están definidas por

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t}$$

para todos los números reales tales que $\cos t \neq 0$.

La funciones **cotangente** y **cosecante** están definidas por

$$\cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} \qquad \csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$$

para todos los números reales tales que $\operatorname{sen} t \neq 0$.

Las funciones tangente y secante no están definidas cuando $\cos t = 0$. Por tanto, el dominio de estas funciones es el conjunto de los números reales excepto los números de la forma $\frac{1}{2}\pi + k\pi$, donde k es cualquier número entero. De manera semejante, como cot t y csc t no están definidas cuando $\operatorname{sen} t = 0$, el dominio de las funciones cotangente y cosecante es el conjunto de los números reales excepto los números de la forma $k\pi$, donde k es cualquier número entero.

Es posible demostrar que la tangente y la cotangente son funciones periódicas con periodo π; es decir,

$$\tan(t + \pi) = \tan t \quad \text{y} \quad \cot(t + \pi) = \cot t$$

Además, las funciones secante y cosecante son periódicas con periodo 2π; por tanto,

$$\sec(t + 2\pi) = \sec t \quad \text{y} \quad \csc(t + 2\pi) = \csc t$$

Al emplear la identidad pitagórica fundamental (1) y la definición A.9.4, se obtienen otras dos identidades importantes. Una de estas identidades se obtiene al dividir los miembros de (1) entre $\cos^2 t$, y la otra se deduce al dividir ambos miembros de (1) entre $\text{sen}^2 t$. Así,

$$\frac{\text{sen}^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} \quad \text{y} \quad \frac{\text{sen}^2 t}{\text{sen}^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\text{sen}^2 t} = \frac{1}{\text{sen}^2 t}$$

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t \quad \text{y} \quad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

Estas dos identidades también se llaman identidades pitagóricas.

Otras tres identidades importantes que se obtienen a partir de la definición A.9.4 son las siguientes:

$$\text{sen}\, t \csc t = 1 \qquad \cos t \sec t = 1 \qquad \tan t \cot t = 1$$

Estas tres identidades, las tres identidades pitagóricas y las dos identidades de la definición A.9.4 que definen a la tangente y la cotangente constituyen las **ocho identidades trigonométricas fundamentales.** Éstas, así como otras fórmulas de trigonometría, se resumen al final del libro.

Se han definido las funciones trigonométricas con dominios de números reales. Sin embargo, existen aplicaciones importantes de las funciones trigonómetricas para las cuales los dominios son conjuntos de ángulos. Para esto, se define una función trigonométrica de un ángulo θ como la función correspondiente del número real t, donde t es la medida en radianes de θ.

A.9.5 Definición de las funciones trigonométricas de un ángulo

Si θ es un ángulo cuya medida es t radianes, entonces

$$\text{sen}\,\theta = \text{sen}\, t \qquad \cos\theta = \cos t \qquad \tan\theta = \tan t$$
$$\cot\theta = \cot t \qquad \sec\theta = \sec t \qquad \csc\theta = \csc t$$

Cuando se considera una función trigonométrica de un ángulo, con frecuencia se utiliza la medida del ángulo en lugar de θ. Por ejemplo, si la medida en grados del ángulo θ es 60 (o, equivalentemente, la medida en radianes de θ es $\frac{1}{3}\pi$), entonces en lugar de sen θ puede escribirse sen 60° o sen $\frac{1}{3}\pi$. Observe que cuando la medida de un ángulo se presenta en grados, el símbolo correspondiente de grados se escribe. Sin embargo, cuando dicho símbolo no se expresa, se considera la medida del ángulo en radianes. Por ejemplo, cos 2° significa el coseno del ángulo cuya medida en grados es 2, mientras que cos 2 denota el coseno del ángulo cuya medida en radianes es 2. Esto es consistente con el hecho de que el coseno de un ángulo que tiene una medida de 2 radianes es igual al coseno del número real 2.

Ahora se explicará cómo las ecuaciones paramétricas que contienen funciones trigonométricas pueden emplearse para trazar elipses e hipérbolas en la graficadora.

A fin de trazar la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

se utilizan las ecuaciones paramétricas

$$x = a \cos t \quad \text{y} \quad y = b \operatorname{sen} t$$

A fin de demostrar que estas ecuaciones representan la elipse, se elimina el parámetro t de las ecuaciones. Primero se escriben las ecuaciones como

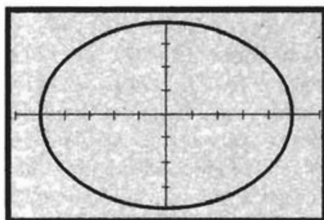
$$\frac{x}{a} = \cos t \quad \text{y} \quad \frac{y}{b} = \sin t$$

Al elevar al cuadrado los dos miembros de cada una de las ecuaciones y sumando, se tiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la cual es la ecuación (3).



[−6, 6] por [−4, 4]

$x = 5 \cos t$ y $y = 4 \operatorname{sen} t$

FIGURA 9

▶ ***EJEMPLO 3*** Trace la elipse del ejemplo 1 de la sección A.7 del apéndice empleando ecuaciones paramétricas.

Solución Una ecuación cartesiana de la elipse es

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Por otro lado, las ecuaciones paramétricas de la elipse son

$$x = 5 \cos t \quad \text{y} \quad y = 4 \operatorname{sen} t$$

En la graficadora, en modo paramétrico, se permite que t tome todos los números del intervalo cerrado $[0, 2\pi]$. La figura 9 muestra la gráfica trazada en el rectángulo de inspección de $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$ con $t_{\text{step}} = 0.05$. Compare esta gráfica con la de la figura 6 de la sección A.7 del apéndice, la cual se obtuvo a mano. ◀

Con objeto de trazar la elipse cuyo eje principal es horizontal, se utilizan las ecuaciones paramétricas

$$x = a \cos t + h \quad \text{y} \quad y = b \operatorname{sen} t + k$$

En el ejercicio 34, se le pedirá que demuestre que éstas son ecuaciones paramétricas de la elipse representada por la ecuación cartesiana

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Si el eje principal es vertical, se emplean las ecuaciones paramétricas

$$x = b \cos t + h \quad \text{y} \quad y = a \operatorname{sen} t + k$$

A fin de trazar la hipérbola cuya ecuación cartesiana es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

se utilizan las ecuaciones paramétricas

$$x = a \sec t + h \quad \text{y} \quad y = b \tan t + k$$

donde t está en el intervalo $[0, 2\pi]$. Este método se basa en la identidad $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$. Refiérase al ejercicio 43. Si la hipérbola tiene la ecuación cartesiana

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

entonces se emplean las ecuaciones paramétricas

$$x = b \tan t + h \quad \text{y} \quad y = a \sec t + k$$

Consulte el ejercicio 44.

EJEMPLO 4 Trace la hipérbola del ejemplo 4 de la sección A.8 del apéndice empleando ecuaciones paramétricas.

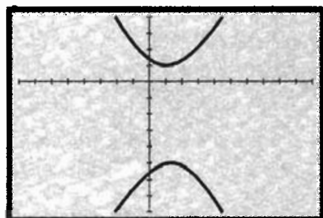
Solución Una ecuación cartesiana en forma estándar de esta hipérbola es

$$\frac{(y + 2)^2}{9} - \frac{(x - 1)^2}{4} = 1$$

Las ecuaciones paramétricas de esta hipérbola son

$$x = 2 \tan t + 1 \quad \text{y} \quad y = 3 \sec t - 2$$

La figura 10 muestra la gráfica de estas ecuaciones paramétricas trazada en el rectángulo de inspección de $[-8, 10]$ por $[-8, 4]$ para t en el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$ con $t_{\text{step}} = 0.05$. Compare esta gráfica con la de la figura 9 de la sección A.8 del apéndice, la cual se obtuvo a mano. ◀



$[-8, 10]$ por $[-8, 4]$

$x = 2 \tan t + 1$ y $y = 3 \sec t - 2$

FIGURA 10

EJERCICIOS A.9

En los ejercicios 1 y 2, obtenga la medida equivalente en radianes.

1. **(a)** 60° **(b)** 135° **(c)** 210° **(d)** −150° **(e)** 20° **(f)** 450° **(g)** −75° **(h)** 100°

2. **(a)** 45° **(b)** 120° **(c)** 240° **(d)** −225° **(e)** 15° **(f)** 540° **(g)** −48° **(h)** 2°

En los ejercicios 3 y 4, obtenga la medida equivalente en grados.

3. **(a)** $\frac{1}{4}\pi$ rad **(b)** $\frac{2}{3}\pi$ rad **(c)** $\frac{11}{6}\pi$ rad **(d)** $-\frac{1}{2}\pi$ rad **(e)** $\frac{1}{2}$ rad **(f)** 3π rad **(g)** −2 rad **(h)** $\frac{1}{12}\pi$ rad

4. **(a)** $\frac{1}{6}\pi$ rad **(b)** $\frac{4}{3}\pi$ rad **(c)** $\frac{3}{4}\pi$ rad **(d)** -5π rad **(e)** $\frac{1}{3}$ rad **(f)** −5 rad **(g)** $\frac{11}{12}\pi$ rad **(h)** 0.2 rad

En los ejercicios 5 a 12, determine el valor de función exacto.

5. **(a)** sen $\frac{1}{6}\pi$ **(b)** cos $\frac{1}{4}\pi$ **(c)** sen $(-\frac{3}{2}\pi)$ **(d)** cos $\frac{1}{3}\pi$

6. **(a)** cos $\frac{1}{3}\pi$ **(b)** sen $\frac{1}{4}\pi$ **(c)** cos $(-\frac{1}{2}\pi)$ **(d)** sen (-2π)

7. **(a)** cos $\frac{5}{6}\pi$ **(b)** sen $\frac{3}{4}\pi$ **(c)** cos 3π **(d)** sen (-5π)

8. **(a)** sen $\frac{4}{3}\pi$ **(b)** cos $(-\frac{1}{6}\pi)$ **(c)** sen 7π **(d)** cos $(-\frac{5}{2}\pi)$

9. **(a)** tan $\frac{1}{3}\pi$ **(b)** cot $\frac{1}{4}\pi$ **(c)** sec $(-\pi)$ **(d)** csc $\frac{1}{2}\pi$

10. **(a)** cot $\frac{1}{6}\pi$ **(b)** tan $\frac{1}{4}\pi$ **(c)** csc $(-\frac{3}{2}\pi)$ **(d)** sec π

11. **(a)** $\sec(-\frac{1}{6}\pi)$ **(b)** $\csc \frac{3}{4}\pi$
(c) $\tan \frac{5}{6}\pi$ **(d)** $\cot(-\frac{3}{4}\pi)$

12. **(a)** $\csc(-\frac{1}{3}\pi)$ **(b)** $\sec \frac{5}{6}\pi$
(c) $\tan \frac{3}{4}\pi$ **(d)** $\cot \frac{3}{2}\pi$

En los ejercicios 13 a 20, utilice la periodicidad de las funciones seno, coseno, secante y cosecante así como los valores de sen t, cos t, sec t *y* csc t, *cuando* $0 \leq t < 2\pi$, *para calcular el valor de función exacto.*

13. **(a)** $\operatorname{sen} \frac{9}{4}\pi$ **(b)** $\cos \frac{9}{4}\pi$
(c) $\sec \frac{9}{4}\pi$ **(d)** $\csc \frac{9}{4}\pi$

14. **(a)** $\operatorname{sen} \frac{17}{6}\pi$ **(b)** $\cos \frac{17}{6}\pi$
(c) $\sec \frac{17}{6}\pi$ **(d)** $\csc \frac{17}{6}\pi$

15. **(a)** $\operatorname{sen}(-\frac{2}{3}\pi)$ **(b)** $\cos(-\frac{2}{3}\pi)$
(c) $\sec(-\frac{2}{3}\pi)$ **(d)** $\csc(-\frac{2}{3}\pi)$

16. **(a)** $\operatorname{sen}(-\frac{5}{4}\pi)$ **(b)** $\cos(-\frac{5}{4}\pi)$
(c) $\sec(-\frac{5}{4}\pi)$ **(d)** $\csc(-\frac{5}{4}\pi)$

17. **(a)** $\operatorname{sen} 8\pi$ **(b)** $\cos 10\pi$
(c) $\sec 7\pi$ **(d)** $\csc 9\pi$

18. **(a)** $\operatorname{sen} \frac{7}{12}\pi$ **(b)** $\cos \frac{5}{2}\pi$
(c) $\sec \frac{11}{2}\pi$ **(d)** $\csc \frac{9}{2}\pi$

19. **(a)** $\operatorname{sen}(-\frac{7}{2}\pi)$ **(b)** $\cos(-\frac{5}{2}\pi)$
(c) $\sec(-\frac{11}{2}\pi)$ **(d)** $\csc(-\frac{9}{2}\pi)$

20. **(a)** $\operatorname{sen}(-8\pi)$ **(b)** $\cos(-10\pi)$
(c) $\sec(-7\pi)$ **(d)** $\csc(-9\pi)$

En los ejercicios 21 a 24, utilice la periodicidad de las funciones tangente y cotangente así como los valores de tan t *y* cot t, *cuando* $0 \leq t < \pi$, *para calcular el valor de función exacto.*

21. **(a)** $\tan \frac{7}{4}\pi$ **(b)** $\cot \frac{7}{4}\pi$
(c) $\tan(-\frac{5}{6}\pi)$ **(d)** $\cot(-\frac{5}{6}\pi)$

22. **(a)** $\tan \frac{4}{3}\pi$ **(b)** $\cot \frac{4}{3}\pi$
(c) $\tan(-\frac{1}{6}\pi)$ **(d)** $\cot(-\frac{1}{6}\pi)$

23. **(a)** $\tan \frac{11}{3}\pi$ **(b)** $\cot \frac{11}{3}\pi$
(c) $\tan(-5\pi)$ **(d)** $\cot(-\frac{9}{2}\pi)$

24. **(a)** $\tan(-\frac{11}{4}\pi)$ **(b)** $\cot(-\frac{11}{4}\pi)$
(c) $\tan 11\pi$ **(d)** $\cot \frac{15}{2}\pi$

En los ejercicios 25 a 30, obtenga todos los valores de t en el intervalo $[0, 2\pi]$ *que satisfagan la ecuación.*

25. **(a)** $\operatorname{sen} t = 1$ **(b)** $\cos t = -1$
(c) $\tan t = 1$ **(d)** $\sec t = 1$

26. **(a)** $\operatorname{sen} t = -1$ **(b)** $\cos t = 1$
(c) $\tan t = -1$ **(d)** $\csc t = 1$

27. **(a)** $\operatorname{sen} t = 0$ **(b)** $\cos t = 0$
(c) $\tan t = 0$ **(d)** $\cot t = 0$

28. **(a)** $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$ **(b)** $\cos t = -\frac{1}{2}$
(c) $\cot t = 1$ **(d)** $\sec t = 2$

29. **(a)** $\operatorname{sen} t = -\frac{1}{2}$ **(b)** $\cos t = \frac{1}{2}$
(c) $\cot t = -1$ **(d)** $\csc t = 2$

30. **(a)** $\operatorname{sen} t = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ **(b)** $\cos t = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
(c) $\tan t = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ **(d)** $\cot t = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

31. ¿Para qué valores de t en $[0, 2\pi)$, **(a)** tan t no está definido, **(b)** csc t no está definido?

32. ¿Para qué valores de t en $[0, \pi)$, **(a)** cot t no está definido, **(b)** sec t no está definido?

33. ¿Para qué valores de t en $[\pi, 2\pi)$, **(a)** cot t no está definido, **(b)** sec t no está definido?

34. Demuestre que la elipse cuya ecuación es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = a\cos t + h \quad \text{y} \quad y = b \operatorname{sen} t + k$$

En los ejercicios 35 a 42, escriba las ecuaciones paramétricas que definen la elipse del ejercicio indicado de la sección A.7, y utilícelas para trazar la elipse.

35. Ejercicio 1 **36.** Ejercicio 2
37. Ejercicio 3 **38.** Ejercicio 4
39. Ejercicio 9 **40.** Ejercicio 10
41. Ejercicio 11 **42.** Ejercicio 14

43. Demuestre que la hipérbola cuya ecuación es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = a\sec t + h \quad \text{y} \quad y = b\tan t + k$$

44. Demuestre que la hipérbola cuya ecuación es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = b\tan t + h \quad \text{y} \quad y = a\sec t + k$$

En los ejercicios 45 a 52, escriba las ecuaciones paramétricas que definen la hipérbola del ejercicio indicado de la sección A.8, y utilícelas para trazar la hipérbola.

45. Ejercicio 1 **46.** Ejercicio 2
47. Ejercicio 3 **48.** Ejercicio 4
49. Ejercicio 13 **50.** Ejercicio 14
51. Ejercicio 17 **52.** Ejercicio 18

A.10 ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO EN DOS VARIABLES Y ROTACIÓN DE EJES



Parábola

FIGURA 1

En las secciones A.7 y A.8 se dijo que la gráfica de la ecuación general de segundo grado en dos variables,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \textbf{(1)}$$

es una elipse o un caso degenerado si $B = 0$ y $AC > 0$, y es una hipérbola o un caso degenerado si $B = 0$ y $AC < 0$.

Ahora se considerará (1) donde $B = 0$ y $AC = 0$. En tal caso $A = 0$ o $C = 0$, pero no ambas, ya que si los tres números A, B y C son cero, entonces (1) no sería una ecuación de segundo grado. Suponga que en (1) $B = 0, A = 0$ y $C \neq 0$. Por tanto, (1) se transforma en

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \textbf{(2)}$$

Si $D \neq 0$, en la sección A.6 se indicó que la gráfica de esta ecuación es una parábola, la tercera sección cónica. La parábola se obtiene como una sección cónica si el plano cortante es paralelo a una y sólo una generatriz del cono. Consulte la figura 1.

En la sección A.4 del apéndice, se definió la parábola como un conjunto de puntos de un plano. La demostración de que esta definición se deduce de su definición como sección cónica es semejante a la efectuada para la elipse. Sin embargo, para la parábola se necesita sólo una esfera tangente al plano cortante en el foco y tangente al cono a lo largo de una circunferencia. La intersección del plano de la circunferencia y del plano cortante es la directriz de la parábola.

Los casos degenerados de la parábola, que ocurren si $D = 0$ en (2), son dos rectas paralelas, una recta o el conjunto vacío.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** La gráfica de la ecuación

$$4y^2 - 9 = 0$$

consiste de dos rectas paralelas: $2y - 3 = 0$ y $2y + 3 = 0$. La gráfica de

$$9y^2 + 6y + 1 = 0$$

es una recta debido a que la ecuación es equivalente a $(3y + 1)^2 = 0$. Como

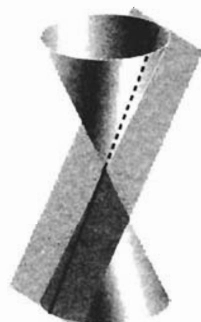
$$2y^2 + y + 1 = 0$$

no tiene soluciones reales, entonces su gráfica es el conjunto vacío. ◀

Una discusión similar a la anterior se puede realizar si, en (1), $B = 0$, $C = 0$ y $A \neq 0$. Estos resultados se resumen en el teorema siguiente.

A.10.1 Teorema

En la ecuación general de segundo grado (1), si $B = 0$ y si $A = 0$ y $C \neq 0$, o $C = 0$ y $A \neq 0$, entonces su gráfica es una de las siguientes: una parábola, dos rectas paralelas, una recta o el conjunto vacío.



Línea recta

FIGURA 2

El caso degenerado de una parábola, una recta, se obtiene como una sección cónica si el plano cortante contiene al vértice del cono y a sólo una generatriz, como se ilustra en la figura 2. La parábola degenerada que consiste de dos rectas paralelas no puede obtenerse como una sección plana

de un cono a menos que se considere un cilindro circular recto como un cono degenerado con su vértice en el infinito. Entonces, un plano paralelo a las generatrices del cilindro que contenga dos de éstas produce las dos rectas paralelas.

A partir de los teoremas de las secciones A.7 y A.8 del apéndice y del teorema anterior de esta sección, se puede concluir que la gráfica de la ecuación general de segundo grado en dos variables, cuando $B = 0$, es una cónica o una cónica degenerada. El tipo de cónica puede determinarse a partir del producto de A y C. De este modo se tiene el teorema siguiente.

A.10.2 Teorema

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A y C no son ambos cero, es una cónica o una cónica degenerada. Si es una cónica, entonces la gráfica es

(i) una *parábola* si $A = 0$ o $C = 0$, esto es, $AC = 0$;
(ii) una *elipse* si A y C tienen el mismo signo, es decir, $AC > 0$;
(iii) una *hipérbola* si A y C tienen signos opuestos, esto es, $AC < 0$.

EJEMPLO 1 Identifique la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones, así como el tipo de cónica o cónica degenerada.

(a) $9x^2 + y^2 - 18x + 4y + 4 = 0$ **(b)** $x^2 + 4y^2 = 0$
(c) $2x^2 + 12x - 5y + 28 = 0$ **(d)** $x^2 - 4 = 0$
(e) $3x^2 - 2y^2 + 12x - 4y - 2 = 0$ **(f)** $x^2 - 4y^2 = 0$

Solución En cada inciso, se tiene una ecuación de segundo grado en dos variables. Por tanto, la gráfica es una cónica o una cónica degenerada. Del teorema A.10.2, el producto AC determina la cónica.

(a) Como $A = 9$ y $C = 1$, $AC = 9 > 0$. En consecuencia, la gráfica es elipse o una elipse degenerada. Al completar los cuadrados, la ecuación puede escribirse como

$$(x - 1)^2 + \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$$

de modo que la gráfica es una elipse.

(b) Como el único par ordenado que satisface la ecuación es (0, 0), la gráfica es el origen, una elipse degenerada.

(c) Puesto que $C = 0$, $AC = 0$. Por lo que la gráfica es una parábola o una parábola degenerada. Si se completan los cuadrados, se puede escribir la ecuación como

$$(x + 3)^2 = \tfrac{5}{2}(y - 2)$$

la cual es la ecuación de una parábola.

(d) Debido a que la ecuación $x^2 - 4 = 0$ equivale a la ecuación $(x - 2)(x + 2) = 0$, su gráfica consiste de las dos rectas paralelas $x = 2$ y $x = -2$, una parábola degenerada.

(e) Como $A = 3$ y $C = -2$, $AC = -6 < 0$. Por tanto, la gráfica es una hipérbola, o una hipérbola degenerada. La ecuación es equivalente a

$$\frac{(x + 2)^2}{4} - \frac{(y + 1)^2}{6} = 1$$

cuya gráfica es una hipérbola.

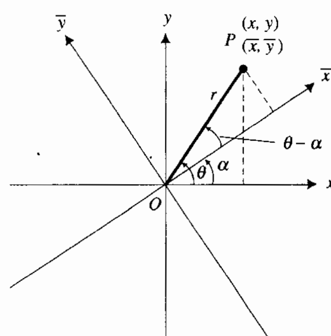


FIGURA 3

(f) La ecuación es equivalente a $(x - 2y)(x + 2y) = 0$; de modo que su gráfica consiste de las dos rectas que se intersectan $x = 2y$ y $x = -2y$, una hipérbola degenerada. ◀

Ahora se estudiará la gráfica de la ecuación de segundo grado en dos variables cuando $B \neq 0$, esto es, una ecuación que tiene un término en xy. Esta ecuación se transforma en otra que no contiene término en xy al rotar los ejes coordenados. Mientras que una traslación de ejes proporciona un nuevo sistema de coordenadas cuyos ejes son paralelos a lo ejes x y y originales, una rotación de ejes origina un sistema coordenado que, en general, sus ejes *no* son paralelos a los del sistema original.

Suponga que se tienen dos sistemas coordenados cartesianos rectangu-lares con el mismo origen. Sea uno de los sistemas el sistema xy y el otro el sistema $\bar{x}\bar{y}$. Además suponga que el eje $\bar{x}$ forma un ángulo α con el eje x. Vea la figura 3. Por supuesto, el eje $\bar{y}$ también formará un ángulo α con el eje y. En tal caso se dice que el sistema de coordenadas xy se ha *rotado* un ángulo α para formar el sistema de coordenadas $\bar{x}\bar{y}$. Un punto P que tiene coordenadas (x, y) con respecto al sistema coordenado original tendrá coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ con respecto al nuevo sistema. A continuación se obtendrán las relaciones entre estos dos conjuntos de coordenadas.

En la figura 3, r denota la distancia no dirigida $|\overline{OP}|$ y θ el ángulo medido a partir del eje x hasta el segmento de recta OP. De la figura se observa que

$$x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\,\text{sen}\,\theta \tag{3}$$

También de la figura se tiene

$$\bar{x} = r\cos(\theta - \alpha) \quad \text{y} \quad \bar{y} = r\,\text{sen}(\theta - \alpha)$$

Al emplear las identidades de coseno y seno de la diferencia estas dos ecuaciones se transforman en

$$\bar{x} = r\cos\theta\cos\alpha + r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\alpha$$

y

$$\bar{y} = r\,\text{sen}\,\theta\cos\alpha - r\cos\theta\,\text{sen}\,\alpha$$

Si se sustituye de la ecuación (3) en las ecuaciones anteriores, resulta

$$\bar{x} = x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha \quad \text{y} \quad \bar{y} = -x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha \tag{4}$$

Al resolver las ecuaciones (4) simultáneamente para x y y en términos de $\bar{x}$ y $\bar{y}$ (refiérase al ejercicio 38), se obtiene

$$x = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\,\text{sen}\,\alpha \quad \text{y} \quad y = \bar{x}\,\text{sen}\,\alpha + \bar{y}\cos\alpha \tag{5}$$

Este resultado se establece de manera formal en el teorema siguiente.

A.10.3 Teorema Fórmulas para la rotación de ejes

Si (x, y) representa un punto P con respecto a un conjunto de ejes dado y $(\bar{x}, \bar{y})$ es una representación de P después de que los ejes se han rotado un ángulo α, entonces

(i) $x = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\,\text{sen}\,\alpha$ y $y = \bar{x}\,\text{sen}\,\alpha + \bar{y}\cos\alpha$

(ii) $\bar{x} = x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha$ y $\bar{y} = -x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha$

EJEMPLO 2 Dada la ecuación

$$xy = 1$$

(a) Obtenga una ecuación de la gráfica con respecto a los ejes x y y después de que estos se han rotado un ángulo de $\frac{1}{4}\pi$ rad. **(b)** Dibuje la gráfica y muestre los dos sistemas de ejes.

Solución

(a) Con $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ en (i) del teorema A.10.3, se obtiene

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y} \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}$$

Al sustituir estas expresiones para x y y en la ecuación $xy = 1$, resulta

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right) = 1$$

$$\frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{\bar{y}^2}{2} = 1$$

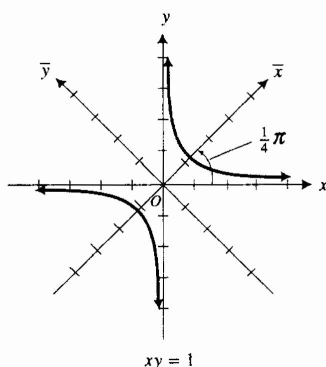


FIGURA 4

(b) Esta es una ecuación de una hipérbola equilátera cuyas asíntotas son las bisectrices de los cuadrantes del sistema $\bar{x}\bar{y}$. Así, la gráfica de la ecuación $xy = 1$ es una hipérbola equilátera que se encuentra en los cuadrantes primero y tercero, y sus asíntotas son los ejes x y y. Refiérase a la figura 4, la cual muestra la gráfica requerida. ◀

Del teorema A.10.1 se sabe que cuando $B = 0$ y A y C no son ambas cero, la gráfica de (1), la ecuación general de segundo grado en dos variables, es una cónica o una cónica degenerada. Ahora se demostrará que si $B \neq 0$, entonces cualquier ecuación de la forma (1) puede transformarse, mediante una adecuada rotación de ejes, en una ecuación de la forma

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0 \tag{6}$$

donde $\bar{A}$ y $\bar{C}$ no son simultáneamente cero.

Si se rota el sistema xy un ángulo α, entonces para obtener una ecuación de la gráfica de (1) con respecto al sistema $\bar{x}\bar{y}$, se sustituye x por $\bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\operatorname{sen}\alpha$ y y por $\bar{x}\operatorname{sen}\alpha + \bar{y}\cos\alpha$. De esto resulta

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{B}\bar{x}\bar{y} + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0 \tag{7}$$

donde

$$\bar{A} = A\cos^2\alpha + B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + C\operatorname{sen}^2\alpha$$
$$\bar{B} = -2A\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) + 2C\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$
$$\bar{C} = A\operatorname{sen}^2\alpha - B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha$$

Se desea obtener un ángulo α de modo que la rotación trasforme (1) en una ecuación de la forma (6). Si se considera la expresión para $\bar{B}$ igual a cero se tiene

$$B(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) + (C - A)(2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) = 0$$

o, equivalentemente, mediante identidades trigonométricas,

$$B\cos 2\alpha + (C - A)\operatorname{sen}2\alpha = 0$$

Como $B \neq 0$, entonces se obtiene

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B}$$

Así, se ha demostrado que una rotación de ejes mediante un ángulo α que satisfaga esta ecuación, transformará (1), la ecuación general de segundo grado en dos variables, donde $B \neq 0$, en una ecuación de la forma (6). Ahora debe demostrarse que $\overline{A}$ y $\overline{C}$ en (6) no son ambas cero. Para demostrar esto, observe que (7) se obtiene a partir de (1) al rotar los ejes un ángulo α. También (1) puede obtenerse de (7) al rotar los ejes un ángulo $-\alpha$; es decir, en sentido contrario. Si $\overline{A}$ y $\overline{C}$ en (7) fuesen simultáneamente cero, entonces las sustituciones

$$\overline{x} = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha \quad \text{y} \quad \overline{y} = -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha$$

en esa ecuación daría como resultado la ecuación

$$\overline{D}(x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha) + \overline{E}(-x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha) + \overline{F} = 0$$

Esta ecuación es de primer grado; y en consecuencia, diferente de (1) debido a que se supuso que al menos $B \neq 0$. Por tanto, se ha demostrado el teorema siguiente.

A.10.4 Teorema

Si $B \neq 0$, entonces la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

puede transformarse en la ecuación

$$\overline{A}\overline{x}^2 + \overline{C}\overline{y}^2 + \overline{D}\overline{x} + \overline{E}\overline{y} + \overline{F} = 0$$

donde $\overline{A}$ y $\overline{C}$ no son ambas cero, al rotar los ejes un ángulo α para el cual

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B}$$

De los teoremas A.10.2 y A.10.4, se infiere que la gráfica de la ecuación general de segundo grado en dos variables es una cónica o una cónica degenerada. Para determinar qué tipo de cónica es la gráfica de una ecuación particular, se examina la expresión $B^2 - 4AC$. Se utiliza el hecho de que A, B y C de (1), y $\overline{A}$, $\overline{B}$ y $\overline{C}$ de (7) satisfacen la ecuación

$$B^2 - 4AC = \overline{B}^2 - 4\overline{A}\,\overline{C} \qquad \textbf{(8)}$$

lo cual puede demostrarse al sustituir las expresiones para $\overline{A}$, $\overline{B}$ y $\overline{C}$, dadas después de la ecuación (7), en el miembro derecho de (8). Se le pedirá que haga esto en el ejercicio 37.

La expresión $B^2 - 4AC$ se denomina **discriminante** y la ecuación (8) establece que el discriminante de la ecuación cuadrática general en dos variables es **invariante** bajo la rotación de ejes.

Si el ángulo de rotación se elije de modo que $\overline{B} = 0$, entonces (8) se transforma en

$$B^2 - 4AC = -4\overline{A}\,\overline{C} \qquad \textbf{(9)}$$

Excepto para casos degenerados, al aplicar el teorema A.10.2, la gráfica de la ecuación

$$\overline{A}\overline{x}^2 + \overline{C}\overline{y}^2 + \overline{D}\overline{x} + \overline{E}\overline{y} + \overline{F} = 0$$

es una parábola si $\overline{A}\,\overline{C} = 0$, una elipse si $\overline{A}\,\overline{C} > 0$ y una hipérbola si $\overline{A}\,\overline{C} < 0$; o, equivalentemente, una parábola si $-4\overline{A}\,\overline{C} = 0$, una elipse si $-4\overline{A}\,\overline{C} < 0$ y una hipérbola si $-4\overline{A}\,\overline{C} > 0$. A partir de estos hechos y de la ecuación (9) se deduce que, excepto para casos degenerados, la gráfica de (1), la ecuación general de segundo grado en dos variables, es una parábola, una elipse o una hipérbola, dependiendo de si el discriminante $B^2 - 4AC$ es cero, negativo o positivo, respectivamente. De este modo se ha demostrado el teorema siguiente.

A.10.5 Teorema

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una cónica o una cónica degenerada. Si la gráfica es una cónica, entonces es

(i) una *parábola* si $B^2 - 4AC = 0$;
(ii) una *elipse* si $B^2 - 4AC < 0$;
(iii) una *hipérbola* si $B^2 - 4AC > 0$.

EJEMPLO 3 (a) Identifique la gráfica de la ecuación

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 - 80 = 0$$

(b) Simplifique la ecuación mediante una rotación de ejes. (c) Dibuje la gráfica de la ecuación y muestre los dos sistemas de ejes.

Solución

(a) De la ecuación, $A = 17$, $B = -12$ y $C = 8$. Por tanto,

$$B^2 - 4AC = (-12)^2 - 4(17)(8)$$

Como $B^2 - 4AC < 0$, del teorema A.10.5, la gráfica es una elipse o una elipse degenerada.

(b) Con el fin de eliminar el término en xy, se debe elegir un ángulo α tal que

$$\begin{aligned}\cot 2\alpha &= \frac{A - C}{B}\\ &= \frac{17 - 8}{-12}\\ &= -\tfrac{3}{4}\end{aligned}$$

Existe un ángulo de medida 2α en el intervalo $(0, \pi)$ para el cual $\cot 2\alpha = -\frac{3}{4}$. Por tanto, α está en el intervalo $(0, \frac{1}{2}\pi)$. Para aplicar las fórmulas de rotación de ejes, no es necesario determinar α una vez que se obtienen $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$. Estas funciones pueden determinarse à partir del valor de $\cot 2\alpha$ por medio de las identidades trigonométricas

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

Como $\cot 2\alpha = -\frac{3}{4}$ y $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, se infiere que $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$. De modo que,

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Al sustituir $x = \bar{x}/\sqrt{5} - 2\bar{y}/\sqrt{5}$ y $y = 2\bar{x}/\sqrt{5} + \bar{y}/\sqrt{5}$ en la ecuación dad, se obtiene

$$17\left(\frac{\bar{x}^2 - 4\bar{x}\bar{y} + 4\bar{y}^2}{5}\right) - 12\left(\frac{2\bar{x}^2 - 3\bar{x}\bar{y} + 2\bar{y}^2}{5}\right) + 8\left(\frac{4\bar{x}^2 + 4\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2}{5}\right) - 80 = 0$$

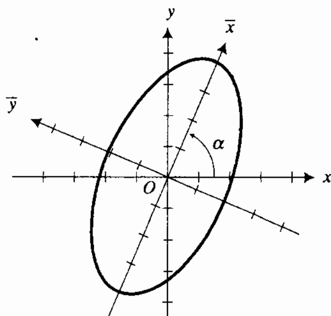
Si se simplifica esta ecuación se obtiene

$$\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 = 16$$

$$\frac{\bar{x}^2}{16} + \frac{\bar{y}^2}{4} = 1$$

Por tanto, la gráfica es una elipse cuyo eje mayor mide 8 unidades y su eje menor mide 4 unidades.

(c) A fin de dibujar la elipse se aplica la información obtenida en el inciso (b). La figura 5 muestra esta elipse y los dos sistemas de ejes. ◀



$17x^2 - 12xy + 8y^2 - 80 = 0$

FIGURA 5

Como se puede ver en el ejemplo anterior, dibujar la gráfica de una ecuación de segundo grado, que posee un término en xy, mediante una rotación de ejes requiere frecuentemente cálculos tediosos. Trazar la gráfica de una de estas ecuaciones en la graficadora también puede implicar cálculos complicados cuando primero se expresa y como dos funciones de x, como se muestra en el ejemplo siguiente.

▶ ***EJEMPLO 4*** Trace la gráfica de la ecuación del ejemplo 3.

Solución La ecuación define a y como dos funciones de x. Para determinar estas funciones se considera la ecuación como cuadrática en y y se escribe como

$$8y^2 - 12xy + (17x^2 - 80) = 0$$

De la fórmula cuadrática con $a = 8$, $b = -12x$ y $c = 17x^2 - 80$, se tiene

$$\begin{aligned} y &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-12x) \pm \sqrt{(-12x)^2 - 4(8)(17x^2 - 80)}}{2(8)} \\ &= \frac{12x \pm 4\sqrt{160 - 25x^2}}{16} \\ &= \frac{3x \pm \sqrt{160 - 25x^2}}{4} \end{aligned}$$

En el rectángulo de inspección de [−7.5, 7.5] por [−5, 5] se trazan las gráficas de

$$y_1 = \frac{3x + \sqrt{160 - 25x^2}}{4} \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{3x - \sqrt{160 - 25x^2}}{4}$$

con el propósito de obtener la elipse de la figura 5. ◀

EJERCICIOS A.10

En los ejercicios 1 a 4, identifique la gráfica de la ecuación así como el tipo de cónica o cónica degenerada.

1. (a) $x^2 - 4y^2 - 6x - 24y - 31 = 0$
   (b) $4x^2 + y^2 + 8x - 14y - 47 = 0$
   (c) $y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$
   (d) $x^2 - 16y^2 = 0$
2. (a) $2x^2 + y^2 + 8x - 2y - 9 = 0$
   (b) $2x^2 - 3y^2 + 16x + 12y + 38 = 0$

(c) $16y^2 + 24y + 9 = 0$
(d) $4x^2 + 16x - 3y + 19 = 0$

3. (a) $3x^2 + 5y^2 + 6x - 20y + 23 = 0$
(b) $4x^2 - 5y^2 + 16x + 10y + 111 = 0$
(c) $2x^2 - 16x - 5y + 22 = 0$
(d) $9x^2 + 30x + 29 = 0$

4. (a) $5y^2 + 4x + 10y - 3 = 0$
(b) $3x^2 + 7y^2 - 6x + 28y + 37 = 0$
(c) $2x^2 - 3y^2 - 12x - 6y + 15 = 0$
(d) $4x^2 - 9y^2 - 40x - 54y + 55 = 0$

En los ejercicios 5 a 8, (a) identifique la gráfica de la ecuación, (b) obtenga una ecuación de la gráfica con respecto a los ejes x y y después de rotarlos un ángulo de $\frac{1}{4}\pi$ rad, y (c) dibuje la gráfica y muestre los dos conjuntos de ejes.

5. $xy = 8$
6. $xy = -4$
7. $x^2 - y^2 = 8$
8. $y^2 - x^2 = 16$

En los ejercicios 9 a 16, (a) identifique la gráfica de la ecuación, (b) elimine el término en xy mediante una rotación de ejes, y (c) dibuje la gráfica y muestre los dos conjuntos de ejes.

9. $24xy - 7y^2 + 36 = 0$
10. $4xy + 3x^2 = 4$
11. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y = 0$
12. $x^2 + xy + y^2 = 3$
13. $xy + 16 = 0$
14. $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 9$
15. $31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 = 144$
16. $6x^2 + 20\sqrt{3}xy + 26y^2 = 324$

En los ejercicios 17 a 26, (a) identifique la gráfica de la ecuación, (b) simplifique la ecuación mediante una rotación y una traslación de ejes, y (c) dibuje la gráfica y muestre los dos conjuntos de ejes.

17. $x^2 + xy + y^2 - 3y - 6 = 0$
18. $19x^2 + 6xy + 11y^2 - 26x + 38y + 31 = 0$
19. $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 68x + 24y - 12 = 0$
20. $x^2 - 10xy + y^2 + x + y + 1 = 0$
21. $x^2 + 2xy + y^2 + x - y - 4 = 0$
22. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y + 400 = 0$
23. $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 30x + 40y - 45 = 0$
24. $3x^2 - 4xy + 8x - 1 = 0$
25. $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x + 12 = 0$
26. $x^2 + 2xy + y^2 - x - 3y = 0$

En los ejercicios 27 a 34, trace la gráfica de la ecuación del ejercicio indicado.

27. Ejercicio 9
28. Ejercicio 10
29. Ejercicio 11
30. Ejercicio 12
31. Ejercicio 17
32. Ejercicio 18
33. Ejercicio 21
34. Ejercicio 22

35. Demuestre que la gráfica de $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ es parte de una parábola al rotar los ejes un ángulo de $\frac{1}{4}\pi$ rad. *Sugerencia:* elimine los radicales de la ecuación antes de aplicar las fórmulas para rotación de ejes.

36. Dada la ecuación $(a^2 + b^2)xy = 1$, donde $a > 0$ y $b > 0$, obtenga una ecuación de la gráfica con respecto a los ejes $\bar{x}$ y $\bar{y}$ después de rotar los ejes un ángulo de $\tan^{-1}(b/a)$ rad.

37. Demuestre que para la ecuación general de segundo grado en dos variables, el discriminante $B^2 - 4AC$ es invariante bajo una rotación de ejes.

38. Obtenga las ecuaciones (5) al resolver las ecuaciones (4) para x y y en términos de $\bar{x}$ y $\bar{y}$. *Sugerencia:* para despejar x, multiplique los dos miembros de la primera ecuación por cos α y los dos miembros de la segunda ecuación por sen α, después reste los miembros correspondientes de las ecuaciones resultantes. Utilice un procedimiento similar para despejar y.

39. La rotación de ejes no hace ningún cambio en la gráfica ni en la posición de la gráfica en el plano. Explique cuándo la rotación de ejes es una ventaja para dibujar la gráfica de una ecuación de segundo grado en dos variables y cuándo es una desventaja.

A.11 FRACCIONES PARCIALES

Usted ya sabe cómo combinar dos o más expresiones racionales a fin de obtener una expresión racional mediante adición o sustracción. Por ejemplo,

$$\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-3} = \frac{7x-1}{(x+2)(x-3)}$$

En ocasiones es necesario invertir el proceso, es decir, representar una expresión racional simple como una suma de dos o más cocientes simples, denominados **fracciones racionales.** En Cálculo se necesita hacer esto a

fin de efectuar la operación de integración de algunas funciones racionales. Con frecuencia se emplean sistemas de ecuaciones para descomponer uña expresión racional en fracciones parciales.

Considere una función racional H definida por

$$H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Se asumirá que se tiene una **fracción propia,** esto es, una fracción para la cual el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Si se tiene una función racional para la cual el grado del numerador no es menor que el grado del denominador entonces se tiene una **fracción impropia,** y en este caso se divide el numerador entre el denominador hasta que se obtenga una fracción propia. Por ejemplo,

$$\frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4} = x^2 - 6 + \frac{3x - 23}{x^2 - 4}$$

En general, se tratará un método para descomponer una fracción propia de la forma $P(x)/Q(x)$ en dos o más fracciones parciales. Los denominadores de las fracciones parciales se obtienen al factorizar $Q(x)$ en un producto de factores lineales y cuadráticos. En ocasiones puede ser difícil encontrar estos factores. Sin embargo, un teorema de álgebra establece que un polinomio con coeficientes reales puede expresarse como un producto de polinomios lineales o cuadráticos con coeficientes reales.

Después de que $Q(x)$ se ha factorizado como un producto de factores lineales o cuadráticos, el método para determinar las fracciones parciales depende de la naturaleza de estos factores. Se considerarán varios casos en forma separada.

Caso 1: Todos los factores de $Q(x)$ son lineales, y ninguno se repite. Esto es,

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdot \ldots \cdot (a_nx + b_n)$$

donde ningún par de factores es idéntico. En este caso se escribe

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \ldots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son constantes a determinar. Observe que esta ecuación es una identidad debido a que es verdadera para todos los valores de x tales que ningún denominador es cero. El ejemplo ilustrativo siguiente muestra un método para determinar los valores de A_i.

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** A fin de descomponer la fracción

$$\frac{7x - 1}{x^2 - x - 6}$$

en fracciones parciales, se factoriza el denominador y se obtiene

$$\frac{7x - 1}{x^2 - x - 6} = \frac{7x - 1}{(x + 2)(x - 3)}$$

Por tanto, se tiene

$$\frac{7x - 1}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 3} \qquad \textbf{(1)}$$

La ecuación (1) es una identidad para todos los valores de x diferentes de -2 y 3. Al multiplicar los dos miembros de la ecuación por el MČDn (mínimo común denominador), resulta

$$7x - 1 = A(x - 3) + B(x + 2)$$

Esta ecuación también es una identidad y es verdadera para todos los valores de x incluyendo a -2 y 3. Ahora se determinarán las constantes A y B. Al sustituir 3 por x en la ecuación anterior, se tiene

$$20 = 5B \quad \Leftrightarrow \quad B = 4$$

Si se sustituye -2 por x en la misma ecuación, se obtiene

$$-15 = -5A \quad \Leftrightarrow \quad A = 3$$

Con estos valores de A y B, se tiene de (1)

$$\frac{7x - 1}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{3}{x + 2} + \frac{4}{x - 3}$$

Observe que esta ecuación es equivalente a la ecuación con que se inició esta sección. ◀

▶ ***EJEMPLO 1*** Descomponga la fracción

$$\frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x}$$

en fracciones parciales.

Solución Al factorizar el denominador se obtiene

$$\frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{x - 1}{x(x - 2)(x + 1)}$$

De modo que

$$\frac{x - 1}{x(x - 2)(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 1} \qquad (2)$$

La ecuación (2) es una identidad para todos los valores de x diferentes de 0, 2 y -1. Si se multiplican los miembros de la ecuación por el MCDn, resulta

$$x - 1 = A(x - 2)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 2)$$

Esta ecuación es una identidad que es verdadera para todos los valores de x, incluso para 0, 2 y -1. A fin de determinar las constantes, primero se sustituye 0 por x y se obtiene

$$-1 = -2A \quad \Leftrightarrow \quad A = \tfrac{1}{2}$$

Al reemplazar 2 por x, resulta

$$1 = 6B \quad \Leftrightarrow \quad B = \tfrac{1}{6}$$

Si se sustituye -1 por x, se tiene

$$-2 = 3C \quad \Leftrightarrow \quad C = -\tfrac{2}{3}$$

Con estos valores para A, B y C, de (2) se obtiene

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{6}}{x-2} + \frac{-\frac{2}{3}}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{6(x-2)} - \frac{2}{3(x+1)}$$ ◀

Caso 2: Todos los factores de $Q(x)$ son lineales y algunos se repiten.

Suponga que se tiene $(ax + b)^p$ como un factor de $Q(x)$. Entonces se dice que $ax + b$ es un factor **p-múltiple** (o **de multiplicidad p**) de $Q(x)$, y a este factor le corresponderá la suma de p fracciones parciales

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{(ax+b)^{p-1}} + \frac{A_p}{(ax+b)^p}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_p$ son constantes a determinar. El ejemplo 2 ilustra este caso y el método para determinar cada A_i.

▶ **EJEMPLO 2** Descomponga la fracción

$$\frac{x^4 + x^2 + 16x - 12}{x^3(x-2)^2}$$

en fracciones parciales.

Solución Se escribe la fracción dada como la suma de fracciones parciales siguiente:

$$\frac{x^4 + x^2 + 16x - 12}{x^3(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2} \quad \textbf{(3)}$$

Al multiplicar ambos miembros de (3) por el MCDn, resulta

$$x^4 + x^2 + 16x - 12 = Ax^2(x-2)^2 + Bx(x-2)^2 + C(x-2)^2 + Dx^3(x-2) + Ex^3 \quad \textbf{(4)}$$

Se sustituye 0 por x en esta ecuación y se obtiene

$$-12 = 4C \quad \Leftrightarrow \quad C = -3$$

Si se reemplaza 2 por x en (4) resulta

$$40 = 8E \quad \Leftrightarrow \quad E = 5$$

Con estos valores de C y E en (4) y desarrollando las potencias de los binomios, se tiene

$$x^4 + x^2 + 16x - 12 = Ax^2(x^2 - 4x + 4) + Bx(x^2 - 4x + 4) - 3(x^2 - 4x + 4) + Dx^3(x-2) + 5x^3$$

$$x^4 + x^2 + 16x - 12 = (A + D)x^4 + (-4A + B - 2D + 5)x^3 + (4A - 4B - 3)x^2 + (4B + 12)x - 12$$

Como esta ecuación es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. Por tanto, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + D = 1 \\ -4A + B - 2D + 5 = 0 \\ 4A - 4B - 3 = 1 \\ 4B + 12 = 16 \end{cases}$$

De la cuarta ecuación, $B = 1$. Al sustituir B por 1 en la tercera ecuación y resolver para A, se obtiene $A = 2$. Con $A = 2$ en la primera ecuación resulta $D = -1$. La segunda ecuación se emplea para verificar los valores encontrados:

$$\begin{aligned} -4A + B - 2D + 5 &= -4(2) + 1 - 2(-1) + 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, los valores de las constantes son

$$A = 2 \qquad B = 1 \qquad C = -3 \qquad D = -1 \qquad E = 5$$

Con estos valores, de (3) se tiene

$$\frac{x^4 + x^2 + 16x - 12}{x^3(x - 2)^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x - 2} + \frac{5}{(x - 2)^2}$$ ◀

Caso 3: Todos los factores de $Q(x)$ son lineales y cuadráticos y ninguno se repite.

Al factor cuadrático $ax^2 + bx + c$ del denominador le corresponde la fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

▶ **EJEMPLO 3** Descomponga la fracción

$$\frac{x^2 - x - 5}{x^3 + x^2 - 2}$$

en fracciones parciales.

Solución Se pretende factorizar el denominador empleando división sintética para dividir $x^3 + x^2 - 2$ entre expresiones lineales de la forma $x - r$, donde r es un factor entero de -2. La división entre $x - 1$ es como sigue:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ & & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

Por tanto, $x^3 + x^2 - 2 = (x - 1)(x^2 + 2x + 2)$. La fracción dada se escribe como una suma de fracciones parciales en la forma siguiente:

$$\frac{x^2 - x - 5}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{C}{x - 1} \tag{5}$$

Al multiplicar ambos miembros por el MCDn, se tiene

$$x^2 - x - 5 = (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 2x + 2) \tag{6}$$

Se calcula C al sustituir 1 por x en (6), obteniéndose

$$-5 = 5C \iff C = -1$$

Si se reemplaza C por -1 en (6) y se multiplica en el miembro derecho, resulta

$$x^2 - x - 5 = (A - 1)x^2 + (B - A - 2)x + (-B - 2)$$

Al igualar los coeficientes de potencias de x iguales se tiene el sistema

$$\begin{cases} A - 1 = 1 \\ B - A - 2 = -1 \\ -B - 2 = -5 \end{cases}$$

Por tanto,

$$A = 2 \quad \text{y} \quad B = 3$$

Si se sustituyen estos valores de A y B en (5), se obtiene

$$\frac{x^2 - x - 5}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{x - 1}$$ ◀

Caso 4: Los factores de $Q(x)$ son lineales y cuadráticos, y algunos de los factores cuadráticos se repiten.

Si $ax^2 + bx + c$ es un factor cuadrático de multiplicidad p de $Q(x)$, entonces al factor $(ax^2 + bx + c)^p$ le corresponde la suma de las siguientes p fracciones parciales:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_px + B_p}{(ax^2 + bx + c)^p}$$



EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Si el denominador contiene el factor $(x^2 - 5x + 2)^3$, se tiene en correspondencia a este factor la suma de las fracciones parciales

$$\frac{Ax + B}{x^2 - 5x + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 - 5x + 2)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 - 5x + 2)^3}$$ ◀



EJEMPLO 4 Descomponga la fracción

$$\frac{3x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 11x + 4}{x(x^2 - 3x - 2)^2}$$

en fracciones parciales.

Solución La fracción dada se escribe como la suma de fracciones parciales siguiente:

$$\frac{3x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 11x + 4}{x(x^2 - 3x - 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 - 3x - 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 - 3x - 2)^2} + \frac{E}{x} \qquad (7)$$

Al multiplicar los dos miembros por el MCDn resulta

$$3x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 11x + 4 = x(Ax + B)(x^2 - 3x - 2) + x(Cx + D) + E(x^2 - 3x - 2)^2 \qquad (8)$$

Si se sustituye 0 por x en esta ecuación, se obtiene

$$4 = 4E \quad \Leftrightarrow \quad E = 1$$

Con $E = 1$ en (8) y multiplicando los polinomios se tiene

$$\begin{aligned} 3x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 11x + 4 \\ &= Ax^4 - 3Ax^3 - 2Ax^2 + Bx^3 - 3Bx^2 - 2Bx + Cx^2 + Dx + x^4 + 9x^2 + 4 - 6x^3 - 4x^2 + 12x \\ &= (A + 1)x^4 + (-3A + B - 6)x^3 + (-2A - 3B + C + 5)x^2 + (-2B + D + 12)x + 4 \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de las potencias de x correspondientes se obtiene el sistema

$$\begin{cases} A + 1 = 3 \\ -3A + B - 6 = -12 \\ -2A - 3B + C + 5 = 4 \\ -2B + D + 12 = 11 \end{cases}$$

Si se resuelve este sistema resulta

$$A = 2 \qquad B = 0 \qquad C = 3 \qquad D = -1 \qquad E = 1$$

Al reemplazar estos valores en (7) se tiene

$$\frac{3x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 11x + 4}{x(x^2 - 3x - 2)^2} = \frac{2x}{x^2 - 3x - 2} + \frac{3x - 1}{(x^2 - 3x - 2)^2} + \frac{1}{x} \blacktriangleleft$$

Observe que en cada uno de los ejemplos, el número de constantes a determinar es igual al grado del denominador de la fracción original que se descompone en fracciones parciales. Este hecho siempre ocurre.

EJERCICIOS A.11

En los ejercicios 1 a 10, descomponga la fracción en fracciones parciales.

1. $\dfrac{12}{x^2 - 4}$
2. $\dfrac{1}{2x^2 - x}$
3. $\dfrac{x - 1}{x^2 + x}$
4. $\dfrac{x + 15}{x^2 - 9}$
5. $\dfrac{x + 5}{x^2 - 4x + 3}$
6. $\dfrac{3x}{x^2 + x - 2}$
7. $\dfrac{x + 12}{3x^2 - 5x - 2}$
8. $\dfrac{3x - 7}{4x^2 + 3x - 1}$
9. $\dfrac{3x^2 + 3x - 12}{6x^3 + 5x^2 - 6x}$
10. $\dfrac{2x^2 - 11x - 9}{x^3 - 2x^2 - 3x}$

En los ejercicios 11 a 14, exprese la fracción impropia como la suma de un polinomio y fracciones parciales.

11. $\dfrac{2x^3 + 4}{x^2 - 4}$
12. $\dfrac{x^3 + 5}{x^2 - 1}$
13. $\dfrac{4x^3 - 8x^2 - 10x + 30}{2x^2 + x - 6}$
14. $\dfrac{6x^3 + x^2 - 5x - 7}{3x^2 - x - 2}$

En los ejercicios 15 a 38, descomponga la fracción en fracciones parciales.

15. $\dfrac{3x^2 + 13x - 10}{x^3 - 2x^2}$
16. $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^4 - x^3}$
17. $\dfrac{x^2 - 11x + 6}{(x + 2)(x^2 - 4x + 4)}$
18. $\dfrac{x^2 + 11}{(x - 5)(x^2 + 2x + 1)}$
19. $\dfrac{3x + 15}{(2x^2 - x - 1)^2}$
20. $\dfrac{9x^3 - 8x^2 - 4x + 48}{(x^2 - 4)^2}$
21. $\dfrac{x^3 + 6x - 4}{(x - 2)^3}$
22. $\dfrac{x^2 + 2}{(x - 3)^3}$
23. $\dfrac{3x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 + x}$
24. $\dfrac{3x + 8}{x^3 + 4x}$
25. $\dfrac{3x^2 + 2x - 4}{x^3 - 8}$
26. $\dfrac{x^2 - 6x + 2}{x^3 + 1}$
27. $\dfrac{2x^2 - 7x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$
28. $\dfrac{3x^2 - 9x + 8}{x^3 + x^2 + 3x + 3}$
29. $\dfrac{11x^2 + 11x + 8}{2x^3 + 8x^2 + 3x + 12}$
30. $\dfrac{3x^2 + 2x + 3}{x^4 + x^3 + x^2 + x}$
31. $\dfrac{3x^2 - 4x}{(x^2 + 1)(x^2 - x - 1)}$
32. $\dfrac{4x - 3}{x^4 + 2x^3 + 3x^2}$
33. $\dfrac{x + 6}{x^4 + 2x^3 + 3x^2}$
34. $\dfrac{3x^4 + 4}{x^4 + 4x^2 + 4}$
35. $\dfrac{x^3 - x^2}{x^4 + 2x^2 + 1}$
36. $\dfrac{x^4 + 2x^2 - 2x - 4}{(x^2 + 3)^3}$
37. $\dfrac{x^4 + x^3 - 5x^2 - 14x - 1}{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 4}$
38. $\dfrac{11x - 28}{x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x + 2}$

Suplementos

Secciones suplementarias

VISIÓN PRELIMINAR

Suplemento 1.5
Suplemento 1.7
Suplemento 1.10
Suplemento 2.8
Suplemento 4.5
Suplemento 5.1
Suplemento 8.2
Suplemento 8.5
Suplemento 8.8
Suplemento 12.3
Suplemento 12.4
Suplemento 12.8

Estas secciones, designadas mediante el número de la sección del cuerpo principal del texto, contienen discusiones teóricas y algunas de las demostraciones más difíciles.

En el suplemento 1.5 se presenta un ejemplo sobre límites de mayor sofisticación, también se dan aquí las demostraciones de los teoremas 1.5.5, 1.5.12, 1.5.13 y 1.5.16. La prueba del teorema 1.7.4 se efectúa en la sección suplementaria 1.7, mientras que en el suplemento 1.10 se demuestra el teorema de estricción.

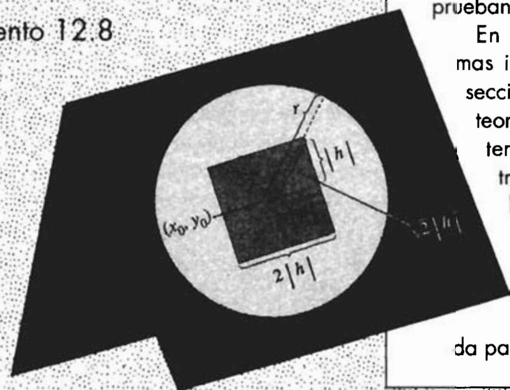
La regla de la cadena, teorema 2.8.1, se prueba en la sección sumplementaria 2.8.

En el suplemento 4.5 se demuestran dos teoremas importantes acerca de la integral indefinida: la integral de una suma de funciones y la integral de una función como la suma de dos integrales que se obtienen al dividir el intervalo de integración en dos subintervalos.

Los teoremas 5.1.5 y 5.1.7, que tratan sobre las funciones inversas y sus derivadas, respectivamente, se prueban en la sección suplementaria 5.1.

En el suplemento 8.2 se demuestran dos teoremas importantes sobre sucesiones monótonas. En la sección suplementaria 8.5 se presenta la prueba del teorema 8.5.4 acerca del residuo de una serie alternante, mientras que en el suplemento 8.8 se tratan las demostraciones de dos teoremas sobre series de potencias.

Los suplementos del capítulo 12 presentan las demostraciones de algunos teoremas acerca de las derivadas parciales, la diferenciabilidad y el criterio de la segunda derivada para funciones de dos variables.



SUPLEMENTO 1.5

 ***EJEMPLO 6*** Utilice la definición de límite para demostrar que

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

Solución Como x^2 está definida para todos los números, entonces cualquier intervalo abierto que contenga a 2 satisfará el primer requerimiento de la definición 1.5.1. Se debe demostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x^2 - 4| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x - 2||x + 2| < \epsilon \qquad \textbf{(4)}$$

Observe en la conclusión de (4) que, además del factor $|x - 2|$, se tiene el factor $|x + 2|$. De modo que, para demostrar (4) se debe imponer una restricción a δ con el fin de obtener una desigualdad que contenga al factor $|x + 2|$. Dicha restricción consiste en elegir el intervalo abierto requerido por la definición 1.5.1 de modo que este intervalo sea $(1, 3)$, lo cual implica que $\delta \leq 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
& 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{y} \quad \delta \leq 1 \\
\Rightarrow \quad & 0 < |x - 2| < 1 \\
\Rightarrow \quad & -1 < x - 2 < 1 \\
\Rightarrow \quad & 3 < x + 2 < 5 \\
\Rightarrow \quad & |x + 2| < 5
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
& 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{y} \quad \delta \leq 1 \\
\Rightarrow \quad & 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{y} \quad |x + 2| < 5 \\
\Rightarrow \quad & |x - 2||x + 2| < \delta \cdot 5
\end{aligned}$$

Recuerde que la proposición (4) es el objetivo, por lo que debe pedirse que

$$\delta \cdot 5 \leq \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \delta \leq \epsilon/5$$

De esta forma, se han impuesto dos restricciones a δ: $\delta \leq 1$ y $\delta \leq \epsilon/5$. Para que ambas restricciones se cumplan debe tomarse δ como el menor de los dos números 1 y $\epsilon/5$; esto se puede escribir con símbolos como $\delta = \text{mín}(1, \epsilon/5)$. Si se utiliza esta δ, entonces se tiene el siguiente argumento:

$$\begin{aligned}
& 0 < |x - 2| < \delta \\
\Rightarrow \quad & |x - 2| < \frac{\epsilon}{5} \quad \text{y} \quad |x + 2| < 5 \\
\Rightarrow \quad & |x - 2||x + 2| < \frac{\epsilon}{5} \cdot 5 \\
\Rightarrow \quad & |x^2 - 4| < \epsilon
\end{aligned}$$

En consecuencia, se ha demostrado que para cualquier $\epsilon > 0$ la elección de $\delta = \text{mín}(1, \epsilon/5)$ hace verdadera la siguiente proposición:

$$\text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x^2 - 4| < \epsilon$$

Esto demuestra que $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$. 

1.5.5 Teorema 4 de límites Límite de la suma y de la diferencia de dos funciones

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

Demostración Se probará el teorema con el signo más. Sean

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{5}$$

y

$$\lim_{x \to a} g(x) = M \tag{6}$$

lo que se desea demostrar es que

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

De la definición 1.5.1, para cualquier $\epsilon > 0$ se debe probar que existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |[f(x) + g(x)] - (L + M)| < \epsilon \tag{7}$$

Como el límite (5) existe, entonces de la definición de límite se infiere que para $\frac{1}{2}\epsilon > 0$ existe una $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \tfrac{1}{2}\epsilon$$

De manera semejante, de (6), para $\frac{1}{2}\epsilon > 0$ existe una $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad |g(x) - M| < \tfrac{1}{2}\epsilon.$$

Ahora considere δ como el menor de los números δ_1 y δ_2. Por tanto, $\delta \leq \delta_1$ y $\delta \leq \delta_2$. De este modo,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \tfrac{1}{2}\epsilon$$

y

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |g(x) - M| < \tfrac{1}{2}\epsilon$$

En consecuencia, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

De esta forma se ha obtenido la proposición (7), por tanto se ha demostrado que

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

■

Se deja como ejercicio la demostración del teorema 4 de límites con el signo menos (refiérase al ejercicio 9 de esta sección suplementaria).

La demostración del teorema 6 de límites (1.5.7) es más sofisticada que la de los teoremas de límites 1–5. Los pasos de la demostración se indican en los ejercicios 11 y 12 de esta sección suplementaria.

1.5.12 Teorema

Si a es cualquier número real diferente de cero, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

Demostración Se probará el teorema para $a > 0$. La demostración para $a < 0$ se deja como ejercicio (consulte el ejercicio 14 de esta sección suplementaria).

Como $1/x$ está definido para todo x diferente de cero, entonces el intervalo abierto requerido por la definición 1.5.1 puede ser cualquier intervalo que contenga a a pero que no contenga a 0. Se debe probar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \epsilon \tag{8}$$

Como

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| &= \left|\frac{a - x}{ax}\right| \\ &= \frac{|x - a|}{|a||x|} \\ &= |x - a| \cdot \frac{1}{a|x|} \qquad (\text{ya que } a > 0) \end{aligned}$$

la proposición (8) es equivalente a

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |x - a| \cdot \frac{1}{a|x|} < \epsilon \tag{9}$$

En la conclusión de (9), además del factor $|x - a|$ se tiene como factor el cociente $\frac{1}{a|x|}$. Por tanto, para demostrar (9) es necesario restringir δ de modo que se obtenga una desigualdad la cual contenga al cociente $\frac{1}{a|x|}$. Al elegir el intervalo abierto requerido en la definición 1.5.1 como el intervalo $(\frac{1}{2}a, \frac{3}{2}a)$, el cual contiene a a pero no al cero, se deduce que $\delta \leq \frac{1}{2}a$. Entonces

$$\begin{aligned} & 0 < |x - a| < \delta \text{ y } \delta \leq \tfrac{1}{2}a \\ \Rightarrow\ & |x - a| < \tfrac{1}{2}a \\ \Rightarrow\ & -\tfrac{1}{2}a < x - a < \tfrac{1}{2}a \\ \Rightarrow\ & \tfrac{1}{2}a < x < \tfrac{3}{2}a \\ \Rightarrow\ & \tfrac{1}{2}a < |x| < \tfrac{3}{2}a \qquad (\text{porque } a > 0) \\ \Rightarrow\ & \frac{2}{3a} < \frac{1}{|x|} < \frac{2}{a} \\ \Rightarrow\ & \frac{2}{3a^2} < \frac{1}{a|x|} < \frac{2}{a^2} \end{aligned} \tag{10}$$

Ahora bien,

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{y} \quad \frac{1}{a|x|} < \frac{2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad |x - a| \cdot \frac{1}{a|x|} < \delta \cdot \frac{2}{a^2} \tag{11}$$

Puesto que el objetivo consiste en obtener $|x - a| \cdot \dfrac{1}{a|x|} < \epsilon$, la proposición (11) indica que debe requerirse $\delta \cdot \dfrac{2}{a^2} \leq \epsilon$, esto es, $\delta \leq \frac{1}{2}a^2\epsilon$. De este modo, con las dos restricciones sobre δ, se elige $\delta = \text{mín}(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a^2\epsilon)$. Con esta δ se tiene el siguiente argumento:

$$0 < |x - a| < \delta$$

$$\Rightarrow \quad |x - a| \cdot \frac{1}{a|x|} < \delta \cdot \frac{1}{a|x|}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|x - a|}{|a|\,|x|} < \delta \cdot \frac{1}{a|x|} \qquad \text{(puesto que } a > 0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{a - x}{ax}\right| < \delta \cdot \frac{1}{a|x|}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \delta \cdot \frac{1}{a|x|}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \delta \cdot \frac{2}{a^2} \qquad \text{(de (10))}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \frac{1}{2}a^2\epsilon \cdot \frac{2}{a^2} \qquad \text{(debido a que } \delta \leq \tfrac{1}{2}a^2\epsilon\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \epsilon$$

Así, se ha demostrado que para cualquier $\epsilon > 0$, si $\delta = \text{mín}(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a^2\epsilon)$, entonces la proposición siguiente es verdadera:

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \epsilon$$

la cual es la proposición (8). ■

En la demostración del teorema 1.5.13 se utiliza la siguiente fórmula, donde n es cualquier número entero positivo:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{12}$$

Esta fórmula se deduce de

$$a(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1}$$

y

$$b(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n$$

al restar los términos de la segunda ecuación de los de la primera.

1.5.13 Teorema

Si $a > 0$ y n es un número entero positivo, o si $a \leq 0$ y n es un número entero positivo impar, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

Demostración Se demostrará el teorema si $a > 0$ y n es un número entero positivo. El caso cuando $a \leq 0$ y n es un número entero positivo impar se deja como ejercicio (refiérase al el ejercicio 15 de esta sección suplementaria).

Como $\sqrt[n]{x}$ está definido para todo número no negativo, el intervalo abierto requerido en la definición 1.5.1 puede ser cualquier intervalo abierto que contenga a a y tenga un número no negativo como extremo izquierdo. Se debe probar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \epsilon \tag{13}$$

A fin de expresar $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}|$ en términos de $|x - a|$ se utiliza (12),

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = \left| \frac{(x^{1/n} - a^{1/n})[(x^{1/n})^{n-1} + (x^{1/n})^{n-2}a^{1/n} + \ldots + x^{1/n}(a^{1/n})^{n-2} + (a^{1/n})^{n-1}]}{(x^{1/n})^{n-1} + (x^{1/n})^{n-2}a^{1/n} + \ldots + x^{1/n}(a^{1/n})^{n-2} + (a^{1/n})^{n-1}} \right|$$

Si se aplica (12) al numerador, se tiene

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = |x - a| \cdot \left| \frac{1}{x^{(n-1)/n} + x^{(n-2)/n}a^{1/n} + \ldots + x^{1/n}a^{(n-2)/n} + a^{(n-1)/n}} \right|$$

Al considerar

$$|\phi(x)| = |x^{(n-1)/n} + x^{(n-2)/n}a^{1/n} + \ldots + x^{1/n}a^{(n-2)/n} + a^{(n-1)/n}|$$

en la ecuación anterior se obtiene

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = |x - a| \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} \tag{14}$$

De modo que la proposición (13) equivale a

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x - a| \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} < \epsilon \tag{15}$$

En la conclusión de (15), además del factor $|x - a|$ se tiene como factor la fracción $\dfrac{1}{|\phi(x)|}$. En consecuencia, para demostrar (15) se necesita restringir δ de modo que se tenga una desigualdad que contenga esta fracción. Si se elige el intervalo abierto indicado en la definición 1.5.1 como el intervalo $(0, 2a)$, se requiere que $\delta \leq a$. Entonces

$$\begin{aligned}
& 0 < |x - a| < \delta \quad \text{y} \quad \delta \leq a \\
\Rightarrow \quad & |x - a| < a \\
\Rightarrow \quad & -a < x - a < a \\
\Rightarrow \quad & 0 < x < 2a \\
\Rightarrow \quad & a^{(n-1)/n} < |\phi(x)| \qquad (\text{puesto que } x > 0) \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{|\phi(x)|} < \frac{1}{a^{(n-1)/n}}
\end{aligned} \tag{16}$$

Ahora bien,

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{y} \quad \frac{1}{|\phi(x)|} < \frac{1}{a^{(n-1)/n}}$$

$$\Rightarrow \quad |x - a| \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} < \delta \cdot \frac{1}{a^{(n-1)/n}} \tag{17}$$

El objetivo consiste en obtener $|x - a| \cdot \dfrac{1}{|\phi(x)|} < \epsilon$. Así, la proposición (17) indica que se debe requerir $\delta \cdot \dfrac{1}{a^{(n-1)/n}} \leq \epsilon$, esto es, $\delta \leq a^{(n-1)/n}\epsilon$. De modo que se elige $\delta = \text{mín}(a, a^{(n-1)/n}\epsilon)$. Con esta δ se tiene el siguiente argumento:

$$0 < |x - a| < \delta$$

$$\Rightarrow \quad |x - a| \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} < \delta \cdot \frac{1}{|\phi(x)|}$$

$$\Rightarrow \quad |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \delta \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} \qquad \text{(de (14))}$$

$$\Rightarrow \quad |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \delta \cdot \frac{1}{a^{(n-1)/n}} \qquad \text{(de (16))}$$

$$\Rightarrow \quad |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < a^{(n-1)/n}\epsilon \cdot \frac{1}{a^{(n-1)/n}} \qquad \text{(debido a que } \delta \leq a^{(n-1)/n}\epsilon)$$

$$\Rightarrow \quad |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \epsilon$$

Así, se ha probado que para cualquier $\epsilon > 0$, si $\delta = \text{mín}(a, a^{(n-1)/n}\epsilon)$, entonces

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \epsilon$$

la cual es la proposición (13). ■

1.5.16 Teorema

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$

Demostración Se supondrá que $L_1 \neq L_2$, y se probará que esta suposición conduce a una contradicción. Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$, de la definición 1.5.1 se deduce que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L_1| < \epsilon \tag{18}$$

Además, puesto que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$, existe una $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L_2| < \epsilon \tag{19}$$

Ahora bien, al expresar $L_1 - L_2$ como $L_1 - f(x) + f(x) - L_2$ y aplicar la desigualdad del triángulo se tiene

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |[L_1 - f(x)] + [f(x) - L_2]| \\ &\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \end{aligned} \tag{20}$$

Así, de (18), (19) y (20) se puede concluir que para cualquier $\epsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ y } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ entonces } |L_1 - L_2| < \epsilon + \epsilon \quad \textbf{(21)}$$

Si δ es la menor de δ_1 y δ_2, entonces $\delta \le \delta_1$ y $\delta \le \delta_2$, y (21) afirma que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |L_1 - L_2| < 2\epsilon \quad \textbf{(22)}$$

Sin embargo, si $\epsilon = \frac{1}{2}|L_1 - L_2|$, entonces (22) afirma que existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$$

Es claro que $|L_1 - L_2|$ no es menor que sí mismo. De modo que se tiene una contradicción, por lo que la suposición hecha al principio es falsa. En consecuencia, $L_1 = L_2$, con lo que se ha demostrado el teorema. ■

EJERCICIOS PARA EL SUPLEMENTO 1.5

En los ejercicios 1 a 8, demuestre, aplicando la definición 1.5.1, que el número indicado es el límite.

1. $\lim_{x \to 1} x^2 = 1$
2. $\lim_{x \to -3} x^2 = 9$
3. $\lim_{x \to 5} (x^2 - 3x) = 10$
4. $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1) = 7$
5. $\lim_{x \to -3} (5 - x - x^2) = -1$
6. $\lim_{x \to -1} (3 + 2x - x^2) = 0$
7. $\lim_{x \to 2} (6x^2 - 13x + 5) = 3$
8. $\lim_{x \to 1} (4x^2 - 13x + 12) = 3$
9. Utilice la definición 1.5.1 para demostrar que si
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = M$$
entonces
$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = L - M$$
10. Demuestre el teorema 5 de límites aplicando el teorema 4 de límites e inducción matemática.
11. Emplee la definición 1.5.1 para demostrar que si
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$
entonces
$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0,$$
Sugerencia: para demostrar que $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$ se debe probar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) \cdot g(x)| < \epsilon$. Primero demuestre que existe una $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $|f(x)| < 1 + |L|$, aplicando la definición 1.5.1 a $\lim_{x \to a} f(x) = L$ con $\epsilon = 1$ y $\delta = \delta_1$, y después utilice la desigualdad del triángulo. Luego, pruebe que existe una $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_2$, entonces $|g(x)| < \epsilon/(1 + |L|)$ aplicando la definición 1.5.1 a $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Si se toma δ como la menor de δ_1 y δ_2, el teorema se demuestra.
12. Demuestre el teorema 6 de límites: si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces
$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$
Sugerencia: sea
$$f(x) \cdot g(x) = [f(x) - L]g(x) + L[g(x) - M] + L \cdot M.$$
Aplique el teorema 5 de límites y el resultado del ejercicio 11 de esta sección suplementaria.
13. Demuestre el teorema 7 de límites aplicando el teorema 6 de límites e inducción matemática.
14. Demuestre el teorema 1.5.12 si $a < 0$.
15. Demuestre el teorema 1.5.13 si $a \le 0$ y n es un número entero positivo impar.

SUPLEMENTO 1.7

1.7.4 Teorema 12 de límites

Si a es un número real, y si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde c es una constante diferente de cero, entonces

(i) si $c > 0$ y si $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$,

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

(ii) si $c > 0$ y si $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$,

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iii) si $c < 0$ y si $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$,

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iv) si $c < 0$ y si $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$,

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

El teorema también es válido si "$x \to a$" se sustituye por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

Demostración del inciso (i) Con el propósito de probar que

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

se debe demostrar que para cualquier $N > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad \frac{g(x)}{f(x)} > N \qquad (7)$$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = c > 0$, si se toma $\epsilon = \frac{1}{2}c$ en la definición 1.5.1, se infiere que existe una $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |g(x) - c| < \tfrac{1}{2}c$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad -\tfrac{1}{2}c < g(x) - c < \tfrac{1}{2}c$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad \tfrac{1}{2}c < g(x) < \tfrac{3}{2}c$$

De modo que existe una $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad g(x) > \tfrac{1}{2}c \qquad (8)$$

Ahora bien, puesto que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad |f(x)| < \epsilon$$

Debido a que $f(x)$ se aproxima a cero a través de valores positivos de $f(x)$, las barras del valor absoluto no son necesarias y pueden ser eliminadas; en consecuencia, para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad 0 < f(x) < \epsilon \qquad \textbf{(9)}$$

De las proposiciones (8) y (9) se puede concluir que para cualquier $\epsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{y} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad \frac{g(x)}{f(x)} > \frac{\frac{1}{2}c}{\epsilon}$$

Por tanto, si $\epsilon = c/(2N)$ y $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$, entonces

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad \frac{g(x)}{f(x)} > \frac{\frac{1}{2}c}{c/(2N)} = N$$

la cual es la proposición (7). De este modo se ha probado el inciso (i). ∎

EJERCICIOS PARA EL SUPLEMENTO 1.7

1. Demuestre que $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$ usando la definición 1.7.1.
2. Demuestre que $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{-2}{(x-4)^2} = -\infty$ empleando la definición 1.7.2.
3. Demuestre el inciso (ii) del teorema 11 de límites (1.7.3).
4. Demuestre el inciso (ii) del teorema 12 de límites (1.7.4).
5. Demuestre el inciso (iii) del teorema 12 de límites (1.7.4).
6. Demuestre el inciso (iv) del teorema 12 de límites (1.7.4).
7. Demuestre el teorema 1.7.5.
8. Demuestre el teorema 1.7.6.
9. Demuestre el teorema 1.7.7.
10. Utilice la definición 1.7.1 para demostrar que

$$\lim_{x \to -3} \left| \frac{5-x}{3+x} \right| = +\infty$$

SUPLEMENTO 1.10

1.10.1 Teorema de estricción

Suponga que las funciones f, g y h están definidas en algún intervalo abierto I que contiene a a y posiblemente no definidas en a mismo. Además suponga que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para toda x de I para la cual $x \neq a$. También suponga que $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} h(x)$ existen y son iguales a L. Entonces $\lim_{x \to a} g(x)$ existe y es igual a L.

Demostración A fin de demostrar que $\lim_{x \to a} g(x) = L$ se debe probar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |g(x) - L| < \epsilon \qquad \textbf{(19)}$$

Se sabe que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} h(x) = L$$

de modo que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \qquad \textbf{(20)}$$

y existe una $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad |h(x) - L| < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon \tag{21}$$

Sea $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$, por lo que $\delta \leq \delta_1$ y $\delta \leq \delta_2$. Por tanto, de la proposición (20) se deduce que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad L - \epsilon < f(x) \tag{22}$$

y del enunciado (21) se infiere que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad h(x) < L + \epsilon \tag{23}$$

Por hipótesis se sabe que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \tag{24}$$

De las proposiciones (22), (23) y (24), se tiene que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon$$

Por tanto,

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$$
$$\Leftrightarrow \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |g(x) - L| < \epsilon$$

la cual es la proposicion (19). En consecuencia

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$ ■

SUPLEMENTO 2.8

Un paso importante de la demostración de la regla de la cadena consiste en introducir una nueva función F que posee ciertas propiedades útiles. Este procedimiento de "inventar" una función es común para los matemáticos.

2.8.1 Teorema La regla de la cadena

Si la función g es diferenciable en x y la función f es diferenciable en $g(x)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ es diferenciable en x y además

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{15}$$

Demostración Sea x_1 cualquier número real del dominio de g tal que g es diferenciable en x_1 y f es diferenciable en $g(x_1)$. Considere la función F definida por

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(g(x_1))}{t - g(x_1)} & \text{si } t \neq g(x_1) \\ f'(g(x_1)) & \text{si } t = g(x_1) \end{cases} \tag{16}$$

Entonces

$$\lim_{t \to g(x_1)} F(t) = \lim_{t \to g(x_1)} \frac{f(t) - f(g(x_1))}{t - g(x_1)}$$

De (7) de la sección 2.1, la función del miembro derecho de la ecuación anterior es igual a $f'(g(x_1))$. Por tanto,

$$\lim_{t \to g(x_1)} F(t) = f'(g(x_1)) \tag{17}$$

Pero de (16),

$$f'(g(x_1)) = F(g(x_1))$$

Al sustituir de esta ecuación en (17) se tiene

$$\lim_{t \to g(x_1)} F(t) = F(g(x_1))$$

Por tanto, F es continua en $g(x_1)$. Además, de (16),

$$F(t) = \frac{f(t) - f(g(x_1))}{t - g(x_1)} \qquad \text{si } t \neq g(x_1)$$

Si se multiplican ambos miembros de esta ecuación por $t - g(x_1)$, resulta

$$f(t) - f(g(x_1)) = F(t)[t - g(x_1)] \qquad \text{si } t \neq g(x_1) \tag{18}$$

Observe que (18) se cumple aún si $t = g(x_1)$ debido a que el miembro izquierdo sería

$$f(g(x_1)) - f(g(x_1)) = 0$$

mientras que el miembro derecho sería

$$F(g(x_1))[g(x_1) - g(x_1)] = 0$$

Por tanto, la estipulación en (18) de que $t \neq g(x_1)$ no es necesaria, de modo que se puede escribir

$$f(t) - f(g(x_1)) = F(t)[t - g(x_1)] \tag{19}$$

Ahora bien, sea h la función compuesta $f \circ g$, de este modo

$$h(x) = f(g(x)) \tag{20}$$

Entonces, de (7) de la sección 2.1, si el límite existe

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{h(x) - h(x_1)}{x - x_1}$$

Al sustituir de (20) en el miembro derecho de esta ecuación se tiene

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(g(x)) - f(g(x_1))}{x - x_1} \tag{21}$$

si el límite existe. Al considerar $t = g(x)$ en (19), se infiere que para toda x del dominio de g tal que $g(x)$ pertenezca al dominio de f,

$$f(g(x)) - f(g(x_1)) = F(g(x))[g(x) - g(x_1)]$$

Si se sustituye de esta ecuación en (21) se obtiene

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{F(g(x))[g(x) - g(x_1)]}{x - x_1}$$

y si el límite existe, entonces

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x_1} F(g(x)) \cdot \lim_{x \to x_1} \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} \tag{22}$$

Como F es continua en $g(x_1)$,

$$\lim_{x \to x_1} F(g(x)) = F(g(x_1)) \tag{23}$$

Pero de (16),

$$F(g(x_1)) = f'(g(x_1))$$

Al sustituir de esta ecuación en (23) se obtiene

$$\lim_{x \to x_1} F(g(x)) = f'(g(x_1)) \tag{24}$$

Además, como g es diferenciable en x_1,

$$\lim_{x \to x_1} \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} = g'(x_1)$$

Si se sustituye de esta ecuación y de 24 en (22), y se reemplaza $h'(x_1)$ por $(f \circ g)'(x_1)$, se tiene

$$(f \circ g)'(x_1) = f'(g(x_1)) \cdot g'(x_1)$$

la cual es la proposición (15) con x_1 en lugar de x. De esta manera se ha demostrado la regla de la cadena. ■

SUPLEMENTO 4.5

4.5.11 Teorema

Si las funciones f y g son integrables en $[a, b]$, entonces $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

Demostración Las funciones f y g son integrables en $[a, b]$; por tanto, sean

$$\int_a^b f(x)\, dx = M \quad \text{y} \quad \int_a^b g(x)\, dx = N$$

A fin de probar que $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = M + N$, se debe demostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para todas las particiones Δ y para cualquier w_i de $[x_{i-1}, x_i]$ y si $\|\Delta\| < \delta$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{n} [f(w_i) + g(w_i)]\Delta_i x - (M + N) \right| < \epsilon$$

Como

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x \quad \text{y} \quad N = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(w_i)\Delta_i x$$

se deduce que para cualquier $\epsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que para todas las particiones Δ y para cualquier w_i de $[x_{i-1}, x_i]$, si $\|\Delta\| < \delta_1$ y $\|\Delta\| < \delta_2$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x - M \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad \left| \sum_{i=1}^{n} g(w_i)\Delta_i x - N \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Por tanto, si $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$, entonces para cualquier $\epsilon > 0$, para todas las particiones Δ y para cualquier w_i de $[x_{i-1}, x_i]$, si $\|\Delta\| < \delta$,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x - M\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} g(w_i)\Delta_i x - N\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad (13)$$

Por la desigualdad del triángulo se tiene

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x - M\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} g(w_i)\Delta_i x - N\right)\right|$$
$$\leq \left|\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x - M\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} g(w_i)\Delta_i x - N\right| \qquad (14)$$

De las desigualdades (13) y (14) resulta

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x + \sum_{i=1}^{n} g(w_i)\Delta_i x\right) - (M + N)\right| < \epsilon \qquad (15)$$

Del teorema 4.4.4,

$$\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x + \sum_{i=1}^{n} g(w_i)\Delta_i x = \sum_{i=1}^{n} [f(w_i) + g(w_i)]\,\Delta_i x$$

Así, al sustituir de esta ecuación en (15) se puede concluir que para cualquier $\epsilon > 0$, para todas las particiones Δ y para cualquier w_i de $[x_{i-1}, x_i]$, si $\|\Delta\| < \delta$, donde $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$, entonces

$$\left|\sum_{i=1}^{n} [f(w_i) + g(w_i)]\,\Delta_i x - (M + N)\right| < \epsilon$$

Esto demuestra que $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y que

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

4.5.12 Teorema

Si la función f es integrable en los intervalos cerrados $[a, b]$, $[a, c]$ y $[c, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

donde $a < c < b$.

Demostración Sea Δ una partición de $[a, b]$. Forme la partición Δ' de $[a, b]$ de la manera siguiente: si c es uno de los puntos de la partición de Δ (esto es, $c = x_i$ para alguna i) entonces Δ' es exactamente la misma que Δ. Si c no es uno de los puntos de la partición de Δ pero está contenido en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, entonces la partición Δ' tiene como puntos todos los puntos de Δ y, además, al punto c. Por tanto, los subintervalos de la partición Δ' son los mismos que los de Δ, con la excepción del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de Δ que se ha dividido en los dos subintervalos $[x_{i-1}, c]$ y $[c, x_i]$.

Si $\|\Delta'\|$ y $\|\Delta\|$ son las normas de Δ' y Δ, respectivamente, entonces

$$\|\Delta'\| \leq \|\Delta\|$$

Ahora bien, si en la partición Δ' el intervalo $[a, c]$ se divide en r subintervalos y el intervalo $[c, b]$ se divide en $(n - r)$ subintervalos, entonces del primer intervalo, de a a c, se obtiene una suma de Riemann de la forma

$$\sum_{i=1}^{r} f(w_i)\, \Delta_i x$$

y del otro, de c a b, resulta una suma de Riemann de la forma

$$\sum_{i=r+1}^{n} f(w_i)\, \Delta_i x$$

Al emplear la definición de la integral definida y las propiedades de la notación sigma resulta

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, dx &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\, \Delta_i x \\ &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \left[\sum_{i=1}^{r} f(w_i)\, \Delta_i x + \sum_{i=r+1}^{n} f(w_i)\, \Delta_i x \right] \\ &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{r} f(w_i)\, \Delta_i x + \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=r+1}^{n} f(w_i)\Delta_i x\end{aligned}$$

Como $0 < \|\Delta'\| \leq \|\Delta\|$, se puede sustituir $\|\Delta\| \to 0$ por $\|\Delta'\| \to 0$, obteniéndose

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|\Delta'\|\to 0} \sum_{i=1}^{r} f(w_i)\, \Delta_i x + \lim_{\|\Delta'\|\to 0} \sum_{i=r+1}^{n} f(w_i)\, \Delta_i x$$

Si se aplica la definición de la integral definida al miembro derecho de la ecuación anterior se tiene

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

■

SUPLEMENTO 5.1

En la sección 5.1 se pospusieron las demostraciones de dos teoremas para este suplemento, y la demostración de otro más para los ejercicios suplementarios. El primero de estos teoremas es el teorema de la función inversa para funciones crecientes.

5.1.5 Teorema (Teorema de la función inversa)

Suponga que la función f es continua y creciente en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces

(i) f tiene una inversa f^{-1} definida en $[f(a), f(b)]$;

(ii) f^{-1} es creciente en $[f(a), f(b)]$;

(iii) f^{-1} es continua en $[f(a), f(b)]$.

Demostración de (i) Si f es continua en $[a, b]$ y si k es cualquier número tal que $f(a) < k < f(b)$, entonces, por el teorema del valor intermedio (1.9.8), existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = k$. Por tanto, el contradominio de f es el intervalo cerrado $[f(a), f(b)]$. Como f es creciente en $[a, b]$, f es uno a uno, por lo que f tiene una inversa f^{-1}. Debido a que el dominio de f^{-1} es el contradominio de f, f^{-1} está definida en $[f(a), f(b)]$.

Demostración de (ii) Para probar que f^{-1} es creciente en $[f(a), f(b)]$ se debe demostrar que

$$\text{si} \quad y_1 < y_2 \quad \text{entonces} \quad f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

donde y_1 y y_2 son dos números de $[f(a), f(b)]$. Como f^{-1} está definida en $[f(a), f(b)]$, existen números x_1 y x_2 en $[a, b]$ tales que $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$. Por tanto,

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(f(x_1)) \quad \text{y} \quad f^{-1}(y_2) = f^{-1}(f(x_2))$$

$$\Leftrightarrow \quad f^{-1}(y_1) = x_1 \quad \text{y} \quad f^{-1}(y_2) = x_2 \tag{8}$$

Si $x_2 < x_1$, entonces, como f es creciente en $[a, b]$, $f(x_2) < f(x_1)$ o equivalentemente, $y_2 < y_1$. Pero $y_1 < y_2$; por tanto x_2 no puede ser menor que x_1.

Si $x_2 = x_1$, entonces, puesto que f es una función, $f(x_1) = f(x_2)$ o, equivalentemente, $y_1 = y_2$, pero esto también contradice el hecho de que $y_1 < y_2$. Por tanto, $x_2 \neq x_1$.

Así, si x_2 no es menor que x_1 y $x_2 \neq x_1$, se infiere que $x_1 < x_2$; en consecuencia, de las dos ecuaciones de (8), $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. De esta manera se ha demostrado que f^{-1} es creciente en $[f(a), f(b)]$.

Demostración de (iii) A fin de probar que f^{-1} es continua en el intervalo cerrado $[f(a), f(b)]$ se debe demostrar que si r es cualquier número del intervalo abierto $(f(a), f(b))$, entonces f^{-1} es continua en r, f^{-1} es continua por la derecha en $f(a)$ y además f^{-1} es continua por la izquierda en $f(b)$.

Se demostrará que f^{-1} es continua en cualquier número r del intervalo abierto $(f(a), f(b))$ mostrando que el teorema 1.8.6 se cumple en r. Se desea probar que para cualquier $\epsilon > 0$, suficientemente pequeño, para el cual $f^{-1}(r) - \epsilon$ y $f^{-1}(r) + \epsilon$ estén en $[a, b]$, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad |y - r| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(r)| < \epsilon$$

Sea $f^{-1}(r) = s$. Entonces $f(s) = r$. Como, de (i), f^{-1} es creciente en $[f(a), f(b)]$, se concluye que $a < s < b$. Por tanto,

$$a \le s - \epsilon < s < s + \epsilon \le b$$

Debido a que f es creciente en $[a, b]$,

$$f(a) \le f(s - \epsilon) < r < f(s + \epsilon) \le f(b) \tag{9}$$

Sea δ el menor de los dos números $r - f(s - \epsilon)$ y $f(s + \epsilon) - r$; así, $\delta \le r - f(s - \epsilon)$ y $\delta \le f(s + \epsilon) - r$ o, equivalentemente,

$$f(s - \epsilon) \le r - \delta \quad \text{y} \quad r + \delta \le f(s + \epsilon) \tag{10}$$

Si $|y - r| < \delta$ entonces $-\delta < y - r < \delta$ o, de manera equivalente,

$$r - \delta < y < r + \delta$$

De esta desigualdad y de (9) y (10), se tiene que

$$\text{si} \quad |y - r| < \delta \quad \text{entonces} \quad f(a) \le f(s - \epsilon) < y < f(s + \epsilon) \le f(b)$$

Puesto que f^{-1} es creciente en $[f(a), f(b)]$, de lo anterior se deduce que

$$\begin{aligned} &\text{si } |y - r| < \delta \text{ entonces } f^{-1}(f(s - \epsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(s + \epsilon)) \\ \Leftrightarrow\ &\text{si } |y - r| < \delta \text{ entonces } s - \epsilon < f^{-1}(y) < s + \epsilon \\ \Leftrightarrow\ &\text{si } |y - r| < \delta \text{ entonces } -\epsilon < f^{-1}(y) - s < \epsilon \\ \Leftrightarrow\ &\text{si } |y - r| < \delta \text{ entonces } |f^{-1}(y) - f^{-1}(r)| < \epsilon \end{aligned}$$

Por tanto, f^{-1} es continua en el intervalo abierto $(f(a), f(b))$.

En el ejercicio 1 de esta sección suplementaria se le pedirán las demostraciones de que f^{-1} es continua por la derecha en $f(a)$ y continua por la izquierda en $f(b)$. ■

Se le pedirá que demuestre los incisos (i)–(iii) del teorema de la función inversa para funciones decrecientes en los ejercicios suplementarios 2–4, respectivamente.

Ahora se enunciará el otro teorema cuya demostración se aplazó.

5.1.7 Teorema

Suponga que la función f es continua y monótona en el intervalo cerrado $[a, b]$, y sea $y = f(x)$. Si $f'(x)$ existe y es diferente de cero para toda x de $[a, b]$, entonces la derivada de la función inversa f^{-1}, definida por $x = f^{-1}(y)$, está dada por

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Demostración Como f es continua y monótona en $[a, b]$, entonces por los teoremas 5.1.5 y 5.1.6, f tiene una inversa que es continua y monótona en $[f(a), f(b)]$ (o $[f(b), f(a)]$ si $f(b) < f(a)$).

Si x es un número de $[a, b]$, sea Δx un incremento de x, $\Delta x \neq 0$, tal que $x + \Delta x$ pertenece también a $[a, b]$. Entonces el incremento correspondiente de y está dado por

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{11}$$

$\Delta y \neq 0$ ya que $\Delta x \neq 0$ y f es monótona en $[a, b]$; esto es

$$f(x + \Delta x) < f(x) \quad \text{o} \quad f(x + \Delta x) > f(x) \qquad \text{en } [a, b]$$

Si x está en $[a, b]$ y $y = f(x)$, entonces y pertenece a $[f(a), f(b)]$ (o $[f(b), f(a)]$). También, si $x + \Delta x$ está en $[a, b]$, entonces $y + \Delta y$ pertenecerá a $[f(a), f(b)]$ (o $[f(b), f(a)]$) debido a que $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ por (11). Así,

$$x = f^{-1}(y) \quad \text{y} \quad x + \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y)$$

A partir de estas dos ecuaciones se tiene

$$\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y) \tag{12}$$

De la definición de derivada,

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y}$$

Si se sustituye de (11) y (12) en la ecuación anterior resulta

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)}$$

y como $\Delta x \neq 0$, entonces

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \tag{13}$$

Antes de obtener el límite de (13) se demostrará que con la hipótesis de este teorema $\Delta x \to 0$ equivale a $\Delta y \to 0$. Primero se probará que $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$. De (12),

$$\lim_{\Delta y \to 0} \Delta x = \lim_{\Delta y \to 0} [f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)]$$

Puesto que f^{-1} es continua en $[f(a), f(b)]$ (o $[f(b), f(a)]$), el límite del miembro derecho de la ecuación anterior es cero. Así,

$$\lim_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0 \tag{14}$$

Ahora se demostrará que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. De (11),

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x)]$$

Como f es continua en $[a, b]$, entonces el límite del miembro derecho de la ecuación anterior es cero, y por tanto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

A partir de esta ecuación y de (14) se infiere que

$$\Delta x \to 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \Delta y \to 0$$

De esta proposición y aplicando el teorema concerniente al límite de un cociente a (13), se tiene

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \tag{15}$$

Debido a que f es diferenciable en $[a, b]$, el límite del denominador de la ecuación anterior es $f'(x)$ o, equivalentemente, $\dfrac{dy}{dx}$. De esta forma,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

■

EJERCICIOS PARA EL SUPLEMENTO 5.1

1. Suponga que la función f es continua y creciente en el intervalo cerrado $[a, b]$, y considerando válidos los teoremas 5.1.5(i) y 5.1.5(ii) demuestre que f^{-1} es continua por la derecha en $f(a)$ y que es continua por la izquierda en $f(b)$.
2. Demuestre el teorema 5.1.6(i).
3. Demuestre el teorema 5.1.6(ii).
4. Demuestre el teorema 5.1.6(iii).

SUPLEMENTO 8.2

8.2.10 Teorema

Una sucesión monótona acotada es convergente.

Demostración Se demostrará el teorema para el caso cuando la función monótona es creciente. Considere la sucesión $\{a_n\}$.

Como $\{a_n\}$ es acotada, entonces existe una cota superior para la sucesión. Por el axioma de completez, $\{a_n\}$ tiene una mínima cota superior, sea B esta cota. Entonces si ϵ es un número positivo, $B - \epsilon$ no puede ser una cota superior de la sucesión debido a que $B - \epsilon < B$ y B es la mínima cota superior de la sucesión. Así, para algún número entero positivo N,

$$B - \epsilon < a_N \tag{9}$$

Como B es la mínima cota superior de $\{a_n\}$, por la definición 8.2.6 se deduce que

$$a_n \leq B \qquad \text{para todo número entero positivo } n \tag{10}$$

Debido a que $\{a_n\}$ es creciente, de la definición 8.2.5(i), se tiene

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad \text{para todo número entero positivo } n$$

y por tanto,

$$\text{si} \quad n \geq N \quad \text{entonces} \quad a_N \leq a_n$$

De esta proposición y de (9) y (10) se infiere que

$$\text{si} \quad n \geq N \quad \text{entonces} \quad B - \epsilon < a_N \leq a_n \leq B < B + \epsilon$$

de donde,

$$\text{si} \quad n \geq N \quad \text{entonces} \quad B - \epsilon < a_n < B + \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{si} \quad n \geq N \quad \text{entonces} \quad -\epsilon < a_n - B < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{si} \quad n \geq N \quad \text{entonces} \quad |a_n - B| < \epsilon$$

Pero por la definición 8.2.2, esta proposición es la condición para que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = B$. En consecuencia, la sucesión $\{a_n\}$ es convergente.

Cuando demuestre el teorema para el caso en que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente, considere la sucesión $\{-a_n\}$, la cual será creciente, y después aplique el resultado anterior. Se deja como ejercicio detallar esta demostración (consulte el ejercicio suplementario 1). ■

8.2.13 Teorema

Una sucesión monótona convergente es acotada.

Demostración Se hará la demostración para el caso cuando la sucesión monótona es creciente. Considere la sucesión $\{a_n\}$.

A fin de probar que $\{a_n\}$ es acotada, debe demostrarse que la sucesión tiene una cota superior y una cota inferior. Como $\{a_n\}$ es una sucesión creciente, su primer elemento sirve como cota inferior. Sólo falta determinar una cota superior.

Debido a que $\{a_n\}$ es convergente, la sucesión tiene un límite; sea L este límite. Por tanto, $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$, y así, por la definición 8.1.2, para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que si n es un número entero y

$$\begin{aligned} &\text{si} \quad n \geq N \quad \text{entonces} \quad |a_n - L| < \epsilon \\ \Leftrightarrow \ &\text{si} \quad n > N \quad \text{entonces} \quad -\epsilon < a_n - L < \epsilon \\ \Leftrightarrow \ &\text{si} \quad n > N \quad \text{entonces} \quad L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \end{aligned}$$

Puesto que $\{a_n\}$ es creciente, se deduce de la proposición anterior que

$$a_n < L + \epsilon \qquad \text{para todos los enteros positivos } n$$

Por tanto, $L + \epsilon$ servirá como una cota superior de la sucesión $\{a_n\}$.

Cuando demuetre el teorema para el caso en que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente, haga lo sugerido en la demostración del teorema 8.2.10. Considere la sucesión $\{-a_n\}$, la cual será creciente, y aplique el resultado anterior. En el ejercicio suplementario 2 se le pedirá que detalle esta demostración. ∎

EJERCICIOS PARA EL SUPLEMENTO 8.2

1. Utilice el hecho de que el teorema 8.2.10 se cumple para una sucesión creciente y demuestre que el teorema se cumple cuando $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente. *Sugerencia:* considere la sucesión $\{-a_n\}$.

2. Demuestre el teorema 8.2.13 cuando $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de manera semejante a la empleada en el ejercicio 1.

SUPLEMENTO 8.5

8.5.4 Teorema

Considere la serie alternante $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ $\left[\text{o } \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n\right]$, donde $a_n > 0$ y $a_{n+1} < a_n$ para todos los números enteros positivos n, y suponga que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Si R_k es el residuo que se obtiene al aproximar la suma de la serie mediante la suma de los primeros k términos, entonces $|R_k| < a_{k+1}$.

Demostración La serie dada converge por el criterio de las series alternantes. Suponga que los términos impares de la serie son positivos y que los términos pares son negativos. Entonces de (3), de la demostración del teorema 8.5.2, la sucesión $\{s_{2n}\}$ es creciente. De modo que si S es la suma de la serie dada, entonces

$$s_{2k} < s_{2k+2} < S \qquad \text{para toda } k \geq 1 \tag{11}$$

A fin de probar que la sucesión $\{s_{2n-1}\}$ es decreciente, se escribe

$$s_{2n-1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1})$$

Como $a_{n+1} < a_n$, entonces cada cantidad entre paréntesis es positivo. Por tanto, puesto que $a_1 > 0$,

$$s_1 > s_3 > s_5 > \ldots > s_{2n-1} > \ldots$$

En consecuencia, la sucesión $\{s_{2n-1}\}$ es decreciente. Así,

$$S < s_{2k+1} < s_{2k-1} \qquad \text{para toda } k \geq 1 \tag{12}$$

Como $S < s_{2k+1}$,

$$S - s_{2k} < s_{2k+1} - s_{2k} = a_{2k+1} \qquad \text{para toda } k \geq 1 \tag{13}$$

De (11), $s_{2k} < S$. De modo que,

$$0 < S - s_{2k} \qquad \text{para toda } k \geq 1$$

Por tanto, de esta desigualdad y (13),

$$0 < S - s_{2k} < a_{2k+1} \qquad \text{para toda } k \geq 1 \tag{14}$$

De (11), $-S < -s_{2k}$. De donde,

$$s_{2k-1} - S < s_{2k-1} - s_{2k} = a_{2k} \qquad \text{para toda } k \geq 1 \tag{15}$$

De (12),

$$0 < s_{2k-1} - S \qquad \text{para toda } k \geq 1$$

Entonces, de esta desigualdad y de (15),

$$0 < s_{2k-1} - S < a_{2k} \qquad \text{para toda } k \geq 1 \tag{16}$$

Como de la definición 8.5.3, $R_k = S - s_k$, entonces (14) puede escribirse como

$$0 < R_{2k} < a_{2k+1} \qquad \text{para toda } k \geq 1 \tag{17}$$

y (16) puede expresarse como

$$0 < -R_{2k-1} < a_{2k} \qquad \text{para toda } k \geq 1$$

Al combinar esta desigualdad y (17) se tiene

$$|R_k| < a_{k+1} \qquad \text{para toda } k \geq 1$$

por lo que el teorema queda demostrado. ■

SUPLEMENTO 8.8

8.8.1 Teorema

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ es una serie de potencias cuyo radio de convergencia es $R > 0$, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n x^{n-1}$ también tiene a R como radio de convergencia.

Demostración Sea x cualquier número del intervalo abierto $(-R, R)$. Entonces $|x| < R$. Elija un número x_1 tal que $|x| < |x_1| < R$. Como $|x_1| < R$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n {x_1}^n$ es convergente. En consecuencia, $\lim_{n \to +\infty} c_n {x_1}^n = 0$. De modo que si se toma $\epsilon = 1$ en la definición 3.7.1, entonces existe un número $N > 0$ tal que

$$\text{si} \quad n > N \quad \text{entonces} \quad |c_n {x_1}^n| < 1$$

Sea M el mayor de los números $|c_1x_1|$, $|c_2x_1^2|$, $|c_3x_1^3|$, ..., $|c_Nx_1^N|$, 1. Entonces

$$|c_nx_1^n| \leq M \qquad \text{para todos los enteros positivos } n \tag{7}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} |nc_nx^{n-1}| &= \left| nc_n \cdot \frac{x^{n-1}}{x_1^n} \cdot x_1^n \right| \\ &= n\,\frac{|c_nx_1^n|}{|x_1|}\left|\frac{x}{x_1}\right|^{n-1} \end{aligned}$$

De la ecuación anterior y de (7),

$$|nc_nx^{n-1}| \leq n\,\frac{M}{|x_1|}\left|\frac{x}{x_1}\right|^{n-1} \tag{8}$$

Si se aplica el criterio de la razón a la serie

$$\frac{M}{|x_1|}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left|\frac{x}{x_1}\right|^{n-1} \tag{9}$$

entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)|x|^n}{|x_1|^n}\cdot\frac{|x_1|^{n-1}}{n|x|^{n-1}}\right| \\ &= \left|\frac{x}{x_1}\right|\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n} \\ &= \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1 \end{aligned}$$

Por tanto, la serie (9) es absolutamente convergente; de modo que de (8) y el criterio de comparación, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_nx^{n-1}$ también es absolutamente convergente. Como x es cualquier número de $(-R, R)$, se infiere que si el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_nx^{n-1}$ es R', entonces $R' \geq R$.

Para completar la demostración se debe probar que R' no puede ser mayor que R. Suponga que $R' > R$, y sea x_2 un número tal que $R < |x_2| < R'$. Puesto que $|x_2| > R$, se deduce que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_nx_2^n \qquad \text{es divergente} \tag{10}$$

Debido a que $|x_2| < R'$, se infiere que $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_nx_2^{n-1}$ es absolutamente convergente. Además,

$$|x_2|\sum_{n=1}^{+\infty}|nc_nx_2^{n-1}| = \sum_{n=1}^{+\infty}|nc_nx_2^n|$$

y del teorema 8.3.6,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|nc_nx_2^n| \text{ es convergente} \tag{11}$$

Si n es cualquier número entero positivo, entonces

$$|c_n x_2{}^n| \leq n|c_n x_2{}^n| = |nc_n x_2{}^n|$$

De esta desigualdad, de la proposición (11) y del criterio de comparación se concluye que $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n x_2{}^n|$ es convergente. Por tanto, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_2{}^n$ es convergente, lo cual contradice la proposición (10). En consecuencia, la suposición de que $R' > R$ es falsa. Por tanto, R' no puede ser mayor que R; y como se mostró que $R' \geq R$, se deduce que $R' = R$, lo cual demuestra el teorema. ■

8.8.3 Teorema

Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ una serie de potencias cuyo radio de convergencia es $R > 0$. Si f es la función definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \tag{12}$$

entonces $f'(x)$ existe para toda x del intervalo abierto $(-R, R)$ y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n x^{n-1}$$

Demostración Sean x y a dos números diferentes del intervalo abierto $(-R, R)$. La fórmula de Taylor (fórmula (2) de la sección 8.1), con $n = 1$, es

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(z)}{2!}(x - a)^2$$

De esta fórmula con $f(x) = x^n$ se infiere que para cada entero positivo n,

$$x^n = a^n + na^{n-1}(x - a) + \tfrac{1}{2}n(n - 1)(z_n)^{n-2}(x - a)^2 \tag{13}$$

donde z_n se encuentra entre a y x para todo entero positivo n. De (12),

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n a^n \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n - c_0 - \sum_{n=1}^{+\infty} c_n a^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(x^n - a^n) \end{aligned}$$

Al dividir entre $x - a$ (ya que $x \neq a$) y emplear (13), se tiene de la ecuación anterior

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{x - a}\sum_{n=1}^{+\infty} c_n[na^{n-1}(x - a) + \tfrac{1}{2}n(n - 1)(z_n)^{n-2}(x - a)^2]$$

Así,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1} + \tfrac{1}{2}(x - a)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n - 1)c_n(z_n)^{n-2} \tag{14}$$

Como a está en $(-R, R)$, del teorema 8.8.1 se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1}$ es absolutamente convergente.

Debido a que tanto a como x pertenecen a $(-R, R)$, entonces existen algún número $K > 0$ tal que $|a| < K < R$ y $|x| < K < R$. Así, del teorema 8.8.2,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n K^{n-2}$$

es absolutamente convergente. Entonces, puesto que

$$|n(n-1)c_n(z_n)^{n-2}| < |n(n-1)c_n K^{n-2}| \tag{15}$$

para cada z_n se puede concluir, por el criterio de comparación, que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n(z_n)^{n-2}$$

es absolutamente convergente.

De (14),

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1}\right| = \left|\tfrac{1}{2}(x-a)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n(z_n)^{n-2}\right| \tag{16}$$

Sin embargo, si $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es absolutamente convergente, entonces

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$$

Si se aplica esto al miembro derecho de (16) se obtiene

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1}\right| \leq \tfrac{1}{2}|x-a| \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|c_n||z_n|^{n-2}$$

De esta desigualdad y de (15) resulta

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1}\right| \leq \tfrac{1}{2}|x-a| \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|c_n|K^{n-2} \tag{17}$$

donde $0 < K < R$. Como la serie del miembro derecho de (17) es absolutamente convergente, entonces el límite del miembro derecho, conforme x se aproxima a a, es cero. Por tanto, de (17) y del teorema de estricción, se tiene

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad f'(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1}$$

y puesto que a puede ser cualquier número del intervalo abierto $(-R, R)$, el teorema se ha demostrado. ■

SUPLEMENTO 12.3

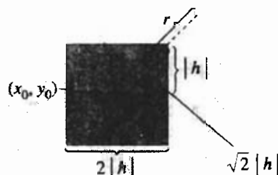


FIGURA 1

12.3.3 Teorema

Suponga que f es una función de las dos variables x y y, definida en un disco abierto $B((x_0, y_0); r)$ y que f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} están definidas en B. Además suponga que f_{xy} y f_{yx} son continuas en B. Entonces

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Demostración Considere un cuadrado que tenga su centro en (x_0, y_0) y que la longitud de sus lados sea $2|h|$, con la condición de que $0 < \sqrt{2}\,|h| < r$. Entonces todos los puntos interiores y de los lados del cuadrado están en el disco abierto B (refiérase a la figura 1). Así, los puntos $(x_0 + h, y_0 + h)$, $(x_0 + h, y_0)$ y $(x_0, y_0 + h)$ están en B. Se define Δ como

$$\Delta = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0) \quad \textbf{(13)}$$

Considere la función G definida por

$$G(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0) \quad \textbf{(14)}$$

Entonces

$$G(x + h) = f(x + h, y_0 + h) - f(x + h, y_0)$$

Por lo que (13) puede escribirse como

$$\Delta = G(x_0 + h) - G(x_0) \quad \textbf{(15)}$$

De (14),

$$G'(x) = f_x(x, y_0 + h) - f_x(x, y_0) \quad \textbf{(16)}$$

Ahora bien, como $f_x(x, y_0 + h)$ y $f_x(x, y_0)$ están definidas en B, entonces $G'(x)$ existe si x está en el intervalo cerrado que tiene como extremos a x_0 y $x_0 + h$. En consecuencia, G es continua si x pertenece a este intervalo cerrado. Por el teorema del valor medio, existe un número c_1 entre x_0 y $x_0 + h$ tal que

$$\frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = G'(c_1)$$

de donde

$$G(x_0 + h) - G(x_0) = hG'(c_1)$$

Al sustituir de esta ecuación en (15) se tiene

$$\Delta = hG'(c_1)$$

De esta ecuación y reemplazando x por c_1 en (16) se obtiene

$$\Delta = h[f_x(c_1, y_0 + h) - f_x(c_1, y_0)] \quad \textbf{(17)}$$

Ahora, si g es la función definida por

$$g(y) = f_x(c_1, y) \quad \textbf{(18)}$$

se puede expresar (17) como

$$\Delta = h[g(y_0 + h) - g(y_0)] \quad \textbf{(19)}$$

De (18),

$$g'(y) = f_{xy}(c_1, y) \quad \textbf{(20)}$$

Como $f_{xy}(c_1, y)$ está definida en B, entonces $g'(y)$ existe si y está en el intervalo cerrado que tiene como extremos a y_0 y $y_0 + h$; en consecuencia, g es continua si y pertenece a este intervalo. Por tanto, por el teorema del valor medio, existe un número d_1 entre y_0 y $y_0 + h$ tal que

$$g(y_0 + h) - g(y_0) = hg'(d_1)$$

Si se sustituye de esta ecuación en (19) se obtiene $\Delta = h^2 g'(d_1)$; por lo que de (20),

$$\Delta = h^2 f_{xy}(c_1, d_1) \tag{21}$$

para algún punto (c_1, d_1) del disco abierto B. Ahora considere la función ϕ definida por

$$\phi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y) \tag{22}$$

de modo que $\phi(y + h) = f(x_0 + h, y + h) - f(x_0, y + h)$. Por tanto, (13) puede expresarse como

$$\Delta = \phi(y_0 + h) - \phi(y_0) \tag{23}$$

De (22),

$$\phi'(y) = f_y(x_0 + h, y) - f_y(x_0, y) \tag{24}$$

Puesto que, por hipótesis, cada término del miembro derecho de (24) existe en B, entonces ϕ' existe si y está en el intervalo cerrado que tiene como extremos a y_0 y $y_0 + h$. Por tanto, ϕ es continua en ese intervalo. De este modo, por el teorema del valor medio, existe un número d_2 entre y_0 y $y_0 + h$ tal que

$$\phi(y_0 + h) - \phi(y_0) = h\phi'(d_2)$$

De esta ecuación y de (23) y (24),

$$\Delta = h[f_y(x_0 + h, d_2) - f_y(x_0, d_2)] \tag{25}$$

Ahora considere la función χ definida como

$$\chi(x) = f_y(x, d_2) \tag{26}$$

y escriba (25) como

$$\Delta = h[\chi(x_0 + h) - \chi(x_0)] \tag{27}$$

De (26),

$$\chi'(x) = f_{yx}(x, d_2) \tag{28}$$

y por el teorema del valor medio existe un número c_2 entre x_0 y $x_0 + h$ tal que

$$\chi(x_0 + h) - \chi(x_0) = h\chi'(c_2)$$

De esta ecuación y de (27) y (28),

$$\Delta = h^2 f_{yx}(c_2, d_2)$$

Con esta expresión para Δ y (21) se tiene

$$h^2 f_{xy}(c_1, d_1) = h^2 f_{yx}(c_2, d_2)$$

y como $h \neq 0$, entonces se puede dividir entre h^2, lo cual proporciona

$$f_{xy}(c_1, d_1) = f_{yx}(c_2, d_2) \tag{29}$$

donde (c_1, d_1) y (c_2, d_2) pertenecen a B.

Debido a que c_1 y c_2 están entre x_0 y $x_0 + h$, se tiene $c_1 = x_0 + \epsilon_1 h$, donde $0 < \epsilon_1 < 1$, y $c_2 = x_0 + \epsilon_2 h$, donde $0 < \epsilon_2 < 1$. De manera similar, como d_1 y d_2 están entre y_0 y $y_0 + h$, se tiene $d_1 = y_0 + \epsilon_3 h$, donde $0 < \epsilon_3 < 1$, y $d_2 = y_0 + \epsilon_4 h$, donde $0 < \epsilon_4 < 1$. Al efectuar estas sustituciones en (29) resulta

$$f_{xy}(x_0 + \epsilon_1 h, y_0 + \epsilon_3 h) = f_{yx}(x_0 + \epsilon_2 h, y_0 + \epsilon_4 h)$$

Puesto que f_{xy} y f_{yx} son continuas en B, si se toma el límite de los dos miembros de esta ecuación conforme h tiende a cero, se obtiene

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

■

SUPLEMENTO 12.4

12.4.4 Teorema

Sea f una función de x y y tal que $D_1 f$ y $D_2 f$ existen en un disco abierto $B(P_0; r)$, donde P_0 es el punto (x_0, y_0). Si $D_1 f$ y $D_2 f$ son continuas en P_0, entonces f es diferenciable en P_0.

Demostración Consulte la figura 1, donde el punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ está en el disco $B(P_0; r)$. Entonces

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Si se suma y resta $f(x_0 + \Delta x, y_0)$ en el miembro derecho de esta ecuación se obtiene

$$\Delta f(x_0, y_0) = [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)] + [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] \quad \textbf{(9)}$$

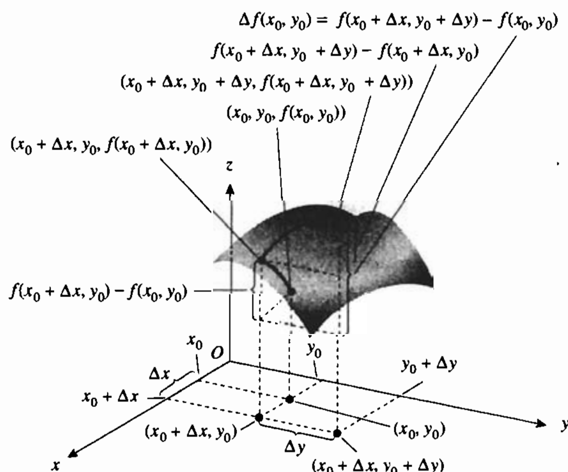


FIGURA 1

En el plano $y = y_0$, y es constante y x varía. Como $D_1 f$ existe en el plano $y = y_0$, se sabe por el teorema del valor medio que existe algún número c entre x_0 y $x_0 + \Delta x$ tal que

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = D_1 f(c, y_0)$$

de donde

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = (\Delta x) D_1 f(c, y_0) \quad \textbf{(10)}$$

En el plano $x = x_0 + \Delta x$, x es constante y y varía. Puesto que $D_2 f$ existe en el plano $x = x_0 + \Delta x$, el teorema del valor medio afirma que existe algún punto d entre y_0 y $y_0 + \Delta y$ tal que

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = (\Delta y) D_2 f(x_0 + \Delta x, d)$$

Si se sustituye de esta ecuación y de (10) en (9) resulta

$$\Delta f(x_0, y_0) = (\Delta x) D_1 f(c, y_0) + (\Delta y) D_2 f(x_0 + \Delta x, d) \quad \textbf{(11)}$$

Debido a que $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ está en $B(P_0; r)$, c está entre x_0 y $x_0 + \Delta x$, y como $D_1 f$ es continua en P_0, entonces

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} D_1 f(c, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \quad \textbf{(12)}$$

y como d está entre y_0 y $y_0 + \Delta y$, y $D_2 f$ es continua en P_0, entonces

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} D_2 f(x_0 + \Delta x, d) = D_2 f(x_0, y_0) \quad \textbf{(13)}$$

Si

$$\epsilon_1 = D_1 f(c, y_0) - D_1 f(x_0, y_0) \quad \textbf{(14)}$$

y

$$\epsilon_2 = D_2 f(x_0 + \Delta x, d) - D_2 f(x_0, y_0) \quad \textbf{(15)}$$

entonces de (12) y (13) se obtiene, respectivamente,

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \epsilon_1 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \epsilon_2 = 0 \quad \textbf{(16)}$$

Al sustituir de (14) y (15) en (11) se tiene

$$\Delta f(x_0, y_0) = \Delta x [D_1 f(x_0, y_0) + \epsilon_1] + \Delta y [D_2 f(x_0, y_0) + \epsilon_2]$$

de donde

$$\Delta f(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \Delta x + D_2 f(x_0, y_0) \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

De esta ecuación y (16), se cumple la definición 12.4.2; de modo que f es diferenciable en (x_0, y_0). ■

SUPLEMENTO 12.8

12.8.5 Teorema Criterio de la segunda derivada

Sea f una función de dos variables tal que f y sus derivadas parciales de primer y segundo orden son continuas en algún disco abierto $B((a, b); r)$. Además suponga que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$. Sea

$$D(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

(i) f tiene un valor mínimo relativo en (a, b) si

$$D(a, b) > 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(a, b) > 0 \qquad (\text{o } f_{yy}(a, b) > 0)$$

(ii) f tiene un valor máximo relativo en (a, b) si

$$D(a, b) > 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(a, b) < 0 \qquad (\text{o } f_{yy}(a, b) < 0)$$

(iii) $f(a, b)$ no es un extremo relativo, pero f tiene un punto silla en $(a, b, f(a, b))$ si

$$D(a, b) < 0$$

(iv) No se puede concluir nada acerca de los extremos si

$$D(a, b) = 0$$

Demostración del inciso (i) Con el fin de simplicar la notación se define

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)\, f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$$

Dado que $D(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, se desea demostrar que $f(a, b)$ es un valor mínimo relativo de la función. Puesto que f_{xx}, f_{xy} y f_{yy} son continuas en $B((a, b); r)$, entonces D también es continua en B. Por tanto, existe un disco abierto $B'((a, b); r')$, donde $r' \leq r$, tal que $D(x, y) > 0$ y $f_{xx}(x, y) > 0$ para todo punto (x, y) de B'. Sean h y k constantes, no ambas cero, tales que el punto $(a + h, b + k)$ esté en B'. Entonces las dos ecuaciones

$$x = a + ht \quad \text{y} \quad y = b + kt \qquad 0 \leq t \leq 1$$

definen todos los puntos del segmento rectilíneo de (a, b) a $(a + h, b + k)$, y todos estos puntos están en B'. Sea F la función de una variable definida por

$$F(t) = f(a + ht, b + kt) \tag{5}$$

Por la fórmula de Taylor (fórmula (2) de la sección 8.1),

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(z)}{2!}t^2$$

donde z está entre 0 y t. Si $t = 1$ en esta ecuación, se tiene

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \tfrac{1}{2}F''(z) \tag{6}$$

donde $0 < z < 1$. Como $F(0) = f(a, b)$ y $F(1) = f(a + h, b + k)$, entonces de (6) se obtiene

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + F'(0) + \tfrac{1}{2}F''(z) \tag{7}$$

donde $0 < z < 1$.

A fin de calcular $F'(t)$ y $F''(t)$ a partir de (5) se utiliza la regla de la cadena, obteniéndose

$$F'(t) = hf_x(a + ht, b + kt) + kf_y(a + ht, b + kt) \tag{8}$$

y

$$F''(t) = h^2 f_{xx} + hkf_{yx} + hkf_{xy} + k^2 f_{yy}$$

donde cada segunda derivada parcial se evalúa en $(a + ht, b + kt)$. Del teorema 12.3.3, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ para todo (x, y) de B'. Así,

$$F''(t) = h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy} \tag{9}$$

donde cada segunda derivada parcial se evalúa en $(a + ht, b + kt)$. Al sustituir 0 por t en (8) y z por t en (9) resulta

$$F'(0) = hf_x(a, b) + kf_y(a, b)$$
$$= 0$$

y

$$F''(z) = h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}$$

donde cada segunda derivada parcial se evalúa en $(a + hz, b + kz)$ y donde $0 < z < 1$. Si se sustituyen estos valores de $F'(0)$ y $F''(z)$ en (7) se obtiene

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \tfrac{1}{2}(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}) \qquad \textbf{(10)}$$

Los términos entre paréntesis del miembro derecho de (10) pueden escribirse como

$$h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy} = f_{xx}\left[h^2 + 2hk\frac{f_{xy}}{f_{xx}} + \left(k\frac{f_{xy}}{f_{xx}}\right)^2 - \left(k\frac{f_{xy}}{f_{xx}}\right)^2 + k^2\frac{f_{yy}}{f_{xx}}\right]$$

Así, de (10),

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \frac{f_{xx}}{2}\left[\left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right) + \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}^2}k^2\right] \qquad \textbf{(11)}$$

Como $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ evaluado en $(a + hz, b + kz)$ es igual a

$$D(a + hz, b + kz) > 0$$

entonces la expresión entre corchetes del miembro derecho de (11) es positivo. Además, puesto que $f_{xx}(a + hz, b + kz) > 0$, entonces de (11),

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) > 0$$

En consecuencia se ha demostrado que

$$f(a + h, b + k) > f(a, b)$$

para cada punto $(a + h, b + k)$ de B' diferente de (a, b). Por tanto, por la definición 12.7.1(ii), $f(a, b)$ es un valor mínimo relativo de f. ■

EJERCICIOS PARA EL SUPLEMENTO 12.8

1. Demuestre el inciso (ii) del teorema 12.8.5.

2. Demuestre el inciso (iii) del teorema 12.8.5.

TABLAS Y FORMULARIOS

TABLA DE DERIVADAS

1. $D_x(u^n) = nu^{n-1} D_x u$
2. $D_x(u + v) = D_x u + D_x v$
3. $D_x(uv) = u D_x v + v D_x u$
4. $D_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v D_x u - u D_x v}{v^2}$
5. $D_x(e^u) = e^u D_x u$
6. $D_x(a^u) = a^u \ln a \, D_x u$
7. $D_x(\ln u) = \frac{1}{u} D_x u$
8. $D_x(\text{sen } u) = \cos u \, D_x u$
9. $D_x(\cos u) = -\text{sen } u \, D_x u$
10. $D_x(\tan u) = \sec^2 u \, D_x u$
11. $D_x(\cot u) = -\csc^2 u \, D_x u$
12. $D_x(\sec u) = \sec u \tan u \, D_x u$
13. $D_x(\csc u) = -\csc u \cot u \, D_x u$
14. $D_x(\text{sen}^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} D_x u$
15. $D_x(\cos^{-1} u) = \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2}} D_x u$
16. $D_x(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1 + u^2} D_x u$
17. $D_x(\cot^{-1} u) = \frac{-1}{1 + u^2} D_x u$
18. $D_x(\sec^{-1} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$
19. $D_x(\csc^{-1} u) = \frac{-1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$
20. $D_x(\text{senh } u) = \cosh u \, D_x u$
21. $D_x(\cosh u) = \text{senh } u \, D_x u$
22. $D_x(\tanh u) = \text{sech}^2 u \, D_x u$
23. $D_x(\coth u) = -\text{csch}^2 u \, D_x u$
24. $D_x(\text{sech } u) = -\text{sech } u \tanh u \, D_x u$
25. $D_x(\text{csch } u) = -\text{csch } u \coth u \, D_x u$

TABLA DE INTEGRALES

Algunas formas elementales

1. $\int du = u + C$
2. $\int a \, du = au + C$
3. $\int [f(u) + g(u)]du = \int f(u)\, du + \int g(u)\, du$
4. $\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

Formas racionales que contienen $a + bu$

6. $\int \frac{u \, du}{a + bu} = \frac{1}{b^2}\left[a + bu - a \ln|a + bu|\right] + C$
7. $\int \frac{u^2 \, du}{a + bu} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a + bu)^2 - 2a(a + bu) + a^2 \ln|a + bu|\right] + C$
8. $\int \frac{u \, du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{a}{a + bu} + \ln|a + bu|\right] + C$
9. $\int \frac{u^2 \, du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left[a + bu - \frac{a^2}{a + bu} - 2a \ln|a + bu|\right] + C$
10. $\int \frac{u \, du}{(a + bu)^3} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{a}{2(a + bu)^2} - \frac{1}{a + bu}\right] + C$

11. $$\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$$

12. $$\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$$

13. $$\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} + \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$$

Formas que contienen $\sqrt{a+bu}$

14. $$\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^3}(3bu-2a)(a+bu)^{3/2} + C$$

15. $$\int u^2\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{105b^3}(15b^2u^2-12abu+8a^2)(a+bu)^{3/2} + C$$

16. $$\int u^n\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2u^n(a+bu)^{3/2}}{b(2n+3)} - \frac{2an}{b(2n+3)}\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du$$

17. $$\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu} + C$$

18. $$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3}(3b^2u^2-4abu+8a^2)\sqrt{a+bu} + C$$

19. $$\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2an}{b(2n+1)}\int \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}$$

20. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C & \text{si } a>0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{a+bu}{-a}} + C & \text{si } a<0 \end{cases}$$

21. $$\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$$

22. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u} = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

23. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u^n} = -\frac{(a+bu)^{3/2}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-5)}{2a(n-1)}\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u^{n-1}}$$

Formas que contienen $a^2 \pm u^2$

24. $$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$$

25. $$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\tanh^{-1}\dfrac{u}{a} + C & \text{si } |u|<a \\ \dfrac{1}{a}\coth^{-1}\dfrac{u}{a} + C & \text{si } |u|>a \end{cases}$$

26. $$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C = \begin{cases} -\dfrac{1}{a}\tanh^{-1}\dfrac{u}{a} + C & \text{si } |u|<a \\ -\dfrac{1}{a}\coth^{-1}\dfrac{u}{a} + C & \text{si } |u|>a \end{cases}$$

Formas que contienen $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

En las formulas 27 a 38, se puede sustituir

$$\ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) \text{ por } \operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a}$$

$$\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| \text{ por } \cosh^{-1}\frac{u}{a}$$

$$\ln\left|\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right| \text{ por } \operatorname{senh}^{-1}\frac{a}{u}$$

27. $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$$

28. $$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$$

29. $$\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$$

30. $$\int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}\, du}{u} = \sqrt{u^2 + a^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right| + C$$

31. $$\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}\, du}{u} = \sqrt{u^2 - a^2} - a\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$$

32. $$\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}\, du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$$

33. $$\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{\pm a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$$

34. $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right| + C$$

35. $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$$

36. $$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{\pm a^2 u} + C$$

37. $$\int (u^2 \pm a^2)^{3/2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm 5a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$$

38. $$\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{u}{\pm a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$$

Formas que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$

39. $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

40. $$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

41. $$\int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

42. $$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}\, du}{u} = \sqrt{a^2 - u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$$

$$= \sqrt{a^2 - u^2} - a\cosh^{-1}\frac{a}{u} + C$$

43. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}\,du}{u^2} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

44. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

45. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

$\displaystyle = -\frac{1}{a}\cosh^{-1}\frac{a}{u} + C$

46. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$

47. $\displaystyle\int (a^2 - u^2)^{3/2}\,du = -\frac{u}{8}(2u^2 - 5a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

48. $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$

Formas que contienen $2au - u^2$

49. $\displaystyle\int \sqrt{2au - u^2}\,du = \frac{u - a}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C$

50. $\displaystyle\int u\sqrt{2au - u^2}\,du = \frac{2u^2 - au - 3a^2}{6}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C$

51. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2au - u^2}\,du}{u} = \sqrt{2au - u^2} + a\cos^{-1}\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C$

52. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2au - u^2}\,du}{u^2} = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C$

53. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1}\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C$

54. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a\cos^{-1}\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C$

55. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u + 3a)}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{3a^2}{2}\cos^{-1}\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C$

56. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C$

57. $\displaystyle\int \frac{du}{(2au - u^2)^{3/2}} = \frac{u - a}{a^2\sqrt{2au - u^2}} + C$

58. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(2au - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a\sqrt{2au - u^2}} + C$

Formas que contienen funciones trigonométricas

59. $\displaystyle\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

60. $\displaystyle\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

61. $\displaystyle\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$

62. $\displaystyle\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

63. $\displaystyle\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C = \ln\left|\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}u\right)\right| + C$

64. $\displaystyle\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C = \ln\left|\tan \tfrac{1}{2}u\right| + C$

65. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$

66. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$

67. $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$

68. $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$

69. $\int \operatorname{sen}^2 u\, du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

70. $\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

71. $\int \tan^2 u\, du = \tan u - u + C$

72. $\int \cot^2 u\, du = -\cot u - u + C$

73. $\int \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\, du$

74. $\int \cos^n u\, du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du$

75. $\int \tan^n u\, du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\, du$

76. $\int \cot^n u\, du = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\, du$

77. $\int \sec^n u\, du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} u \tan u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\, du$

78. $\int \csc^n u\, du = -\frac{1}{n-1}\csc^{n-2} u \cot u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\, du$

79. $\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu\, du = -\frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C$

80. $\int \cos mu \cos nu\, du = \frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C$

81. $\int \operatorname{sen} mu \cos nu\, du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C$

82. $\int u \operatorname{sen} u\, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$

83. $\int u \cos u\, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

84. $\int u^2 \operatorname{sen} u\, du = 2u \operatorname{sen} u + (2 - u^2)\cos u + C$

85. $\int u^2 \cos u\, du = 2u \cos u + (u^2 - 2)\operatorname{sen} u + C$

86. $\int u^n \operatorname{sen} u\, du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\, du$

87. $\int u^n \cos u\, du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\, du$

88. $$\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\, du = \frac{\operatorname{sen}^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{m-2} u \cos^n u\, du$$
$$= \frac{\operatorname{sen}^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^m u \cos^{n-2} u\, du$$

Formas que contienen funciones trigonométricas inversas

89. $\int \operatorname{sen}^{-1} u\, du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

90. $\int \cos^{-1} u\, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$

91. $\int \tan^{-1} u\, du = u \tan^{-1} u - \ln\sqrt{1+u^2} + C$

92. $\int \cot^{-1} u\, du = u \cot^{-1} u + \ln\sqrt{1+u^2} + C$

93. $$\int \sec^{-1} u\, du = u \sec^{-1} u - \ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right| + C$$
$$= u \sec^{-1} u - \cosh^{-1} u + C$$

94. $$\int \csc^{-1} u\, du = u \csc^{-1} u + \ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right| + C$$
$$= u \csc^{-1} u + \cosh^{-1} u + C$$

Formas que contienen funciones exponenciales y logarítmicas

95. $\int e^u\, du = e^u + C$

96. $\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

97. $\int ue^u\, du = e^u(u-1) + C$

98. $\int u^n e^u\, du = u^n e^u - n\int u^{n-1} e^u\, du$

99. $\int u^n a^u\, du = \frac{u^n a^u}{\ln a} - \frac{n}{\ln a}\int u^{n-1} a^u\, du + C$

100. $\int \frac{e^u\, du}{u^n} = -\frac{e^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{e^u\, du}{u^{n-1}}$

101. $\displaystyle\int \frac{a^u\,du}{u^n} = -\frac{a^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{\ln a}{n-1}\int \frac{a^u\,du}{u^{n-1}}$

102. $\displaystyle\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$

103. $\displaystyle\int u^n \ln u\,du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$

104. $\displaystyle\int \frac{du}{u\ln u} = \ln|\ln u| + C$

105. $\displaystyle\int e^{au}\,\text{sen}\,nu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+n^2}(a\,\text{sen}\,nu - n\cos nu) + C$

106. $\displaystyle\int e^{au}\cos nu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+n^2}(a\cos nu + n\,\text{sen}\,nu) + C$

Formas que contienen funciones hiperbólicas

107. $\displaystyle\int \text{senh}\,u\,du = \cosh u + C$

108. $\displaystyle\int \cosh u\,du = \text{senh}\,u + C$

109. $\displaystyle\int \tanh u\,du = \ln|\cosh u| + C$

110. $\displaystyle\int \coth u\,du = \ln|\text{senh}\,u| + C$

111. $\displaystyle\int \text{sech}\,u\,du = \tan^{-1}(\text{senh}\,u) + C$

112. $\displaystyle\int \text{csch}\,u\,du = \ln\left|\tanh \tfrac{1}{2}u\right| + C$

113. $\displaystyle\int \text{sech}^2\,u\,du = \tanh u + C$

114. $\displaystyle\int \text{csch}^2\,u\,du = -\coth u + C$

115. $\displaystyle\int \text{sech}\,u\tanh u\,du = -\text{sech}\,u + C$

116. $\displaystyle\int \text{csch}\,u\coth u\,du = -\text{csch}\,u + C$

117. $\displaystyle\int \text{senh}^2\,u\,du = \tfrac{1}{4}\text{senh}\,2u - \tfrac{1}{2}u + C$

118. $\displaystyle\int \cosh^2 u\,du = \tfrac{1}{4}\text{senh}\,2u + \tfrac{1}{2}u + C$

119. $\displaystyle\int \tanh^2 u\,du = u - \tanh u + C$

120. $\displaystyle\int \coth^2 u\,du = u - \coth u + C$

121. $\displaystyle\int u\,\text{senh}\,u\,du = u\cosh u - \text{senh}\,u + C$

122. $\displaystyle\int u\cosh u\,du = u\,\text{senh}\,u - \cosh u + C$

123. $\displaystyle\int e^{au}\,\text{senh}\,nu\,du = \frac{e^{au}}{a^2-n^2}(a\,\text{senh}\,nu - n\cosh nu) + C$

124. $\displaystyle\int e^{au}\cosh nu\,du = \frac{e^{au}}{a^2-n^2}(a\cosh nu - n\,\text{senh}\,nu) + C$

FÓRMULAS DE ÁLGEBRA

Productos notables

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

$(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2$

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

Factorización de polinomios

$ax + ay + az = a(x + y + z)$

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$

$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$

$acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2 = (ax + by)(cx + dy)$

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

Exponentes

$a^n \; a^m = a^{n+m}$

$(a^n)^m = a^{nm}$

$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad a \neq 0$

$(ab)^n = a^n b^n$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \qquad b \neq 0$

$a^0 = 1 \qquad a \neq 0$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \qquad a \neq 0$

$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

Radicales

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} \qquad b \neq 0$

$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{si } n \text{ es impar} \\ |a| & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

Fórmula cuadrática

Si $a \neq 0$, las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Desigualdades

si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$

si $a < b$, entonces $a + c < b + c$

si $a < b$, entonces $a - c < b - c$

si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$

si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$

si $b > 0$, $|x| < b$ equivale a $-b < x < b$

si $b > 0$, $|x| > b$ equivale a $x < -b$ o $x > b$

si $b > 0$, $x^2 < b$ equivale a $-\sqrt{b} < x < \sqrt{b}$

si $b > 0$, $b < x^2$ equivale a $x < -\sqrt{b}$ o $x > \sqrt{b}$

Logaritmos

$y = \log_b x$ si y sólo si $x = b^y$

$\log_b 1 = 0$

$\log_b b = 1$

$\log_b uv = \log_b u + \log_b v$

$\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$

$\log_b u^n = n \log_b u$

$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ (cambio de base)

$\ln x = \log_e x$

Teorema del binomio

$(a + b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \ldots + {}_nC_r a^{n-r}b^r + \ldots + {}_nC_n b$

donde ${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

La siguiente simbología se emplea para las medidas:

r: radio h: altura b: base a: base C: longitud de la circunferencia
A: área S: área de la superficie B: área de la base V: volumen

Círculo: $A = \pi r^2$; $C = 2\pi r$

Triángulo: $A = \frac{1}{2} bh$

Rectángulo y paralelogramo: $A = bh$

Trapecio: $A = \frac{1}{2}(a + b)h$

Cilindro circular recto: $V = \pi r^2 h$; $S = 2\pi rh$

Cono circular recto: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

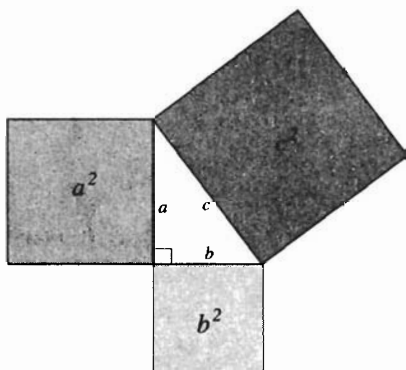
Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $S = 4\pi r^2$

Prisma (con bases paralelas): $V = Bh$

Pirámide: $V = \frac{1}{3}Bh$

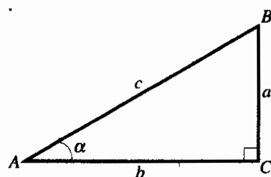
Teorema de Pitágoras: En un triángulo rectángulo, si a y b son las longitudes de los lados perpendiculares y c es la longitud de la hipotenusa, entonces

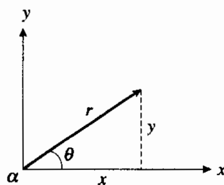
$$c^2 = a^2 + b^2$$

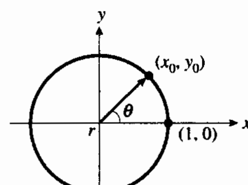


FÓRMULAS DE TRIGONOMETRÍA

Funciones trigonométricas







$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{a}{c}$	$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r}$	$\operatorname{sen}\theta = y_0$
$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$	$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$	$\cos\theta = x_0$
$\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$	$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$	$\tan\theta = \dfrac{y_0}{x_0}$
$\cot\alpha = \dfrac{b}{a}$	$\cot\theta = \dfrac{x}{y}$	$\cot\theta = \dfrac{x_0}{y_0}$
$\sec\alpha = \dfrac{c}{b}$	$\sec\theta = \dfrac{r}{x}$	$\sec\theta = \dfrac{1}{x_0}$
$\csc\alpha = \dfrac{c}{a}$	$\csc\theta = \dfrac{r}{y}$	$\csc\theta = \dfrac{1}{y_0}$

Identidades trigonométricas fundamentales

$\operatorname{sen} x \csc x = 1$ $\qquad \cos x \sec x = 1$ $\qquad \tan x \cot x = 1$

$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $\qquad \cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ $\qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Identidades de sumas y diferencias

$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$

$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$

$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

$\tan(u + v) = \dfrac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$

$\tan(u - v) = \dfrac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$

Identidades para ángulos dobles y semiángulos

$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$

$\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$

$\cos 2u = 1 - 2\operatorname{sen}^2 u$

$\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$

$\tan 2u = \dfrac{2\tan u}{1 - \tan^2 u}$

$\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{2}$

$\cos^2 u = \dfrac{1 + \cos 2u}{2}$

$\tan^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$

$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}t = \dfrac{1 - \cos t}{2}$

$\cos^2 \tfrac{1}{2}t = \dfrac{1 + \cos t}{2}$

$\tan \tfrac{1}{2}t = \dfrac{1 - \cos t}{\operatorname{sen} t}$

$\tan \tfrac{1}{2}t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t}$

Identidades para el producto, suma y diferencia de senos y cosenos

$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$

$\cos u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$

$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u - v)]$

$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$

$$\operatorname{sen} s + \operatorname{sen} t = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{s+t}{2}\right)\cos\left(\frac{s-t}{2}\right) \qquad \cos s + \cos t = 2\cos\left(\frac{s+t}{2}\right)\cos\left(\frac{s-t}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} s - \operatorname{sen} t = 2 \cos\left(\frac{s+t}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{s-t}{2}\right) \qquad \cos s - \cos t = -2\operatorname{sen}\left(\frac{s+t}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{s-t}{2}\right)$$

Algunas fórmulas de reducción

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

$\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos x$

$\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi + x) = \cos x$

$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \operatorname{sen} x$

$\cos(\frac{1}{2}\pi + x) = -\operatorname{sen} x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\tan(-x) = -\tan x$

$\tan(\frac{1}{2}\pi - x) = \cot x$

$\tan(\frac{1}{2}\pi + x) = -\cot x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x$

Leyes de los senos y de los cosenos

En estas fórmulas a, b y c representan las medidas de los lados de un triángulo; α, β y γ denotan las medidas de los ángulos opuestos a los lados de medidas a, b y c, respectivamente.

Ley de los senos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Leyes de los cosenos

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

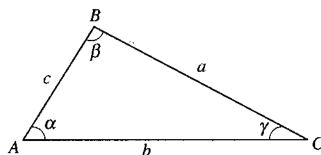


Tabla de valores especiales de las funciones trigonométricas

θ radianes o número real x	θ grados	sen θ o sen x	cos θ o cos x	tan θ o tan x	csc θ o csc x	sec θ o sec x	cot θ o cot x
0	0°	0	1	0	Indefinido	1	Indefinido
$\frac{1}{6}\pi$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{1}{3}\pi$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{2}\pi$	90°	1	0	Indefinido	1	Indefinido	0
π	180°	0	−1	0	Indefinido	−1	Indefinido
$\frac{3}{2}\pi$	270°	−1	0	Indefinido	−1	Indefinido	0

FÓRMULAS DE TRIGONOMETRÍA HIPERBÓLICA

Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

Identidades hiperbólicas

$$\tanh x = \frac{1}{\coth x}$$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

$$\cosh 2x = 2 \operatorname{senh}^2 x + 1$$

$$\cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1$$

$$\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$$

$$\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Funciones hiperbólicas inversas

$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ para cualquier número real

$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ $\quad x \geq 1$

$\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$ $\quad |x| < 1$

$\coth^{-1} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x + 1}{x - 1}$ $\quad |x| > 1$

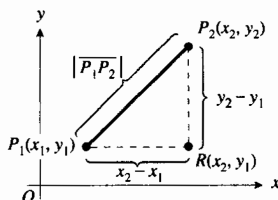
FÓRMULAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Fórmula de la distancia

La distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está dada por

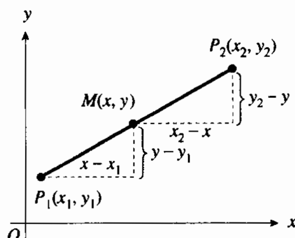
$$d(P_1P_2) = |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Fórmulas del punto medio

Si $M(x, y)$ es el punto medio del segmento de recta de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$, entonces

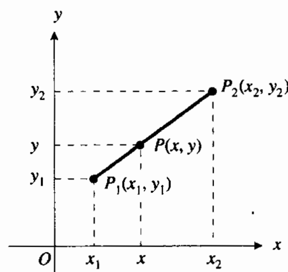
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Fórmulas del punto de división de un segmento en una razón dada

Si $P(x, y)$ es el punto que divide al segmento dirigido P_1P_2 en la razón $r = \overline{P_1P}: \overline{PP_2}$, entonces

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \quad \text{y} \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \qquad r \neq -1$$



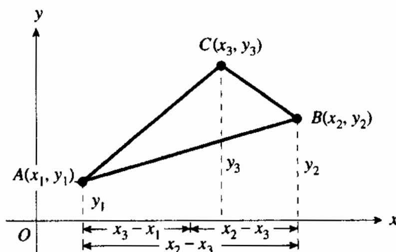
Área de un triángulo

$$\text{Área}\,(ABC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Observación:
El área será positiva sólo si se recorren los vértices del triángulo en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj.

Una condición necesaria y suficiente para que tres puntos diferentes (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) sean colineales consiste en que

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Gráfica de una ecuación y lugares geométricos

Problemas fundamentales de la geometría analítica

1. Interpretar geométricamente una ecuación; es decir, construir la gráfica correspondiente.
2. Determinar la ecuación de una figura geométrica, o de la condición que deben cumplir los puntos de la misma.

Principio fundamental de la geometría analítica

Las coordenadas de un punto satisfacen una ecuación si y sólo si ese punto pertenece a la gráfica de esa ecuación.

Gráfica de una ecuación

La gráfica o lugar geométrico de una ecuación en R_2 es el conjunto de todos los puntos en R_2, cuyas coordenadas son soluciones de la ecuación.

Construcción de curvas

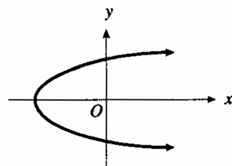
Determine:

(a) las intercepciones en los ejes coordenados,
(b) la simetría de la curva con respecto a los ejes coordenados y al origen,
(c) la extensión de la curva (dominio y contradominio),
(d) las asíntotas verticales u horizontales que la curva pueda tener,
(e) las coordenadas de un número suficiente de puntos a fin de obtener a una gráfica adecuada.

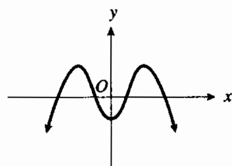
Pruebas de simetría

La gráfica de una ecuación en x y y es

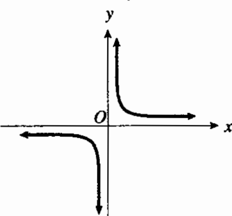
(i) simétrica con respecto al eje x si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente cuando y se sustituye por $-y$ en la ecuación;



(ii) simétrica con respecto al eje y si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente cuando x se sustituye por $-x$ en la ecuación;



(iii) simétrica con respecto al origen si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente cuando x se sustituye por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación.



RECTA

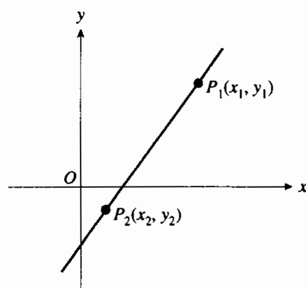
Pendiente de una recta

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos diferentes cualesquiera de una recta no vertical, entonces la pendiente de la recta es m, y está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad x_1 \neq x_2$$

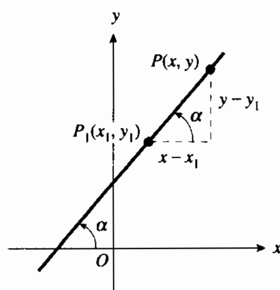
Ecuación de una recta

Forma de los dos puntos



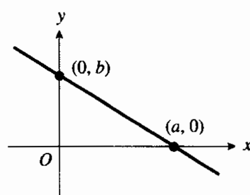
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad x_1 \neq x_2$$

Forma de punto pendiente



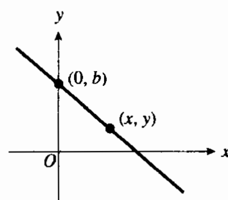
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Forma simétrica



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad a \neq 0 \text{ y } b \neq 0$$

Forma pendiente-intercepción



$$y = mx + b$$

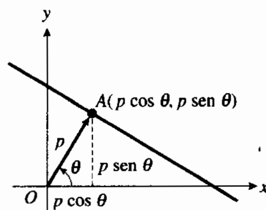
Forma general

$$Ax + By + C = 0$$

Forma de determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Forma normal



$$x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta - p = 0$$

Ángulo formado por dos rectas

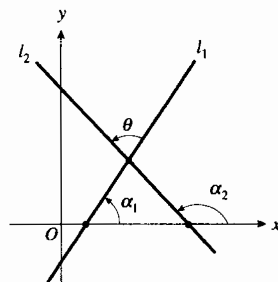
$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \qquad m_1 m_2 \neq -1$$

Condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas:

$$m_1 = m_2$$

Condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares:

$$m_1 m_2 = -1$$



CIRCUNFERENCIA

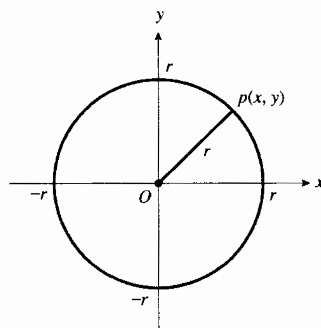
Forma centro-radio (canónica o estándar)

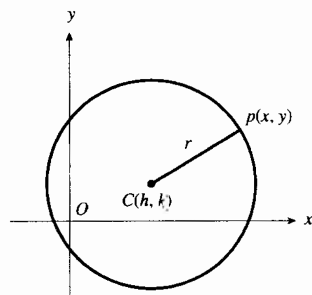
Constantes

Radio: r

Abscisa del centro: h

Ordenada del centro: k





Ecuación:	$x^2 + y^2 = r^2$	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
Coordenadas del centro:	$C(0, 0)$, el origen	$C(h, k)$

Forma general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Caso 1: $D^2 + E^2 - 4F > 0$

La circunferencia tiene centro en $(-\frac{1}{2}D, -\frac{1}{2}E)$ y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 + 4F}$

Caso 2: $D^2 + E^2 - 4F = 0$

La circunferencia es el punto $(-\frac{1}{2}D, -\frac{1}{2}E)$

Caso 3: $D^2 + E^2 - 4F < 0$

La circunferencia es el conjunto vacío

PARÁBOLA

Formas canónicas o estándar

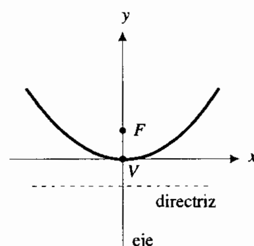
Constantes

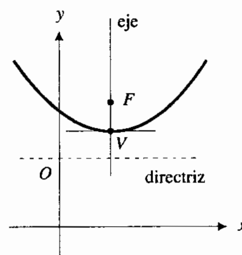
Distancia entre el vértice y el foco: p

Longitud del lado recto: $|4p|$

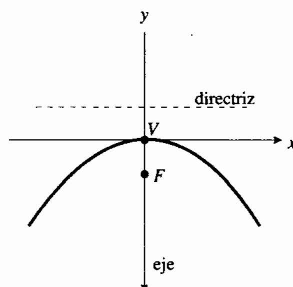
Eje paralelo al eje *x*

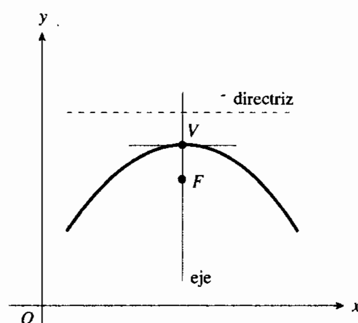
p positiva





p negativa

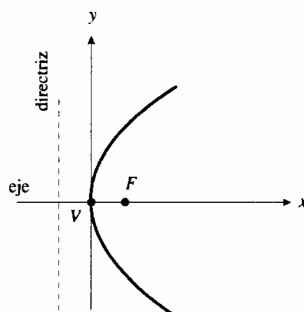


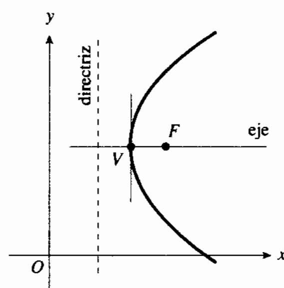


Ecuación:	$x^2 = 4py$	$(x - h)^2 = 4p(y - k)$
Coordenadas del vértice:	$V(0, 0)$	$V(h, k)$
Coordenadas del foco:	$F(0, p)$	$F(h, k + p)$
Ecuación de la directriz:	$y = -p$	$y = k - p$

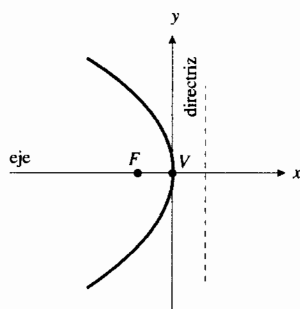
Eje paralelo al eje *y*

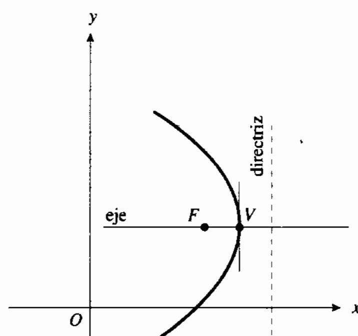
p positiva





p negativa





Ecuación:	$y^2 = 4px$	$(y - h)^2 = 4p(x - h)$
Coordenadas del vértice:	$V(0, 0)$	$V(h, k)$
Coordenadas del foco:	$F(p, 0)$	$F(h + p, k)$
Ecuación de la directriz:	$x = -p$	$x = h - p$

Forma general

(1) $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$, eje paralelo al eje *y*

(2) $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, eje paralelo al eje *x*

ELIPSE

Formas canónicas o estándar

Constantes

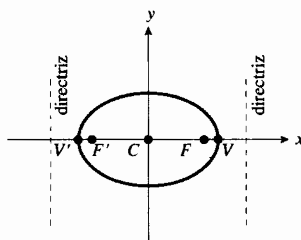
Longitud del eje mayor: $2a$
Longitud del eje menor: $2b$
Distancia entre los focos: $2c$

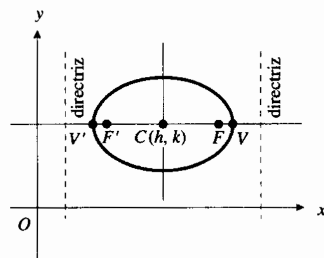
Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$

Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a}$

Relaciones $c < a$
$a > b$
$c^2 = a^2 - b^2$

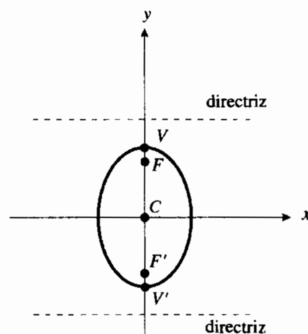
Eje principal horizontal

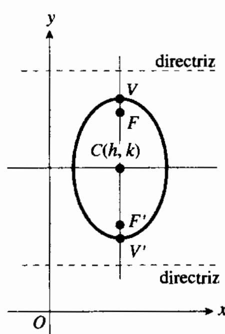




Ecuación:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
Coordenadas de los vértices:	$V(a, 0), V'(-a, 0)$	$V(h + a, k), V'(h - a, k)$
Coordenadas de los focos:	$F(c, 0), F'(-c, 0)$	$F(h + c, k), F'(h - c, k)$
Coordenadas del centro:	$C(0, 0)$	$C(h, k)$
Ecuaciones de las directrices:	$x = \pm\frac{a}{e}$	$x = h \pm \frac{a}{e}$

Eje principal vertical





Ecuación:	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
Coordenadas de los vértices:	$V(0, a), V'(0, -a)$	$V(h, k + a), V'(h, k - a)$
Coordenadas de los focos:	$F(0, c), F'(0, -c)$	$F(h, k + c), F'(h, k - c)$
Coordenadas del centro:	$C(0, 0)$	$C(h, k)$
Ecuaciones de las directrices:	$y = \pm \frac{a}{e}$	$y = k \pm \frac{a}{e}$

Forma general

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad AC > 0$

HIPÉRBOLA

Formas canónicas o estándar

Constantes

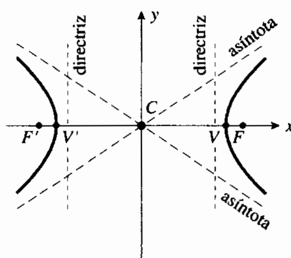
Longitud del eje transverso:	$2a$
Longitud del eje conjugado:	$2b$
Distancia entre los focos:	$2c$
Excentricidad:	$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$
Longitud del lado recto:	$\frac{2b^2}{a}$

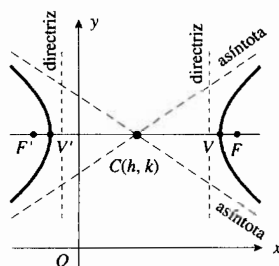
Relaciones

$c > a$

$c^2 = a^2 + b^2$

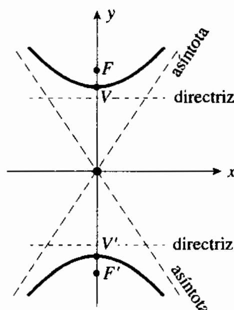
Eje principal horizontal

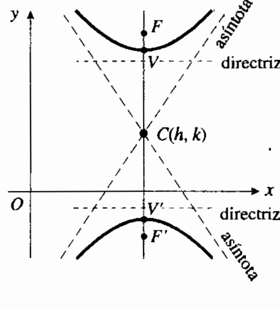




Ecuación:	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
Coordenadas de los vértices:	$V(a, 0), V'(-a, 0)$	$V(h + a, k), V'(h - a, k)$
Coordenadas de los focos:	$F(c, 0), F'(-c, 0)$	$F(h + c, k), F'(h - c, k)$
Coordenadas del centro:	$C(0, 0)$	$C(h, k)$
Ecuaciones de las directrices:	$x = \pm\frac{a}{e}$	$x = h \pm \frac{a}{e}$
o bien:	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$

Eje principal vertical





Ecuación:	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
Coordenadas de los vértices:	$V(0, a), V'(0, -a)$	$V(h, k + a), V'(h, k - a)$
Coordenadas de los focos:	$F(0, c), F'(0, -c)$	$F(h, k + c), F'(h, k - c)$
Coordenadas del centro:	$C(0, 0)$	$C(h, k)$
Ecuaciones de las directrices:	$y = \pm\frac{a}{e}$	$x = k \pm \frac{a}{e}$
o bien:	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 0$

Forma general

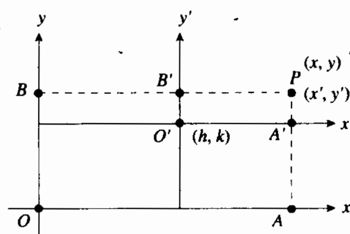
$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad AC < 0$

TRANSFORMACIONES DE COORDENADAS

Traslación de ejes

Si (x, y) representa un punto P con respecto a un conjunto de ejes dado, y (x', y') es la representación de P después de que los ejes son trasladados a un nuevo origen que tiene coordenadas (h, k) con respecto a los ejes dados, entonces

$$x' = x - h \qquad \text{y} \qquad y' = y - k$$

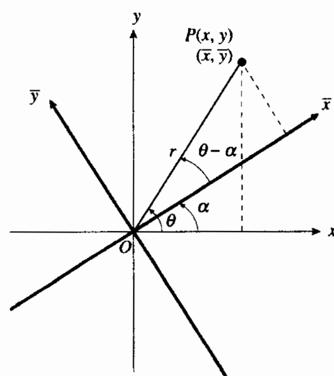


Rotación de ejes

Si (x, y) representa un punto P con respecto a un conjunto de ejes dado y $(\bar{x}, \bar{y})$ es una representación de P después de que los ejes han sido rotados un ángulo α, entonces

(i) $\begin{cases} x = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\operatorname{sen}\alpha \\ y = \bar{x}\operatorname{sen}\alpha + \bar{y}\cos\alpha \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} \bar{x} = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha \\ \bar{y} = -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$



ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO EN DOS VARIABLES

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

cuando A y C no son ambos cero, es una cónica o una cónica degenerada. Si es una cónica, entonces la gráfica es

(i) una *parábola* si $A = 0$ o $C = 0$, esto es $AC = 0$;
(ii) una *elipse* si A y C tienen el mismo signo, es decir, $AC > 0$;
(iii) una *hipérbola* si A y C tienen signos opuestos, esto es, $AC < 0$.

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una cónica, o bien, una cónica degenerada. Si la gráfica es una cónica, entonces es

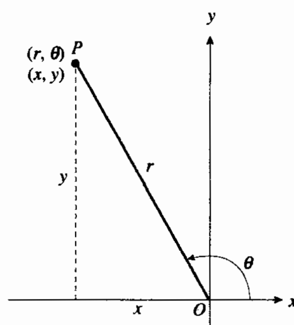
(i) una *parábola* si $B^2 - 4AC = 0$;
(ii) una *elipse* si $B^2 - 4AC < 0$;
(iii) una *hipérbola* si $B^2 - 4AC > 0$.

COORDENADAS POLARES

Transformaciones de coordenadas

Coordenadas polares a cartesianas

$x = r\cos\theta$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$



Coordenadas cartesianas a polares

$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ y $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

Criterios de simetría

Una gráfica polar es

(i) simétrica con respecto al eje polar si se obtiene una ecuación equivalente cuando (r, θ) se sustituye por $(r, -\theta)$ o por $(-r, \pi - \theta)$;

(ii) simétrica con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$ si se obtiene una ecuación equivalente cuando (r, θ) se sustituye por $(r, \pi - \theta)$ o por $(-r, -\theta)$;

(iii) simétrica con respecto al polo si se obtiene una ecuación equivalente cuando (r, θ) se sustituye por $(-r, \theta)$ o por $(r, \pi + \theta)$.

Ecuaciones polares de rectas y circunferencias

C, a y b son constantes

$\theta = C$	Recta que contiene al polo; forma un ángulo de C radianes con el eje polar.
$r\,\mathrm{sen}\,\theta = b$	Recta paralela al eje polar; arriba del eje polar si $b > 0$, debajo del eje polar si $b < 0$.
$r\cos\theta = a$	Recta paralela al eje $\frac{1}{2}\pi$; a la derecha del eje $\frac{1}{2}\pi$ si $a > 0$, a la izquierda del eje $\frac{1}{2}\pi$ si $a < 0$.
$r = C$	Circunferencia; centro en el polo; radio C.
$r = 2a\cos\theta$	Circunferencia; radio $\lvert a\rvert$; tangente al eje $\frac{1}{2}\pi$; centro en el eje polar o en su prolongación.
$r = 2b\,\mathrm{sen}\,\theta$	Circunferencia; radio $\lvert b\rvert$; tangente al eje polar; centro en el eje $\frac{1}{2}\pi$ o en su prolongación.

Tipos de caracoles

De la ecuación $r = a + b\cos\theta$, donde $a > 0$ y $b > 0$:

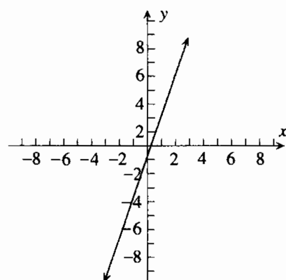
(*a*) $0 < \dfrac{a}{b} < 1$	**Caracol con lazo.** Consulte la figura (*i*).
(*b*) $\dfrac{a}{b} = 1$	**Cardioide.** Refiérase a la figura (*ii*).
(*c*) $1 < \dfrac{a}{b} < 2$	**Caracol con hendidura.** Consulte la figura (*iii*).
(*d*) $2 \le \dfrac{a}{b}$	**Caracol convexo (sin hendidura).** Refiérase a la figura (*iv*).

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS IMPARES

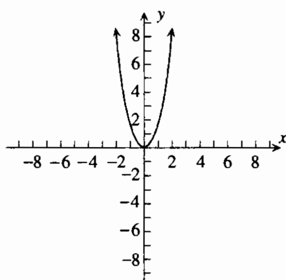
EJERCICIOS 1.1 (página 10)

1. **(a)** dominio: $[4, +\infty)$; **(b)** dominio: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$; **(c)** dominio: $[-2, 2]$; **(d)** no es función
3. **(a)** dominio: $(-\infty, +\infty)$; **(b)** no es función; **(c)** dominio: $(-\infty, +\infty)$; **(d)** dominio: $(-\infty, +\infty)$
5. **(a)** 5; **(b)** -5; **(c)** -1; **(d)** $2a + 1$; **(e)** $2x + 1$; **(f)** $4x - 1$; **(g)** $4x - 2$; **(h)** $2x + 2h - 1$; **(i)** $2x + 2h - 2$; **(j)** 2
7. **(a)** -5; **(b)** -6; **(c)** -3; **(d)** 30; **(e)** $2h^2 + 9h + 4$; **(f)** $8x^4 + 10x^2 - 3$; **(g)** $2x^4 - 7x^2$; **(h)** $2x^2 + (4h + 5)x + (2h^2 + 5h - 3)$; **(i)** $2x^2 + 5x + (2h^2 + 5h - 6)$; **(j)** $4x + 2h + 5$
9. **(a)** $\sqrt{x + 18}$; **(b)** $|x|$; **(c)** x^2; **(d)** $|x + 3|$; **(e)** $|x^2 - 3|$; **(f)** $\dfrac{1}{\sqrt{x + h + 9} + \sqrt{x + 9}}$

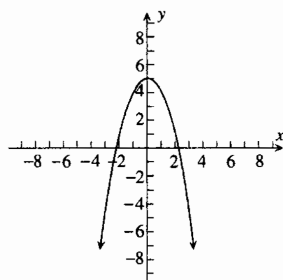
11. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $(-\infty, +\infty)$



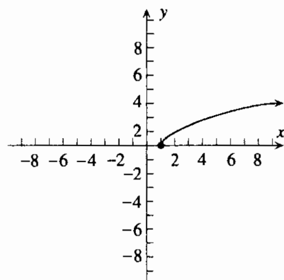
13. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $[0, +\infty)$



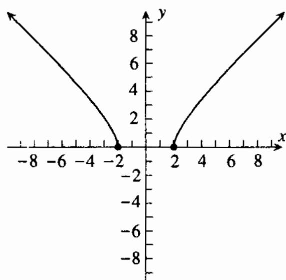
15. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $(-\infty, 5]$



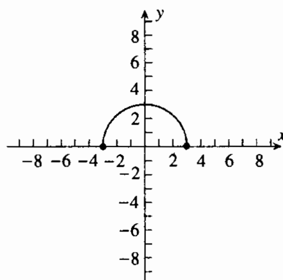
17. dominio: $[1, +\infty)$; contradominio: $[0, +\infty)$



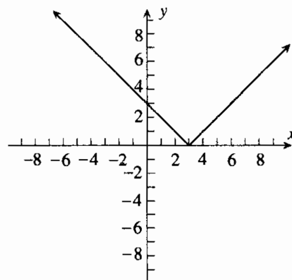
19. dominio: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$; contradominio: $[0, +\infty)$



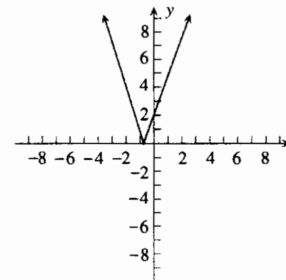
21. dominio: $[-3, 3]$; contradominio: $[0, 3]$



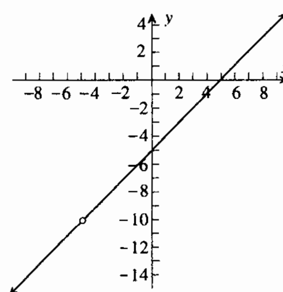
23. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $[0, +\infty)$



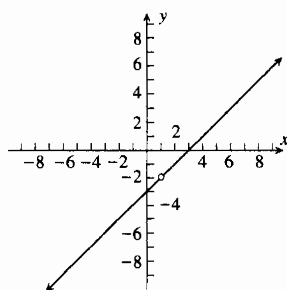
25. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $[0, +\infty)$



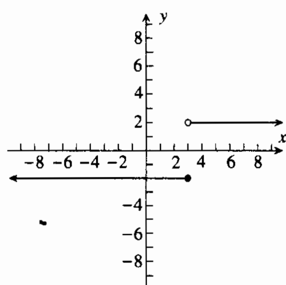
27. dominio: $\{x \mid x \neq -5\}$; contradominio: $\{y \mid y \neq -10\}$



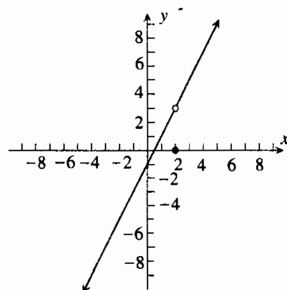
29. dominio: $\{x \mid x \neq 1\}$; contradominio: $\{y \mid y \neq -2\}$



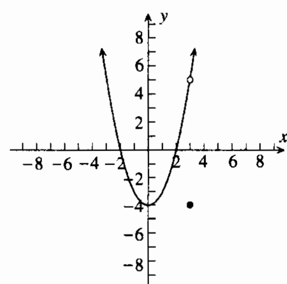
31. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $\{-2, 2\}$



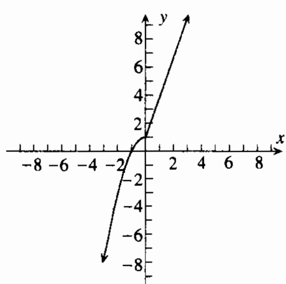
33. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $\{y \mid y \neq 3\}$



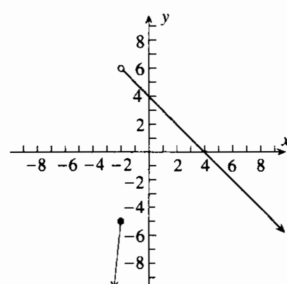
35. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $[-4, +\infty)$



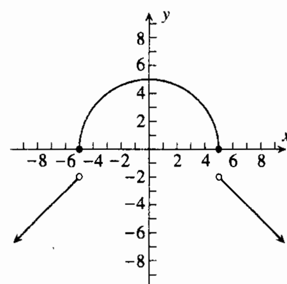
37. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $(-\infty, +\infty)$



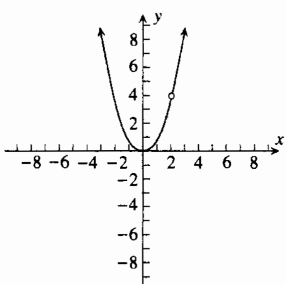
39. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $(-\infty, 6)$



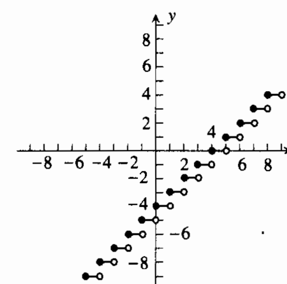
41. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $(-\infty, -2) \cup [0, 5]$



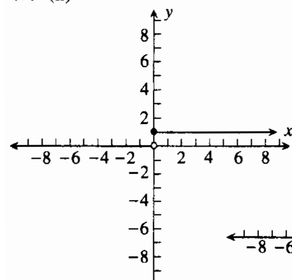
43. dominio: $\{x \mid x \neq 2\}$; contradominio: $[0, +\infty)$



45. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: {enteros}

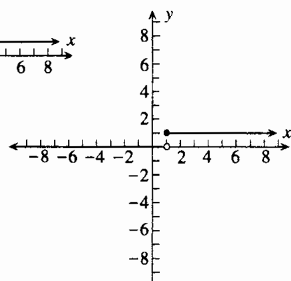


47. **(a)**



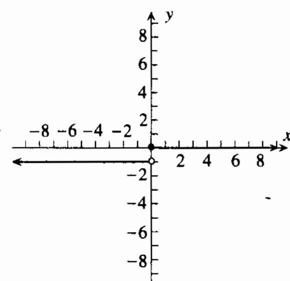
(b) $U(x-1)$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$



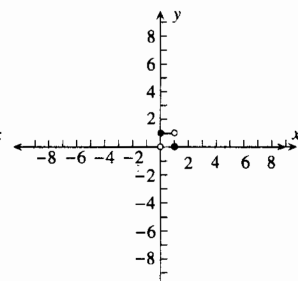
(c) $U(x) - 1$

$$= \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

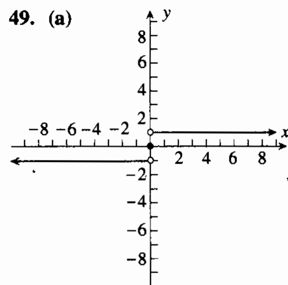


(d) $U(x) - U(x-1)$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

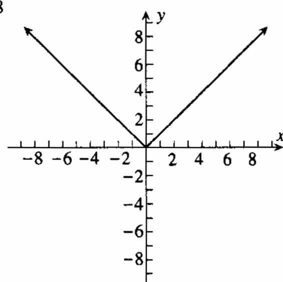


49. **(a)**



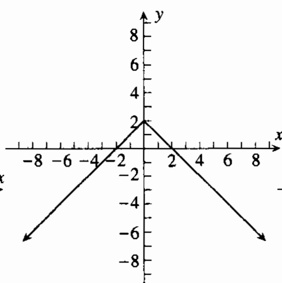
(b) $x \operatorname{sgn} x$

$$= \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } 0 < x \end{cases} = |x|$$



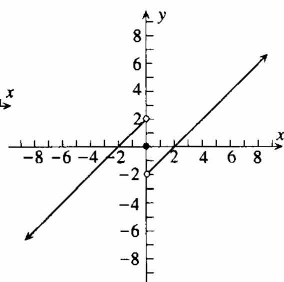
(c) $2 - x \operatorname{sgn} x$

$$= \begin{cases} 2 + x & \text{si } x < 0 \\ 2 - x & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$



(d) $x - 2 \operatorname{sgn} x$

$$= \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

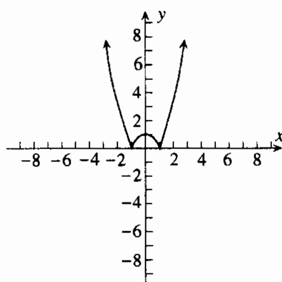


51. $f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

53. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$; o, $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = -|x|$

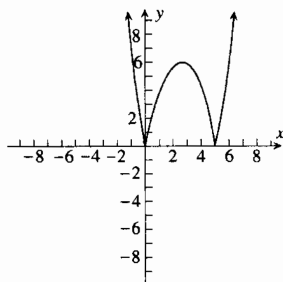
55. **(a)** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$

(b)

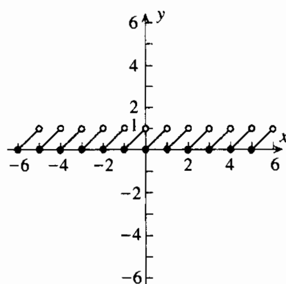


57. **(a)** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & \text{si } x < 0 \\ 5x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ x^2 - 5x & \text{si } 5 < x \end{cases}$

(b)



59. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $[0, 1)$



61. N: $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x < 2; \\ x - 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

V: $f(x) = |x|$ si $-1 \leq x \leq 1$

EJERCICIOS 1.2 (página 19)

1. **(a)** $x^2 + x - 6$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; **(b)** $-x^2 + x - 4$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; **(c)** $x^3 - 5x^2 - x + 5$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; **(d)** $\dfrac{x - 5}{x^2 - 1}$, dominio: $\{x \mid x \neq -1, x \neq 1\}$; **(e)** $\dfrac{x^2 - 1}{x - 5}$, dominio: $\{x \mid x \neq 5\}$

3. **(a)** $\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-x}$, dominio: $\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$; **(b)** $\dfrac{x^2+1}{x^2-x}$, dominio: $\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$;
(c) $\dfrac{x+1}{x^2-x}$, dominio: $\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$; **(d)** $\dfrac{x^2+x}{x-1}$, dominio: $\{x \mid x \neq 1\}$;
(e) $\dfrac{x-1}{x^2+x}$, dominio: $\{x \mid x \neq -1, x \neq 0\}$;

5. **(a)** $\sqrt{x} + x^2 - 1$, dominio: $[0, +\infty)$; **(b)** $\sqrt{x} - x^2 + 1$, dominio: $[0, +\infty)$; **(c)** $\sqrt{x}(x^2-1)$, dominio: $[0, +\infty)$;
(d) $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}$, dominio: $[0, 1) \cup (1, +\infty)$; **(e)** $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}}$, dominio: $(0, +\infty)$

7. **(a)** $x^2 + 3x - 1$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; **(b)** $x^2 - 3x + 3$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; **(c)** $3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$,
dominio: $(-\infty, +\infty)$; **(d)** $\dfrac{x^2+1}{3x-2}$, dominio: $\{x \mid x \neq \frac{2}{3}\}$; **(e)** $\dfrac{3x-2}{x^2+1}$, dominio: $(-\infty, +\infty)$

9. **(a)** $\dfrac{x^2+2x-2}{x^2-x-2}$, dominio: $\{x \mid x \neq -1, x \neq 2\}$; **(b)** $\dfrac{-x^2-2}{x^2-x-2}$, dominio: $\{x \mid x \neq -1, x \neq 2\}$;
(c) $\dfrac{x}{x^2-x-2}$, dominio: $\{x \mid x \neq -1, x \neq 2\}$; **(d)** $\dfrac{x-2}{x^2+x}$, dominio: $\{x \mid x \neq -1, x \neq 0\}$;
(e) $\dfrac{x^2+x}{x-2}$, dominio: $\{x \mid x \neq 2\}$; **11.** 15 **13.** $\frac{5}{3}$

15. **(a)** $x + 5$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; **(b)** $x + 5$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; **(c)** $x - 4$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; **(d)** $x + 14$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; **17.** **(a)** $x^2 - 6$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; **(b)** $x^2 - 10x + 24$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; **(c)** $x - 10$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; **(d)** $x^4 - 2x^2$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; **19.** **(a)** $\sqrt{x^2-4}$, dominio: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$; **(b)** $x - 4$, dominio: $[2, +\infty)$; **(c)** $\sqrt{\sqrt{x-2}-2}$, dominio: $[6, +\infty)$; **(d)** $x^4 - 4x^2 + 2$, dominio: $(-\infty, +\infty)$

21. **(a)** $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, dominio: $(0, +\infty)$; **(b)** $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, dominio: $(0, +\infty)$; **(c)** x, dominio: $\{x \mid x \neq 0\}$; **(d)** $\sqrt[4]{x}$, dominio: $[0, +\infty)$

23. **(a)** $|x + 2|$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; **(b)** $|x| + 2$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; **(c)** $|x|$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; **(d)** $|x + 2| + 2$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; **25.** **(a)** $|x|$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; **(b)** x, dominio: $(-\infty, +\infty)$; **(c)** $\sqrt[4]{x}$, dominio: $[0, +\infty)$; **(d)** $\sqrt[4]{-x}$, dominio: $(-\infty, 0]$; **27.** $f(x) = \sqrt{x-4}$, $g(x) = x^2$; o, $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 4$

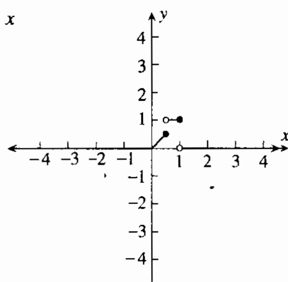
29. $f(x) = x^3$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$; o, $f(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^3$, $g(x) = x - 2$

31. $f(x) = x^4$, $g(x) = x^2 + 4x - 5$; o, $f(x) = (x-5)^4$, $g(x) = x^2 + 4x$ **33.** **(a)** par; **(b)** ninguno de los dos tipos
35. **(a)** impar; **(b)** par **37.** **(a)** impar; **(b)** par **39.** **(a)** impar; **(b)** par; **(c)** par

41. **(a)** $\begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$ **(c)** impar **43.** **(a)** $\begin{cases} 4 & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ -4 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$ **(c)** impar **45.** No

51. $\operatorname{sgn}(U(x)) = U(\operatorname{sgn}(x)) = U(x)$; vea la figura de la respuesta del ejercicio 47(a) de la sección 1.1
53. **(a)** impar; **(b)** par; **(c)** par

55. $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ o si } 1 < x \\ x & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$



57. $2x - 3, -2x + 3$
59. La función definida por $f(x) = 0$

EJERCICIOS 1.3 (página 25)

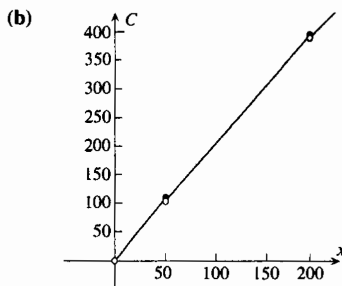
1. **(a)** w trabajadores, P dólares: $P(w) = 67.5w$; **(b)** \$1012.50

3. **(a)** x pie, Ps: $P(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2}}$; **(b)** 1s

5. (**a**) x libras, C dólares:

$$C(x) = \begin{cases} 2.2x & \text{si } 0 < x \le 50 \\ 2.1x & \text{si } 50 < x \le 200 \\ 2.05x & \text{si } 200 < x \end{cases}$$

(**b**)



(**c**) \$110, 107.10, 109.20, 111.30, 420, 414.10, 418.20, 422.30

7. (**a**) x minutos, y centavos: $y(x) = 10 - 30[\![-x]\!]$

(**b**)

(**c**) 40¢, 70¢, \$1, \$1, \$1.30, \$1.60

9. (**a**) $f(t) = \dfrac{2\,000\,000}{(t^2 + 7t + 100)^2}$; (**b**) 78

11. (**a**) El área de la superficie del globo después de t segundos es $36\pi t^2 \text{cm}^2$; (**b**) $576\pi \text{cm}^2 \approx 1810 \text{ cm}^2$

13. (**a**) x metros, A metros cuadrados: $A(x) = 120x - x^2$; (**b**) $[0, 120]$; (**c**) 60 m × 60 m

15. (**a**) x metros, A metros cuadrados: $A(x) = 120x - \frac{1}{2}x^2$; (**b**) $[0, 240]$; (**c**) 120 m × 60 m

17. (**a**) x pulgadas., V pulgadas cúbicas: $V(x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x$; (**b**) $[0, 4]$; (**c**) 1.7 pulg, 91 pulg^3

19. (**a**) x pulgadas., V pulgadas cúbicas: $V(x) = 4x^3 - 54x^2 + 180x$; (**b**) $[0, 6]$; (**c**) 2.21 pulg, 177 pulg^3

21. (**a**) r pulgadas, C dólares: $C(r) = k\left(\dfrac{120}{r} + 4\pi r^2\right)$, donde $\$k/\text{pulg}^2$ es el costo del material para la tapa y el fondo; (**b**) $\{r \mid r > 0\}$; (**c**) 1.68 pulg **23.** (**a**) x pulgadas, A pulgadas cuadradas: $A(x) = 3x + \dfrac{48}{x} + 30$; (**b**) $(0, +\infty)$; (**c**) 6 pulg × 9 pulg

25. (**a**) x pulgadas, V pulgadas cúbicas: $V(x) = \frac{1}{16}x(100 - x)^2$; (**b**) $[20, 100]$; (**c**) 33 pulg × 17 pulg × 17 pulg

27. (**a**) $f(x) = \frac{9}{490\,000}x(5000 - x)$; (**b**) 17.6 personas por día; (**c**) 2500

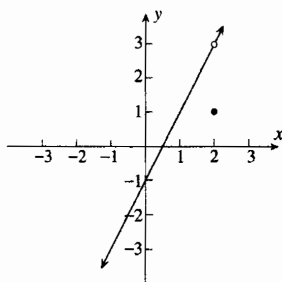
EJERCICIOS 1.4 (página 37)

(Nota: cualquier valor para δ más pequeño que los indicados también es correcto.) **1.** 0.1 **3.** 0.23 **5.** 0.005 **7.** 0.01 **9.** 0.005 **11.** 0.01 **13.** 0.015 **15.** 0.268 **17.** 0.082 **19.** 0.095 **21.** 0.183 **23.** 0.084 **25.** 0.23 **27.** 0.01 **29.** 0.015 **31.** $\frac{1}{14}$ **33.** $\frac{2}{15}$ **35.** $\frac{1}{15}$ **37.** dentro de 1 min **39.** dentro de 0.01 pie **41.** dentro de $\frac{2}{7}$ pulg **43.** dentro de $\frac{1}{8}$ s

EJERCICIOS 1.5 (página 47)

11. 8 **13.** 7 **15.** 5.0 **17.** $\frac{1}{2}$ **19.** $-\frac{1}{22}$ **21.** $\frac{3}{2}$ **23.** $\frac{2}{3}$ **25.** (**a**) 0.3333, 0.2857, 0.2564, 0.2506, 0.2501; 0.2000, 0.2222, 0.2439, 0.2494, 0.2499; (**b**) $\frac{1}{4}$ **27.** (**a**) 0.2500, 0.2000, 0.1549, 0.1441, 0.1430, 0.1429; 0, 0.0769, 0.1304, 0.1416, 0.1427, 0.1428; (**b**) $\frac{1}{7}$ **29.** (**a**) 0.1716, 0.1690, 0.1671, 0.1667, 0.1667; 0.1623, 0.1644, 0.1662, 0.1666, 0.1667; (**b**) $\frac{1}{6}$ **31.** 14 **33.** -6 **35.** $\frac{16}{7}$ **37.** 12 **39.** $\sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{30}$ **41.** $\frac{1}{2}$ **43.** $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ **45.** -1 **49.** 0/0 no está definido; 2 **51.** 0/0 no está definido; $\frac{1}{6}$

53. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$; $f(2) = 1$

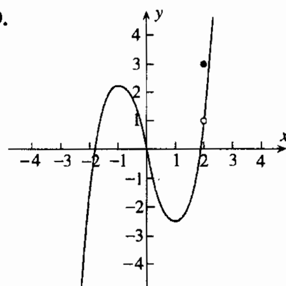


55. (**a**) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \ne 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$; (**b**) 0, 3, 2; (**c**) 0, 3, 6

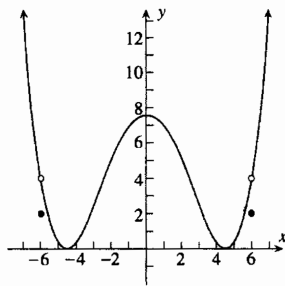
57. (**a**) $f(x) = \begin{cases} 6 & \text{si } x = -4 \\ 7 & \text{si } x = 3 \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{si } x \in [-5, -4) \cup (-4, 3) \cup (3, 5] \end{cases}$;

(**b**) 5, 4, 6, 3; (**c**) 3, 4, 4, 3

59.

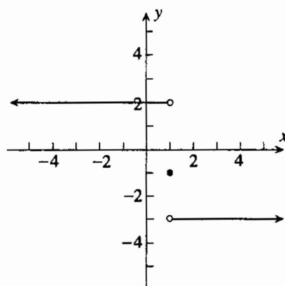


61.

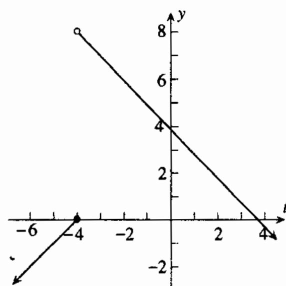


EJERCICIOS 1.6 (página 53)

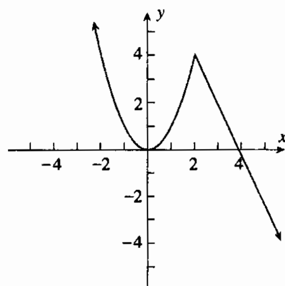
1. (a) −3; (b) 2; (c) no existe porque $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$



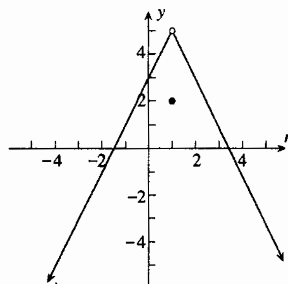
3. (a) 8; (b) 0; (c) no existe porque $\lim_{t\to -4^+} f(t) \neq \lim_{t\to -4^-} f(t)$



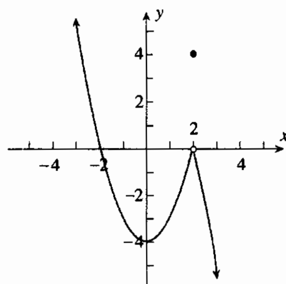
5. (a) 4; (b) 4; (c) 4



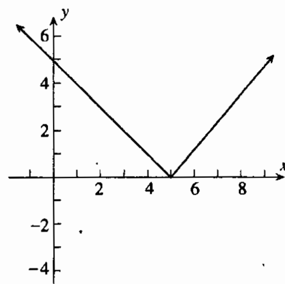
7. (a) 5; (b) 5; (c) 5



9. (a) 0; (b) 0; (c) 0

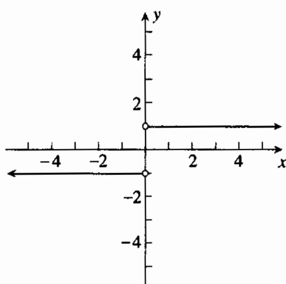


11. (a) 0; (b) 0; (c) 0

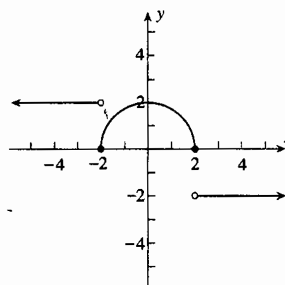


13. (a) −4; (b) −4; (c) −4

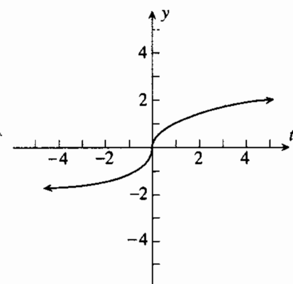
15. (a) 1; (b) −1; (c) no existe porque $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$



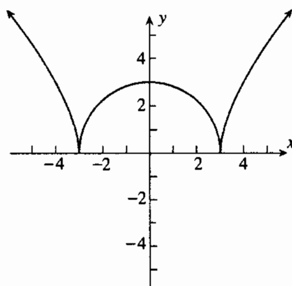
17. (a) 2; (b) 0; (c) no existe porque $\lim_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim_{x\to -2^+} f(x)$; (d) 0; (e) −2; (f) no existe porque $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$



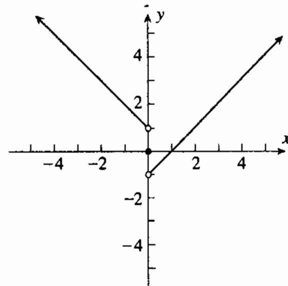
19. **(a)** 0; **(b)** 0; **(c)** 0



21. **(a)** 0; **(b)** 0; **(c)** 0; **(d)** 0; **(e)** 0; **(f)** 0

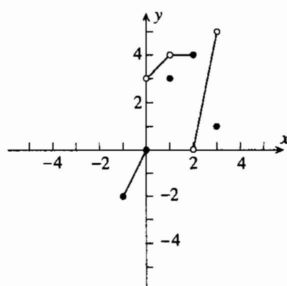


23. **(a)** −2; **(b)** 2; **(c)** no existe
25. **(a)** 2; **(b)** 1; **(c)** no existe
27. **(a)** −1; **(b)** 1; **(c)** no existe



29. −6 **31.** $a = -\frac{3}{2}$, $b = 1$

37.

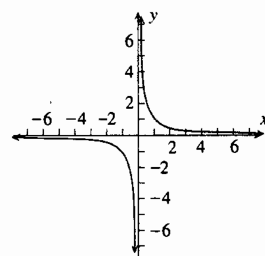


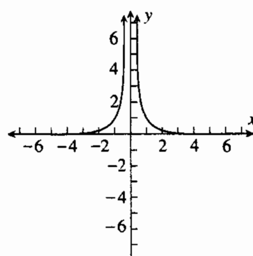
35. **(a)** 0; **(b)** 3; **(c)** 0; **(d)** no existe; **(e)** 5; **(f)** 5; **(g)** 5; **(h)** 2; **(i)** 2; **(j)** 2; **(k)** 0
39. **(a)** 110; **(b)** 105; **(c)** 420; **(d)** 410 **41.** **(a)** 40; **(b)** 70; **(c)** 70; **(d)** 160
43. **(a)** $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$; **(b)** $\lim_{x\to 1^-} g(x) = 1$, $\lim_{x\to 1^+} g(x) = 2$;

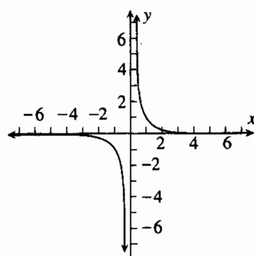
(c) $f(x)g(x) = \begin{cases} x^4 + 3x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$; **(d)** 4

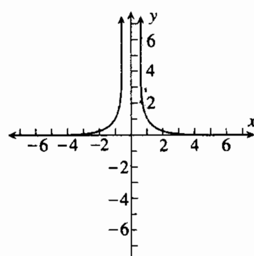
EJERCICIOS 1.7 (página 65)

1. **(a)** 1, 2, 10, 100, 1000, 10000; **(c)** $+\infty$ **3.** **(a)** 1, 4, 100, 10000, 1000000, 100000000; 1, 4, 100, 10000, 1000000, 100000000; **(c)** $+\infty$ **5.** **(a)** −4, −7, −31, −301, −3001, −30,001; **(c)** $-\infty$ **7.** **(a)** −2, −5, −29, −299, −2999, −29999; **(c)** $-\infty$ **9.** **(a)** 5, 9, 41, 401, 4001, 40001; **(c)** $+\infty$ **11.** **(a)** 2.3, 4.3, 20.3, 200.3, 2000.5, 20037; **(c)** $+\infty$
13. $+\infty$ **15.** $-\infty$ **17.** $-\infty$ **19.** $+\infty$ **21.** $-\infty$ **23.** $+\infty$ **25.** $+\infty$ **27.** $-\infty$ **29.** $-\infty$ **31.** $-\infty$
33. **(b)** $-\frac{5}{2}$; **(c)** $-\frac{5}{2}$; **(d)** $-\infty$; **(e)** $+\infty$
35. **(a)** $x = 0$; **(b)** $x = 0$; **(c)** $x = 0$; **(d)** $x = 0$

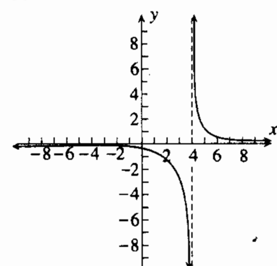


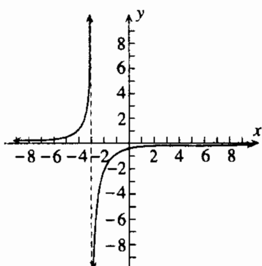


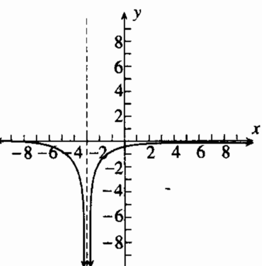


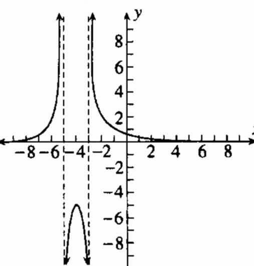


37. $x = 4$ **39.** $x = -3$ **41.** $x = -3$ **43.** $x = -5$, $x = -3$



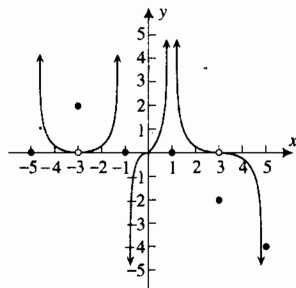






45. **(a)** 0; **(b)** $-\infty$ **(c)** $+\infty$; **(d)** 0; **(e)** $+\infty$; **(f)** $+\infty$; **(g)** $+\infty$; **(h)** 1; **(i)** $-\infty$; **(j)** 0

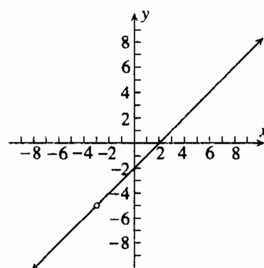
47.



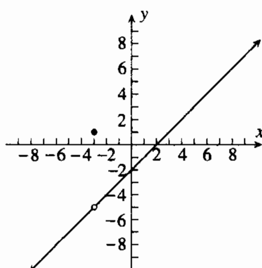
49. $+\infty$

EJERCICIOS 1.8 (página 74)

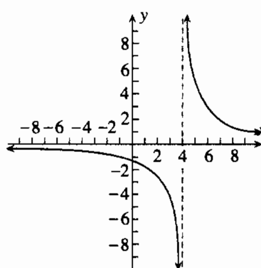
1. -3; $f(-3)$ no existe



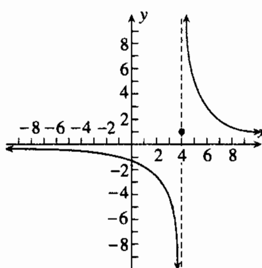
3. -3; $\lim_{x\to-3} g(x) \neq g(-3)$



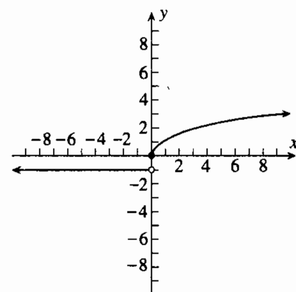
5. 4; $h(4)$ no existe



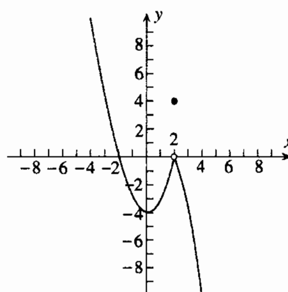
7. 4; $\lim_{x\to4} f(x)$ no existe



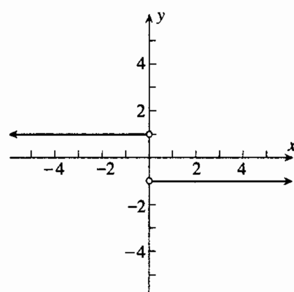
9. 0; $\lim_{x\to0} f(x)$ no existe



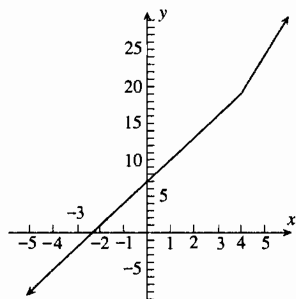
11. 2; $\lim_{t\to2} g(t) \neq g(2)$



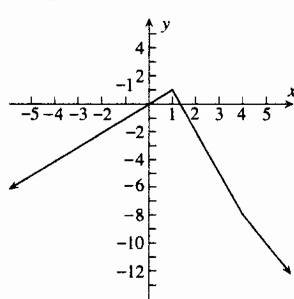
13. 0; $f(0)$ no exite



15. **(a)** removible; **(b)** 4 **17.** **(a)** removible; **(b)** 6 **19.** **(a)** removible; **(b)** $\frac{1}{6}$ **21.** **(a)** removible; **(b)** $-\frac{1}{4}\sqrt{2}$
23. **(a)** removible; **(b)** $\frac{1}{12}$ **25.** **(a)** removible; **(b)** 1 **27.** **(a)** esencial **29.** todos los números reales
31. todos los números reales distintos de 3 **33.** todos los números reales distintos de -2 y 2
35. todos los números reales distintos de 2 **37.** todos los números reales distintos de -1 y 3 **39.** **(a)** todos los números reales
41. $k = 5$

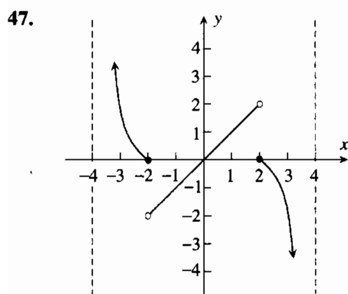


43. $c = -3, k = 4$



45. **(a)** $\lim_{x\to-3^-} f(x) \neq \lim_{x\to-3^+} f(x)$, esencial; **(b)** $\lim_{x\to1} f(x) \neq f(1)$, removible: defina $f(1) = 5$; **(c)** $\lim_{x\to3^-} f(x)$ no existe, esencial

47.



49. 50: $\lim_{x\to 50^-} f(x) \neq \lim_{x\to 50^+} f(x)$; 200: $\lim_{x\to 200^-} f(x) \neq \lim_{x\to 200^+} f(x)$

51. $\lim_{x\to n^-} g(x) \neq \lim_{x\to n^+} g(x)$ para cualquier número entero positivo n

59. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } a \leq x \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < a \\ 0 & \text{si } a \leq x \end{cases}$

EJERCICIOS 1.9 (página 83)

1. **(a)** $(f \circ g)(x) = \sqrt{9 - x^2}$, continua en todos los números de $(-3, 3)$;
(b) $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 16}$, continua en todos los números de $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$

3. **(a)** $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 2}}$, continua en todos los números de $(2, +\infty)$;
(b) $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 2}$, continua en todos los números positivos diferentes de 4

5. $(f \circ g)(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{|x| - 1}}$, continua en todos los números de $(-2, -1) \cup (1, 2)$

7. todos los números reales distintos de -5; continua en $(3, 7)$, $(-5, +\infty)$, $[-10, -5)$; discontinua en $[-6, 4]$, $(-\infty, 0)$, $[-5, +\infty)$

9. todos los números reales distintos de 1 y -1; continua en $(0, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, 0]$, $(1, +\infty)$; discontinua en $[0, 1]$, $(-\infty, -1]$

11. $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$; continua en $(-\infty, -3)$, $(3, +\infty)$, $(-\infty, -3]$, $[3, +\infty)$; discontinua en $(-3, 3)$

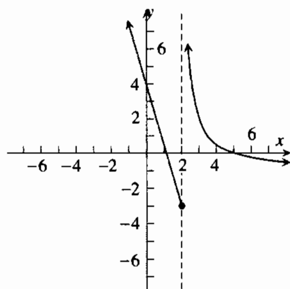
13. todos los números reales distintos de 1; continua en $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$; discontinua en $(-\infty, 1]$, $[-1, 1]$, $(-1, +\infty)$

15. $[-2, 2]$; continua en $(-2, 2)$, $[-2, 2]$, $(-2, 2]$, $[-2, 2)$; discontinua en $(-\infty, -2]$ y $(2, +\infty)$

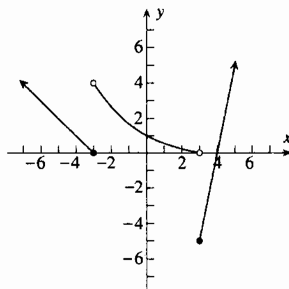
17. **(a)** $[-3, 3]$; **(b)** $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$ **19.** **(a)** $(2, +\infty)$; **(b)** $[0, 4) \cup (4, +\infty)$ **21.** $[-2, -1) \cup (1, 2]$

23. $(-\infty, -2) \cup [-2, 2] \cup (2, +\infty)$

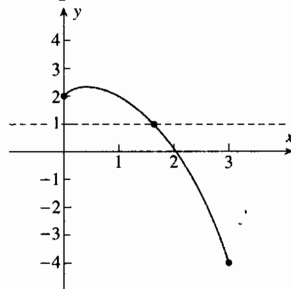
25.



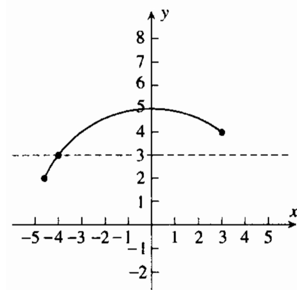
27.



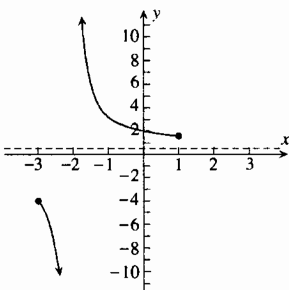
35. $c = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$



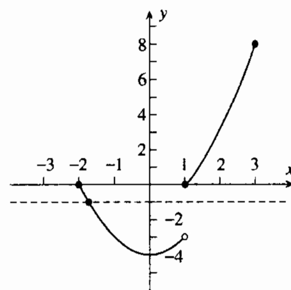
37. $c = -4$



39. f es discontinua en -2



41. f es discontinua en 1



43. $-2.67, 0.52, 2.15$ **45.** $-1, 1.17$ **49.** $[0, c)$ **55.** no

EJERCICIOS 1.10 (página 92)

1. 4 **3.** $\frac{9}{7}$ **5.** $\frac{3}{5}$ **7.** $\frac{1}{9}$ **9.** 0 **11.** 0 **13.** 12 **15.** $\frac{1}{2}$ **17.** 0 **19.** 3 **21.** $+\infty$ **23.** 0
25. -1 **29.** 0 **31.** -4 **33.** 1 **35.** 0 **45.** no existe

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 1 (página 95)

1. **(a)** 3; **(b)** 0; **(c)** -5; **(d)** $-x^2 + 2x + 3$; **(e)** $4 - x^4$; **(f)** $-2x - h$

3. **(a)** $\sqrt{x+2} + x^2 - 4$, dominio: $[-2, +\infty)$; **(b)** $\sqrt{x+2} - x^2 + 4$, dominio: $[-2, +\infty)$;
(c) $\sqrt{x+2}\,(x^2 - 4)$, dominio: $[-2, +\infty)$; **(d)** $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2 - 4}$, dominio: $(-2, 2) \cup (2, +\infty)$;
(e) $\dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2}}$, dominio: $(-2, +\infty)$; **(f)** $\sqrt{x^2 - 2}$, dominio: $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}, +\infty)$; **(g)** $x - 2$, dominio: $(-2, +\infty)$;

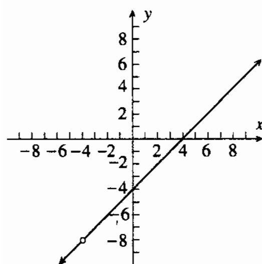
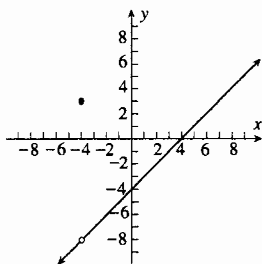
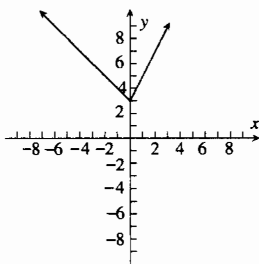
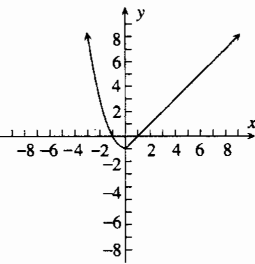
5. **(a)** $\dfrac{1}{x^2} + \sqrt{x}$, dominio: $(0, +\infty)$; **(b)** $\dfrac{1}{x^2} - \sqrt{x}$, dominio: $(0, +\infty)$; **(c)** $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$, dominio: $(0, +\infty)$; **(d)** $\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}$,
dominio: $(0, +\infty)$; **(e)** $\sqrt{x^5}$, dominio: $(0, +\infty)$; **(f)** $\dfrac{1}{x}$, dominio: $(0, +\infty)$; **(g)** $\dfrac{1}{|x|}$, dominio:

7. $x \neq 0$ **(a)** impar; **(b)** par; **(c)** ninguno de los dos tipos; **(d)** impar

9. **(a)** dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $(-\infty, +\infty)$; **(b)** dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $[-4, +\infty)$;
(c) dominio: $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$, contradominio: $[0, +\infty)$; **(d)** dominio: $[-4, 4]$, contradominio: $[0, 4]$;
(e) dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $[0, +\infty)$; **(f)** dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $(-\infty, 5]$

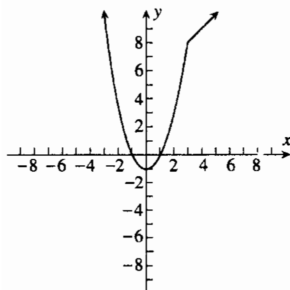
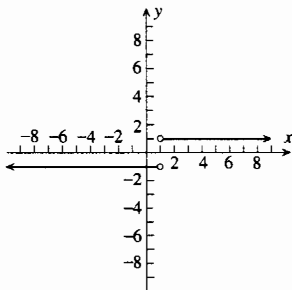
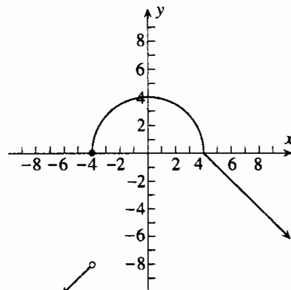
11. **(a)** dominio: $\{x \mid x \neq -4\}$; contradominio: $\{y \mid y \neq -8\}$ **(b)** dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $\{y \mid y \neq -8\}$

13. **(a)** dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $[3, +\infty)$ **(b)** dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $[-1, +\infty)$

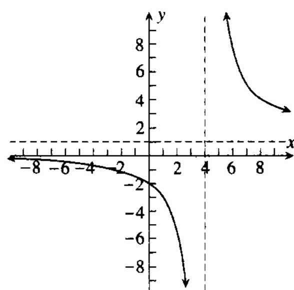
(Nota para los ejercicios 15–25: cualquier valor de δ menor que los indicados también es correcto).

15. **(a)** 0.025; **(c)** 0.025 **17.** **(a)** 0.1; **(c)** 0.1 **19.** **(a)** 0.074; **(b)** 0.06 **21.** $\frac{1}{2}\epsilon$ **23.** $\frac{1}{3}\epsilon$ **25.** $\frac{1}{4}\epsilon$
27. 9 **29.** -6 **31.** $\sqrt[3]{2}$ **33.** $-\frac{1}{6}$ **35.** $-\frac{5}{2}$ **37.** $\frac{1}{3}$ **39.** $\frac{3}{10}$ **41.** $-\infty$
43. **(a)** 8; **(b)** 8; **(c)** 8; **45.** **(a)** -1; **(b)** 1; **(c)** no existe **47.** **(a)** -8; **(b)** 0; **(c)** no existe

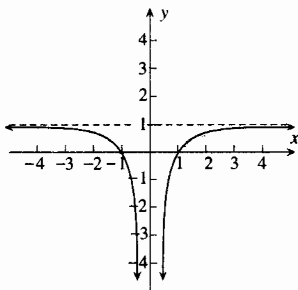




49. **(a)** $+\infty$; **(b)** $-\infty$ **51.** **(a)** $+\infty$; **(b)** $-\infty$ **53.** **(a)** $+\infty$; **(b)** $-\infty$ **55.** $\frac{1}{3}$ **57.** $\frac{5}{2}$ **59.** 0 **61.** $\frac{1}{3}$

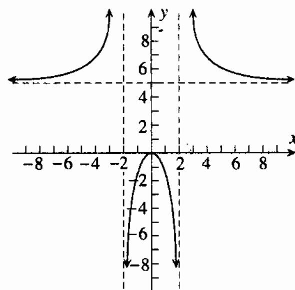
63. $x = 4$



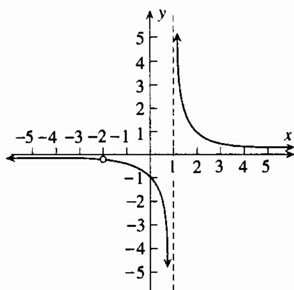
65. $x = 0$



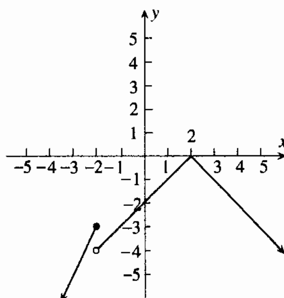
67. $x = 2, x = -2$



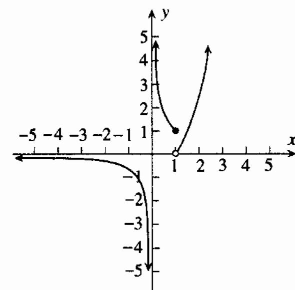
69. $-2, 1$; $f(-2)$ y $f(1)$ no existen



71. -2; $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$ no existe



73. 0, 1; $h(0)$ no existe, $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$ no existe



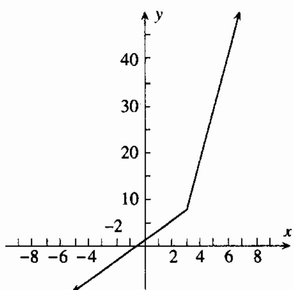
75. removible; $\frac{6}{5}$ **77.** esencial **79.** removible; -1 **81.** removible; 6

83. **(a)** $(f \circ g)(x) = \sqrt{25 - x^2}$, continua en todos los números de $(-5, 5)$;

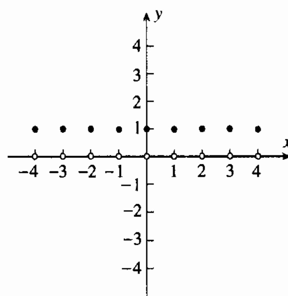
(b) $(f \circ g)(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{3 - |x|}}$, continua en todos los números de $(-3, -2) \cup (2, 3)$;

(c) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ -1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, continua en todos los números reales diferentes de -1 y 1

85. $a = 10, b = -23$



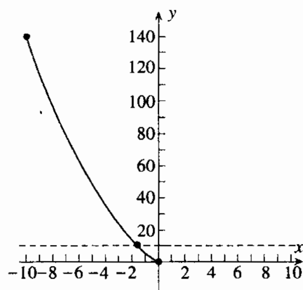
87. **(b)** todos los valores de a; **(c)** en todos los números reales que no son enteros



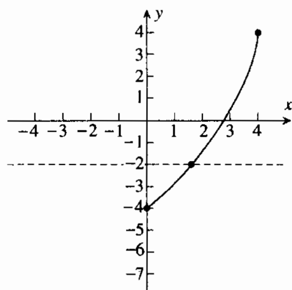
89. **(a)** $[-5, 5]$; **(b)** $(-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$

91. **(a)** $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$; **(b)** $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

93. $2 - \sqrt{13} \approx -1.6056$

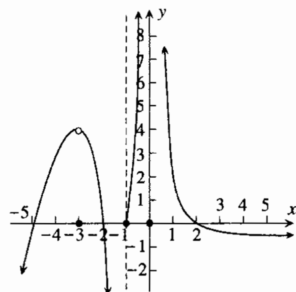


95. $-1 + \sqrt{7} \approx 1.6458$

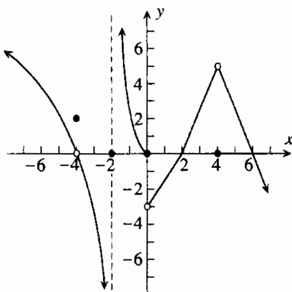


97. **(a)** 0; **(b)** $-\infty$; **(c)** 3; **(d)** $-\infty$; **(e)** $+\infty$; **(f)** 1; **(g)** 4; **(h)** -3, removible, $f(-3) = 0$; -2, esencial; 0, removible, $f(0) = 3$; 2, esencial; 3, esencial

99.



101.

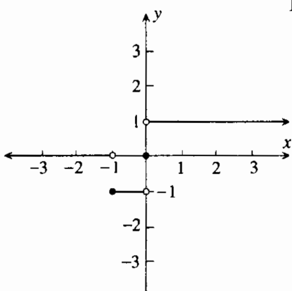


103. **(a)** corte cuadrados de x pulgadas del lado, $V = (14 - 2x)(18 - 2x)x$; **(b)** $[0, 7]$; **(c)** 2.60 pulg, 293 pulg^3

105. **(a)** x pulgadas de ancho, $A = 82 + 8x + \dfrac{200}{x}$; **(b)** $(0, +\infty)$; **(d)** 9 m de ancho por 18 m de largo

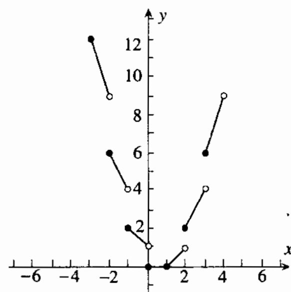
107. $F(x) = \begin{cases} -1 \cdot 0 = 0 & \text{si } x < -1 \\ -1 \cdot 1 = -1 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 0 \cdot 1 = 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 \cdot 1 = 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

F es discontinua en -1 y 0 porque los límites por la izquierda y por la derecha son distintos en esos puntos



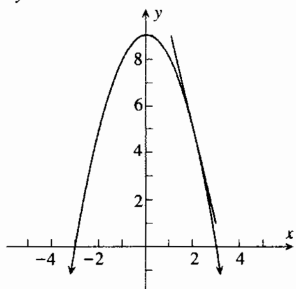
109. 0

111. **(a)** sí; **(b)** sí

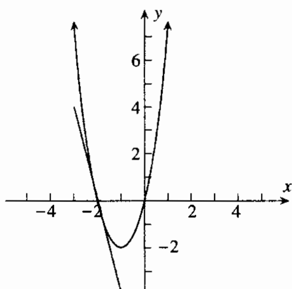


EJERCICIOS 2.1 (página 107)

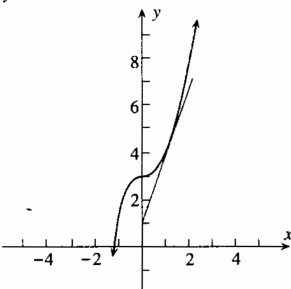
1. $y = -4x + 13$



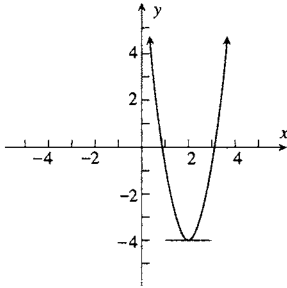
3. $y = -4x - 8$



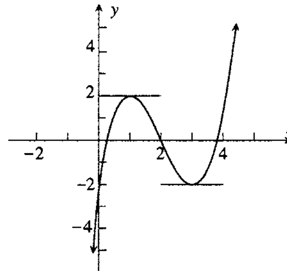
5. $y = 3x + 1$



7. (**a**) $6x_1 - 12$; (**b**) $(2, 4)$



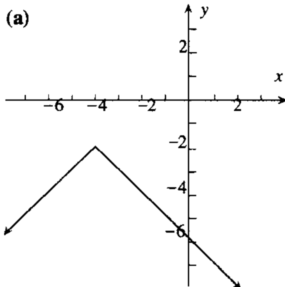
9. (**a**) $3x_1^2 - 12x_1 + 9$; (**b**) $(1, 2), (3, -2)$



11. tangente: $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$; normal: $y = -4x + 14$ **13.** tangente: $y = -10x - 16$; normal: $y = \frac{1}{10}x + \frac{21}{5}$
15. tangente: $y = -x + 3$; normal: $y = x - 1$
17. (**a**) y (**c**) 5.30, 5.27, 5.24, 5.21, 5.18, 5.15, 5.12, 5.09, 5.06, 5.03, 4.70, 4.73, 4.76, 4.79, 4.82, 4.85, 4.88, 4.91, 4.94, 4.97; (**b**) y (**d**) 5
19. (**a**) y (**c**) −0.2516, −0.2514, −0.2513, −0.2511, −0.2509, −0.2508, −0.2506, −0.2505, −0.2503, 0.2502, −0.2485, −0.2486 −0.2488, −0.2489, −0.2491, −0.2492, −0.2494, −0.2495, −0.2497, −0.2498; (**b**) y (**d**) $-\frac{1}{4}$
21. $-\frac{1}{2}$ **23.** 1 **25.** 0 **27.** 0 **29.** −1 **31.** 0 **33.** 7 **35.** $5 - 4x$ **37.** $-3x^2$
39. $\dfrac{-13}{(3r - 2)^2}$ **41.** $3 - \dfrac{12}{x^3}$ **43.** $-\frac{1}{2}(x - 1)^{-3/2}$ **45.** $y = 8x - 5$ **47.** $4x - 4y = 1$ **51.** $g(a)$ **53.** $2a$

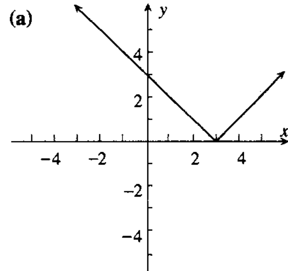
EJERCICIOS 2.2 (página 116)

1. (**a**)



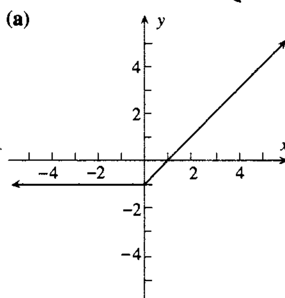
(**b**) sí;
(**c**) 1, −1;
(**d**) no

3. (**a**)



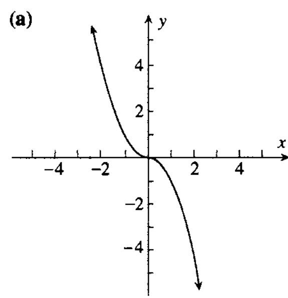
(**b**) sí;
(**c**) −1, 1;
(**d**) no

5. (**a**)



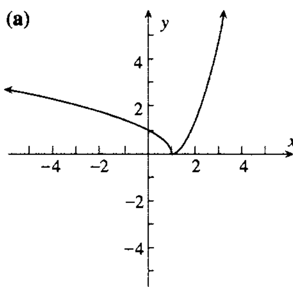
(**b**) sí;
(**c**) 0, 1;
(**d**) no

7. (**a**)



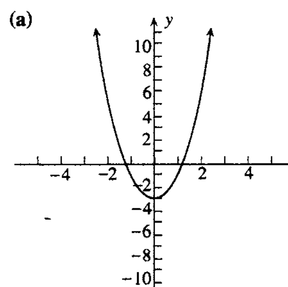
(**b**) sí;
(**c**) 0, 0;
(**d**) sí

9. (**a**)



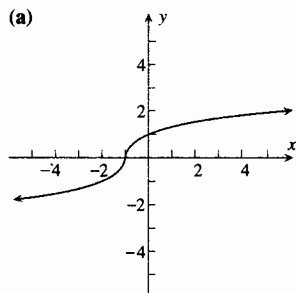
(**b**) sí;
(**c**) no existe, 0;
(**d**) no

11. (**a**)



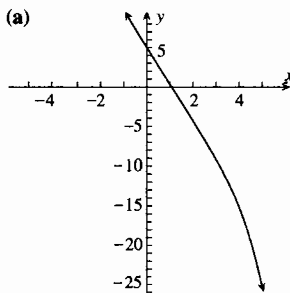
(**b**) sí;
(**c**) 8, 8;
(**d**) sí

13. **(a)**



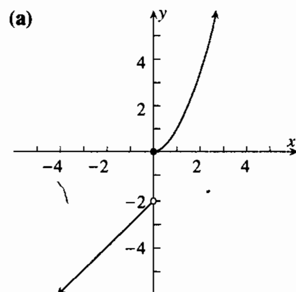
(b) sí;
(c) ninguno de los dos existe;
(d) no

15. **(a)**



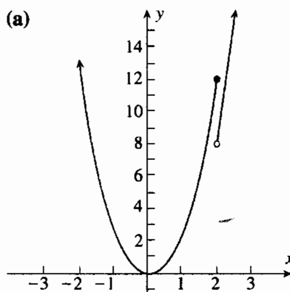
(b) sí;
(c) −6, −6;
(d) si

17. **(a)**



(b) no;
(c) 1, 0;
(d) no

19. **(a)**



(b) no;
(c) 12, 12;
(d) no

21. **(a)** $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ x + 1 & \text{si } -1 < x \leq 0; \\ -x + 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

(b) 2; **(c)** 1; **(d)** 1;
(e) −1; **(f)** −1;
(g) 1; **(h)** −1, 0, 1

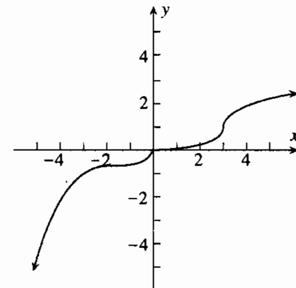
23. **(a)** $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{si } x \leq -1 \\ -x^{1/3} & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ x^{1/3} & \text{si } 0 < x \leq 1; \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

(b) $\frac{1}{2}$; **(c)** $-\frac{1}{3}$;
(d) $-\infty$; **(e)** $+\infty$;
(f) $\frac{1}{3}$; **(g)** 1; **(h)** −1, 0, 1

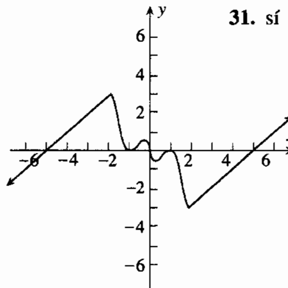
25. **(a)** $f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ -x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1; \\ x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

(b) −2; **(c)** −2;
(d) 0; **(e)** 0;
(f) −2; **(g)** 1; **(h)** 1

27.

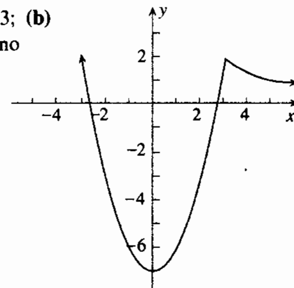


29.

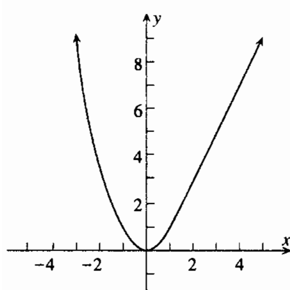


31. sí

33. **(a)** 3; **(b)**
(c) no



35. $a = 2, b = -1$



37. **(a)** $f(x) = \begin{cases} 15x & \text{si } 0 \leq x \leq 150 \\ 22.5x - 0.05x^2 & \text{si } 150 < x \leq 250 \end{cases}$; **(c)** no

39. **(a)** $f(x) = \begin{cases} 600x & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ 900x - 15x^2 & \text{si } 20 < x \leq 60 \end{cases}$; **(c)** no

43. **(a)** 0; **(b)** 1; **(c)** no existe

47. **(a)** 0 para todos los números reales; **(b)** 0 si $x \neq 0$

EJERCICIOS 2.3 (página 122)

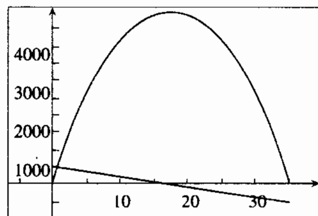
1. todos son 5 **3.** **(a)** −0.250019, −0.250016, −0.250012, −0.250009, −0.250006, −0.250005, −0.250004, −0.250002, −0.250001, −0.250000; los mismos 10 números; $-\frac{1}{4}$ **9.** **(a)** 2; **(b)** $y = 2x - 3$ **11.** **(a)** 4; **(b)** $y = 4x - 13$
13. **(a)** $-\frac{5}{3} \approx -1.6667$; **(b)** $y = -\frac{5}{3}x - \frac{16}{3} \approx -1.6667x - 5.3333$ **15.** **(a)** 0.4; **(b)** $y = 0.4x - 0.4$
17. **(a)** 1.3818; **(b)** $y = 1.3818x - 0.5403$ **19.** **(a)** −0.8317; **(b)** $y = -0.8317x + 1.2591$
23. (b) y (d) $x > 0$; (c) y (e) $x < 0$ **25.** (b) y (d) $x < 0$; (c) y (e) $x > 0$ **27.** **(a)** 100 **29.** **(b)** 0

EJERCICIOS 2.4 (página 131)

1. 7 **3.** $-2 - 2x$ **5.** $3x^2 - 6x + 5$ **7.** $x^7 - 4x^3$ **9.** $t^3 - t$ **11.** $4\pi r^2$
13. $2x + 3 - \dfrac{2}{x^3}$ **15.** $16x^3 + \dfrac{1}{x^5}$ **17.** $-\dfrac{6}{x^3} - \dfrac{20}{x^5}$ **19.** $3\sqrt{3}s^2 - 2\sqrt{3}s$ **21.** $70x^6 + 60x^4 - 15x^2 - 6$
23. $-18y^2(7 - 3y^3)$ **25.** $10x^4 - 24x^3 + 12x^2 + 2x - 3$ **27.** $-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ **29.** $-\dfrac{4(x+1)}{(x-1)^3}$ **31.** $\dfrac{5(1-2t^2)}{(1+2t^2)^2}$
33. $\dfrac{48y^2}{(y^3+8)^2}$ **35.** $\dfrac{6(x^2+10x+1)}{(x+5)^2}$ **37.** $f'(x) = 30x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 10x - 8$; $f''(x) = 120x^3 + 36x^2 - 12x + 10$; $f'''(x) = 360x^2 + 72x - 12$; $f^{(4)}(x) = 720x + 72$; $f^{(5)}(x) = 720$; $f^{(n)}(x) = 0$ si $n \geq 6$ **39.** $-10t^{-6}$
41. $2 + 6x^{-4}$ **43.** $y = 12x - 20$ **45.** $y = -\frac{1}{20}x - \frac{24}{5}$ **47.** $y = 2x - 3$ **49.** $x + 8y + 2 = 0$; $x + 8y - 2 = 0$
51. $28x - y = 99$; $4x - y = 3$ **55.** $2(3x + 2)(6x^2 + 2x - 3)$ **57.** $3(2x^2 + x + 1)^2(4x + 1)$

EJERCICIOS 2.5 (página 142)

1. $v(t) = 6t$; 18 **3.** $v(t) = -\dfrac{1}{4t^2}$; −1 **5.** $v(t) = 6t^2 - 2t$; 8 **7.** $v(t) = \dfrac{8}{(4+t)^2}$; $\dfrac{1}{2}$
9. $t < -3$, se mueve hacia la derecha; $-3 < t < 1$, se mueve hacia la izquierda; $t > 1$, se mueve hacia la derecha; cambia de dirección cuando $t = -3$ y $t = 1$
11. $t < -2$, se mueve hacia la derecha; $-2 < t < \frac{1}{2}$, se mueve hacia la izquierda; $t > \frac{1}{2}$, se mueve hacia la derecha; cambia de dirección cuando $t = -2$ y $t = \frac{1}{2}$
13. $t < -3$, se mueve hacia la izquierda; $-3 < t < 3$, se mueve hacia la derecha; $t > 3$, se mueve hacia la izquierda; cambia de dirección cuando $t = -3$ y $t = 3$
17. **(a)** $s = -16t^2 + 256$; **(b)** −32 pie/s, −64 pie/s; **(c)** 4 s; **(d)** −128 pie/s
19. **(a)** $s = -16t^2 - 48t + 160$; **(b)** −80 pie/s, −96 pie/s; **(c)** 2 s; **(d)** −112 pie/s
21. **(a)** $s = -16t^2 + 560t$; **(b)** y **(c)** 17.5 s, 4900 pie; **(d)** 240 pie/s, −240 pie/s; **(e)** 240 pie/s, 240 pie/s; **(f)** 560 pie/s
23.



25. $\frac{3}{2}$s, $\frac{7}{4}$pie; $-\frac{1}{4}$pie/s
27. $v = 3t^2 - 18t + 15$; $a = 6t - 18$; cuando $0 < t < 1$, la partícula está a la derecha del origen, se mueve hacia la derecha, la velocidad es decreciente, y la rapidez es decreciente; cuando $1 < t < \frac{1}{2}(9 - \sqrt{21})$, la partícula está a la derecha del origen, se mueve hacia la izquierda, la velocidad es decreciente, y la rapidez es creciente; cuando $\frac{1}{2}(9 - \sqrt{21}) < t < 3$, la partícula está a la izquierda del origen, se mueve hacia la izquierda, la velocidad es decreciente, y la rapidez es creciente; cuando $3 < t < 5$, la partícula está a la izquierda del origen, se mueve hacia la izquierda, la velocidad es creciente, y la rapidez es decreciente; cuando $5 < t < \frac{1}{2}(9 + \sqrt{21})$, la partícula está a la izquierda del origen, se mueve hacia la derecha, la velocidad es creciente, y la rapidez es creciente; cuando $\frac{1}{2}(9 + \sqrt{21}) < t$, la partícula está a la derecha del origen, se mueve hacia la derecha, la velocidad es creciente, y la rapidez es creciente
31. **(a)** 44 pie; **(b)** −22 pie/s; **(c)** 22 pie/s; **33.** **(a)** 8.25 m/s; **(b)** 12.96 m/s; **35.** 160 cm/s;

EJERCICIOS 2.6 (página 150)

1. **(a)** 8.6; **(b)** 8.3; **(c)** 8.1; **(d)** 8.05; **(e)** 8 **3.** **(a)** 65 000 000k; **(b)** 32 000 000k **5.** **(a)** $2\pi r$; **(b)** 2π **7.** $\frac{5}{32}\pi x^2$
9. **(a)** $1.2 - 0.24t$; **(b)** 101.12°, 0.48°/día; **(c)** 100.52°, −0.72°/día; **(d)** 101.6° en 5 días **11.** **(a)** 9πμm³/μm; **(b)** 16πμm³/μm
13. **(a)** 12π μm²/μm; **(b)** 16π μm²/μm **15.** **(a)** −2.9°/hr; **(b)** −3°/hr **17.** **(a)** 18 750 litros/min; **(b)** 17 500 litros/min
19. **(a)** $C'(x) = 3 + 2x$; **(b)** \$83; **(c)** \$84 **21.** **(a)** $R'(x) = 600 - \frac{3}{20}x^2$; **(b)** \$540; **(c)** \$536.95
23. **(a)** \$3.6 millones por año; **(b)** 23.1%; **(c)** \$6.8 millones por año; **(d)** 18.7%
25. **(a)** 920 personas por año; **(b)** 6.1%; **(c)** 1400 personas por año; **(d)** 6.4%
27. **(a)** es ventajoso; **(b)** no es ventajoso; **(c)** 90; **29.** $y'(-1) = 5$, $y'(\frac{1}{2}) = -\frac{7}{4}$
31. **(a)** 3.2 m/min; **(b)** 16 m/min; **(c)** 16 m/min

EJERCICIOS 2.7 (página 160)

3. $3\cos x$ **5.** $\sec^2 x - \csc^2 x$ **7.** $2(\cos t - t\,\text{sen}\,t)$ **9.** $x\cos x$ **11.** $4\cos 2x$ **13.** $-x^2\,\text{sen}\,x$
15. $3\sec x\,(2\tan^2 x + 1)$ **17.** $-\text{sen}\,y\cot y - \cos y\csc^2 y$
19. $-\dfrac{2(z+1)\,\text{sen}\,z + 2\cos z}{(z+1)^2}$ **21.** $\dfrac{1}{\cos x - 1}$ **23.** $\dfrac{1 - 4\sec t + \text{sen}^2\,t}{\cos t(\cos t - 4)^2}$ **25.** $\dfrac{2\cos y}{(1 - \text{sen}\,y)^2}$
27. $(1 - \cos x)(x + \cos x) + (1 - \text{sen}\,x)(x - \text{sen}\,x)$ **29.** $-\dfrac{5\csc t\cot t}{(\csc t + 2)^2}$ **31.** 1 **33.** $-\dfrac{2}{\pi}$ **35.** π^2 **37.** 2
39. $\sqrt{2}$ **41.** $-\frac{10}{3}$
43. **(a)** 0.0226, 0.2674, 0.4559, 0.4956, 0.4995; 0.8188, 0.6915, 0.5424, 0.5043, 0.5006; **(b)** $\frac{1}{2}$
45. **(a)** 2.2305, 2.0203, 2.0020, 2.0002, 2.0000; 1.8237, 1.9803, 1.9980, 1.9998, 2.0000; **(b)** 2
47. **(a)** −0.4771, −0.4886, −0.4977, −0.4989, −0.4998; −0.5224, −0.5113, −0.5023, −0.5011, −0.5002; **(b)** $-\frac{1}{2}$
49. **(a)** 0.4929, 0.5736, 0.6468, 0.6567, 0.6647; 0.9116, 0.7770, 0.6872, 0.6768, 0.6687; **(b)** $\frac{2}{3}$
51. **(a)** $x - y = 0$; **(b)** $x - 2y + \sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi = 0$; **(c)** $x + y - \pi = 0$
53. **(a)** $x - y = 0$; **(b)** $4x - 2y + 2 - \pi = 0$; **(c)** $4x - 2y - 2 + \pi = 0$
55. **(a)** $4\cos t$; **(b)** $v(0) = 4,\ v(\frac{1}{3}\pi) = 2,\ v(\frac{1}{2}\pi) = 0,\ v(\frac{2}{3}\pi) = -2,\ v(\pi) = -4$
57. **(a)** $3\,\text{sen}\,t$; **(b)** $v(0) = 0,\ v(\frac{1}{6}\pi) = \frac{3}{2},\ v(\frac{1}{3}\pi) = \frac{3}{2}\sqrt{3},\ v(\frac{1}{2}\pi) = 3,\ v(\frac{2}{3}\pi) = \frac{3}{2}\sqrt{3},\ v(\frac{5}{6}\pi) = \frac{3}{2},\ v(\pi) = 0$
59. **(a)** $\frac{1}{9}\sqrt{2}\,W$; **(b)** $2W$

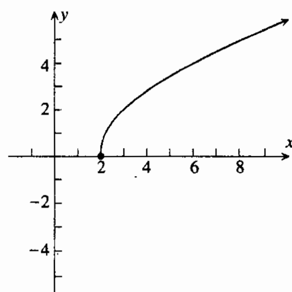
EJERCICIOS 2.8 (página 170)

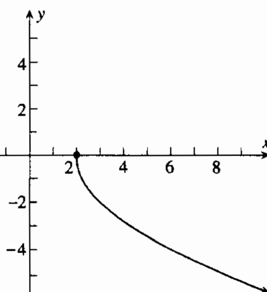
1. $6(2x+1)^2$ **3.** $8(x+2)(x^2+4x-5)^3$ **5.** $2(2t^4 - 7t^3 + 2t - 1)(8t^3 - 21t^2 + 2)$
7. $\dfrac{-4x}{(x^2+4)^3}$ **9.** $-12(\text{sen}\,3x + \cos 4x)$ **11.** $2\sec 2x\tan^3 2x$ **13.** $2\sec^2 x\tan x(2\tan^2 x + 1)$
15. $4\cot t\csc^2 t$ **17.** $= \dfrac{18(x-7)}{(x+2)^3}$ **19.** $6t\ \text{sen}(6t^2 - 2)$ **21.** $6(\tan^2 x - x^2)^2(\tan x\sec^2 x - x)$
23. $-12\cos 3x\,\text{sen}(\text{sen}\,3x)$ **25.** $y = 24x - 39$ **27.** **(a)** $v = \frac{3}{2}\pi\cos\frac{1}{4}\pi t,\ a = -\frac{3}{8}\pi^2\,\text{sen}\,\frac{1}{4}\pi t$; **(c)** $A = 6, p = 8, f = \frac{1}{8}$
29. **(a)** $v = -8\pi\,\text{sen}\,\pi(2t - \frac{1}{3}),\ a = -16\pi^2\cos\pi(2t - \frac{1}{3})$; **(c)** $A = 4, p = 1, f = 1$
31. **(a)** $-bk\,\text{sen}(kt + c)$; **(b)** $-bk^2\cos(kt + c)$ **33.** **(a)** $v = 5\pi\cos\pi t - 3\pi\,\text{sen}\,\pi t,\ a = -5\pi^2\,\text{sen}\,\pi t - 3\pi^2\cos\pi t$
35. **(a)** $v = -20\,\text{sen}\,4t,\ a = -80\cos 4t$ **39.** **(a)** $\frac{1}{28}$; **(b)** $\frac{4}{7}$ **41.** −0.6 rad/s
43. **(a)** $6\,000\cos\frac{12}{5}\pi \approx 5\,824$ volts/s; **(b)** $6\,000\pi \approx 18\,850$ volts/s **45.** decrece 16.6 juguetes por mes
47. **(a)** $3x^4$; **(b)** $6x^5$ **53.** **(b)** $f'(x) = \begin{cases} 2x\,\text{sen}(1/x) - \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

EJERCICIOS 2.9 (página 180)

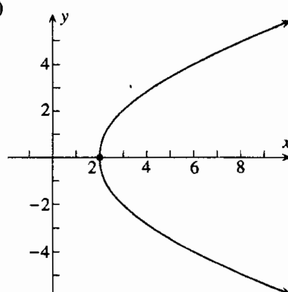
1. $x^{-1/2}(2 - \frac{5}{2}x^{-1})$ **3.** $\dfrac{4x}{\sqrt{1+4x^2}}$ **5.** $\dfrac{-2}{(5-3x)^{1/3}}$ **7.** $\dfrac{y}{(25-y^2)^{3/2}}$ **9.** $\dfrac{\text{sen}\,\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ **11.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{r}}\csc^2\sqrt{3r}$
13. $\dfrac{\cos t}{\sqrt{\text{sen}\,t}\,(1 - \text{sen}\,t)^{3/2}}$ **15.** $\dfrac{-1}{4\sqrt{9+\sqrt{9-x}}\sqrt{9-x}}$ **17.** $-\dfrac{x}{y}$ **19.** $\dfrac{8y - 3x^2}{3y^2 - 8x}$ **21.** $-\dfrac{y^2}{x^2}$
23. $-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ **25.** $\dfrac{x - xy^2}{x^2y - y}$ **27.** $\dfrac{\text{sen}(x-y)}{\text{sen}(x-y) - 1}$ **29.** $\dfrac{\tan x\sec^2 x}{\cot y\csc^2 y}$ **31.** $\dfrac{y\,\text{sen}\,x - \text{sen}\,y}{x\cos y + \cos x}$
33. $y = \frac{4}{5}x + \frac{9}{5}$ 35. $y = -\frac{4}{9}x + \frac{22}{9}$ 37. $(1, 0), (\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$
39. **(a)** $f_1(x) = 2\sqrt{x-2}$, dominio: $x \geq 2$; $f_2(x) = -2\sqrt{x-2}$, dominio: $x \geq 2$;

(b)





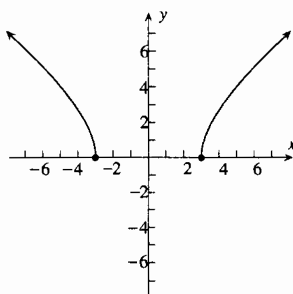
(c)

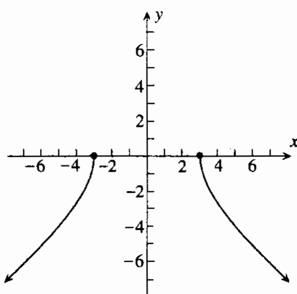


(d) $f_1'(x) = (x-2)^{-1/2}$, dominio: $x > 2$; $f_2'(x) = -(x-2)^{-1/2}$, dominio: $x > 2$; **(e)** $\frac{2}{y}$; **(f)** $x - y - 1 = 0, x + y - 1 = 0$

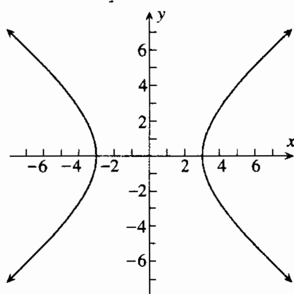
41. **(a)** $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, dominio: $|x| \geq 3$; $f_2(x) = -\sqrt{x^2 - 9}$, dominio: $|x| \geq 3$;

(b)





(c)



(d) $f_1'(x) = x(x^2 - 9)^{-1/2}$, dominio: $|x| > 3$; $f_2'(x) = -x(x^2 - 9)^{-1/2}$, dominio: $|x| > 3$; **(e)** $\frac{x}{y}$;
(f) $5x + 4y + 9 = 0; 5x - 4y + 9 = 0$

47. **(a)** 0; **(b)** $\frac{1}{2}$; **(c)** para ningún valor de t **49.** **(a)** 50 centavos por litro; **(b)** 25 **51.** 100 **53.** 2.7 km/min

57. $\dfrac{2x(x^2 - 4)}{|x^2 - 4|}$ **59.** $f'(x) = 3x|x|$; $f''(x) = 6|x|$

61. **(a)** $-0.1957h$ pie/s; **(b)** $0.14454h$ pie/s; **(c)** $0.1035h$ pie/s; **(d)** $0.0430h$ pie/s

63. $\sqrt{3}x - y + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$; $\sqrt{3}x + y + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$

EJERCICIOS 2.10 (página 187)

1. -3 **3.** -2 **5.** $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ **7.** $-\frac{3}{4}$ **9.** $\frac{9}{5}$ pie/s **11.** $\frac{1}{2\pi}$ pie/min **13.** $\frac{5}{8\pi}$ m/min **15.** $\frac{25}{3}$ pie/s

17. 0.001π cm³/día **19.** 0.004π cm²/día **21.** $\frac{6}{25\pi}$ m/min **23.** 1800 lb/pie² por min **25.** 128π cm²/s **27.** 14 pie/s

29. \$1020 por semana **31.** 875 unidades por mes **33.** decrece a la tasa de 55 playeras por semana

37. 22 m³/min **39.** $\frac{1}{194}(3\sqrt{97} + 97)$ pie/s ≈ 0.65 pie/s **41.** $\frac{2000}{9}$ pie/s **43.** $\frac{2}{25}$ rad/s

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 2 (página 192)

1. $15x^2 - 14x + 2$ **3.** $\frac{x}{2} - \frac{8}{x^3}$ **5.** $x^{-1/2} + \frac{1}{4}x^{-3/2}$ **7.** $60t^4 - 39t^2 - 6t - 4$ **9.** $\dfrac{-6x^2}{(x^3 - 1)^2}$

11. $4(2s^3 - 3s + 7)^3(6s^2 - 3)$ **13.** $x(4x^2 - 13)(x^2 - 1)^{1/2}(x^2 - 4)^{-1/2}$

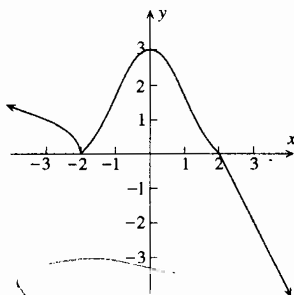
15. $(x + 1)\operatorname{sen} x + x\cos x$ **17.** $\dfrac{2\sec^2 4t}{\sqrt{\tan 4t}}$ **19.** $-3\operatorname{sen} 3w\cos(\cos 3w) - \cos w\cos 3w + 3\operatorname{sen} w\operatorname{sen} 3w$

21. $\dfrac{8x(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}$ **23.** $\dfrac{(1 + x)\sec^2 x - \tan x}{(1 + x)^2}$ **25.** $\dfrac{8x}{3y^2 - 8y}$ **27.** $\dfrac{y - \sec^2 x}{\sec^2 y - x}$

29. **(a)** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq -2 \\ 4 - x^2 & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ 4 - 2x & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 2 - \frac{1}{2}x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

(b) -4; **(c)** 4; **(d)** 0;
(e) -2; **(f)** -2;
(g) -2; **(h)** $-2, 0$

31.



33. $y = 9x - 17$ **35.** $x - 2y + 9 = 0$; $27x - 54y - 7 = 0$

37. $5x - 4y - 6 = 0$; $4x + 5y - 13 = 0$ **39.** $(-1, 0)$

41. $-3(3 - 2x)^{-5/2}$ **43.** $x < -3$ o $x > -1$

45. se mueve hacia la derecha: $t < -2$ y $t > 1$; se mueve hacia la izquierda: $-2 < t < 1$; invierte la dirección: $t = -2, 1$

47.

	s	v	a	*Conclusión*
$0 \le t < 1$	+	−	+	La partícula está a la derecha del origen, y se mueve hacia la izquierda. La velocidad es creciente. La rapidez es decreciente.
$t = 1$	0	0	+	La partícula está en el origen, y está cambiando su dirección de movimiento de izquierda a derecha. La velocidad es creciente. La rapidez es creciente.
$1 < t < 2$	+	+	+	La partícula está a la derecha del origen, y se mueve hacia la derecha. La velocidad es creciente. La rapidez es creciente.
$t = 2$	+	+	0	La partícula está a la derecha del origen, y se mueve hacia la derecha. La velocidad no varía; de modo que la rapidez no varía.
$2 < t < 3$	+	+	−	La partícula está a la derecha del origen, y se mueve hacia la derecha. La velocidad es decreciente. La rapidez es decreciente.
$t = 3$	+	0	−	La partícula está a la derecha del origen, y está cambiando su dirección de movimiento de derecha a izquierda. La velocidad es decreciente. La velocidad es creciente.
$3 < t < 4$	+	−	−	La partícula está a la derecha del origen, y se mueve hacia la izquierda. La velocidad es decreciente. La rapidez es creciente.
$t = 4$	0	−	−	La partícula está en el origen, y se mueve hacia la izquierda. La velocidad es decreciente. La rapidez es creciente.
$4 < t$	−	−	−	La partícula está a la izquierda del origen, y se mueve hacia la izquierda. La velocidad es decreciente. La rapidez es creciente.

49. $t = 2^{-1}3^{-4/3}$; $s = \frac{3}{4}\sqrt[3]{3} + 1$; $v = 3^{5/3}$ **51.** **(a)** $s = 200 - 16t^2$; **(b)** −32 pie/s, −96 pie/s; **(c)** 3.54 s; **(d)** 113 pie/s

53. **(a)** $s = -16t^2 + 96t + 112$; **(b)** y **(c)** 3 s, 256 pie; **(d)** y **(e)** 7 s; (f) 32 pie/s, −32 pie/s; **(g)** ambos 32 pie/s; **(h)** −128 pie/s

55. **(a)** $v = -2 \operatorname{sen} 2t + 4 \cos 2t$, $a = -4 \cos 2t - 8 \operatorname{sen} 2t$

57. **(a)** $f(x) = \begin{cases} 200\,x & \text{si } 0 \le x \le 800 \\ 360\,x - 0.2x^2 & \text{si } 800 < x \le 1\,800 \end{cases}$; **(c)** no **59.** **(a)** 8.005; **(b)** 8 **61.** **(a)** 3312.2; **(b)** 3212.5

63. $-\frac{1}{3}$ **65.** $\dfrac{2}{\sqrt{4x-3}}$ **67.** $\frac{1}{2}$ **69.** $2(|x+1| - |x|)\left(\dfrac{x+1}{|x+1|} - \dfrac{x}{|x|}\right)$

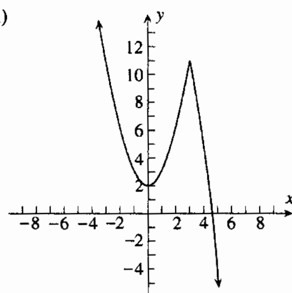
71. **(a)** $v = \frac{5}{6}\pi \cos \frac{1}{6}\pi t$, $a = -\frac{5}{36}\pi^2 \operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi t$; **(c)** $A = 5, p = 12, f = \frac{1}{12}$

73. **(a)** $v = -6 \operatorname{sen}(3t + \frac{1}{3}\pi) + 12 \cos(3t - \frac{1}{6}\pi)$, $a = -18 \cos(3t + \frac{1}{3}\pi) - 36 \operatorname{sen}(3t - \frac{1}{6}\pi)$

77. **(a)** $C'(x) = 2x + 40$; **(b)** \$80; **(c)** \$81 **79.** 648 peces por semana **81.** 12.4 nudos

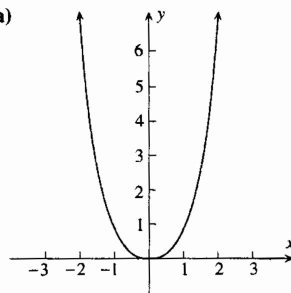
83. $\dfrac{512}{625\pi}$ pulg/s ≈ 0.26 pulg/s **85.** 9.6 pie/s

87. **(a)**



(b) continua en 3; **(c)** no diferenciable en 3

89. **(a)**



(b) 0; **(c)** 0

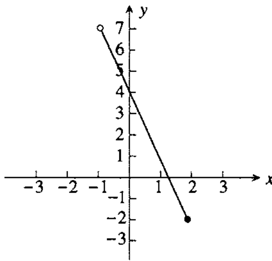
91. $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$ **97.** $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$ **101.** no; si $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ y $g(x) = x + 1$, entonces f y g son diferenciables en 0; sin embargo $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x}$ y $f \circ g$ no es diferenciable en 0

EJERCICIOS 3.1 (página 206)

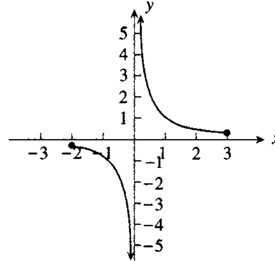
1. $\frac{1}{3}, -5$ **3.** 0, 2 **5.** $-1 + \sqrt{10}, -1 - \sqrt{10}$ **7.** $2, -1, \frac{1}{5}$ **9.** **(a)** $-5, -\frac{1}{4}, -3$ **11.** **(a)** −2, 2, 0

13. **(a)** $2 + , 2\sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2}$ **15.** $\frac{1}{8}(2k + 1)\pi$, donde k es cualquier número entero **17.** $\frac{1}{3}k\pi$, donde k es cualquier número entero

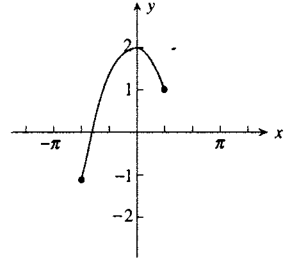
19. mín. abs.: $f(2) = -2$



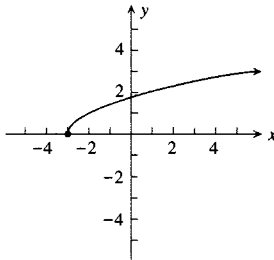
21. no hay extremos absolutos



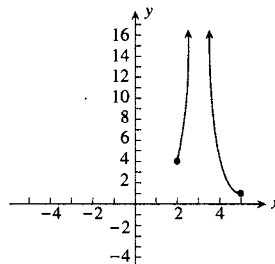
23. mín. abs.: $f(-\frac{2}{3}\pi) = -1$; máx. abs.: $f(0) = 2$



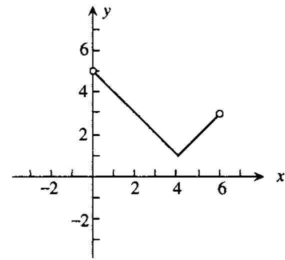
25. mín. abs.: $f(-3) = 0$



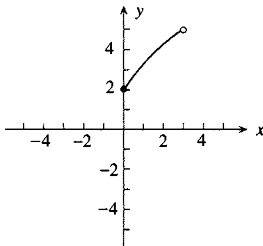
27. mín. abs.: $h(5) = 1$



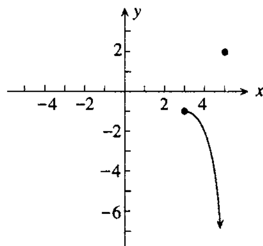
29. mín. abs.: $f(4) = 1$



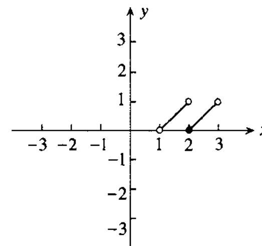
31. mín. abs.: $g(0) = 2$



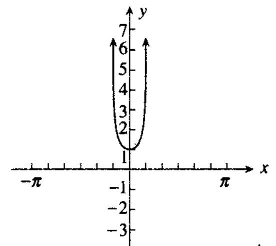
33. máx. abs.: $f(5) = 2$



35. mín. abs.: $f(2) = 0$



37. mín. abs.: $g(0) = 1$



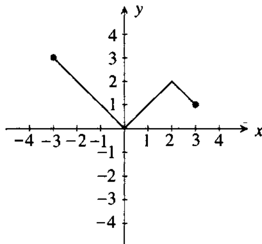
39. (**a**) mín. abs.: $f(-2) = 0$; máx. abs.: $f(-4) = 144$ (**b**) mín. abs.: $f(-2) = f(2) = 0$; máx. abs.: $f(-3) = 25$

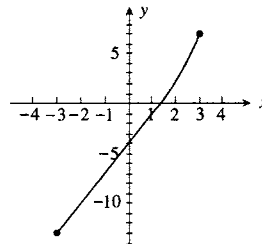
41. mín. abs.: $f(-\frac{1}{2}\pi) = -2$; máx. abs.: $f(\frac{1}{2}\pi) = 2$ **43.** mín. abs.: $g(-1) = -1$; máx. abs.: $g(2) = \frac{1}{2}$

45. mín. abs.: $f(-1) = 0$; máx. abs.: $f(1) = \sqrt[3]{4}$ **47.** mín. abs.: $f(-3) = -46$; máx. abs.: $f(-1) = -10$

49. mín. abs.: $g(0) = 2$; máx. abs.: $g(\frac{1}{2}\pi) = 2\sqrt{2}$ **51.** mín. abs.: $f(0) = 3$; máx. abs.: $f(2) = 5$

53. mín. abs.: $f(0) = 0$; máx. abs.: $f(-3) = 3$ **55.** mín. abs.: $F(-3) = -13$; máx. abs.: $F(3) = 7$ **59.** no





EJERCICIOS 3.2 (página 213)

1. (**a**) 1; (**b**) $\frac{1}{3}$ **15.** 225 **17.** 30 **19.** 6, 6 **21.** P está a $20/\sqrt{39} \approx 3.2$ km de B **23.** radio: $3\sqrt{2}$ pulg., altura: $6\sqrt{2}$ pulg.

25. (**a**) $\sqrt{50 - 6\sqrt{41}}$ unidades $= (\sqrt{41} - 3)$ unidades ≈ 3.4 unidades; (**b**) $\sqrt{50 + 6\sqrt{41}}$ unidades $= (\sqrt{41} + 3)$ unidades $\approx$ 9.4 unidades

27. $\frac{2}{3}k$ **29.** el ancho es $48\sqrt{3}$ cm; el grosor es $48\sqrt{6}$cm

31. **(a)** El radio de la circunferencias es $\dfrac{5}{\pi + 4}$ pie y la longitud del lado del cuadrado es $\dfrac{10}{\pi + 4}$ pie;

(b) El radio de la circunferencia es $\dfrac{5}{\pi}$ pie y no hay cuadrado

33. $\frac{1}{4}\pi$ **35.** 7 produce A; 8 produce B

EJERCICIOS 3.3 (página 221)

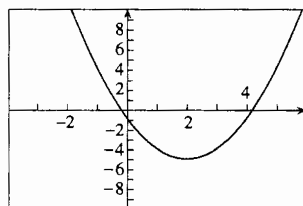
1. 2 **3.** $\frac{1}{4}\pi$ **5.** **(b)** (i), (ii), (iii) se satisfacen **(c)** $(\frac{3}{4}, -\frac{9}{8}\sqrt[3]{6})$

7. **(b)** (i) no se satisface **9.** **(b)** (ii) no se satisface **11.** $\frac{1}{2}$

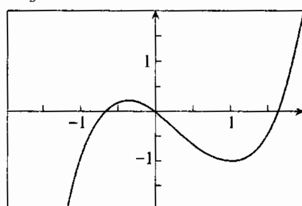
13. $\frac{8}{27}$ **15.** 0 **17.** 4 **19.** $\cos c = \frac{2}{\pi}$; $c \approx 0.8807$ **21.** (i) no se satisface **23.** (ii) no se satisface

EJERCICIOS 3.4 (página 229)

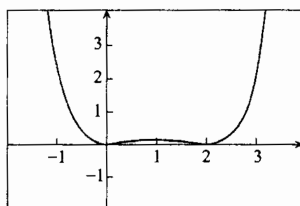
1. extremos: $f(2) = -5$, mín. rel.; creciente: $[2, +\infty)$; decreciente: $(-\infty, 2]$



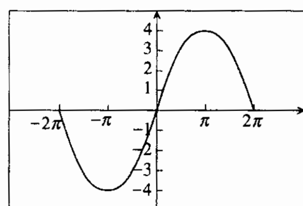
3. extremos: $f(-\frac{1}{3}) = \frac{5}{27}$, máx. rel.; $f(1) = -1$, mín. rel.; creciente: $(-\infty, -\frac{1}{3}]$, $[1, +\infty)$; decreciente: $[-\frac{1}{3}, 1]$



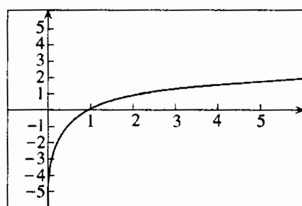
5. extremos: $f(0) = 0$, mín. rel.; $f(1) = \frac{1}{4}$, máx. rel.; $f(2) = 0$, mín. rel.; creciente: $[0, 1]$, $[2, +\infty)$; decreciente: $(-\infty, 0]$, $[1, 2]$



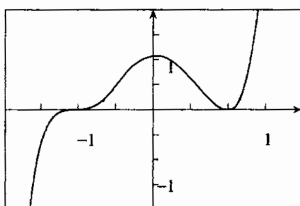
7. extremos: $f(-\pi) = -4$, mín. rel.; $f(\pi) = 4$, máx. rel.; creciente: $[-\pi, \pi]$; decreciente; $[-2\pi, -\pi]$, $[\pi, 2\pi]$



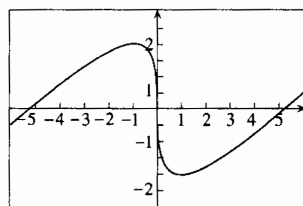
9. extremos: no tiene extremos relativos; creciente: $(0, +\infty)$; decreciente: en ninguna parte



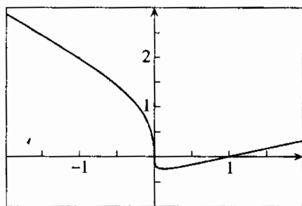
11. extremos: $f(\frac{1}{5}) = \frac{3456}{3125}$, máx. rel.; $f(1) = 0$, mín. rel.; creciente: $(-\infty, \frac{1}{5}]$, $[1, +\infty)$; decreciente: $[\frac{1}{5}, 1]$



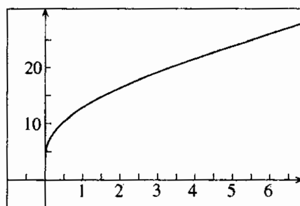
13. extremos: $f(-1) = 2$, máx. rel.; $f(1) = -2$, mín. rel.; creciente: $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$; decreciente: $[-1, 1]$



15. extremos: $f(\frac{1}{8}) = -\frac{1}{4}$, mín. rel.; creciente: $[\frac{1}{8}, +\infty)$; decreciente: $(-\infty, \frac{1}{8}]$



17. extremos: no tiene extremos relativos; creciente: $[0, +\infty)$; decreciente en ninguna parte



19. extremos: $f(0) = 2$, máx. rel.; $f(3) = -25$, mín. rel.; creciente: $(-\infty, 0]$, $[3, +\infty)$; decreciente: $[0, 3]$

21. extremos: $f(-2) = -\frac{1}{15}$, máx. rel.; $f(-1) = -\frac{23}{15}$, mín. rel.; $f(1) = \frac{53}{15}$, máx. rel; $f(2) = \frac{31}{15}$, mín. rel.; creciente: $(-\infty, -2]$, $[-1, 1]$, $[2, +\infty)$; decreciente: $[-2, -1]$, $[1, 2]$

23. extremos: $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$, mín. rel.; creciente: $(-\infty, 0)$; $[\sqrt[3]{2}, +\infty)$; decreciente: $(0, \sqrt[3]{2}]$

25. extremos: $f(2) = 4$, máx. rel.; creciente: $(-\infty, 2]$; decreciente: $[2, 3]$

27. extremos: $f(4) = 2$, máx. rel.; creciente: $(-\infty, 4]$; decreciente: $[4, +\infty)$

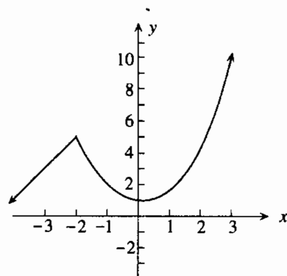
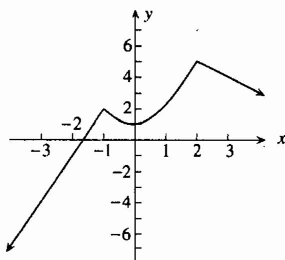
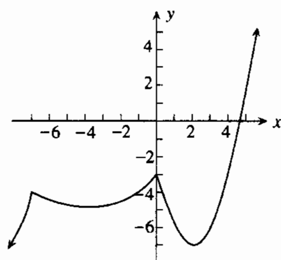
29. extremos: $f(-\frac{1}{4}\pi) = f(\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}$, máx. rel.; $f(0) = \frac{1}{2}$, mín. rel.; (los extremos del intervalo no pueden ser extremos relativos); creciente: $[-\frac{1}{2}\pi, -\frac{3}{8}\pi)$, $(-\frac{3}{8}\pi, -\frac{1}{4}\pi]$, $[0, \frac{1}{8}\pi)$, $(\frac{1}{8}\pi, \frac{1}{4}\pi]$; decreciente: $[-\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{8}\pi)$, $(-\frac{1}{8}\pi, 0]$, $[\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{8}\pi)$, $(\frac{3}{8}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

31. extremos: $f(4) = \frac{1}{4}\sqrt[3]{4}$, máx. rel.; creciente: $(-4, 4]$; decreciente: $(-\infty, -4)$, $[4, +\infty)$

33. extremos: $f(-2) = 5$, máx. rel.; $f(0) = 1$, mín. rel.; creciente: $(-\infty, -2]$, $[0, +\infty)$; decreciente: $[-2, 0]$

35. extremos: $f(-1) = 2$, máx. rel.; $f(0) = 1$, mín. rel.; $f(2) = 5$, máx. rel.; creciente: $(-\infty, -1]$, $[0, 2]$; decreciente: $[-1, 0]$, $[2, +\infty)$

37. extremos: $f(-9) = -8$, mín. rel.; $f(-7) = -4$, máx. rel.; $f(-4) = -5$, mín. rel; $f(0) = -3$, máx. rel.; $f(2) = -7$, mín. rel.; creciente: $[-9, -7]$, $[-4, 0]$, $[2, +\infty)$; decreciente: $[-\infty, -9]$, $[-7, -4]$, $[0, 2]$

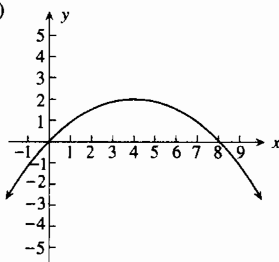




39. números críticos: $-3, 1, 3$; creciente: $(-\infty, -3]$, $[1, 3]$; decreciente: $[-3, 1]$, $[3, +\infty)$; extremos: máx. rel.: $-3, 3$; mín. rel.: 1

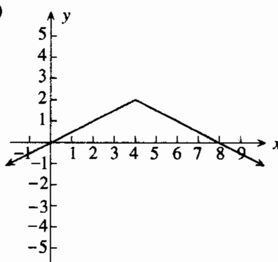
41. números críticos: 0, 2; creciente: $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$; decreciente: $[0, 2]$; extremos: máx. rel.: 0; mín. rel.: 2

43. números críticos: $1, -2, 0, 2$; creciente: $[-2, 0]$, $[1, +\infty)$; decreciente: $(-\infty, -2]$, $[0, 1)$; extremos: máx. rel.: 0; mín. rel.: -2, 1

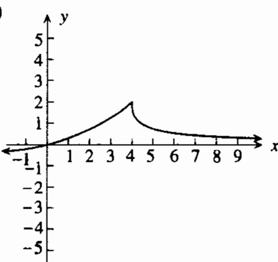
45. (a)



(b)



(c)



47. $a = -3, b = 7$ **49.** $a = -2, b = 9, c = -12, d = 7$ **57.** no

EJERCICIOS 3.5 (página 240)

1. punto de inflexión: $(-\frac{1}{2}, \frac{15}{2})$; cóncava hacia abajo para $x < -\frac{1}{2}$; cóncava hacia arriba para $x > -\frac{1}{2}$

3. puntos de inflexión: (0, 0), (4, −256); cóncava hacia arriba para $x < 0$ y $x > 4$; cóncava hacia abajo para $0 < x < 4$

5. puntos de inflexión: $(-1, \frac{1}{2})$, $(1, \frac{1}{2})$; cóncava hacia arriba para $x < -1$ y $x > 1$; cóncava hacia abajo para $-1 < x < 1$

7. puntos de inflexión: $(-\frac{1}{3}\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}\pi, 0)$; cóncava hacia arriba para $-\frac{1}{3}\pi < x < 0$, y $\frac{1}{3}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$; cóncava hacia abajo para $-\frac{1}{2}\pi < x < -\frac{1}{3}\pi$ y $0 < x < \frac{1}{3}\pi$

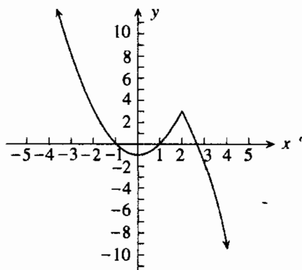
9. punto de inflexión: (0, 0); cóncava hacia abajo para $x < 0$; cóncava hacia arriba para $x > 0$

11. punto de inflexión: (1, 0); cóncava hacia abajo para $x < 1$; cóncava hacia arriba para $x > 1$

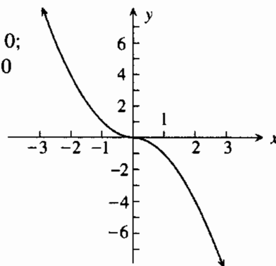
13. punto de inflexión: (−2, 0); cóncava hacia arriba para $x < -2$; cóncava hacia abajo para $x > -2$

15. punto de inflexión: (0, 0); cóncava hacia abajo para $-\pi < x < 0$; cóncava hacia arriba para $0 < x < \pi$

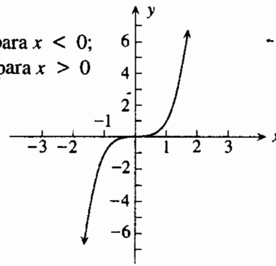
17. no tiene puntos de inflexión;
cóncava hacia arriba para $x < 2$;
cóncava hacia abajo para $x > 2$



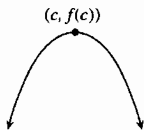
19. (0, 0);
cóncava hacia arriba para $x < 0$;
cóncava hacia abajo para $x > 0$



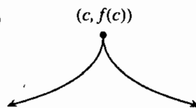
21. (0, 0);
cóncava hacia abajo para $x < 0$;
cóncava hacia arriba para $x > 0$



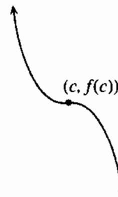
23. **(a)**



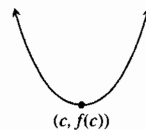
(b)



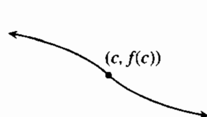
25. **(a)**



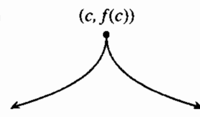
(b)



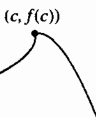
27. **(a)**



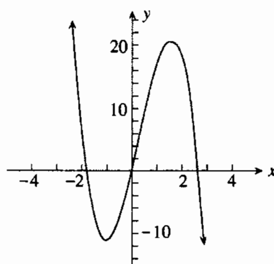
(b)



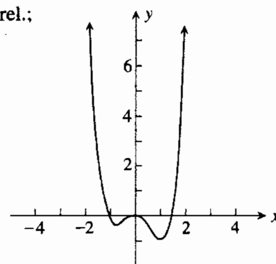
29.



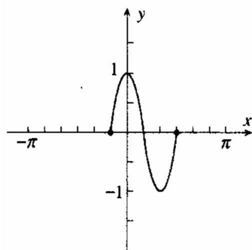
31. $f(\frac{3}{2}) = \frac{81}{4}$, máx. rel.;
$f(-1) = -11$, mín. rel.;



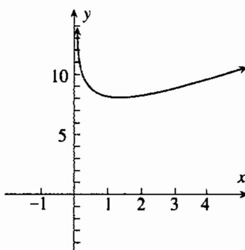
33. $g(-\frac{3}{4}) = -\frac{99}{256}$, mín. rel.;
$g(0) = 0$, máx. rel.;
$g(1) = -\frac{5}{6}$, mín. rel.



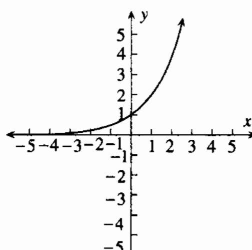
35. $f(\frac{1}{3}\pi) = -1$, mín. rel.;
$f(0) = 1$, máx. rel.



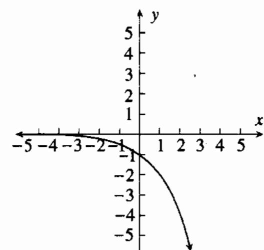
37. $f(1) = 8$, mín. rel.



39. **(a)**



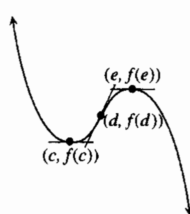
(b)



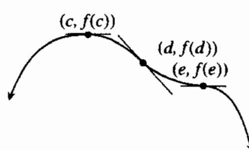
41. **(a)** $(k\pi, 0)$ donde k es cualquier entero; **(b)** 1

43. $\csc(\frac{1}{2}\pi + 2k\pi) = 1$, donde k es cualquier entero, mín. rel.; $\csc(\frac{1}{2}\pi + 2k\pi) = -1$, donde k es cualquier entero, máx. rel.

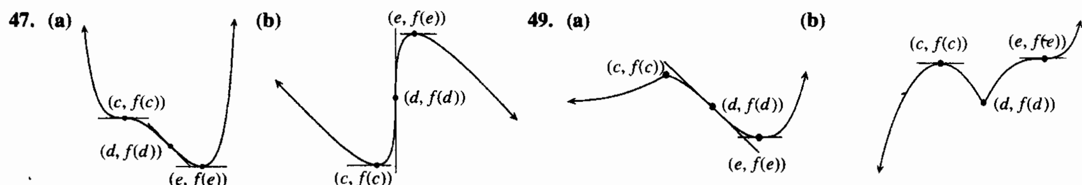
45. **(a)**



(b)



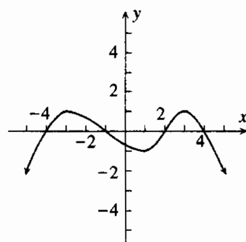
47. (a) (b) 49. (a) (b)



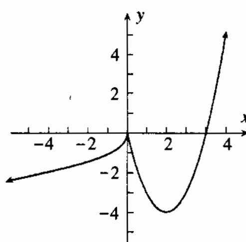
51. $a = -1, b = 3$ 53. $a = 2, b = -6, c = 0, d = 3$ 55. f tiene un mín. rel. en $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y un máx. rel. en $x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
57. f es continua; f' y f'' no necesariamente son continuos 59. a los 10:40 A.M.

EJERCICIOS 3.6 (página 245)

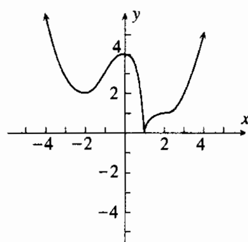
1. puntos de inflexión: −1, 2;
cóncava hacia arriba: (−1, 2);
cóncava hacia abajo: $x < -1, x > 2$



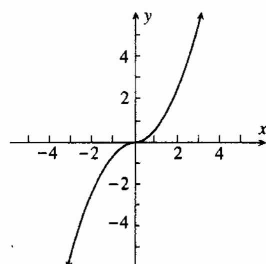
3. no tiene puntos de inflexión;
cóncava hacia arriba: $x < 0, x > 0$



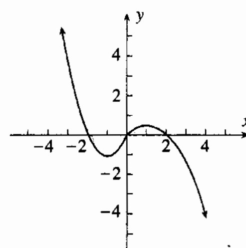
5. puntos de inflexión: −1, 2;
cóncava hacia arriba: $x < -1, x > 2$;
cóncava hacia abajo: (−1, 1), (1, 2)



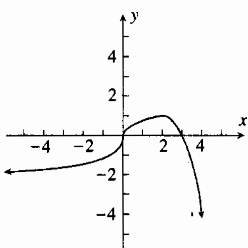
7. creciente: $(-\infty, +\infty)$; no tiene extremos
cóncava hacia arriba: $x > 0$;
cóncava hacia abajo: $x < 0$



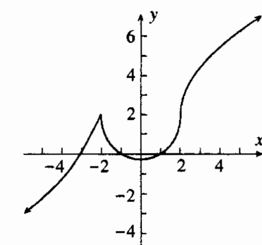
9. creciente: [−1, 1];
decreciente: $x \leq -1, x \geq 1$;
extremos: $x = -1$, mín. rel.;
$x = 1$, máx. rel.;
cóncava hacia arriba: $x < 0$;
cóncava hacia abajo: $x > 0$;
no tiene puntos de inflexión



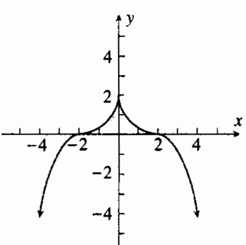
11. creciente: $x \leq 2$;
decreciente: $x \geq 2$;
extremos: $x = 2$, máx. rel.;
cóncava hacia arriba: $x < 0$;
cóncava hacia abajo: $x > 0$;
punto de inflexión: $x = 0$



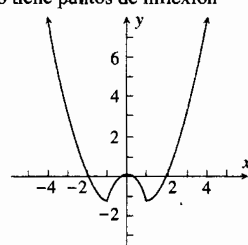
13. creciente: $x \leq -2, x \geq 0$;
decreciente: [−2, 0]; extremos: $x = -2$, máx. rel.; $x = 0$, mín. rel.;
cóncava hacia arriba: $x < -2$, (−2, 2);
cóncava hacia abajo: $x > 2$;
punto de inflexión.: $x = 2$



15. creciente: $x \leq -2$,
decreciente: $x \geq 0$;
extremos: $x = 0$, máx. rel.;
cóncava hacia arriba: (−2, 0), (0, 2);
cóncava hacia abajo: $x < -2, x < 2$;
punto de inflexión.: $x = -2, x = 2$

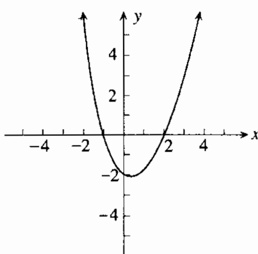


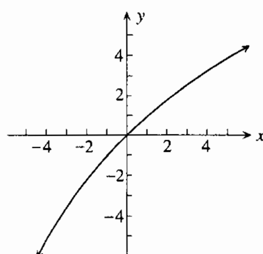
17. creciente: [−1, 0], $x \geq 1$;
decreciente: $x \leq -1$, [0, 1];
extremos: $x = -1$, mín. rel.;
$x = 0$, máx. rel.; $x = 1$, mín. rel.;
cóncava hacia arriba: $x < -1, x > 1$;
cóncava hacia abajo: (−1, 1);
no tiene puntos de inflexión

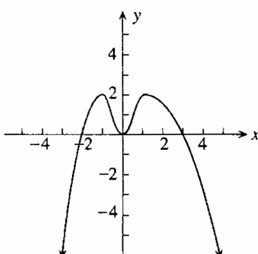


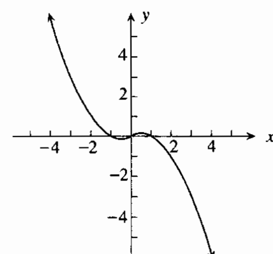
19. creciente: $x \leq -1, x \geq 2$; decreciente: $[-1, 2]$; extremos: $x = -1$, máx. rel; $x = 2$, mín. rel.; cóncava hacia arriba: $x > 0$; cóncava hacia abajo: $x < 0$; punto de inflexión.: $x = 0$

21. creciente: $[-2, 3]$; decreciente: $x \leq -2, x \geq 3$; extremos: $x = -2$, mín. rel.; $x = 3$, máx. rel.; cóncava hacia arriba: $x < -1$, $(0, 1)$; cóncava hacia abajo: $(-1, 0)$, $x > 1$; puntos de inflexión.: $x = -1, x = 1$



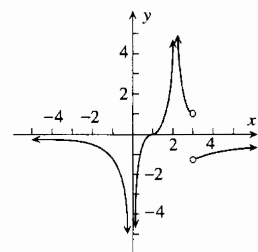


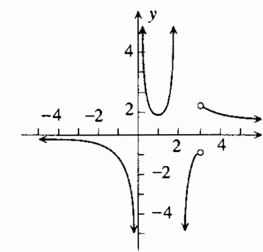


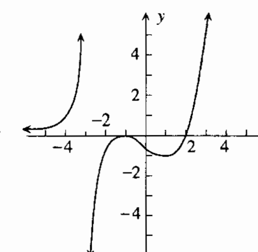


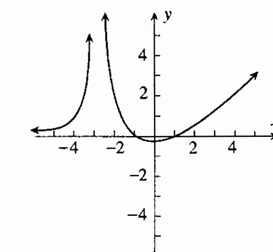
23. creciente: $[1, 3]$; decreciente: $x \leq 1, x \geq 3$; extremos: $x = 1$, mín. rel.; $x = 3$, máx. rel.; cóncava hacia arriba: $(0, 2)$, $x > 3$; cóncava hacia abajo: $x < 0$, $(2, 3)$; puntos de inflexión.: $x = 0, x = 2$

25. creciente: $x \leq -3, x \geq 2$; decreciente: $[-3, 2]$; extremos: $x = -3$, máx. rel; $x = 2$, mín. rel.; cóncava hacia arriba: $x < -3$, $(-3, -1)$, $x > 1$; cóncava hacia abajo: $(-1, 1)$; punto de inflexión.: $x = 1$

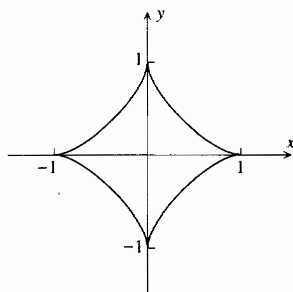








31.



EJERCICIOS 3.7 (página 258)

1. 4, 1, 0.25, 0.1111, 0.0625, 0.0400, 0.0004, 0.000004; 4, 1, 0.25, 0.1111, 0.0625, 0.0400, 0.0004, 0.000004; **(a)–(e)** 0

3. 1, 0, 1250, 0.0156, 0.0046, 0.0020, 0.0010, 10^{-6}, 10^{-9}; −1, −0.1250, −0.0156, −0.0046, −0.0020, −0.0010, -10^{-6}, -10^{-9}; **(a)–(e)** 0

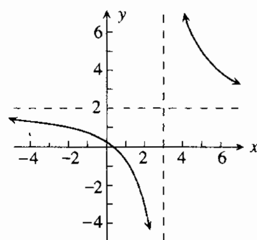
5. 0, −1.5, −2.4, −2.823, −2.919, −2.953, −2.970, −2.9997, −2.999997; 0, −1.5, −2.4, −2.823, −2.919, −2.953, −2.970, −2.9997, −2.999997; **(a)–(e)** −3

7. 3, 2.273, 2.158, 2.015, 2.0015, 2.00015, 2.000015; 1.4, 1.769, 1.857, 1.985, 1.9985, 1.99985, 1.999985; **(a)–(e)** 2

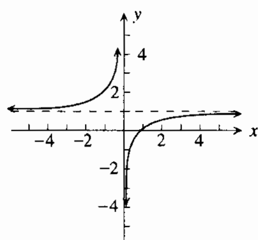
9. 0.75, 0.1944, 0.1100, 0.0101, 0.001001, 0.0001, 0.00001; −0.25, −0.1389, −0.0900, −0.0099, −0.0010, −0.0001, −0.00001; **(a)–(e)** 0

11. $\frac{2}{5}$ **13.** $-\frac{2}{5}$ **15.** $\frac{7}{3}$ **17.** 0 **19.** $+\infty$ **21.** $\frac{1}{2}$ **23.** $+\infty$ **25.** $-\infty$ **27.** 1 **29.** −1 **31.** 0 **33.** $-\infty$

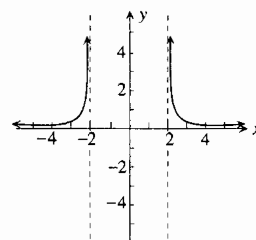
35. $y = 2, x = 3$



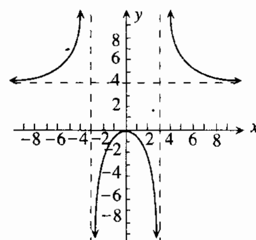
37. $y = 1, x = 0$



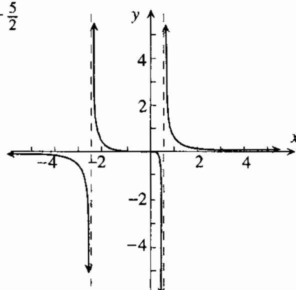
39. $y = 0, x = -2, x = 2$



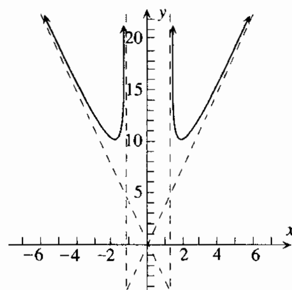
41. $y = 4, x = -3, x = 3$



43. $y = 0, x = \frac{2}{3}, x = -\frac{5}{2}$



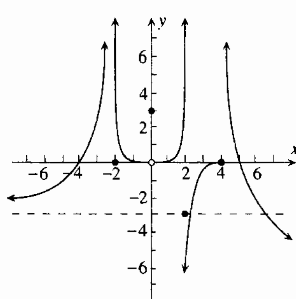
45. $x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$
$y = -4x, y = 4x$



47. $x = 1, y = x + 1$ **49.** $x = 3, y = x + 3$ **51.** $x = -2, y = x - 6$ **53.** $x = 0, y = x + 2$

55. **(a)** 1; **(b)** 0; **(c)** 1; **(d)** $-\infty$; **(e)** 3; **(f)** $+\infty$; **(g)** 1; **(h)** -2

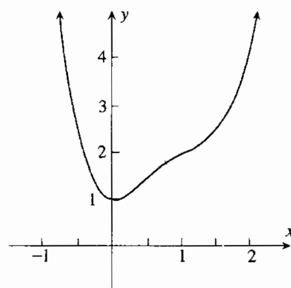
57.



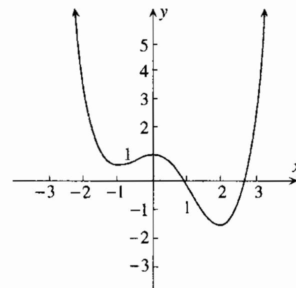
69. 0

EJERCICIOS 3.8 (página 266)

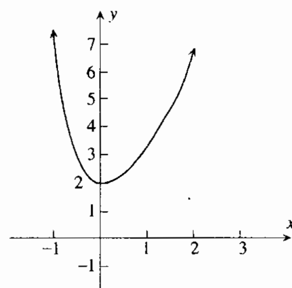
1. $f(0) = 1$, mín. rel.; $(\frac{1}{2}, \frac{23}{16})$, $(1, 2)$, puntos de inflexión.; decreciente: $(-\infty, 0]$; creciente: $[0, +\infty)$; cóncava hacia arriba: $x < \frac{1}{2}, x > 1$; cóncava hacia abajo: $(\frac{1}{2}, 1)$



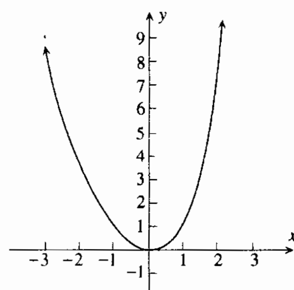
3. $f(-1) = \frac{7}{12}$, mín. rel.; $f(0) = 1$, máx. rel.; $f(2) = -\frac{5}{3}$, mín. rel.; puntos de inflexión.: $x = \frac{1}{3}(1 \pm \sqrt{7})$; decreciente: $(-\infty, -1]$, $[0, 2]$; creciente: $[-1, 0]$, $[2, +\infty)$; cóncava hacia arriba: $x < \frac{1}{3}(1 - \sqrt{7}), x > \frac{1}{3}(1 + \sqrt{7})$; cóncava hacia abajo: $\frac{1}{3}(1 - \sqrt{7}) < x < \frac{1}{3}(1 + \sqrt{7})$



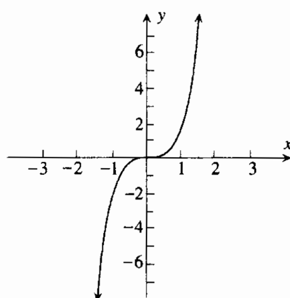
5. $f(0) = 2$, mín. rel.; no tiene puntos de inflexión.; decreciente: $(-\infty, 0]$; creciente: $[0, +\infty)$; cóncava hacia arriba en todas partes



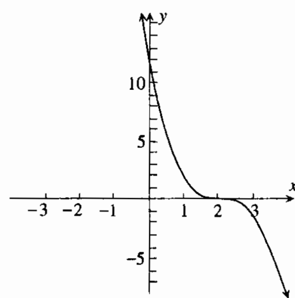
7. $f(0) = 0$, mín. rel.; no tiene puntos de inflexión; decreciente: $(-\infty, 0]$; creciente: $[0, +\infty)$; cóncava hacia arriba en todas partes



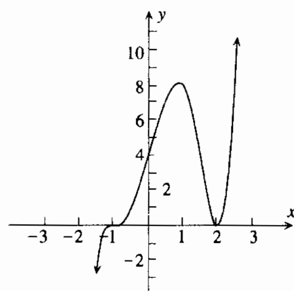
9. no tiene extremos relativos; $(0, 0)$ punto de inflexión; creciente: $(-\infty, +\infty)$; cóncava hacia abajo: $(-\infty, 0)$; cóncava hacia arriba: $(0, +\infty)$



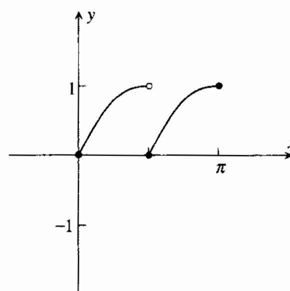
11. no tiene extremos relativos; $(2, 0)$ punto de inflexión; decreciente: $(-\infty, +\infty)$; cóncava hacia arriba: $x < 2$; cóncava hacia abajo: $x > 2$



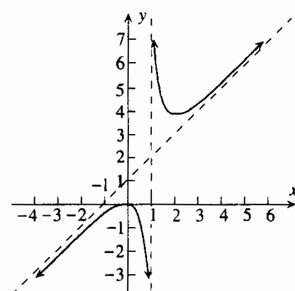
13. $f(\frac{4}{5}) = \frac{26.244}{3.125}$, máx. rel.; $f(2) = 0$, mín. rel.; puntos de inflexión: $(-1, 0)$, $x = \frac{1}{10}(8 \pm 3\sqrt{6})$; creciente: $(-\infty, \frac{4}{5}]$, $[2, +\infty)$; decreciente: $[\frac{4}{5}, 2]$; cóncava hacia abajo: $x < -1$, $(\frac{1}{10}(8 - 3\sqrt{6}), \frac{1}{10}(8 + 3\sqrt{6}))$; cóncava hacia arriba $(-1, \frac{1}{10}(8 - 3\sqrt{6}))$, $x > \frac{1}{10}(8 + 3\sqrt{6})$



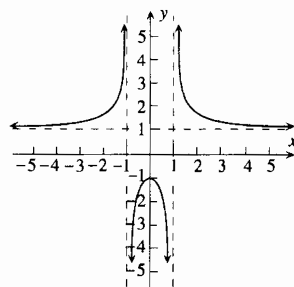
15. $(\frac{1}{2}\pi, 0)$, mín. rel.; no tiene puntos de inflexión; creciente: $[0, \frac{1}{2}\pi)$, $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$; cóncava hacia abajo: $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$



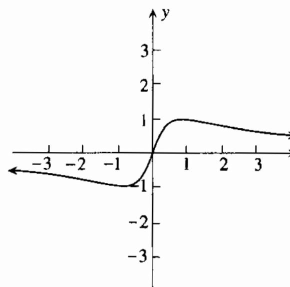
17. $f(0) = 0$, máx. rel.; $f(2) = 4$, mín. rel.; no tiene puntos de inflexión; creciente: $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$; decreciente: $[0, 1)$ y $(1, 2]$; cóncava hacia abajo: $x < 1$; cóncava hacia arriba: $x > 1$; $x = 1$ y $y = x + 1$ son asíntotas



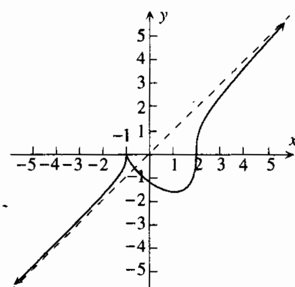
19. $f(0) = -1$, máx. rel.; no tiene puntos de inflexión; creciente: $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0]$; decreciente: $[0, 1)$ y $(1, +\infty)$; cóncava hacia arriba: $x < -1, x > 1$; cóncava hacia abajo: $-1 < x < 1$; $y = 1, x = -1$, y $x = 1$ son asíntotas



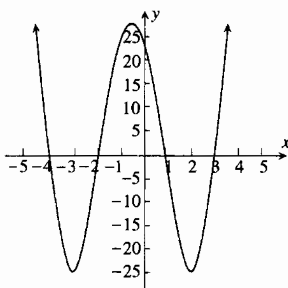
21. $f(-1) = -1$, mín. rel.; $f(1) = 1$, máx. rel.; $(-\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$, $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$, puntos de inflexión; decreciente: $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$; creciente: $[-1, 1]$; cóncava hacia abajo: $x < -\sqrt{3}$, $0 < x < \sqrt{3}$; cóncava hacia arriba: $-\sqrt{3} < x < 0$, $x > \sqrt{3}$; $y = 0$ es una asíntota



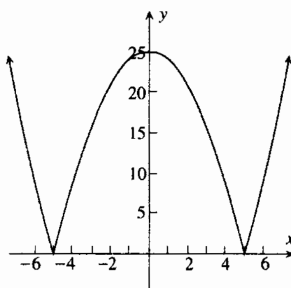
23. $f(-1) = 0$, máx. rel.; $f(1) = -\sqrt[3]{4}$, mín. rel.; punto de inflexión: $(2, 0)$; decreciente: $[-1, 1]$; creciente: $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$; cóncava hacia abajo: $x > 2$; cóncava hacia arriba: $x < -1$, $(-1, 2)$; $y = x$ es una asíntota



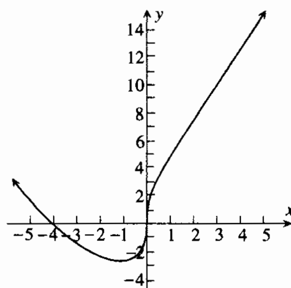
25. $x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{29} - \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{29} - \frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{6}(\sqrt{87} + 3); x_4 = \frac{1}{6}(\sqrt{87} - 3)$; $f(x_1) = f(x_2) = -25$, mín. rel.; $f(-\frac{1}{2}) = \frac{441}{16}$, máx. rel.; puntos de inflexión: $(x_3, -\frac{59}{36}), (x_4, -\frac{59}{36})$; creciente: $[x_1, -\frac{1}{2}], [x_2, +\infty)$; decreciente: $(-\infty, x_1], (-\frac{1}{2}, x_2]$; cóncava hacia arriba: $x < x_3, x > x_4$; cóncava hacia abajo: (x_3, x_4)



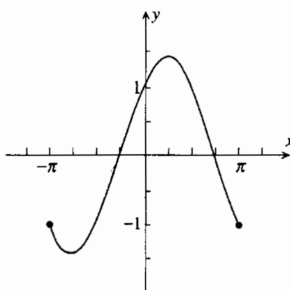
27. $f(-5) = f(5) = 0$, mín. rel.; $f(0) = 25$, máx. rel.; no tiene puntos de inflexión; creciente: $[-5, 0]$, $[5, +\infty)$; decreciente: $(-\infty, -5]$, $[0, 5]$; cóncava hacia arriba: $x < -5, x > 5$; cóncava hacia abajo: $-5 < x < 5$



29. $f(-1) = -3$, mín. rel.; puntos de inflexión: $(0, 0)$, $(2, 6\sqrt[3]{2})$; creciente: $[-1, +\infty)$; decreciente: $(-\infty, -1]$; cóncava hacia arriba: $x < 0$, $x > 2$; cóncava hacia abajo: $-1 < x < 2$



31. $f(-\frac{3}{4}\pi) = -\sqrt{2}$, mín. rel.; $f(-\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}$, máx. rel.; $(-\frac{1}{4}\pi, 0), (\frac{3}{4}\pi, 0)$, puntos de inflexión; creciente: $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$; decreciente: $[-\pi, -\frac{3}{4}\pi], [\frac{1}{4}\pi, \pi]$; cóncava hacia abajo: $(-\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi)$; cóncava hacia arriba: $(-\pi, -\frac{1}{4}\pi)$, $(\frac{3}{4}\pi, \pi)$



EJERCICIOS 3.9 (página 272)

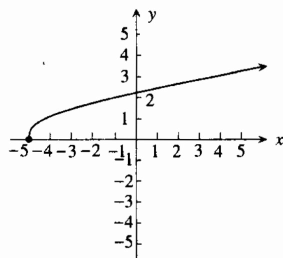
1. altura, $60/\sqrt[3]{225\pi} \approx 6.73$ pulg; radio $\sqrt[3]{15/\pi} \approx 1.68$ pulg **5.** 45 m por 60 m **7.** 12 pulg por 4 pulg por 6 pulg. **9.** 90 km/hr **11.** 1.44 s **13.** $2x - y + 1 = 0$ **15.** 1 mes; 7.5% **17.** 40 unidades **19.** \$ 1500 **21.** $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ unidades; $(\frac{9}{5}, \frac{3}{5})$ **23.** radio de la semicircunferencia, $\dfrac{32}{4 + \pi}$ pie; altura del rectángulo, $\dfrac{32}{4 + \pi}$ pie **25.** $5\sqrt{5}$ pie **27.** $\sqrt{2}$ **29.** $2\sqrt{2}$ **31.** $\frac{1}{2}\pi$

EJERCICIOS 3.10 (página 286)

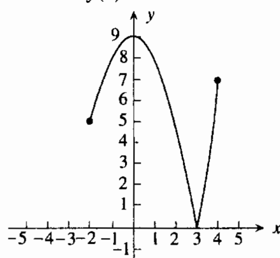
1. 4.1179 **3.** −1.1673 **5.** 2.649 **7.** 0.507 **9.** −1.128 **11.** 1.73205 **13.** 1.81712 **15.** 0.7391 **17.** 0.8767
19. **(a)** $1 + 2(x - 1)$; **(c)** f: 0.81, 0.9801, 1, 1.0201, 1.21; aproximación: 0.8, 0.98, 1.02, 1.2
21. **(a)** $2 + (x - 1)$; **(c)** f: 1.897, 1.98997, 2, 2.00998, 2.0976; aproximación: 1.9, 1.99, 2, 2.01, 2.1
23. **(a)** $0.54030 - 0.84147(x - 1)$; **(c)** f: 0.6216, 0.54869, 0.54030, 0.53186, 0.4536; aproximación: 0.6244, 0.54871, 0.54030, 0.53189, 0.4562
25. $dy = 2, \Delta = 2.25$ **27.** $dy = \frac{1}{12} \approx .083, \Delta y \approx .080$ **29.** **(a)** 0.0309; **(b)** 0.03; **(c)** 0.0009
31. **(a)** $\frac{1}{42} \approx 0.0238$; **(b)** $\frac{1}{40} = 0.025$; **(c)** $-\frac{1}{840} \approx -0.0012$ **33.** **(a)** −0.875; **(b)** −1.5; **(c)** 0.625
35. $3(3x^2 - 2x + 1)^2(6x - 2)\,dx$ **37.** $x(5x + 6)(2x + 3)^{-1/2}\,dx$ **39.** $\dfrac{(1 - 2 \operatorname{sen} x + 2 \cos x)dx}{(2 - \operatorname{sen} x)^2}$
41. $2 \tan x \sec^2 x (2 \tan^2 x + 1)\,dx$ **43.** **(a)** 6.75 cm^3; **(b)** 0.3 cm^2 **45.** $\frac{12}{5}\pi\, m^3$ **47.** $0.4\pi\, cm^2$ **49.** $0.9\pi\, cm^3$
51. 4% **53.** 10 pie^3 **57.** 2.0288, 4.9132 **59.** 3.14159

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 3 (página 289)

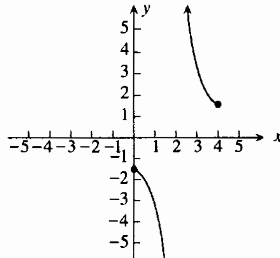
1. mín. abs.: $f(-5) = 0$



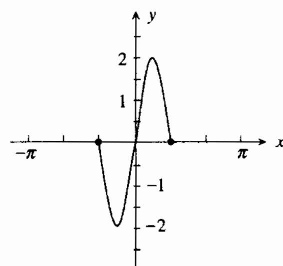
3. mín. abs.: $f(3) = 0$; máx. abs.: $f(0) = 9$



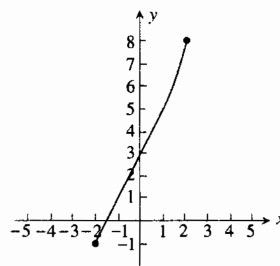
5. no tiene extremos absolutos



7. mín. abs.: $f(-\frac{1}{6}\pi) = -2$; máx. abs.: $f(\frac{1}{6}\pi) = 2$



9. mín. abs.: $f(-2) = -1$; máx. abs.: $f(2) = 8$



11. **(a)** mín. abs.: $f(\sqrt{6}) = 0$; máx. abs.: $f(3) = 9$; **(b)** mín. abs.: $f(\sqrt{6}) = 0$; máx. abs.: $f(-4) = 100$

13. mín. abs.: $f(-1) \approx -0.301$; máx. abs.: $f(\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}$

15. $\frac{1}{3}(1 - \sqrt{13})$

17. $-\frac{13}{4}$ **19.** 1.269, 1.872

23. $f'(1)$ no existe

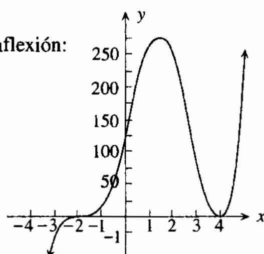
25 y 37. $f(-2) = 0$, máx. rel.; $f(0) = -4$, min. rel.; $(-1, -2)$, punto de inflexión; creciente: $(-\infty, -2]$ y $[0, +\infty)$; decreciente: $[-2, 0]$; cóncava hacia abajo $x < -1$; cóncava hacia arriba $x > -1$

27 y 39. no tiene extremos relativos; punto de inflexión: $(3, 1)$; creciente: $(-\infty, +\infty)$; cóncava hacia abajo: $x < 3$; cóncava hacia arriba: $x > 3$

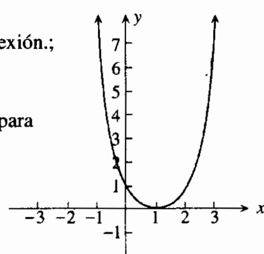
29 y 41. no tiene extremos relativos; punto de inflexión: $(0, 0)$; decreciente: $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$; cóncava hacia abajo: $(0, \frac{1}{2}\pi)$; cóncava hacia arriba: $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$

31 y 43. $f(-1) = 0$, min. rel.; $f(0) = 9$, máx. rel.; $f(3) = 0$, mín. rel.; puntos de inflexión en: $x = \pm\frac{3}{5}\sqrt{5}$; decreciente: $(-\infty, -1]$ y $[0, 3]$; creciente: $[-1, 0]$ y $[3, +\infty)$; cóncava hacia arriba: $x < -\frac{3}{5}\sqrt{5}$ y $x > \frac{3}{5}\sqrt{5}$; cóncava hacia abajo: $-\frac{3}{5}\sqrt{5} < x < \frac{3}{5}\sqrt{5}$

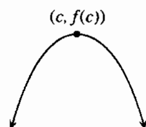
33. $f(\frac{8}{5}) = \frac{839\,808}{3125}$, máx. rel.; $f(4) = 0$, mín. rel.; puntos de inflexión: $x = -2$, $x = \frac{1}{5}(8 \pm 3\sqrt{6})$; creciente: $(-\infty, \frac{8}{5}]$, $[4, +\infty)$; decreciente: $[\frac{8}{5}, 4]$; cóncava hacia arriba: $-2 < x < \frac{1}{5}(8 - 3\sqrt{6})$, $x > \frac{1}{5}(8 + 3\sqrt{6})$; cóncava hacia abajo: $x < -2$, $\frac{1}{5}(8 - 3\sqrt{6}) < x < \frac{1}{5}(8 + 3\sqrt{6})$



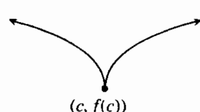
35. $f(1) = 0$, mín. rel.; no tiene puntos de inflexión.; decreciente: $(-\infty, 1]$; creciente: $[1, +\infty)$; cóncava hacia arriba : para toda x



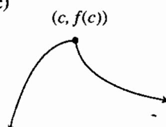
45. **(a)**



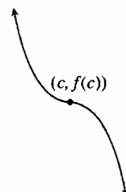
(b)



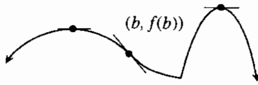
(c)



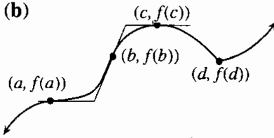
(d)



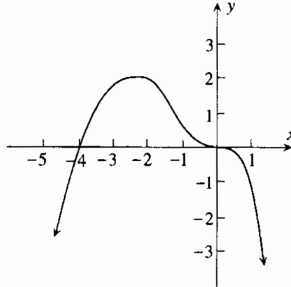
47. (a)



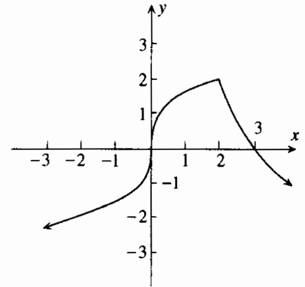
(b)



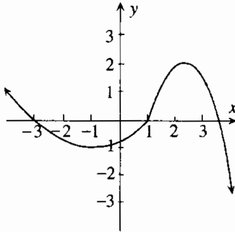
49. creciente: $(-\infty, -2]$;
decreciente: $(-2, +\infty)$;
máx. rel: $x = -2$;
cóncava hacia arriba: $(-1, 0)$;
cóncava hacia abajo: $x < -1, x > 0$;
puntos de inflexión: $x = -1, 0$

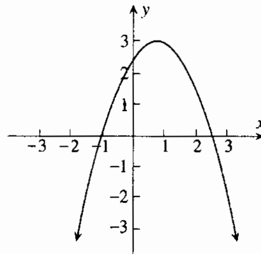


51. creciente: $(-\infty, 2]$; decreciente: $[2, +\infty)$;
máx. rel.: $x = 2$, cóncava hacia arriba:
$x < 0, x > 2$; cóncava hacia abajo: $(0, 2)$;
punto de inflexión: $x = 0$

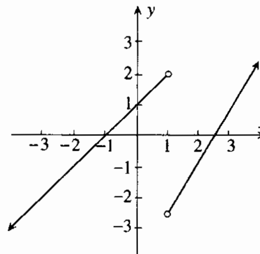


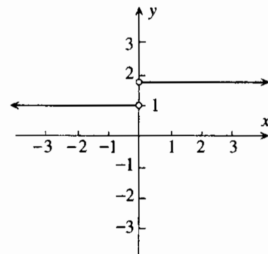
53. creciente: $(-\infty, -3]$, $[1, 3.5]$; decreciente: $[-3, 1]$, $[3.5, +\infty)$;
máx. rel: $x = -3, x = 3.5$; mín. rel: $x = 1$;
cóncava hacia arriba: $(-1, 2.5)$; cóncava hacia abajo: $x < -1, x > 2.5$; puntos de inflexión.: $x = -1, x = 2.5$





55. creciente: $[-1, 1]$, $[2.5, +\infty)$; decreciente: $(-\infty, -1]$, $[1, 2.5]$;
máx. rel: $x = 1$; mín. rel: $x = -1, x = 2.5$;
cóncava hacia arriba: $x < 1, x > 1$; no tiene puntos de inflexión.

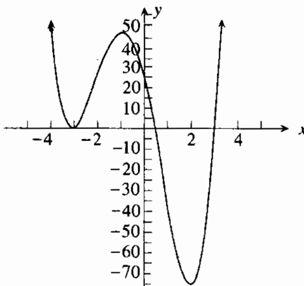




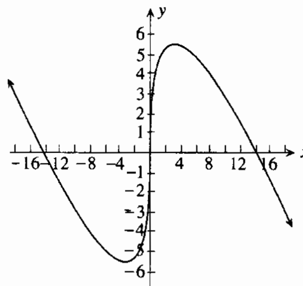
57. 3 **59.** $-\infty$ **61.** 0

63. $x = 2, x = -2, y = 5$ **65.** $x = 3, y = x + 3$

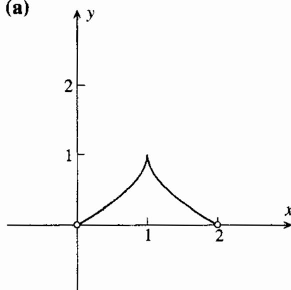
67. $x_1 = \frac{1}{16}(9 - \sqrt{561})$, $x_2 = \frac{1}{16}(9 + \sqrt{561})$,
$x_3 = -\frac{1}{8}(\sqrt{137} + 5)$, $x_4 = \frac{1}{8}(\sqrt{137} - 5)$;
creciente: $[-3, x_1]$, $[x_2, +\infty)$; mín relativo.:
$f(-3) = 0, f(x_2) \approx -75.1$; máx. rel.: $f(x_1) \approx 48.1$;
cóncava hacia arriba: $x < x_3, x > x_4$;
cóncava hacia abajo: (x_3, x_4); puntos de inflexión.:
$x = x_3, x = x_4$



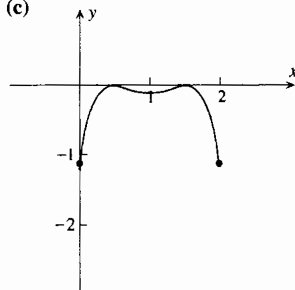
69. creciente: $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$; decreciente: $(-\infty, -2\sqrt{2}]$, $[2\sqrt{2}, +\infty)$;
mín. rel.: $f(-2\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$;
máx. rel.: $f(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$
cóncava hacia arriba: $x < 0$; cóncava hacia abajo: $x > 0$
punto de inflexión.: $(0, 0)$



71. $\sqrt{A^2 + B^2}$ **73.** $a = 2, b = -6, c = 3$ **79.** 900 **81.** 12 km del punto sobre la orilla más proximo a A
83. $\$2000$ **85.** $\$1800$ **87.** 1500 **89.** 25 radios; $\$525$ **91.** $\frac{125}{8}$ m **93.** $\frac{512}{27}\pi$ pulg^3
95. el radio es $\frac{3}{2}r$ cm y la altura es $3h$ cm **99.** el alambre debe cortarse a la mitad **101.** 1000; $\$11$ **103.** -0.482
105. 4.4934 **107.** 1; f: 0.9998, 0.999998, 1, 0.999998, 0.9998; aproximación: 1, 1, 1, 1, 1 **109.** **(a)** -0.16; **(b)** -0.64
111. 2π pulg^3 **113.** 1% **117.** **(a)**

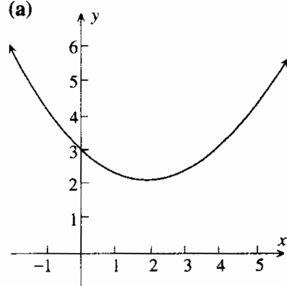


(c)

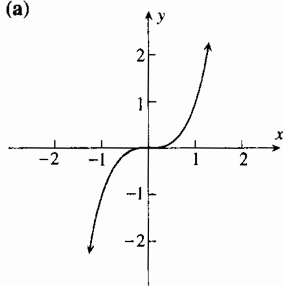


EJERCICIOS 4.1 (página 307)

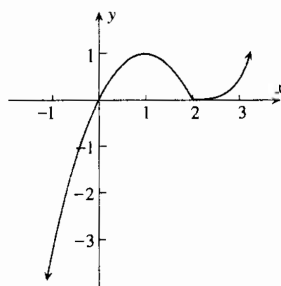
1. $\frac{3}{5}x^5 + C$ **3.** $-\frac{1}{2x^2} + C$ **5.** $2u^{5/2} + C$ **7.** $3x^{2/3} + C$ **9.** $\frac{9}{5}t^{10/3} + C$ **11.** $\frac{1}{3}y^6 - \frac{3}{4}y^4 + C$
13. $\frac{8}{5}x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x + C$ **15.** $\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2} + C$ **17.** $-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 5x + C$
19. $\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{8}{3}x^{3/2} - 8x^{1/2} + C$ **21.** $\frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{3}{2}x^{2/3} + C$ **23.** $-3\cos t - 2 \operatorname{sen} t + C$ **25.** $\sec x + C$
27. $-4\csc x + 2\tan x + C$ **29.** $-2\cot\theta - 3\tan\theta + \theta + C$
31. **(a)**



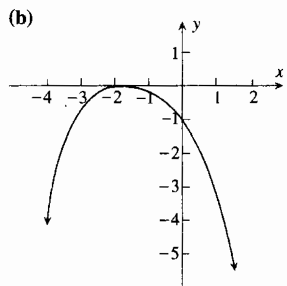
33. **(a)**



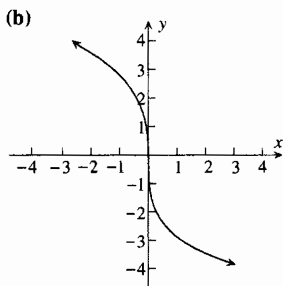
35.



(b)



(b)



37. $y = x^2 - 3x + 2$ **39.** $3y = -2x^3 + 3x^2 + 2x + 6$ **41.** $12y = -x^4 + 6x^2 - 20x + 27$
43. $C(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 6$ **45.** **(a)** $C(x) = 3x^2 + 8$; **(b)** $\$800$ **47.** **(a)** $R(x) = 15x - 2x^2$; **(b)** $p = 15 - 2x$
49. 117π m^3 **53.** $g'(x)$ no existe en $x = 0$

EJERCICIOS 4.2 (página 318)

1. $-\frac{1}{6}(1 - 4y)^{3/2} + C$ **3.** $\frac{3}{8}(x^2 - 9)^{4/3} + C$ **5.** $\frac{1}{33}(x^3 - 1)^{11} + C$ **7.** $\dfrac{1}{32(1 - 2y^4)^4} + C$
9. $\frac{3}{11}(x - 2)^{11/3} + C$ **11.** $\frac{2}{5}(x + 2)^{5/2} - \frac{4}{3}(x + 2)^{3/2} + C$ **13.** $-\frac{2}{5}(1 - r)^{-5} + \frac{1}{3}(1 - r)^{-6} + C$
15. $-\frac{3}{4}(3 - 2x)^{3/2} + \frac{3}{10}(3 - 2x)^{5/2} - \frac{1}{28}(3 - 2x)^{7/2} + C$

17. $\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\theta + C$ **19.** $-2\cos x^3 + C$ **21.** $\frac{1}{5}\tan 5x + C$ **23.** $-\frac{1}{6}\csc 3y^2 + C$ **25.** $\frac{1}{6}(2 + \operatorname{sen} x)^6 + C$

27. $-2\left(1 + \dfrac{1}{3x}\right)^{3/2} + C$ **29.** $-\frac{3}{2}(1 + \cos x)^{4/3} + C$ **31.** $-\frac{1}{3}\cos^3 t + C$ **33.** $\frac{1}{2}\tan 2x - \frac{1}{2}\cot 2x + C$

35. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1} + C$ **37.** $\frac{3}{4}(3 - y)^{4/3} - 18(3 - y)^{1/3} + C$ **39.** $\frac{3}{5}(r^{1/3} + 2)^5 + C$

41. $\sqrt{x^2 + 4} + \dfrac{4}{\sqrt{x^2 + 4}} + C$ **43.** $\cos(\cos x) + C$ **45.** $C(x) = \frac{6}{5}\sqrt{5x + 4} + \frac{38}{5}$ **47.** $p = \dfrac{4x + 22}{x + 5}$

49. $\frac{1}{6}$ coulombs **51.** \$325 **53.** 3.1 μm^3 **55.** **(a)** $2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + C$; **(b)** $\frac{1}{8}(2x + 1)^4 + \overline{C}$; **(c)** $C = \frac{1}{8} + \overline{C}$

57. **(a)** $\frac{2}{3}x^{3/2} - 2x + 2x^{1/2} + C$; **(b)** $\frac{2}{3}(\sqrt{x} - 1)^3 + \overline{C}$; **(c)** $C = -\frac{2}{3} + \overline{C}$

59. **(a)** $\operatorname{sen}^2 x + C_1$; **(b)** $-\cos^2 x + C_2$; **(c)** $-\frac{1}{2}\cos 2x + C_3$; **(d)** $C_2 = C_1 + 1; C_3 = C_1 + \frac{1}{2}$

EJERCICIOS 4.3 (página 326)

1. $y = 2x^2 - 5x + C$ **3.** $y = x^3 + x^2 - 7x + C$ **5.** $y = \dfrac{-2}{3x^2 + C}$ **7.** $2\sqrt{1 + u^2} = 3v^2 + C$

9. $\tan x - \tan y + y = C$ **11.** $y = \frac{5}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$ **13.** $s = -\frac{1}{9}(\operatorname{sen} 3t + \cos 3t) + C_1 t + C_2$

15. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + 6$ **17.** $4\operatorname{sen} 3x + 6\cos 2y + 7 = 0$ **19.** $u = 3v^4 + 4v^3 + 2v^2 + 2v$

21. $s = \frac{1}{3}(2t + 4)^{3/2} - \frac{8}{3}$ **23.** $v = 2 + 5t - t^2; s = 2t + \frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3$

25. $v = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 4; s = \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{3}t^3 - 4t + 1$ **27.** $v = -2\sqrt{2}\operatorname{sen}(2t - \frac{1}{4}\pi); s = \sqrt{2}\cos(2t - \frac{1}{4}\pi)$

29. $1600s = v^2 + 1200$ **31.** $5s^2 + 4s = v^2 + 12$

33. A los t s su posición es s cm a la derecha del origen, donde $s = (-3\cos 3\pi t + 3)/\pi$.
(a) $s = (\frac{9}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{5})/\pi \approx 0.1824$; **(b)** $s = 3/\pi \approx 0.9549$; **(c)–(d)** $s = (\frac{15}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{5})/\pi \approx 0.6598$

35. **(a)** 0.625 s; **(b)** 6.25 pie; **(c)** 1.25 s; **(e)** 20.0 pie/s **37.** **(a)** 5.89 s; **(b)** 188 pie/s **39.** **(a)** 3.39 s; **(b)** 98.5 pie/s;

41. **(a)** 3.54 s; **(b)** 113 pie/s **43.** **(a)** $s = -4.9t^2 + 150t + 2$; **(b)** 523.6 m; **(c)** 3.79 s; 26.8 s

45. $\frac{15}{241}$ rad/s $\approx$ 0.06 rad/s **47.** 1.62 m/s^2 **49.** **(a)** 3.47 s; **(b)** 48.2 m **51.** 20 m/s = 72 km/h **53.** $x^2 + 2y^2 = C$

EJERCICIOS 4.4 (página 337)

1. 51 **3.** 147 **5.** 2025 **7.** $\frac{73}{12}$ **9.** $\frac{63}{4}$ **11.** $\frac{7}{12}$ **13.** 10 400 **15.** $2^n - 1$ **17.** $\frac{100}{101}$

19. $n^4 - \frac{2}{3}n^3 - 3n^2 - \frac{4}{3}n$ **21.** $\frac{8}{3}$ unidades cuadradas **23.** $\frac{5}{3}$ unidades cuadradas **25.** 9 unidades cuadradas

27. $\frac{17}{4}$ unidades cuadradas **29.** $\frac{27}{4}$ unidades cuadradas **31.** $\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ unidades cuadradas **33.** 9 unidades cuadradas

35. ~~15~~ 5/3 unidades cuadradas **37.** 1.0349 unidades cuadradas **39.** 1.8530 unidades cuadradas **41.** 1.5912 unidades cuadradas

EJERCICIOS 4.5 (página 350)

1. $\frac{247}{32}$ **3.** 1.14 **5.** $\dfrac{\pi}{24}(10 + \sqrt{2} + 3\sqrt{3})$ **7.** **(a)** 0.2672; **(b)** 0.3 **9.** **(a)** 2.6725; **(b)** 2.6339 **11.** 2

13. π **15.** 6 **17.** 12 **19.** 10 **21.** $\frac{5}{2}$ **23.** 28 **25.** $\dfrac{\pi}{2}$ **27.** 0 **29.** **(a)** 12; **(b)** 49; **(c)** -5

31. 15 **33.** 0 **35.** -21 **37.** $-\frac{3}{2}$ **39.** $4 + \pi$ **41.** $\frac{33}{2}\pi$ **49.** $\displaystyle\int_0^2 x^2\, dx$ **51.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx$

EJERCICIOS 4.6 (página 359)

1. $\geq$ **3.** $\leq$ **5.** $[0, 0.125]$ **7.** $[2, 2\sqrt{3}]$ **9.** $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\sqrt{3}]$ **11.** $[0, 1.5]$ **13.** $[0, \frac{25}{32}]$ **15.** $[2, 2.5]$

17. $[-2, \frac{2}{3}]$ **19.** $[-\frac{2}{3}\pi, 0]$ **21.** 1.15 **23.** 1.55 **25.** 2.58 **27.** 0 **29.** 2.66 **31.** 0.66

41. $\frac{1}{2}$, ocurre en $x = \frac{1}{2}$ **43.** $\frac{2}{\pi} \approx \operatorname{sen} 0.69$ **45.** $v = 32t$; 32 **47.** π

EJERCICIOS 4.7 (página 370)

1. 12 **3.** 36 **5.** $\frac{3}{2}$ **7.** $\frac{3}{16}$ **9.** $\frac{134}{3}$ **11.** -8 **13.** 1 **15.** $\frac{2}{9}(27 - 2\sqrt{2})$ **17.** $2 - \sqrt[3]{2}$ **19.** $\frac{104}{5}$

21. $\frac{29}{2}$ **23.** $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ **25.** $\frac{256}{15}$ **27.** $\frac{5}{6}$ **29.** $\frac{6215}{12}$ **31.** 0 **33.** $\frac{3}{2}$ **35.** $\sqrt{4 + x^6}$ **37.** $-\sqrt{\operatorname{sen} x}$

39. $\dfrac{2}{3 + x^2}$ **41.** $3x^2\sqrt[3]{x^6 + 1}$ **43.** 1 **45.** 6, ocurre en $x = \sqrt{3}$ **47.** 27 **49.** $\sqrt{2 - \frac{3}{4}(\operatorname{sen}\frac{8}{3})} \approx 1.2873$ **59.** $\frac{188}{3}$

EJERCICIOS 4.8 (página 379)

1. $\frac{32}{3}$ unidades cuadradas **3.** $\frac{22}{3}$ unidades cuadradas **5.** $\frac{52}{3}$ unidades cuadradas **7.** $\frac{343}{6}$ unidades cuadradas
9. 1 unidad cuadrada **11.** 1 unidad cuadrada **13.** $\frac{32}{3}$ unidades cuadradas **15.** $\frac{32}{3}$ unidades cuadradas
17. $\frac{1}{6}$ unidades cuadradas **19.** $\frac{12}{5}$ unidades cuadradas **21.** $\frac{9}{2}$ unidades cuadradas **23.** $\frac{8}{3}\sqrt{2}$ unidades cuadradas
25. $\frac{5}{12}$ unidades cuadradas **27.** $\frac{27}{10}$ unidades cuadradas **29.** $\frac{64}{3}$ unidades cuadradas **31.** $\frac{253}{12}$ unidades cuadradas
33. $\frac{37}{12}$ unidades cuadradas **35.** $(\sqrt{2} - 1)$ unidades cuadradas **37.** $\frac{7}{3}$ unidades cuadradas
39. **(a)** $\pm\sqrt{2} \approx 1.4142$; **(c)** $\frac{56}{15}\sqrt{2}$ unidades cuadradas ≈ 5.2797 unidades cuadradas
41. **(a)** ± 1.4045; **(c)** 2.2032 unidades cuadradas **43.** **(a)** 1.3146; **(c)** 3.7545 unidades cuadradas
45. **(a)** 1.1274; **(c)** 2.8079 unidades cuadradas **47.** 12 unidades cuadradas **49.** $\frac{128}{5}$ unidades cuadradas
51. 64 unidades cuadradas **53.** $(\frac{1}{2}\pi - 1)$ unidades cuadradas **55.** $(1 - \frac{1}{4}\pi)$ unidades cuadradas
57. $\frac{16}{3}p^2$ unidades cuadradas **59.** 32 **61.** $m = \frac{3}{2}K$ **63.** El dominio de $A(h)$ es $[0, r]$

EJERCICIOS 4.9 (página 389)

1. $\frac{4}{3}\pi r^3$ unidades cúbicas **3.** $\frac{127}{7}\pi$ unidades cúbicas **5.** 64π unidades cúbicas **7.** $\frac{704}{5}\pi$ unidades cúbicas
9. $\frac{384}{7}\pi$ unidades cúbicas **11.** $\frac{3456}{35}\pi$ unidades cúbicas **13.** $\frac{256}{15}\pi$ unidades cúbicas **15.** $\frac{128}{5}\pi$ unidades cúbicas
17. $\frac{4}{3}\pi r^3$ unidades cúbicas **19.** $\frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$ unidades cúbicas **21.** π unidades cúbicas **23.** $\frac{1}{2}\pi^2$ unidades cúbicas
25. $(4\pi - \frac{1}{2}\pi^2)$ unidades cúbicas **27.** $(\sqrt{3}\pi - \frac{1}{3}\pi^2)$ unidades cúbicas **29.** $\frac{1250}{3}\pi$ unidades cúbicas **31.** $\frac{64}{5}\pi$ unidades cúbicas
33. $\frac{261}{32}\pi$ unidades cúbicas **35.** $\frac{16}{3}\pi$ unidades cúbicas **37.** $(\frac{8}{3}\pi^2 - 2\sqrt{3}\pi)$ unidades cúbicas **39.** 2
41. 15.15 unidades cúbicas **43.** 39.69 unidades cúbicas **45.** 2.822 unidades cúbicas **47.** 6.923 unidades cúbicas
49. 20.28 unidades cúbicas **51.** $32\sqrt{2}$ unidades cúbicas **53.** $\frac{1372}{3}\sqrt{3}\,\text{cm}^3$ **55.** $\frac{686}{3}\text{cm}^3$ **57.** $\frac{8}{3}r^3$ unidades cúbicas
59. 396.9 unidades cúbicas **61.** $\frac{2}{3}r^3\,\text{cm}^3$ **63.** $180\pi\,\text{cm}^3$

EJERCICIOS 4.10 (página 396)

1-11. Vea las respuestas de los ejercicios 5-15 de la sección 4.9 **13.** $\frac{1}{2}\pi$ unidades cúbicas **15.** $\frac{3}{10}\pi$ unidades cúbicas
17. $\frac{5}{6}\pi$ unidades cúbicas **19.** $\frac{49}{30}\pi$ unidades cúbicas **21.** 16π unidades cúbicas **23.** $\frac{512}{15}\pi$ unidades cúbicas
25. $\frac{32}{15}\pi p^3$ unidades cúbicas **27.** $\frac{8}{5}\pi$ unidades cúbicas **29.** $\frac{11}{10}\pi$ unidades cúbicas **31.** $\frac{152}{15}\pi$ unidades cúbicas
33. $\frac{16}{3}\pi$ unidades cúbicas **35.** $\frac{32}{15}\pi$ unidades cúbicas **37.** $\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})\pi$ unidades cúbicas
39. π unidades cúbicas **41.** 20.37 unidades cúbicas **43.** 62.67 unidades cúbicas **45.** 2.038 unidades cúbicas
47. 7.707 unidades cúbicas **49.** 6.763 unidades cúbicas **51.** $\frac{224}{3}\pi$ unidades cúbicas **53.** $\sqrt[7]{2744}$

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 4 (página 398)

1. $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x + C$ **3.** $\frac{2}{15}(x^5 - 1)^{3/2} + C$ **5.** $\frac{1}{3}\sqrt{2s+3}(s - 3) + C$ **7.** $\frac{1}{3}\tan 3\theta - \theta + C$
9. $5\,\text{sen}\,x - 3\sec x + C$ **11.** $\frac{56}{3}$ **13.** $\frac{11}{4}$ **15.** $\frac{5}{4}$ **17.** $\frac{1}{2}$ **19.** $\frac{652}{15}$ **21.** $4 - \frac{1}{2}\pi$ **23.** $y^2 = \dfrac{1}{2x^{-1} + C} + 1$
25. $y = \frac{1}{15}(2x - 1)^{5/2} + C_1x + C_2$ **27.** $y = 10x - 2x^2 - 9$ **29.** **(a)** $R(x) = \frac{1}{4}x^3 - 5x^2 + 12x$; **(b)** $p = \frac{1}{4}x^2 - 5x + 12$
31. **(a)** $V = \frac{2}{3}(t + 1)^{3/2} + \frac{1}{3}t^2 + \frac{74}{3}$; **(b)** $64\,\text{cm}^3$ **33.** $1.46\,\text{cm}^3$ **35.** \$5
37. $v = 3\,\text{sen}\,2t + 3$; $s = -\frac{3}{2}\cos 2t + 3t + \frac{1}{2}(5 - 3\pi)$
39. A los t s su posición es s cm a la derecha del origen, donde $s = \dfrac{3\,\text{sen}\,2\pi t}{2\pi}$.
(a) $s \approx 0.4541$; **(b)** y **(c)** $s \approx -0.4541$; **(d)** $s = \dfrac{3}{2\pi} \approx 0.4775$
41. **(a)** $25\sqrt{3}\,\text{s} \approx 43$ s; **(b)** $800\sqrt{3}$ pie/s ≈ 1400 pie/s **43.** **(a)** $\frac{3}{2}$s; **(b)** 100 pie; **(c)** 4 s; **(d)** −80 pie/s
45. **(a)** 1500 m/s; **(b)** 45 000 m **47.** $(11 + \sqrt{187})$s ≈ 25 s; $88(14 + \sqrt{187})$ pie ≈ 2400 pie; $(88 + 8\sqrt{187})$ pie/s ≈ 200 pie/s
49. $\sqrt[3]{2} - 5$ **53.** $[0, \pi]$ **55.** $\frac{313}{2}$ **57.** $-(3x^2 - 4)^{3/2}$ **59.** $\dfrac{1}{x}$ **61.** 0 **63.** $\frac{42\,304}{175}$ **67.** $\frac{46}{3}$ unidades cuadradas
69. $\frac{224}{3}$ unidades cuadradas **71.** 36 unidades cuadradas **73.** 21.88 unidades cuadradas **75.** 0.9678 unidades cuadradas
77. $\frac{1}{12}$ unidades cuadradas **79.** $2\sqrt{2}$ unidades cuadradas **81.** $(\frac{1}{2}\pi - 1)$ unidades cuadradas **83.** $\frac{1}{9}\pi$ unidades cúbicas
85. π unidades cúbicas **87.** π unidades cúbicas **89.** 250π unidades cúbicas **91.** 1024 unidades cúbicas
93. 3π unidades cúbicas **95.** $\frac{25}{6}\pi$ unidades cúbicas **97.** $558\pi\,\text{cm}^3$ **99–101.** 44.96 unidades cúbicas
103. 1.535 unidades cúbicas **105.** 25.17 unidades cúbicas **107.** 90 pie^3 **109.** $\frac{832}{3}\pi$ unidades cúbicas
111. $\frac{1}{4}\pi^2$ unidades cúbicas **113.** 12; $c = \sqrt{3}$ **119.** $\frac{1}{6}\pi + \sqrt{3}$

EJERCICIOS 5.1 (página 416)

1. **(a)** uno a uno; **(b)** no es uno a uno; **(c)** uno a uno **3.** **(a)** uno a uno; **(b)** uno a uno; **(c)** no es uno a uno
5. **(a)** uno a uno; **(b)** uno a uno; **(c)** uno a uno
7. **(a)** $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x + 7)$, dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $(-\infty, +\infty)$; **(b)** no tiene inversa
9. **(a)** $f^{-1}(x) = 4 - \sqrt[3]{x}$, dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $(-\infty, +\infty)$; **(b)** $h^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$, dominio: $[0, +\infty)$, contradominio: $[3, +\infty)$ **11.** **(a)** $F^{-1}(x) = x^3 - 1$, dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $(-\infty, +\infty)$; **(b)** no tiene inversa
13. **(a)** $f^{-1}(x) = \frac{1}{32}x^5$, dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $(-\infty, +\infty)$;
(b) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{1-x}$, dominio: $\{x \mid x \neq 1\}$, contradominio: $\{y \mid y \neq -1\}$
15. **(a)** $g^{-1}(x) = \sqrt{x-5}$, dominio: $[5, +\infty)$, contradominio: $[0, +\infty)$; **(b)** $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x} - 1)$, dominio: $[0, 8]$, contradominio: $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
17. $F^{-1}(x) = \sqrt{9 - x^2}$, dominio: $[0, 3]$, contradominio: $[0, 3]$ **25.** **(a)** $\frac{2}{3}$; **(b)** $\frac{1}{10}$ **27.** **(a)** $\frac{1}{12}$; **(b)** $\frac{1}{21}$ **29.** **(a)** -2; **(b)** $-\frac{1}{4}$
31. **(a)** $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; **(b)** $-\frac{1}{4}$ **33.** 0.09426 **35.** $\sqrt{\frac{1}{840}(1 + \sqrt{21})} \approx 0.08152$ **37.** 1.334 **39.** $\frac{1}{3}$ **41.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x + 3)$
43. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$ **45.** $f^{-1}(x) = \dfrac{4x-1}{3-2x}$ **47.** $f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ **49.** $v(m) = c\sqrt{1 - \left(\dfrac{m_0}{m}\right)^2}$ **51.** **(b)** 6; **(c)** $\frac{1}{6}$
55. -1 **59.** **(b)** $f_1(x) = x^2 + 4, x \geq 0$; $f_2(x) = x^2 + 4, x \leq 0$; **(c)** $f_1^{-1}(x) = \sqrt{x-4}, x \geq 4$; $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x-4}, x \geq 4$

61. $f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } 1 \leq x \leq 81 \\ \left(\dfrac{x}{27}\right)^2 & \text{si } 81 < x \end{cases}$ **63.** $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{5}$ **65.** $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{3\pi^2}$

EJERCICIOS 5.2 (página 428)

5. $\dfrac{5}{4+5x}$ **7.** $\dfrac{5}{8+10x}$ **9.** $\dfrac{6}{3t+1}$ **11.** $\dfrac{6\ln(3t+1)}{3t+1}$ **13.** $-\dfrac{2x}{12-3x^2}$ **15.** $5\cot 5y$ **17.** $-\dfrac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}$
19. $2\sec 2x$ **21.** $\dfrac{\sec^2 x}{2\tan x}$ **23.** $-\dfrac{17}{2(2w-5)(3w+1)}$ **25.** $\dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ **27.** $\dfrac{1 - 2x - x^2}{3(x+1)(x^2+1)}$ **29.** $\dfrac{1}{2(1 + \sqrt{x+1})}$
31. $-\dfrac{xy + y}{xy + x}$ **33.** $x + y$ **35.** $\dfrac{4x^2y - xy - 2y}{6xy^2 + x}$
39. **41.** **43.** **45.**

49. $x - 2y = 2 - 2\ln 2$ **51.** $x + y = 1$ **53.** $-\frac{1}{2}$ **55.** **(a)** \$5 por cada \$1 de cambio en el presupuesto; **(b)** \$688

EJERCICIOS 5.3 (página 435)

1. $\dfrac{3x^2}{x^3+1}$ **3.** $-\dfrac{3\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x}$ **5.** $4\sec 4x$ **7.** $\dfrac{4 - x^2}{x(x^2+4)}$ **9.** $2x(x+1)^6(x-1)^2(6x^2 - 2x - 1)$
11. $\dfrac{x(x-1)(x+2)^2}{(x-4)^6}(2x^3 - 30x^2 - 6x + 16)$ **13.** $\dfrac{8x^9 - 4x^7 + 15x^2 + 10}{5(x^7+1)^{6/5}}$ **15.** $-\frac{1}{2}\ln|3 - 2x| + C$
17. $\frac{1}{5}\ln|5x^3 - 1| + C$ **19.** $\ln|\ln y| + C$ **21.** $\frac{1}{5}\ln(1 - \cos 5x) + C$ **23.** $\ln(1 + \operatorname{sen} 2x) + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$
25. $x^2 + 4\ln|x^2 - 4| + C$ **27.** $\frac{1}{3}\ln^3(3x) + C$ **29.** $\ln|\ln^2(x) + \ln x| + C$ **31.** $\ln|\sec(\ln x)| + C$ **33.** $\frac{3}{2}\ln 2$
35. $\frac{1}{2}\ln\frac{4}{7}$ **37.** $4 + \ln 2$ **39.** $\frac{1}{2}\ln 3$ **41.** $\frac{1}{2}\ln(4 + 2\sqrt{3})$ **43.** $\dfrac{1}{\ln 4}$ **47.** $\frac{1}{4}\ln 5 \approx 0.40236$
49. $2000 \ln 2$ lb/pie^2 ≈ 1386 lb/pie^2 **51.** $\ln 4$ unidades cuadradas ≈ 1.38629 unidades cuadradas **53.** $\pi(11 + 8\ln 2)$ unidades cúbicas ≈ 51.97821 unidades cúbicas

EJERCICIOS 5.4 (página 446)

1. (a) 2.665; (b) 2.565 **3.** (a) 15.15; (b) 5.616 **5.** $5e^{5x}$ **7.** $-6xe^{-3x^2}$ **9.** $-e^{\cos x}\operatorname{sen} x$ **11.** $e^{2x}\cos e^x + e^x \operatorname{sen} e^x$

13. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}\sec^2 e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ **15.** $\dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$ **17.** $2x$ **19.** $2e^{2x}\sec e^{2x}\tan e^{2x} + 2e^{2\sec x}\sec x\tan x$ **21.** $-e^{y-x}$

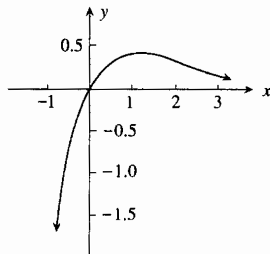
23. $-\dfrac{y^2 + 2ye^{2x}}{2e^{2x} + 3xy}$ **25.** $-\frac{1}{5}e^{2-5x} + C$ **27.** $e^x - e^{-x} + C$ **29.** $\dfrac{1}{6(1 - 2e^{3x})} + C$ **31.** $e^x - 3\ln(e^x + 3) + C$

33. e^2 **35.** 2 **37.** $\frac{1}{2}$ **39.** $\frac{1}{2}(e^4 - 1)$ **41.** (a) 1; (b) 0; (c) e; (d) no, pero $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ **43.** $(e^2 - 1)$ unidades cuadradas

45. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$ **47.** $(e^3 + \frac{1}{2})$ pie $\approx$ 20.586 pie **49.** (–9.17 lb/pie^2) por s

51. 0.006 **53.** \$10 000; \$33 834 cientos $\approx$ \$3 383 382 **55.** (b) 2.7181459; 2.7184177; 2.7182818

61. Consulte la figura adjunta. (a) y (b) $f(1) = e^{-1}$ es un máx. rel.; (c) $(-\infty, 1]$; (d) $[1, +\infty)$; (e) $\{x \mid x > 2\}$; (f) $\{x \mid x < 2\}$; (g) La pendiente de la recta tangente a f en $x = 2$ es $-e^{-2}$



EJERCICIOS 5.5 (página 454)

1. $5\ln 3\cdot 3^{5x}$ **3.** $4^{3t^2}\cdot\ln 4\cdot 6t$ **5.** $4^{\operatorname{sen} 2x}\cdot 2\ln 4\cdot\cos 2x$ **7.** $2^{5x}3^{4x^2}(5\ln 2 + 8x\ln 3)$ **9.** $\dfrac{1}{x^2}\log_{10}\dfrac{e}{x}$ **11.** $\dfrac{\log_a e}{2x\sqrt{\log_a x}}$

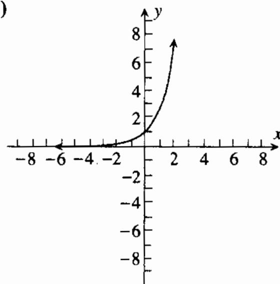
13. $3^{t^2}\sec 3^{t^2}\tan 3^{t^2}\cdot 2t\ln 3$ **15.** $x^{\sqrt{x}-(1/2)}(1 + \frac{1}{2}\ln x)$ **17.** $z^{\cos z-1}(\cos z - z\ln z\operatorname{sen} z)$

19. $(\operatorname{sen} x)^{\tan x}[1 + \ln(\operatorname{sen} x)\cdot\sec^2 x]$ **21.** $\dfrac{3^{2x}}{2\ln 3} + C$ **23.** $\dfrac{a^te^t}{1 + \ln a} + C$ **25.** $\dfrac{10^{x^3}}{3\ln 10} + C$

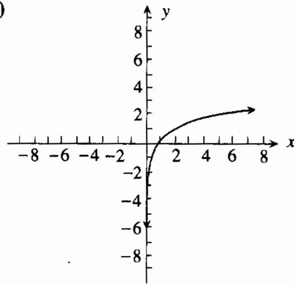
27. $\dfrac{6^{e^y}}{\ln 6} + C$ **29.** $\dfrac{(\ln|x|)^2}{\ln 2} + C$ **31.** (a) 0.62133; (b) 1.7712 **33.** (a) 3.3219; (b) 0.43429 **35.** 2.999

45. (a) 61 ventas por día; (b) 2.26 ventas por día **49.** (a) $y = 200\cdot 2^{t/10}$; (b) \$12 800; (c) \$877 por año

51. (a)

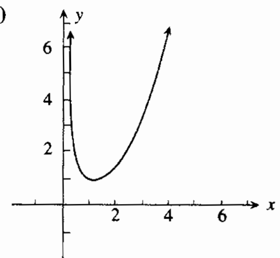


(b)



53. $\left(\dfrac{4}{\ln 5} - 1\right)$ unidades cuadradas **55.** $\pi\left(\dfrac{12}{\ln 5} - 1\right)$ unidades cúbicas **57.** 0.73306 unidades cuadradas

59. (a)



(b) $f(1) = 1$ es un mínimo relativo;
(c) $[1, +\infty)$; (d) $(0, 1]$;
(e) La gráfica es cóncava hacia arriba en todo su dominio: $(0, +\infty)$;
(f) no tiene puntos de inflexión

67. dominio: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$; extremo en $f(0) = 0$; no acotada en $x = 1$; decreciente en todos los intervalos del dominio; punto de inflexión en $(e^{-2}, -\frac{1}{2}\ln 5)$; cóncava hacia arriba en $[0, e^{-2}]$ y $(1, +\infty)$; cóncava hacia abajo en $[e^{-2}, 1)$

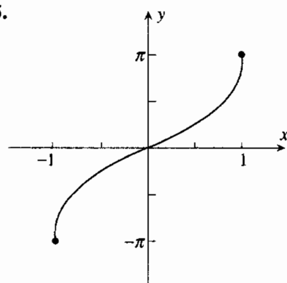
EJERCICIOS 5.6 (página 467)

1. (a) $y = 40\,0000\,(1.5)^{t/40}$; (b) 64 000; (c) 2023 **3.** (a) $i = 40\,(0.375)^{100t}$; (b) 5.625 amperes **5.** 506 **7.** 10.6 **9.** 123 456 **11.** 29.15 años **13** (a) \$5256.355; (b) \$5256.357; (c) 5.127% **15.** 15.8 años **17.** 43.9 g **19.** 11.6 kg **21.** hace 6 600 años **23.** 70 **25.** (a) 1 min 42 s; (b) 42.1° **27.** (a) $y = 60 - 60(0.75)^{t/20}$; (c) 35; (d) 55 **29.** 0.34134 **31.** 0.84270 **33.** $\ln\left|\ln\frac{a}{y}\right| + kt = C$

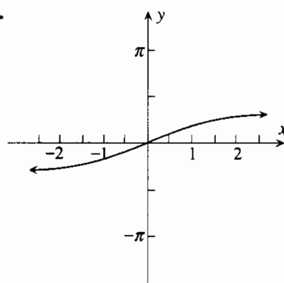
EJERCICIOS 5.7 (página 482)

1. (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{6}\pi$; (c) $\frac{1}{3}\pi$; (d) $\frac{2}{3}\pi$ **3.** (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $\frac{7}{6}\pi$ **5.** (a) $\frac{1}{2}\pi$; (b) $-\frac{1}{2}\pi$; (c) $\frac{1}{2}\pi$; (d) $-\frac{1}{2}\pi$; (e) 0 **7.** (a) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; (b) $\frac{1}{4}\sqrt{2}$; (c) $2\sqrt{2}$; (d) $\frac{3}{4}\sqrt{2}$; (e) 3 **9.** (a) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; (b) $-\frac{1}{4}\sqrt{2}$; (c) $-2\sqrt{2}$; (d) $\frac{3}{4}\sqrt{2}$; (e) -3 **11.** (a) $-\frac{2}{5}\sqrt{5}$; (b) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$; (c) $-\frac{1}{2}$; (d) $\sqrt{5}$; (e) $-\frac{1}{2}\sqrt{5}$ **13.** (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{6}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $-\frac{1}{6}\pi$ **15.** (a) $\frac{1}{3}\pi$; (b) $\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{2}{3}\pi$; (d) $\frac{2}{3}\pi$ **17.** (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $-\frac{1}{3}\pi$ **19.** (a) $\frac{1}{3}\pi$; (b) $\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{4}{3}\pi$; (d) $\frac{4}{3}\pi$ **21.** (a) $\sqrt{3}$; (b) $\frac{1}{7}\sqrt{21}$ **23.** (a) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; (b) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

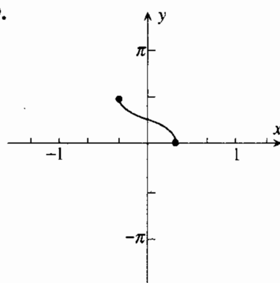
25.



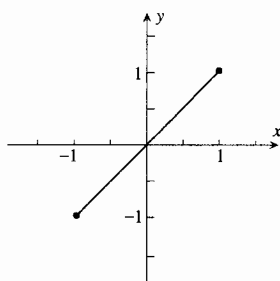
27.



29.



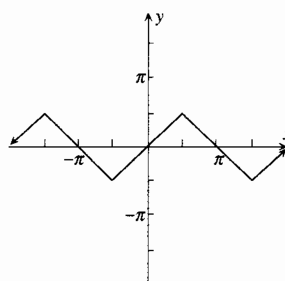
31. (a)



dominio: $[-1, 1]$;

contradominio: $[-1, 1]$

(b)



dominio: $(-\infty, +\infty)$;

contradominio: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

33. (a) $\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$; (b) $\frac{2}{1 + 4x^2}$ **35.** (a) $-\frac{1}{\sqrt{x - x^2}}$; (b) 0 **37.** (a) $-\frac{x}{|x|\sqrt{1 - x^2}}$; (b) $\frac{2}{4 + x^2}$ **39.** (a) $-\frac{\cos x}{|\cos x|}$; (b) $2\sqrt{4 - x^2}$ **41.** (a) $\tan^{-1} x$; (b) $\frac{3}{\sqrt{4e^{6x} - 1}}$ **43.** (a) $t = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{sen}^{-1}\frac{y}{2} + \frac{1}{8} + \frac{n}{2}$, para cualquier entero $n \geq 0$ o $t = \frac{1}{4\pi}\operatorname{sen}^{-1}\frac{y}{2} - \frac{1}{8} + \frac{k}{2}$, para cualquier entero $k \geq 1$; (b) $\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}$ **45.** recta tangente: $y = \frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\pi}{3}$; recta normal: $y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$ **47.** $\sqrt{10}$ pie $\approx$ 3.16 pie **49.** $\frac{1264}{16\,241}$ rad/s $\approx$ 0.078 rad/s **51.** $\frac{52}{3}\pi$ km/min **53.** 8 pie/s **55.** $\frac{6}{x\sqrt{x^2 - 64}}$

EJERCICIOS 5.8 (página 488)

1. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} 2x + C$ **3.** $\frac{1}{12}\tan^{-1}\frac{3}{4}x + C$ **5.** $\frac{1}{16}\sec^{-1}\frac{1}{4}x + C$ **7.** $\frac{1}{6}\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{4}r^2 + C$ **9.** $\frac{1}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\frac{e^x}{\sqrt{7}} + C$
11. $2\tan^{-1}\sqrt{x} + C$ **13.** $\frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C$ **15.** $\operatorname{sen}^{-1}\frac{x-1}{4} + C$ **17.** $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\ln 2$
19. $\frac{1}{3}\pi$ **21.** $\tan^{-1} e - \frac{1}{4}\pi$ **23.** $\frac{1}{4}\pi$ **25.** $-\sqrt{5} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3} + 3 \approx 0.0342044$
27. $\frac{21}{2} + \frac{5}{4}\ln 3 + \frac{1}{2}\sqrt{2}(\tan^{-1}\sqrt{2} - \pi) \approx 10.3273$ **29.** π unidades cuadradas **31.** $\frac{1}{3}\pi$ unidades cuadradas

EJERCICIOS 5.9 (página 501)

1. **(a)** 0; **(b)** 1; **(c)** $\frac{1}{2}(e - e^{-1}) \approx 1.175$; **(d)** $\frac{1}{2}(e^{-1} - e) \approx -1.175$
3. **(a)** $\frac{e^2 - e^{-2}}{e^2 + e^{-2}} \approx 0.9640$; **(b)** $\frac{e^{-2} - e^2}{e^{-2} + e^2} \approx -0.9640$; **(c)** $\frac{5}{4}$; **(d)** $\frac{5}{4}$
5. **(a)** $\frac{2}{e^2 + e^{-2}} \approx 0.2658$; **(b)** $\frac{2}{e^{-2} + e^2} \approx 0.2658$; **(c)** $\frac{e^{-1} + e}{e^{-1} - e} \approx -1.313$; **(d)** $\frac{12}{5}$
13. **(a)** $2x\cosh x^2$; **(b)** $-8\operatorname{sech}^2 4w \tanh 4w$ **15.** **(a)** $\frac{1}{x^2}\operatorname{csch}^2\frac{1}{x}$; $\frac{1}{\operatorname{senh} x \cosh x} = 2\operatorname{csch} 2x; x > 0$
17. **(a)** $2\operatorname{sech} 2x$; **(b)** $(\cosh x)^x[\ln(\cosh x) + x\tanh x]$ **19.** $\frac{1}{5}\operatorname{senh}^5 x + C$ **21.** $-\frac{1}{3}\coth x^3 + C$
23. $\frac{1}{4}\ln^2(\cosh 2x) + C$ **27.** $\frac{4}{5} = 0.8$ **29.** $2(\cosh 2 - \cosh 1) \approx 4.438$ **31.** $\frac{1}{6}(\tanh^6 3 - \tanh^6 2) \approx 0.02800$
33. **(a)** 0; **(b)** $\frac{1}{2}\ln 3$ **35.** **(a)** $\ln(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})$; **(b)** $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\ln 3$ **41.** **(a)** $\frac{4}{\sqrt{16x^2+1}}$; **(b)** $\frac{2x}{1 - x^4}$, $|x| > 1$
43. **(a)** $\frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x - 1}}$, $\tan x > 1$; **(b)** $-\csc x$ **45.** **(a)** $\frac{6z(\coth^{-1} z^2)^2}{1 - z^4}$; **(b)** $\frac{e^x}{\cos e^x}$ **47.** $\operatorname{senh}^{-1} x$
49. $\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{2} + C = \ln\frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2} + C$ **51.** $\frac{1}{2}\cosh^{-1} x^2 + C = \frac{1}{2}\ln(x^2 + \sqrt{x^4 - 1}) + C$
53. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2 + e^t}{2 - e^t}\right| + C = \begin{cases} \frac{1}{2}\tanh^{-1}(\frac{1}{2}e^t) + C, & \text{si } e^t < 2 \\ \frac{1}{2}\coth^{-1}(\frac{1}{2}e^t) + C, & \text{si } e^t > 2 \end{cases}$ **55.** $\cosh^{-1}\frac{5}{2} - \cosh^{-1}\frac{3}{2} \approx 0.6044$
57. $\tanh^{-1}\frac{1}{2} - \tanh^{-1}(-\frac{1}{2}) \approx 1.099$ **59.** $\frac{1}{3}(\cosh^{-1}\frac{7}{3} - \cosh^{-1}\frac{4}{3}) \approx 0.2319$ **63.** 105 unidades cuadradas
65. **(a)** $v = e^{-t/2}(\frac{5}{2}\operatorname{senh} t + \cosh t)$; $a = e^{-t/2}(2\cosh t + \frac{1}{4}\operatorname{senh} t)$ **69.** $4\,000(31 - 20\operatorname{senh} 1) \approx 29\,983$

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 5 (página 504)

1. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+4}$, dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $(-\infty, +\infty)$ **3.** no tiene inversa
5. $f^{-1}(x) = \frac{4}{3 - x}$, dominio: $\{x \mid x \neq 3\}$, contradominio: $\{y \mid y \neq 0\}$ **7.** $f^{-1}(x) = x^3 - 1$ **9.** $\frac{1}{4}$ **11.** $\frac{1}{12}$
13. **(a)** $-3\tan 3x$, $\cos 3x > 0$; **(b)** $\frac{4x}{x^2+1}$ **15.** **(a)** $4e^{4t}\cos e^{4t}$; **(b)** $2^{\tan t}\cdot\ln 2\cdot\sec^2 t$ **17.** **(a)** $\frac{e^x}{1 + e^{2x}}$; **(b)** $\frac{-e^{\cot^{-1} x}}{1 + x^2}$
19. **(a)** $6\operatorname{senh}^2(2w)\cosh(2w)$; **(b)** $\operatorname{senh}(2w^3)6w^2$ **21.** **(a)** $-\operatorname{sech}(\tan x)\tanh(\tan x)\sec^2 x$; **(b)** $\operatorname{sech}^2(\sec x)\tan x\sec x$
23. $\frac{4}{(1 - x^2)\ln 10}$ **25.** $(\operatorname{sen} t)^{2t}(2\ln(\operatorname{sen} t) + 2t\cot t)$ **27.** $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$ **29.** $-2\operatorname{sech}(2x)$
31. $x^2(x^2+1)(x-1)^3(11x^3 - 7x^2 + 7x - 3)$ **33.** **(a)** 4.7288; **(b)** 8.8250 **35.** $\frac{3}{2}\ln(1 + e^{2x}) + C$
37. $\frac{1}{3}\left(e^{3x} + \frac{2^{3x}}{\ln 2}\right) + C$ **39.** $\frac{2^{e^x}}{\ln 2} + C$ **41.** $2\operatorname{sen}^{-1} x^2 + C$ **43.** $\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x+1}{3} + C$ **45.** $\frac{1}{4}\sqrt{2}\operatorname{sen}^{-1} 2\sqrt{2}e^{-x} + C$
47. $w - \frac{\tanh 3w}{3} + C$ **49.** $\frac{1}{3}(e^8 - 1)$ **51.** $\frac{3}{2}\ln 2$ **53.** $1 + 5\ln\frac{3}{4}$ **55.** $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} - 2$
57. $\frac{1}{2}(e + e^{-1}) - 1$ **59.** $\frac{-ye^x - e^y - 1}{e^x + xe^y + 1}$ **61.** **(a)** $\ln(2 + \sqrt{3})$; **(b)** $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$ **63.** $y = (2\ln 2 + 1)x - 4\ln 2$
65. $v = e^t - e^{-t} + 1$; $s = e^t + e^{-t} + t$ **67.** $\frac{1}{2}\pi(1 - e^{-2b})$; $\frac{1}{2}\pi$ **69.** $g(x) = -e^x$, dominio: $(-\infty, +\infty)$
73. **(a)** $y = 65(0.5)^{t/30}$; **(b)** 81 años a partir de ahora **75.** **(a)** $y = 50 - 50(0.6)^{t/30}$; **(c)** 32; **(d)** 3 horas, 50 minutos
77. 8.66 años **79.** 187 500 **81.** 8212 años **83.** 8.63 min **85.** 73.7°
87. **(a)** $t = \frac{n}{60} + \frac{1}{120\pi}\cos^{-1}\frac{E}{20}$, para cualquier entero $n \geq 0$ o $t = \frac{k}{60} - \frac{1}{120\pi}\cos^{-1}\frac{E}{20}$, para cualquier entero $k \geq 1$; **(b)** $\frac{1}{360}$; **(c)** 0.0035; **(d)** $\frac{1}{180}$; **(e)** 0.0048
89. $9\operatorname{sen}^{-1}(\frac{2}{3}\sqrt{2})$ unidades cuadradas **91.** **(a)** 120 rad/h; **(b)** 60 rad/h **93.** 0.007 rad/s **95.** $\frac{1}{10}\pi$ h; el recorrido lo hace caminando **103.** $(\operatorname{sgn} t)(1 - e^{-|t|})$

EJERCICIOS 6.1 (página 514)

1. $\sqrt{10}$ **3.** [illegible] $\sqrt{97}$ **5.** [illegible] **7.** $\frac{33}{16}$ **9.** $\frac{1}{27}(97^{3/2} - 125)$ **11.** 12 **13.** $\frac{22}{3}$ **15.** $\frac{9}{8}$
17. $\frac{8a^3 - [illegible]a^2 + 3b[illegible]}{8(a^2 - b^2)}$ si $b \neq a$; $\frac{9}{8}a$ si $b = a$ **19.** $2\sqrt{3} - \frac{4}{3}$ **21.** $\ln(\sqrt{2} + 1)$ **23.** 2 **25.** 4.647 **27.** 3.820
29. [illegible].089 **31.** 8 **33.** 2.422 **35.** 400 senh $\frac{3}{4}$ pie $\approx$ 328.9 pie

EJERCICIOS 6.2 (página 521)

1. 250 lb **3.** 4000 dinas **5.** $\frac{3}{2}$ m/s^2 **7.** $\frac{8}{3}$ slugs **9.** 4 **11.** 6 **13.** 54 kg; $\frac{11}{3}$ m del extremo dado
15. 171 [illegible] 5.92 pulg. del extremo dado **17.** 42 g; $\frac{44}{7}$ cm del extremo izquierdo **19.** $\frac{63}{2}$ kg; $\frac{18}{7}$ m del extremo más alejado d[illegible] punto externo **21.** 16 slugs; $\frac{16}{5}$ pie del extremo dado **23.** $\frac{6}{5}$ m del extremo más alejado del punto externo
25. $8 \ln 2$ g; $\left(\frac{15}{4 \ln 2} - 1\right)$ cm del extremo dado **27.** 12 kg/m

EJERCICIOS 6.3 (página 529)

1. [illegible] $\frac{1}{3}$) **3.** $\frac{29}{7}$ **5.** $(\frac{2}{3}, 1)$ **7.** $(0, \frac{8}{5})$ **9.** $(0, \frac{12}{5})$ **11.** $(\frac{16}{15}, \frac{64}{21})$ **13.** $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ **15.** (2, 0) **17.** (0, −0.4762)
19. [illegible], −0.1020) **21.** (0.5126, 1.970) **23.** (0.4910, −1.083) **25.** (1.048, 0.7793) **27.** (1.504, 2.375)
29. [illegible].4183, 0.5792) **31.** (0.5300, 1.590) **33.** $\frac{5}{3}p$ **35.** El centroide está sobre el radio que biseca la región, a una [illegible]stancia de $\frac{4}{3\pi}$ veces la longitud del radio a partir del diámetro. **37.** $(\frac{1}{2}\pi + \frac{2}{3})r^3$

EJERCICIOS 6.4 (página 534)

1. $\frac{158}{3}$ pie-lb **3.** $\frac{1076}{15}$ joules **5.** $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{393})$ **7.** 180 pulg-lb **9.** 8 joules **11.** 1350 ergios **13.** 409 500 pie-lb
15. 50 185 pie-lb **17.** 100 000 pie-lb **19.** 5 500 pie-lb **21.** 2.9×10^7 joules **23.** 3.20×10^6 joules **25.** 163.4 s
27. $2\sqrt{3}$ pie **29.** $31.2\pi(e^{-2} - e^{-8})$ pie-lb $\approx$ 13.2 pie-lb **31.** $3\,000 \ln \frac{3}{2}$ pulg-lb $\approx$ 1 216 pulg-lb

EJERCICIOS 6.5 (página 541)

1. 19 968 lb **3.** 3993.6 lb **5.** 140.4 lb **7.** 942 000 N **9.** 4.09×10^6 N **11.** 2.54 **15.** 874 000 lb
17. 6.24×10^6 pie-lb **19.** 756 lb **21.** 3.15×10^5 lb **23.** 1.22×10^6 lb

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 6 (página 542)

1. $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ **3.** $\frac{1}{53\,208}[\frac{1}{2}(10\,999)^{3/2} - (2251)^{3/2}] \approx 7.03$ **5.** $\frac{2}{13}$ **7.** $(\frac{3}{2}, 2)$ **9.** $\frac{104}{3}$ slugs; $\frac{298}{65}$ pulg. del extremo izquierdo **11.** $(\frac{9}{8}, \frac{18}{5})$
13. $(\frac{9}{20}, \frac{9}{20})$ **15.** $\frac{256}{3}\pi$ m^3 **17.** (0, 0) **19.** (0.3597, 0.5357) **21.** 3.214 **23.** 1.876 **25.** $\frac{7}{12}$ **27.** 6 000 ergios
29. 400 pie-lb **31.** 44 145 000 joules **33.** 57 262 pie-lb **35.** 22.6 lb **37.** $\frac{5120}{3}$ lb **39.** 888 694 lb

EJERCICIOS 7.1 (página 553)

1. $\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$ **3.** $x \sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C$ **5.** $x \ln 5x - x + C$ **7.** $\frac{1}{3}(\ln t)^3 + C$
9. $\frac{1}{2}(x^2 + 1)\tan^{-1} x - \frac{1}{2}x + C$ **11.** $\frac{e^x}{x + 1} + C$ **13.** $\frac{1}{2}y\,\text{sen}(\ln y) - \frac{1}{2}y\cos(\ln y) + C$ **15.** $\frac{1}{2}e^x(\cos x + \text{sen}\,x) + C$
17. $-x^2\sqrt{1 - x^2} - \frac{2}{3}(1 - x^2)^{3/2} + C$ **19.** $x^2 \cosh x - 2x \,\text{senh}\, x + 2\cosh x + C$ **21.** $2\sqrt{z}\cot^{-1}\sqrt{z} + \ln(1 + z) + C$
23. $2\sqrt{x}\,\text{sen}\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$ **25.** $\frac{36}{\ln 3} - \frac{36}{(\ln 3)^2} + \frac{16}{(\ln 3)^3} \approx 15.008$ **27.** $\frac{9}{16} = 0.5625$ **29.** $\frac{32}{3}\ln 2 - \frac{28}{9} \approx 4.2825$
31. $\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} + 1 \approx 1.8859$ **33.** $12e^3 + 2e \approx 246.463$ **35.** $(e^2 + 1)$ unidades cuadradas **37.** $\frac{1}{2}\pi(3e^4 + 1)$ unidades cúbicas
39. $(8 - 24e^{-2})$ unidades cuadradas **41.** $2(1 - e^{-6})$ kg; $\frac{e^6 - 7}{e^6 - 1}$ m de algún extremo **43.** (0.267, 0.604) **45.** 48.86 pie-lb
47. $C(x) = x \ln x - x + 6$ **51.** $\frac{3}{25}e^{4\pi/3} - \frac{4}{25}e^{2\pi/3}$ **55.** $50(6e^{-1} - \frac{13}{4}e^{-2} - \frac{7}{4})$

EJERCICIOS 7.2 (página 563)

1. **(a)** $\frac{1}{5}\text{sen}^5 x + C$; **(b)** $-\frac{1}{16}\cos^4 4x + C$ **3.** **(a)** $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$; **(b)** $\frac{1}{2}\text{sen}\, x + C$
5. **(a)** $\frac{1}{3}\text{sen}^3 x - \frac{1}{5}\text{sen}^5 x + C$; **(b)** $\frac{2}{7}\cos^{7/2} z - \frac{2}{3}\cos^{3/2} z + C$ **7.** $\frac{1}{14}\text{sen}\, 7x + \frac{1}{2}\text{sen}\, x + C$; **9.** $-\frac{1}{16}\cos 8y + \frac{1}{4}\cos 2y + C$
11. $\frac{1}{5}\tan 5x - x + C$ **13.** $-\frac{1}{4}\cot 2x^2 - \frac{1}{2}x^2 + C$ **15.** $-\frac{1}{2}\cot^2 t - \ln|\text{sen}\, t| + C$

17. $\frac{1}{15}\tan^5 3x - \frac{1}{9}\tan^3 3x + \frac{1}{3}\tan 3x - x + C$ **21.** $\frac{1}{3}\tan^3 e^x - \tan e^x + e^x + C$ **23.** $\frac{1}{9}\tan^9 x + \frac{1}{7}\tan^7 x + C$
25. $-\frac{1}{15}\cot^5 3x - \frac{1}{9}\cot^3 3x + C$ **27.** $\frac{1}{2}(\tan 2x - \cot 2x) + C$ **29.** $2\sec w - \tan w + C$
31. $-2\cot 2x + C$ **33.** $-\frac{1}{3}\csc^3 x + C$ **35.** $\frac{2}{3}$ **37.** $\frac{3}{8}$ **39.** $\frac{1}{8}$ **41.** $\frac{1}{8}(\sqrt{2} - 1)$ **43.** $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\ln 2$ **45.** $\frac{56}{15}$ **47.** $\frac{1}{5}$
49. $\frac{1}{2}\pi$ unidades cuadradas **51.** $\frac{3}{8}\pi^2$ unidades cúbicas **53.** $\frac{5}{8}\pi^2$ unidades cúbicas
55. $\left(\dfrac{\frac{1}{2}\pi - \cos 1 - \operatorname{sen} 1}{1 - \operatorname{sen} 1}, \dfrac{\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2 - \frac{1}{4}}{1 - \operatorname{sen} 1}\right)$ **57.** $(1 - \frac{1}{4}\pi)$ unidades cuadradas
59. $\frac{4}{3}\pi$ unidades cúbicas **65.** **(b)** $\frac{1}{4}\sec^3 x\tan x + \frac{3}{8}\sec x\tan x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C$
67. **(b)** $-\frac{1}{5}\operatorname{sen}^4 x\cos x - \frac{4}{15}\operatorname{sen}^2 x\cos x - \frac{8}{15}\cos x + C$ **69.** **(b)** $\dfrac{1}{n}\sec^n x + C$

EJERCICIOS 7.3 (página 571)

1. $-\dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{4x} + C$ **3.** $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x}\right| + C$ **5.** $\sqrt{x^2 - 25} + C$ **7.** $-\dfrac{x}{9\sqrt{4x^2 - 9}} + C$
9. $\dfrac{\tan x}{4\sqrt{4 - \tan^2 x}} + C$ **11.** $\frac{1}{3}\sqrt{\ln^2 w - 4}\,(8 + \ln^2 w) + C$ **13.** $-\frac{1}{5}\ln(10 - 4\sqrt{6}) \approx 0.3199$
15. $\dfrac{1}{5}\ln\dfrac{4(\sqrt{106} - 5)}{9(\sqrt{41} - 5)} \approx 0.10345$ **17.** $\ln(3 + 2\sqrt{2}) - \ln(2 + \sqrt{3}) \approx 0.4458$ **19.** $\frac{128}{3} - 24\sqrt{3} \approx 1.097$
21. $\frac{2}{45}\sqrt{5} \approx 0.09938$ **23.** $\frac{1}{27}(6 - 2\sqrt{3}) \approx 0.09392$ **25.** $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\pi \approx 0.17808$
27. $\frac{625}{16}\pi \approx 122.72$ **29.** $\frac{5}{36} - \frac{2}{27}\sqrt{3} \approx 0.010588$ **31.** $\sec^{-1}\frac{2}{3}x + C$ **33.** $\sqrt{4 - x^2} + \ln\dfrac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{2 + \sqrt{4 - x^2}} + C$
35. $\ln\left(\dfrac{\sqrt{10} - 1}{3\sqrt{2} - 3}\right) + \sqrt{10} - \sqrt{2}$ **37.** $\frac{81}{16}\pi^2$ unidades cúbicas **39.** $\dfrac{392}{60 + 27\ln 3}$ cm del extremo izquierdo
41. $\left(\dfrac{20 - 15\cos^{-1}\frac{3}{5}}{5\ln 3 - 4}, \dfrac{26}{225(5\ln 3 - 4)}\right)$ **43.** $(\frac{8}{3}\pi + 3\sqrt{3})(62.4)$ lb ≈ 847 lb
45. $(\frac{512}{3}\pi + 192\sqrt{3})(0.39)$ oz ≈ 338.8 oz **47.** **(a)** $15\ln 2 \approx 10.40$; **(b)** $\dfrac{30e^{4/3}}{e^{8/3} + 1} \approx 7.39$ **49.** **(a)** $\frac{1}{4}\ln\frac{3}{5}$

EJERCICIOS 7.4 (página 582)

1. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x - 2}{x + 2}\right| + C$ **3.** $\ln\left|\dfrac{C(w + 4)^3}{2w - 1}\right|$ **5.** $x + \dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{C(x - 2)^4}{(x + 3)^9}\right|$ **7.** $\dfrac{1}{t + 2} + \ln\left|\dfrac{C(t + 1)}{t + 2}\right|$
9. $\dfrac{1}{9}\ln\left|\dfrac{x + 3}{x}\right| - \dfrac{1}{3x} + C$ **11.** $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{Cx^4(2x + 1)^3}{2x - 1}\right|$ **13.** $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{x^2 + 4} + C$
15. $\dfrac{1}{8}\ln\left|\dfrac{2x - 1}{2x + 1}\right| - \dfrac{1}{4}\tan^{-1} 2x + C$ **17.** $\ln|x - 1| + \tan^{-1} x + C$ **19.** $\ln|\tan x + 1| + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{2\tan x - 1}{\sqrt{3}}\right) + C$
21. $4\ln\frac{4}{3} - \frac{3}{2}$ **23.** $\ln\frac{27}{4} - 2$ **25.** $6\ln 2$ **27.** $13\ln 2 - 4\ln 5$ **29.** $\frac{3}{4}\ln 2 + \frac{5}{8}\pi$ **31.** $\frac{3}{8}\ln\frac{9}{5}$ **33.** $\ln 4.5$ unidades cuadradas
35. $2\pi(2 + 6\ln 3 - 2\ln 2)$ unidades cúbicas **37.** $\left(\dfrac{6\ln 3 - 2\ln 2 + 2}{2\ln 3 - \ln 2}, \dfrac{48\ln 2 - 48\ln 3 + 35}{24(2\ln 3 - \ln 2)}\right)$ **39.** $\frac{1}{16}$ unidades cuadradas
41. $(\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi^2 - \frac{2}{3}\pi\ln 3)$ unidades cúbicas **43.** **(a)** $\frac{1}{3}\ln|C(x^3 - 6x^2 + 18x)|$; **(b)** $\dfrac{9x + 8}{6(x + 2)^3} + C$
45. **(a)** $f(t) = \dfrac{5000}{1 + 4999e^{-0.5t}}$; **(b)** 1328; **(c)** 4075; **(d)** 5000 **47.** **(a)** $y(t) = \dfrac{5000}{1 + 249e^{-9t/98}}$; **(b)** $y(10) = 50$; **(c)** $y(20) = 123$; **(d)** $y(30) = 297$; **(e)** $y(60) = 2491$; **(f)** $y(180) = 4999.9 \approx 5000$ **(g)** 60
49. 10 a.m. **51.** $\frac{31}{19}$ **53.** 7.4 lb **55.** $\dfrac{3}{50}\ln\dfrac{(t_1 + 2)^2}{4(t_1^2 + 1)} - \dfrac{7}{5(t_1 + 2)} - \dfrac{4}{25}\tan^{-1} t_1 + \dfrac{7}{10}$

EJERCICIOS 7.5 (página 589)

1. $\frac{2}{3}x^{3/2} - 3x + 18\sqrt{x} - 54\ln(3 + \sqrt{x}) + C$ **3.** $\ln\left|\frac{\sqrt{1+4x} - 1}{\sqrt{1+4x} + 1}\right| + C$ **5.** $\frac{1}{9}\sqrt{1 + 2x^3}(2x^3 + 7) + C$

5. $-2\sqrt{1+x} + \sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{2}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2}}\right| + C$ **7.** $\sqrt{2}\ln\left|\frac{\tan x + \sqrt{2}}{\tan x - \sqrt{2}}\right| + C$ **9.** $\frac{6}{\sqrt{15}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\tan\frac{x}{2}\right) + C, |x| < \pi$

11. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\tan\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}}{\tan\frac{1}{2}x + 3}\right| + C$ **13.** $4 - 2\ln 3 \approx 1.80278$ **15.** $\ln\frac{11}{10} \approx 0.0953102$ **17.** $\frac{1}{4}\ln 3 \approx 0.274653$

19. $\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) \approx 0.540236$ **21.** $2\sqrt{3}\ln(1 + \sqrt{3}) \approx 3.481604$ **23.** $\frac{3}{2}\pi - \frac{152}{35} \approx 0.369532$

25. $x + \frac{36}{6 - x} + 12\ln|6 - x| + C$ **27.** $\frac{1}{30}(3x - 1)(1 + 2x)^{3/2} + C$ **29.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + C$

31. $\ln|x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x}| + C$ **33.** $\sqrt{9 - 4x^2} - 3\ln\left|\frac{3 + \sqrt{9 - 4x^2}}{2x}\right| + C$

35. $\frac{1}{3}(x^2 - x - 6)\sqrt{4x - x^2} + 4\cos^{-1}\left(\frac{2 - x}{2}\right) + C$ **37.** $-\frac{1}{5}\operatorname{sen}^4 x\cos x - \frac{4}{15}\operatorname{sen}^2 x\cos x - \frac{8}{15}\cos x + C$

39. $t^4\operatorname{sen} t + 4t^3\cos t - 12t^2\operatorname{sen} t - 24t\cos t + 24\operatorname{sen} t + C$ **41.** $x\sec^{-1}3x - \frac{1}{3}\ln|3x + \sqrt{9x^2 - 1}| + C$

43. $\frac{e^{4x}}{32}(8x^2 - 4x + 1) + C$ **45.** $\frac{x^4}{16}(4\ln 3x - 1) + C$ **47.** $\frac{3}{5}y\cosh 5y - \frac{3}{25}\operatorname{senh} 5y + C$ **49.** $\frac{1}{60} + \frac{1}{25}\ln\frac{8}{3}$

51. $\frac{15}{2} - 8\ln 2$ **53.** $\frac{32}{5}\ln 2 - \frac{31}{25}$ **55.** $\frac{15}{2} - 8\ln 2$ **57.** $\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **59.** $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$ **61.** 0 **63.** $\frac{1}{8}(e^2 + 3)$

61. $2\ln|\sqrt{x} - 1| + C$ **71.** $\tan\frac{1}{2}x + C$

EJERCICIOS 7.6 (página 602)

1. (a) 4.250; (b) 4 **3.** (a) 0; (b) 0 **5.** (a) 0.696; (b) 0.693 **7.** (a) 0.880; (b) 0.881 **9.** 0.248
11. 3.689 **13.** $-0.5 \le \epsilon_T \le 0$ **15.** $-0.161 \le \epsilon_T \le 0.161$ **17.** $-0.007 \le \epsilon_T \le -0.001$ **19.** 4.000
21. (a) 0.6932; (b) 0.6931 **23.** (a) 0.6045; (b) 0.6046 **25.** 0 **27.** $-0.0005 \le \epsilon_S \le 0$ **29.** 0.2375
31. 1.5690 **33.** 1.4022 **35.** 3.090 **37.** (a) 0.3401; (b) 0.3414 **39.** 3.8203 **41.** (a) 15.95; (b) 16.03
43. 26.6 unidades cuadradas **45.** 5.9 millas **47.** 8.218 unidades cuadradas **49.** 3.06 m/s **51.** 56 **53.** 222

EJERCICIOS 7.7 (página 611)

1. 1 **3.** $-\pi$ **5.** $\ln 2 - \ln 3 \approx -0.4055$ **7.** 1 **9.** 1.5 **11.** 1.5 **13.** 2
15. $-\frac{1}{8}$ **17.** 0 **19.** $\frac{1}{3}$ **21.** $\frac{1}{2}$ **23.** $\frac{3}{5}$ **25.** 2 **27.** -1 **29.** $\frac{4}{3}$ **31.** $\frac{1}{2}\pi$ **33.** $\frac{2}{\sqrt{\ln 3}}$
35. $\ln\frac{1}{2}(e^2 + 1)$ **37.** $\frac{Et}{L}$ **39.** $-\frac{1}{2}$ **43.** $a = -3, b = \frac{9}{2}$

EJERCICIOS 7.8 (página 617)

1. 0 **3.** 0 **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** 1 **9.** 0 **11.** 1 **13.** $\frac{1}{2}$ **15.** e^3 **17.** 0 **19.** e^2 **21.** 1 **23.** 0 **25.** e^2
27. $e^{-1/3}$ **29.** $\frac{1}{2}$ **31.** 0 **33.** 1 **35.** (a) $+\infty$; (b) 0 **39.** 1 **41.** $\frac{1}{\ln 3}$
47. $f(e) = e^{1/e}$, máx. rel.; $y = 1$ es una asíntota **49.** 1 **51.** (a) 0; (b) 0; (c) no

EJERCICIOS 7.9 (página 625)

1. 3 **3.** $-\frac{1}{2\ln 5}$ **5.** $\frac{1}{(\ln 2)^2}$ **7.** divergente **9.** divergente **11.** $\frac{1}{3}\pi$ **13.** 2 **15.** 1 **17.** divergente
19. (a) divergente; (b) 0 **21.** (a) 0 **23.** π **25.** $\frac{1}{2}\pi$ **27.** (a) 0.565; (b) 0.287 **29.** (a) 0.203; (b) 0.188
31. 6.95 millas/s **33.** $\frac{1000}{0.08 + \ln 2}$ dólares $\approx$ \$1293.41 **39.** $n > 1$ **41.** $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}\ln\frac{32}{27}$

EJERCICIOS 7.10 (págna 631)

1. 2 **3.** −4 **5.** $\frac{1}{3}\pi$ **7.** divergente **9.** divergente **11.** divergente **13.** $\frac{1}{4}\pi$ **15.** divergente **17.** 0 **19.** divergente **21.** 0 **23.** $\frac{1}{3}\pi$ **25.** divergente **27.** $n > -1$; $\frac{1}{n+1}$ **29.** $n > -1$; $\frac{2}{(n+1)^3}$ **31.** sí; 6π

EJERCICIOS DE REPASO PAA EL CAPÍTULO 7 (página 634)

1. $\frac{1}{8}x - \frac{1}{128}\operatorname{sen} 16x + C$ **3.** $-2\sqrt{4 - e^x} + C$ **5.** $(x + 1)\tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$ **7.** $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\operatorname{sen} \frac{2}{3}x + C$

9. $\ln|x - 1| - 2(x - 1)^{-1} - (x - 1)^{-2} + C$ **11.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + C$ **13.** $3\ln\left|\frac{x^{1/3}}{1 + x^{1/3}}\right| + C$

15. $\frac{1}{3}\tan 3x - \frac{1}{3}\cot 3x + \frac{2}{3}\ln|\tan 3x| + C$ **17.** $2t + \ln\frac{t^2}{(t+2)^{10}} - \frac{15}{t+2} + C$ **19.** $x - \tan^{-1} x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

21. $\frac{1}{6}x - \frac{1}{192}\operatorname{sen} 12x - \frac{1}{144}\operatorname{sen}^3 6x + C$ **23.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{r+2}{\sqrt{7}}\right) + C$ **25.** $\frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} x^2 + \frac{1}{2}\cos x^2 + C$

27. $\frac{2}{17}e^{t/2}(4 \operatorname{sen} 2t + \cos 2t) + C$ **29.** $\frac{1}{4}\tan^{-1}(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x) + C$ **31.** $-\tan^{-1}(\cos x) + C$

33. $2\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{t-2}{2}\right) + \frac{1}{2}(t - 2)\sqrt{4t - t^2} + C$ **35.** $\frac{1}{2}\ln|x - 1| + \frac{1}{2}\ln|x + 1| - \ln|x| + C$ **37.** $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}(\frac{3}{2}e^x) + C$

39. $-\frac{1}{15}\cot^5 3x - \frac{1}{9}\cot^3 3x + C$ **41.** $\frac{1}{3}x^3 \operatorname{sen}^{-1} x + \frac{1}{9}(x^2 + 2)\sqrt{1 - x^2} + C$ **43.** $\tan^{-1}(\cos x) + C$

45. $\frac{2}{3}\sec^{-1}(2 \operatorname{sen} 3t) + C$ **47.** $\sqrt{2t} - \sqrt{1 - 2t}\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{2t} + C$ **49.** $\frac{4}{15}\ln\left|\frac{\tan\frac{1}{2}x - 3}{\tan\frac{1}{2}x + 3}\right| + \frac{x}{5} + C$

51. $\begin{cases} \frac{1}{n}(-\cos nx + \frac{2}{3}\cos^3 nx - \frac{1}{5}\cos^5 nx) + C & \text{si } n \neq 0 \\ C & \text{si } n = 0 \end{cases}$ **53.** $\begin{cases} \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C & \text{si } n \neq -1 \\ \frac{1}{2}\ln^2 x + C & \text{si } n = -1 \end{cases}$

55. 4 **57.** $\frac{1}{2} + 2\ln\frac{6}{5}$ **59.** $\frac{16}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2}$ **61.** $\frac{4}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi$ **63.** $\frac{4}{3}$ **65.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln 2$ **67.** $\sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{3})$ **69.** $\frac{1}{2}\ln\frac{9}{2} - \frac{1}{6}\pi$ **71.** 5 **73.** $\frac{1}{6} + \ln\frac{3}{2}$ **75.** $\frac{4}{3}$ **77.** $1 - \frac{1}{2}\ln 3$ **79.** $\frac{1}{24}\pi$ **81.** $\frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}$ **83.** $\frac{256}{15}$ **85.** 2.977 **87.** 2.958 **89.** (a) 1.624; (b) 1.563 **91.** 1 **93.** 1.5 **95.** −0.5 **97.** 1 **99.** −1 **101.** 0 **103.** 1 **105.** $+\infty$ **107.** $\frac{1}{3}$ **109.** $+\infty$ **111.** e^{12} **113.** 0 **115.** 1 **117.** e **119.** divergente **121.** $\frac{1}{2}$ **123.** divergente **125.** $\frac{32}{\ln 2}$ **127.** divergente **129.** $\frac{1}{4}\pi$ **131.** divergente **133.** $n > 1$; $\frac{1}{(1-n)^2}$

135. $\frac{1}{3}k(1 - e^{-9})$ kg; $\frac{e^9 - 10}{3(e^9 - 1)}$ m a partir de algún extremo **137.** $9\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{5} + 2}\right)$ **139.** $\frac{1}{8}\pi$ unidades cuadradas

141. $\pi(e^2 \ln 2 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{8})$ unidades cúbicas **143.** (a) $x = 300\left(\frac{18^t - 17^t}{3 \cdot 18^t - 2 \cdot 17^t}\right)$; (b) 35.94 lb **145.** $\left(0, \frac{32}{15\pi}\right)$,

147. $(\frac{1}{2}\pi - 1, \frac{1}{2})$ **149.** 187.2 lb **151.** (a) t días a partir de ahora, $P(t) = \frac{12\,000}{1 + 11(11/29)^{t/5}}$; (c) 1193; (d) $-5\frac{\ln 11}{\ln(11/29)} \approx 12.37$ **153.** $\frac{64}{3}$ **155.** 1 **157.** \$152 500 **159.** (a) $-\infty$; (b) 0

EJERCICIOS 8.1 (página 646)

1. $P_4(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{32}x^4$; $R_4(x) = \frac{x^5}{(z-2)^6}$, z entre 0 y x

3. $P_5(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}$; $R_5(x) = \frac{e^{-z}}{6!}x^6$, z entre 0 y x

5. $P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{}$ [illegible] $(x) = \frac{\operatorname{sen} z}{7!}x^7$, z entre 0 y x

7. $P_4(x) = x + \frac{1}{6}x^3$; $R_4(x$ [illegible] $\frac{1}{120}(\cosh z)x^5$, z entre 0 y x

9. $P_3(x) = 1 + \frac{3}{2}x$ [illegible] $\frac{1}{16}x^3$; $R_3(x) = \frac{3}{128}(1 + z)^{-5/2}x^4$, z entre 0 y x

11. $P_3(x) = 8 + 3(x - 4) + \frac{3}{16}(x - 4)^2 - \frac{1}{128}(x - 4)^3$; $R_3(x) = \frac{2(x-4)^4}{128z^{5/2}}$, z entre 4 y x

13. $P_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}(x -$ [illegible] $- \frac{1}{6}\pi)^2 - \frac{1}{12}\sqrt{3}(x - \frac{1}{6}\pi)^3$; $R_3(x) = \frac{1}{24}\operatorname{sen} z(x - \frac{1}{6}\pi)^4$, z entre $\frac{1}{6}\pi$ y x

15. $P_5(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x - 1)$ [illegible] $(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4 + \frac{1}{5}(x - 1)^5$; $R_5(x) = -\frac{1}{6}z^{-6}(x - 1)^6$; z entre 1 y x

17. $P_3(x) = -\ln 2 - \sqrt{3}(x - \frac{1}{3}\pi) -$ [illegible] $- \frac{1}{3}\pi)^2 - \frac{4}{3}\sqrt{3}(x - \frac{1}{3}\pi)^3$; $R_3(x) = -\frac{1}{12}(3\sec^4 z - 2\sec^2 z)(x - \frac{1}{3}\pi)^4$, z entre $\frac{1}{3}\pi$ y x

19. 2.71828 **21.** 0.515 **23.** $|\text{error}| < \dfrac{(0.1)^4}{24} < 0.000005$ **25.** $|\text{error}| < \dfrac{(0.01)^2}{8} = 0.0000125$

27. $|\text{error}| < \dfrac{e^{0.01}}{6}(0.01)^2 = 0.00000017$ **29.** 0.1823 **31.** $\dfrac{55\sqrt{2}}{672}$, $|\text{error}| < \dfrac{1}{7680}\sqrt{2}$

35. $x \approx \dfrac{\pi}{2(1+m)}$ **37.** $2(x-1) + 5(x-1)^2 + 3(x-1)^3 + (x-1)^4$

39. **(a)** son el mismo; **(b)** 1; **(c)** son el mismo

EJERCICIOS 8.2 (página 658)

1. $\frac{1}{2}$ **3.** divergente **5.** -2 **7.** 0 **9.** 1 **11.** divergente **13.** divergente **15.** $e^{1/3}$ **17.** 1 **19.** 0
21. **(a)** 0; **(b)** 4 **23.** **(a)** $\frac{1}{2}$; **(b)** 1 **27.** creciente **29.** decreciente **31.** no monótona **33.** no monótona
35. decreciente **37.** creciente después de los dos primeros términos **39.** creciente **41.** decreciente **43.** no acotada
55. $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$ **57.** converge a $\dfrac{a}{b}$

EJERCICIOS 8.3 (página 670)

1. $s_n = \dfrac{n}{2n+1}$; $\dfrac{1}{2}$ **3.** $s_n = \dfrac{5n}{3n+1}$; $\dfrac{5}{3}$ **5.** $s_n = -\ln(n+1)$; divergente **7.** $s_n = \dfrac{5}{2}\left(1 - \dfrac{1}{5^n}\right)$; $\dfrac{5}{2}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(3n-2)(3n+1)}$; $\dfrac{2}{3}$; **11.** $\dfrac{1}{3} - \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n}$; 0 **13.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)$; divergente **15.** divergente

17. 2 **19.** divergente **21.** 1 **23.** $\dfrac{1}{e-1}$ **25.** divergente **27.** divergente **29.** 3 **31.** $\frac{10}{3}$

33. $\dfrac{63 \cdot 2^{10} + 1}{2^{16}}$ **35.** divergente **37.** $\frac{3}{2}$ **39.** divergente **41.** divergente **43.** 2

45. $\frac{3}{11}$ **47.** $\frac{137}{111}$ **49.** 8 m **51.** 84 pie **53.** **(b)** $(6 + \frac{7}{2}\sqrt{3})$ s **55.** 24 unidades
57. **(a)** 3.8160; **(b)** 4.4992; **(c)** 4.9014; **(d)** 5.1874 **59.** 12 367

EJERCICIOS 8.4 (página 683)

1. convergente **3.** convergente **5.** divergente **7.** convergente **9.** divergente **11.** convergente **13.** divergente
15. convergente **17.** divergente **19.** convergente **21.** divergente **23.** convergente **25.** divergente **27.** convergente
29. convergente **31.** convergente **33.** divergente **35.** convergente **37.** convergente **39.** convergente **41.** convergente
43. convergente **45.** divergente **53.** $0.7032 < \displaystyle\sum_{m=50}^{100} \frac{1}{m} < 0.7134$

EJERCICIOS 8.5 (página 694)

1. convergente **3.** convergente **5.** convergente **7.** convergente **9.** convergente **11.** divergente **13.** convergente
15. $|R_4| < \frac{1}{5}$ **17.** $|R_4| < \frac{1}{81}$ **19.** $|R_4| < \frac{1}{25}$ **21.** $|R_4| < \dfrac{1}{6 \ln 6}$ **23.** 0.333 **25.** 0.632 **27.** 0.113
29. absolutamente convergente **31.** absolutamente convergente **33.** absolutamente convergente **35.** divergente
37. absolutamente convergente **39.** absolutamente convergente **41.** absolutamente convergente
43. absolutamente convergente **45.** absolutamente convergente **47.** divergente **49.** **(b)** convergente

EJERCICIOS 8.6 (página 697)

1. $\frac{3}{16}, \frac{15}{64}, \frac{63}{256}, \frac{255}{1024}$; $s_n = \dfrac{4^n - 1}{4^{n+1}}$; $\frac{1}{4}$ **3.** convergente; 3 **5.** divergente **7.** convergente; $4 + 2\sqrt{3}$

9. convergente; $\frac{1}{6}$ **11.** convergente; $\frac{649}{729}$ **13.** convergente **15.** divergente **17.** convergente
19. divergente **21.** convergente **23.** divergente **25.** divergente **27.** convergente **29.** convergente
31. absolutamente convergente **33.** condicionalmente convergente **35.** divergente **37.** absolutamente convergente
39. absolutamente convergente **41.** $\frac{437}{330}$ **43.** $(\frac{15}{4}\sqrt{2} + 3\sqrt{3})$ s

EJERCICIOS 8.7 (página 706)

1. (b) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-2x)^n$ **3.** (b) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-9x^2)^n$ **5.** $[-1, 1)$ **7.** $[-1, 1]$ **9.** $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ **11.** $(-3, 3)$ **13.** $(-\infty, +\infty)$

15. $(-5, -1)$ **17.** $(-9, 9)$ **19.** $(0, 2]$ **21.** $\left(-\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^2}\right)$ **23.** $[-1, 1]$ **25.** $(-4, 6)$ **27.** $[4, 6)$ **29.** $[-1, 1]$
31. $(-e, e)$ **35.** $+\infty$

EJERCICIOS 8.8 (página 716)

1. (a) $R = 1, [-1, 1]$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}, R = 1$; (c) $[-1, 1)$ **3.** (a) $R = 1, [-1, 1)$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n}\, x^{n-1}, R = 1$; (c) $(-1, 1)$

5. (a) $R = +\infty, (-\infty, +\infty)$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}, R = \infty$; (c) $(-\infty, +\infty)$ **7.** (a) $R = \frac{1}{3}, (0, \frac{2}{3})$;
(b) $\sum_{n=1}^{+\infty}3n(n+1)(3x-1)^n, R = \frac{1}{3}$; (c) $(0, \frac{2}{3})$ **9.** (a) $R = 3, [-2, 4)$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{3^n}, R = 3$; (c) $(-2, 4)$

11. $\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}$ **13.** $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n$ **15.** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!}$ **17.** (a) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$; (b) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}$ **19.** 0.60653

21. (a) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; (b) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ **29.** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}; R = +\infty$ **31.** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-2)^n}{n2^n}; R = 2$ **33.** 1.718 **35.** 0.693

37. (b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n!)}; R = +\infty$ **39.** 1.318 **41.** 0.485 **43.** 0.0413 **45.** 0.450 **47.** 0.2450 **49.** 0.24

51. (a) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{n!}$ **55.** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$

EJERCICIOS 8.9 (página 726)

1. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ **3.** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ **5.** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ **7.** $e^3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}$ **9.** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$

11. $2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1(-2)(-5)\ldots(4-3n)}{24^n n!}(x-8)^n; R = 8$

13. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}(x - \frac{1}{3}\pi) - \frac{1}{4}(x - \frac{1}{3}\pi)^2 + \frac{1}{12}\sqrt{3}(x - \frac{1}{3}\pi)^3 + \frac{1}{48}(x - \frac{1}{3}\pi)^4 - \ldots; R = +\infty$ **15.** $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n}}{(2n)!}$

17. $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{25}x^5$ **19.** $1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4$ **21.** $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{45}x^6$ **23.** 0.5299 **25.** 1.97435

27. −0.2231 **29.** 2.7182818 **31.** 0.0415 **33.** 0.0048 **35.** (a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2n(2n)!}$; (b) 0.2398

37. $a_4 = 3; a_3 = -5; a_2 = 2; a_1 = -1; a_0 = 6$

EJERCICIOS 8.10 (página 733)

1. 1.0986 **3.** 0.3365 **5.** $\ln a + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-a)^n}{na^n}$ **7.** $\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n2^n}$

9. $1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n n!}x^n; R = 1$ **11.** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)x^n}{8^n n!}; R = 4$

13. $1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n n!}x^{3n}; R = 1$ **15.** $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)x^{4n}}{18^n n!}; R = \sqrt{3}$

17. $x^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)x^{n+2}}{2^n n!}; R = 1$

19. (a) $1 + \frac{1}{4}x^2 + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n-5)}{4^n n!}x^{2n}$; (b) 0.510 **21.** 0.3349 **23.** 2.0271 **25.** 0.4970

27. **(b)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^2}$; $R = 1$ **29.** 0.3090 **31.** $x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)x^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}$; $R = 1$

33. 0.2424 **35.** −0.1494

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 8 (página 736)

1. $P_5(x) = x^2 - \frac{x^4}{3}$; $R_5(x) = \frac{2^5 \cos 2z}{6!}x^6$, z entre 0 y x

3. $P_4(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{54}(x-9)^2 - \frac{5}{34\,992}(x-9)^3 + \frac{35}{2\,519\,424}(x-9)^4$; $R_4(x) = -\frac{63}{256}z^{-11/2}(x-9)^5$, z entre 9 y x

5. $P_6(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \frac{x^6}{5!}$; $R_6(x) = \frac{(z+7)e^z}{7!}x^7$, z entre 0 y x **7.** 0.0873 **9.** $\frac{1}{12}$ **11.** 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{5}$, 2; 3

13. 0, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{15}{17}$; 1 **15.** 1, 3, 1, 3; no tiene límite **17.** 4, $\frac{81}{16}$, $\frac{4\,096}{729}$, $\frac{390\,625}{65\,536}$; e^2 **19.** 0 **21.** −2 **25.** $[-1, 1)$

27. $[-3, 3]$ **29.** $x = 3$ **31.** $(-7, 5)$ **33.** $(-1, 3]$ **35.** $(-1, 1)$ **37.** **(a)** $R = 1, [-1, 1]$; **(b)** $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{2n-1}$, $R = 1$; **(c)** $(-1, 1)$ **39.** **(a)** $R = +\infty, (-\infty, +\infty)$; **(b)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n!)^2}$, $R = +\infty$; **(c)** $(-\infty, +\infty)$ **41.** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{4n+4}(2n+1)}$; $R = 4$

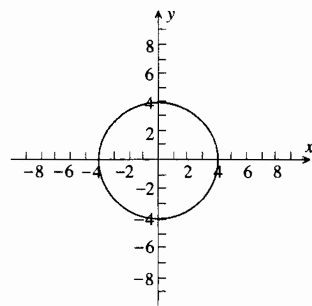
43. 0.161 **45.** 0.493 **47.** **(d)** 0.261 **49.** 0.0124 **51.** 1.2840 **53.** 0.1947

55. 0.9986 **57.** 1.6094 **59.** 3.1416 **61.** 0.5773 **63.** $1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)x^n}{2^n n!}$; $(-1, 1)$

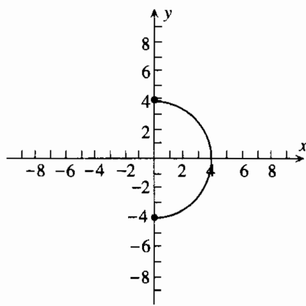
65. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln a)^n x^n}{n!}$; $(-\infty, +\infty)$ **67.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (3x+\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ **69.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n}$ **71.** 0 **73.** $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$

EJERCICIOS 9.1 (página 746)

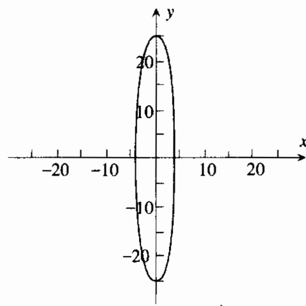
1. $x^2 + y^2 = 16$



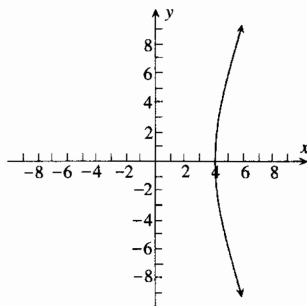
3. $x^2 + y^2 = 16, x \geq 0$



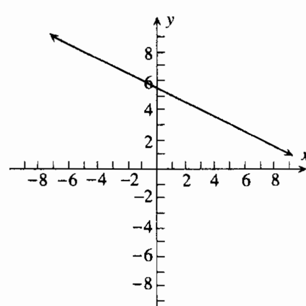
5. $(x/4)^2 + (y/25)^2 = 1$



7. $(x/4)^2 + (y/9)^2 = 1, x \geq 0$



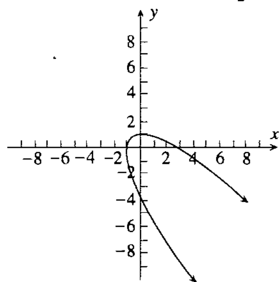
9. $x + 2y = 11$



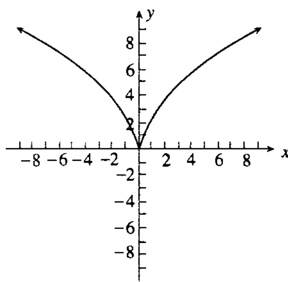
11. $\frac{4}{3}t$; $\frac{4}{9}$

13. $\frac{1 + \ln t}{te^t(2+t)}$; $\frac{(2+t) - (1+\ln t)(2+4t+t^2)}{t^3 e^{2t}(2+t)^3}$; **15.** $-\frac{b}{a}\cot t$; $-\frac{b}{a^2}\csc^3 t$

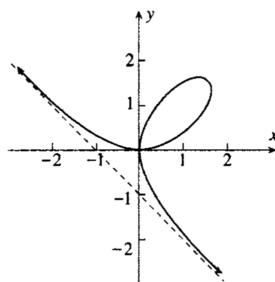
17. **(a)** tangente horizontal: $y = 1$; tangente vertical: $x = -1$; **(b)** cóncava hacia arriba: $t > \frac{1}{2}$; cóncava hacia abajo: $t < \frac{1}{2}$



19. **(a)** no posee tangentes horizontales; tangente vertical: $x = 0$; **(b)** cóncava hacia abajo para toda t

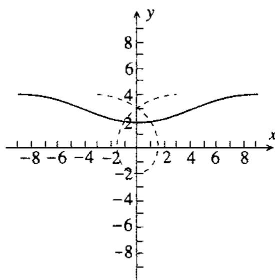


21. **(a)** tangente horizontal: $y = 0, y = 2^{2/3}$; tangente vertical: $x = 0, x = 2^{2/3}$; **(b)** cóncava hacia arriba: $t < -1, -1 < t < 2^{-1/3}$ cóncava hacia abajo: $t > 2^{-1/3}$

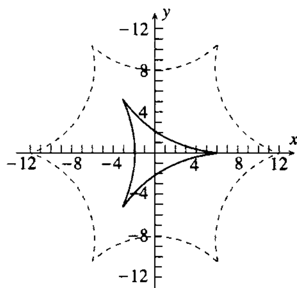


23. $x^3 + y^3 = 3xy$ **25.** $5\sqrt{3}x + 2y = 20$ **27.** $\dfrac{dy}{dx} = 0; \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{4a}; \dfrac{d^3y}{dx^3} = 0$ **29.** $3\pi a^2$ unidades cuadradas

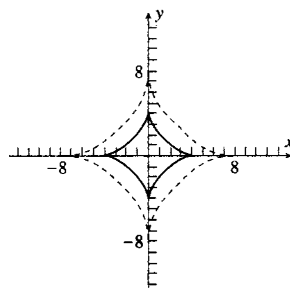
31. **(b)** es la línea continua, **(c)** está punteada



33. **(a)** 3 cúspides; **(b)** 6 cúspides



35. **(b)** es la línea continua, **(c)** está punteada



EJERCICIOS 9.2 (página 751)

1. $1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\ln(1 + \sqrt{2})$ **3.** $2\sqrt{10} + \sqrt{2}\ln(2 + \sqrt{5})$ **5.** $\frac{2}{27}[(40)^{3/2} - (13)^{3/2}]$ **7.** 120 **9.** $\sqrt{2}(e - 1)$
11. $\ln(1 + \sqrt{2})$ **13.** 8π **15.** 39.19 **17.** 3.966 **19.** 8.462 **21.** 55.31 **23.** $6a$ **25.** $a[\ln(\cosh 2) - \ln(\cosh 1)]$

EJERCICIOS 9.3 (página 764)

5. **(a)** $(-3, 0)$; **(b)** $(-1, -1)$; **(c)** $(2, -2\sqrt{3})$; **(d)** $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$

7. **(a)** $(\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi)$; **(b)** $(2, \frac{5}{6}\pi)$; **(c)** $(2\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$; **(d)** $(5, \pi)$ **9.** **(a)** $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$; **(b)** $(x^2 + y^2)^3 = x^2$

11. **(a)** $x = -1$; **(b)** $4x^2 - 5y^2 - 36y - 36 = 0$

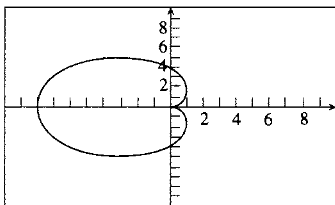
13. **(a)** recta que pasa por el polo con pendiente $\sqrt{3}$; **(b)** circunferencia con centro en el polo y radio $\frac{1}{3}\pi$

15. **(a)** recta que pasa por el polo con pendiente $\tan^{-1} 2$; **(b)** circunferencia con centro en el polo y radio 2

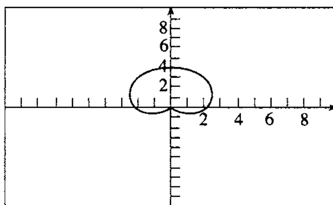
17. **(a)** Recta paralela al eje $\frac{1}{2}\pi$ y a 4 unidades a la derecha de él; **(b)** Circunferencia tangente al eje $\frac{1}{2}\pi$, con centro en el eje polar y radio 2

19. **(a)** Recta paralela al eje polar y a 4 unidades debajo de él; **(b)** Circunferencia tangente al eje polar, con centro en la prolongación del eje $\frac{1}{2}\pi$ y radio 2

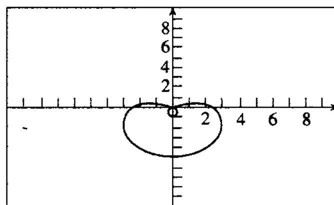
21. Cardioide; simétrica con respecto al eje polar; apunta hacia la izquierda.



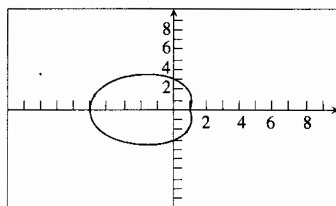
23. Cardioide; simétrica con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$; apunta hacia arriba.



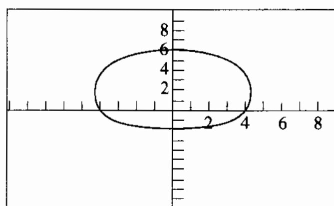
25. Caracol con un lazo; simétrico con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$; apunta hacia abajo.



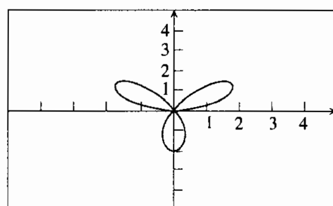
27. Caracol con hendidura; simétrico con respecto al eje polar; apunta hacia la izquierda



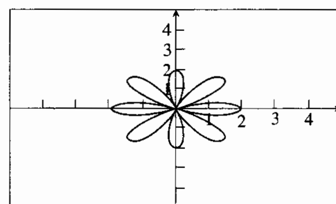
29. Caracol convexo; simétrico con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$; apunta hacia arriba



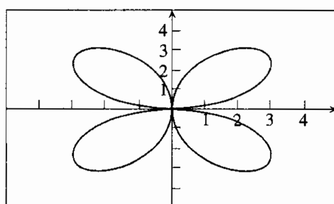
31. rosa de 3 hojas



33. rosa de 8 hojas

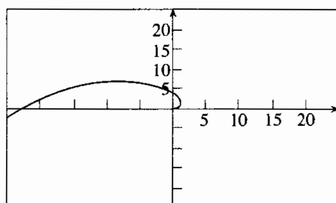


35. rosa de 4 hojas



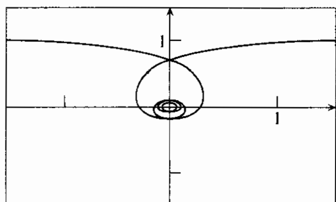
37. espiral logarítmica, algunos de sus puntos (r, θ) se muestran en la tabla siguiente:

r	1	$e^{\pi/2} \approx 5$	$e^{\pi} \approx 23$	$e^{3\pi/2} \approx 111$	$e^{2\pi} \approx 535$	$e^{5\pi/2} \approx 2576$	$e^{3\pi} \approx 12\,392$
θ	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π

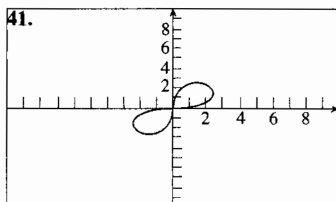


39. espiral recíproca, algunos de sus puntos (r, θ) se muestran en la tabla siguiente:

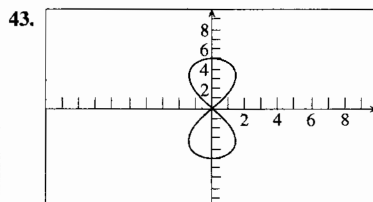
r	$\frac{6}{\pi} \approx 1.9$	$\frac{3}{\pi} \approx 0.95$	$\frac{2}{\pi} \approx 0.63$	$\frac{1}{\pi} \approx 0.32$	$\frac{1}{2\pi} \approx 0.16$	$\frac{1}{3\pi} \approx 0.12$	$\frac{1}{4\pi} \approx 0.08$	$\frac{1}{6\pi} \approx 0.05$
θ	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	2π	3π	4π	6π



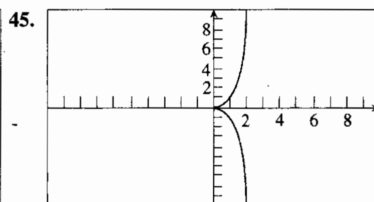
41.



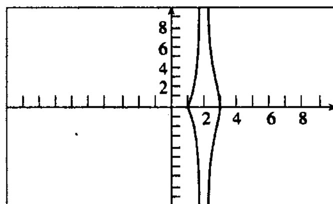
43.



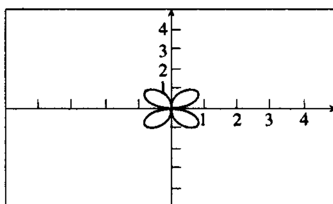
45.



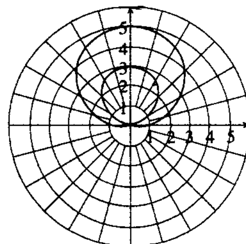
47.



49. rosa de 4 hojas



51.



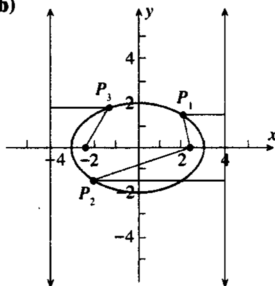
53. rectas tangentes horizontales en $(7, \frac{1}{2}\pi)$, $(1, \frac{3}{2}\pi)$, $(2, 3.87)$; rectas tangentes verticales en $(5.34, 0.46)$, $(5.34, 2.68)$
55. rectas tangentes horizontales en $(4.73, 1.95)$, $(4.73, 4.34)$; rectas tangentes verticales en $(2, 0)$, $(6, \pi)$
57. rectas tangentes horizontales en $(-1, \frac{1}{2}\pi)$, $(-1, \frac{3}{2}\pi)$, $(\frac{2}{3}, 0.42)$, $(\frac{2}{3}, 2.72)$, $(\frac{2}{3}, 5.86)$; rectas tangentes verticales en $(0, 1)$, $(1, \pi)$, $(-\frac{2}{3}, 1.99)$, $(-\frac{2}{3}, 4.29)$, $(-\frac{2}{3}, 5.13)$
59. rectas tangentes horizontales en $(0, 0)$, $(\sqrt[4]{12}, \frac{1}{3}\pi)$, $(-\sqrt[4]{12}, \frac{1}{3}\pi)$; rectas tangentes verticales en $(0, \frac{1}{2}\pi)$, $(\sqrt{2}, \frac{1}{6}\pi)$, $(-\sqrt{2}, \frac{1}{6}\pi)$
61. $(1.5, 2.60)$; $(1.5, -2.60)$ 63. $(0, 0)$; $(1.73, 1)$, $(-1.73, 1)$ 65. $(3, \frac{1}{3}\pi)$, $(3, -\frac{1}{3}\pi)$ 67. el polo; $(2, \frac{1}{6}\pi)$; $(2, -\frac{5}{6}\pi)$

EJERCICIOS 9.4 (página 773)

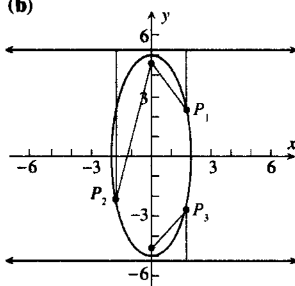
1. 5π 3. $2\pi a$ 5. 32 7. 12 9. $\frac{1}{2}\sqrt{5}(e^8 - 1)$ 11. 6π 13. 19.38 15. 2.505 17. 4.455
19. 26.22 21. $\frac{9}{4}\pi$ unidades cuadradas 23. 4π unidades cuadradas 25. 4 unidades cuadradas 27. $\frac{9}{16}\pi^3$ unidades cuadradas
29. $\frac{9}{8}\pi$ unidades cuadradas 31. $(\frac{11}{4}\pi - \frac{11}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3} - 3\sqrt{2})$ unidades cuadradas 33. $(\frac{19}{3}\pi - \frac{11}{2}\sqrt{3})$ unidades cuadradas
35. $(\frac{9}{2}\pi - 9)$ unidades cuadradas 37. $(18 - \frac{9}{4}\pi)$ unidades cuadradas 39. $\frac{1}{2}(\pi + 1)$ unidades cuadradas
41. **(a)** $(1, \pm\frac{1}{2}\pi)$; $(-1, \pm\frac{2}{3}\pi)$; **(b)** $(\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3})$ unidades cuadradas 43. **(a)** $(2, \pm\frac{1}{6}\pi)$; $(2, \pm\frac{7}{6}\pi)$; $(-2, \pm\frac{1}{3}\pi)$; $(-2, \pm\frac{4}{3}\pi)$; **(b)** $(\frac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3})$ unidades cuadradas 45. 4 unidades cuadradas 47. $8\pi^3 a^2$ unidades cuadradas 49. $\frac{1}{2}\pi a^2$ unidades cuadradas

EJERCICIOS 9.5 (página 781)

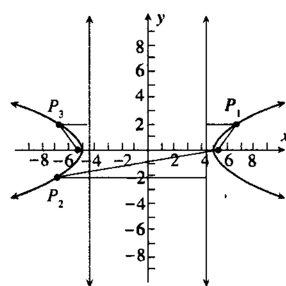
1. **(a)** $e = \frac{1}{3}\sqrt{5}$;
focos: $(\pm\sqrt{5}, 0)$;
directrices: $x = \pm\frac{9}{5}\sqrt{5}$
(b)



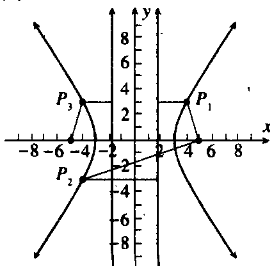
3. **(a)** $e = \frac{1}{5}\sqrt{21}$;
focos: $(0, \pm\sqrt{21})$;
directrices: $y = \pm\frac{25}{21}\sqrt{21}$;
(b)



5. **(a)** $e = \frac{1}{5}\sqrt{29}$;
focos: $(\pm\sqrt{29}, 0)$;
directrices: $x = \pm\frac{25}{29}\sqrt{29}$;
(b)

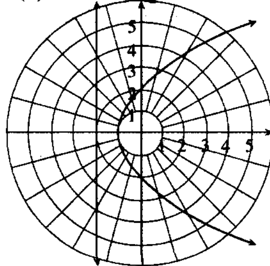


7. **(a)** $e = \frac{5}{3}$;
focos: $(\pm 5, 0)$;
directrices: $x = \pm\frac{9}{5}$;
(b)

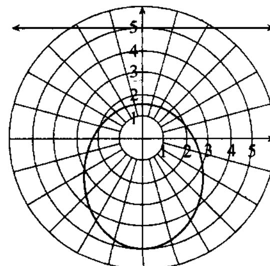


9. **(a)** parábola; **(b)** hipérbola; **(c)** elipse; **(d)** circunferencia

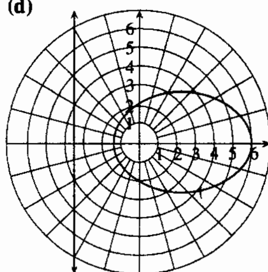
11. **(a)** 1; **(b)** parábola;
(c) $r\cos\theta = -2$;
(d)



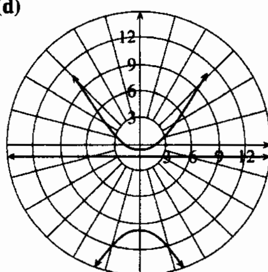
13. **(a)** $\frac{1}{2}$; **(b)** elipse;
(c) $r\operatorname{sen}\theta = 5$;
(d)



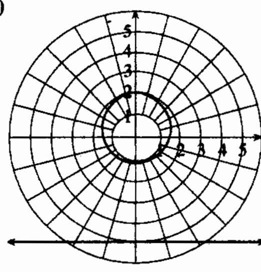
15. (a) $\frac{2}{3}$; (b) elipse;
(c) $r \cos \theta = -3$;
(d)



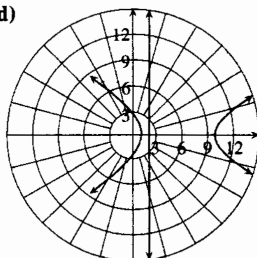
17. (a) $\frac{6}{5}$; (b) hipérbola;
(c) $r \operatorname{sen} \theta = -\frac{3}{2}$;
(d)



19. (a) $\frac{2}{7}$; (b) elipse;
(c) $r \operatorname{sen} \theta = -5$;
(d)



21. (a) $\frac{5}{4}$; (b) hipérbola;
(c) $r \cos \theta = 2$;
(d)



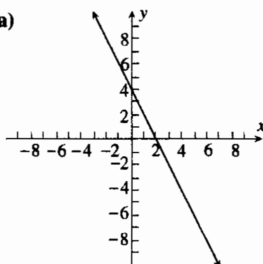
23. $r = \dfrac{8}{1 - \operatorname{sen} \theta}$ **25.** $r = \dfrac{36}{3 + 4 \cos \theta}$ **27.** $r = \dfrac{3}{2 - \cos \theta}$

29. (a) $r = \dfrac{5}{1 - 3 \cos \theta}$; (b) $r \cos \theta = -\dfrac{5}{3}$ **31.** $\frac{16}{3} \sqrt{3}\, \pi$ unidades cuadradas

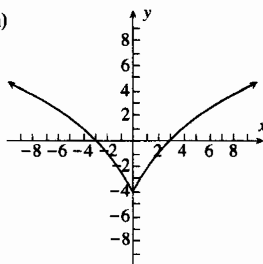
37. (a) $r = \dfrac{40\,000\,000}{1 - \cos \theta}$; (b) 20 000 000 millas **39.** 4 600 millas

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 9 (página 783)

1. (a)



3. (a)



5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{6t}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{108t^3}$

7. $x = 12$; $y = 16$; $y = -16$

9. (a) $(2, \frac{11}{4}\pi), (-2, \frac{7}{4}\pi)$; (b) $(-3, -\frac{5}{6}\pi), (3, \frac{1}{6}\pi)$ **11.** (a) $(0, 1)$; (b) $(1, -\sqrt{3})$; (c) $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}), (-\frac{3}{2}\sqrt{3}, -\frac{3}{2})$

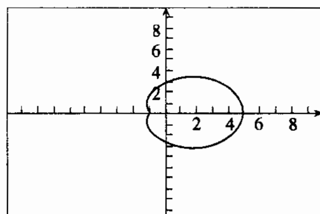
13. (a) $(4\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi)$; (b) $(2, \frac{5}{3}\pi)$, (c) $(6, \frac{1}{2}\pi)$ (d) $(4, \frac{7}{6}\pi)$ **15.** $r^2(4 \cos^2 \theta - 9 \operatorname{sen}^2 \theta) = 36$

17. $r = 9 \cos \theta - 8 \operatorname{sen} \theta$ **19.** $xy = 2$ **21.** $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - y^2 = 0$

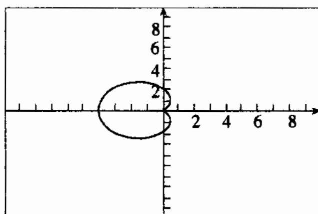
23. (a) recta que pasa por el polo con pendiente 1; (b) circunferencia con centro en el polo y radio 4

25. (a) recta perpendicular al eje polar que pasa por el punto (3, 0); (b) circunferencia con centro en $(\frac{3}{2}, 0)$ y tangente al eje $\frac{1}{2}\pi$ en el polo

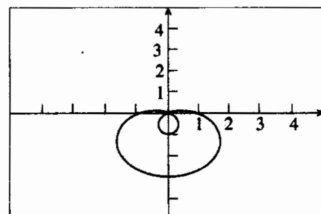
27. caracol con una hendidura; simétrica con respecto al eje polar; apunta hacia la derecha



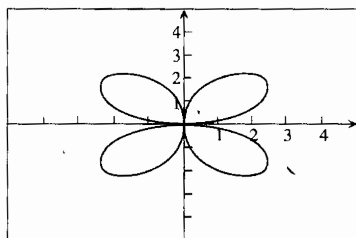
29. cardioide, simétrica con respecto al eje polar; apunta hacia la izquierda



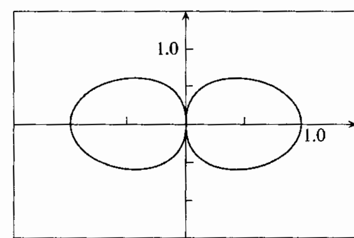
31. caracol con un lazo; simétrica con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$; apunta hacia abajo



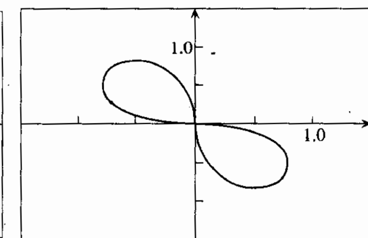
33. rosa de 4 hojas



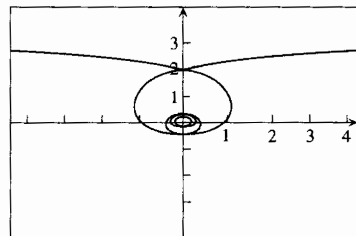
35.



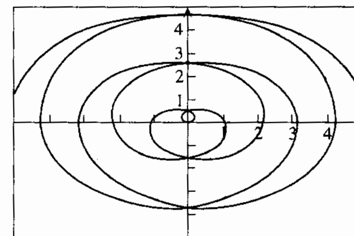
37. lemniscata



39. **(a)**



(b)



41. $\frac{3}{2}\sqrt{37} + \frac{1}{4}\ln(6 + \sqrt{37})$ **43.** 32 **45.** **(a)** $(16\pi - 24\sqrt{3})$ unidades cuadradas; **(b)** $(32\pi + 24\sqrt{3})$ unidades cuadradas
47. $a^2(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3})$ unidades cuadradas **49.** $\dfrac{e^{4k\pi} - 1}{4k}$ unidades cuadradas **51.** $r^2 - 2r_0 r\cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 = a^2$
53. **(a)** $e = \frac{1}{2}$; **(b)** elipse; **(c)** $r \operatorname{sen}\theta = -2$ **55.** **(a)** $e = \frac{3}{2}$; **(b)** hipérbola; **(c)** $3r\cos\theta = 4$
57. $r = \dfrac{8}{1 - 3\cos\theta}$ **59.** $r = \dfrac{6}{1 - \operatorname{sen}\theta}$ **61.** 38.014 **63.** 26.73 **65.** **(a)** 28.6 millones de millas **(b)** 43.4 millones de millas

EJERCICIOS 10.1 (página 797)

1. **(b)** 5 **3.** **(b)** $\frac{1}{2}\sqrt{1 + 4e^2}$ **5.** **(a)** $\frac{7}{4}\pi$; **(b)** π; **(c)** $\tan^{-1} 0.4 \approx 0.38$ **7.** $\langle 2, -3\rangle$ **9.** $\langle 5, 6\rangle$
11. $(-4, 3)$ **13.** $(12, -5)$ **15.** **(a)** $\langle -1, 9\rangle$; **(b)** $\langle 1, -5\rangle$ **17.** **(a)** $\langle -9, -4\rangle$; **(b)** $\langle 4, -e\rangle$
19. **(a)** $\langle 6, 1\rangle$; **(b)** $\sqrt{74}$; **(c)** $\sqrt{1061}$ **21.** **(a)** $10\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$; **(b)** $-24\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$; **(c)** $6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; **(d)** $2\sqrt{10}$
23. **(a)** $\sqrt{13} + \sqrt{17}$; **(b)** $-14\mathbf{i} + 21\mathbf{j}$; **(c)** $7\sqrt{13}$; **(d)** $5\sqrt{13} - 6\sqrt{17}$ **25.** **(a)** $-28\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$; **(b)** $2\sqrt{205}$
27. $\dfrac{11}{\sqrt{137}}\mathbf{i} + \dfrac{4}{\sqrt{137}}\mathbf{j}$; **29.** **(a)** $5(\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j})$, $\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$; **(b)** $2\sqrt{2}(\cos\frac{1}{4}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi\mathbf{j})$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{j}$
31. **(a)** $8(\cos\frac{2}{3}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi\mathbf{j}), -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}$; **(b)** $16(\cos\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\pi\mathbf{j}), -\mathbf{i}$ **33.** $h = 2, k = 3$
37. **(a)** 135 lb; **(b)** 17° **39.** 29.0° **41.** **(a)** 364.1°; **(b)** 243 millas/h **43.** **(a)** 28.1°; **(b)** 1.7 millas/h; **(c)** 0.53 millas
51. **(a)** $\langle 1, -2\rangle$; **(b)** $\langle 1, -2\rangle$

EJERCICIOS 10.2 (página 809)

1. **(b)** (7, 2, 0), (0, 0, 3), (0, 2, 0), (0, 2, 3), (7, 0, 3), (7, 0, 0); **(c)** $\sqrt{62}$
3. **(b)** (2, 1, 2), (−1, 3, 2), (−1, 1, 5), (2, 3, 2), (−1, 3, 5), (2, 1, 5); **(c)** $\sqrt{22}$
5. **(b)** (3, −1, 0), (3, 3, 0), (1, 3, 0), (1, 3, 5), (1, −1, 5), (3, −1, 5); **(c)** $3\sqrt{5}$ **7.** **(a)** 3; **(b)** $(2, 5, \frac{5}{2})$
9. **(a)** $\frac{13}{2}$; **(b)** $(\frac{5}{4}, -1, 2)$ **11.** **(a)** $7\sqrt{2}$; **(b)** $(-1, \frac{9}{2}, -\frac{1}{2})$ **13.** $(\pm 4\sqrt{6}, 4, 2)$
17. **(a)** $|\overline{AB}| = 9\sqrt{2}$; $|\overline{AC}| = 2\sqrt{62}$; $|\overline{BC}| = \sqrt{62}$; **(b)** punto medio de AB: $(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$; punto medio de AC: $(-1, 2, 5)$; punto medio de BC: $(-\frac{5}{2}, 8, \frac{7}{2})$ **21.** esfera con centro en $(4, -2, -1)$ y $r = 5$ **23.** el punto (0, 0, 3)
25. el conjunto vacío **27.** $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2 = 9$ **29.** **(a)** $\langle 21, -13, -2\rangle$; **(b)** $\langle -25, -26, 5\rangle$; **(c)** $7\sqrt{59} - 5\sqrt{41}$; **(d)** $\sqrt{1326}$ **31.** **(a)** $\langle -19, -16, -1\rangle$; **(b)** $\langle -6\sqrt{91}, -8\sqrt{91}, -2\sqrt{91}\rangle$ **33.** $a = 0, b = 0$
35. $\dfrac{4}{\sqrt{89}}; \dfrac{3}{\sqrt{89}}; \dfrac{8}{\sqrt{89}}$ **37.** $-\dfrac{6}{\sqrt{86}}; -\dfrac{1}{\sqrt{86}}; -\dfrac{7}{\sqrt{86}}$ **39.** $(\frac{13}{3}, 0, -\frac{4}{3})$ **41.** $(\frac{17}{3}, \frac{4}{3}, -6)$
43. **(a)** $7(-\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k})$; **(b)** $\sqrt{14}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{j} - \dfrac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{k}\right)$ **45.** **(a)** $\langle \frac{1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{4}{9}\rangle$; **(b)** $\left\langle -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle$

EJERCICIOS 10.3 (página 819)

1. (a) 10; (b) −1 **3.** (a) $-\frac{2}{5}$; (b) 9 **15.** (a) 0; (b) para ningún valor de k **17.** (a) $-\frac{80}{\sqrt{85}}$; (b) $\frac{-112}{17}\mathbf{i} + \frac{96}{17}\mathbf{j}$
19. $\frac{29}{50}\sqrt{50}$ **21.** (a) −44; (b) −468; (c) −31; (d) $\langle -84, 198, 124\rangle$ **23.** (a) $-\frac{1}{5}\sqrt{5}$; (b) −3; (c) $\langle 2, 1, -2\rangle$
25. (a) $-\frac{13}{9}\sqrt{6}$; (b) $\langle -\frac{26}{27}, -\frac{91}{27}, \frac{13}{27}\rangle$ **27.** $\frac{1}{11}\sqrt{4422}$ **31.** $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ unidades cuadradas **33.** $\langle \frac{1}{17}\sqrt{17}, \frac{4}{17}\sqrt{17}\rangle$; $\langle -\frac{1}{17}\sqrt{17}, -\frac{4}{17}\sqrt{17}\rangle$
35. $-\frac{46}{57}\sqrt{19}$ **37.** (a) 24 pie-lb; (b) $24\sqrt{3}$ pie-lb **39.** $(18 - 9\sqrt{3})$ pie-lb **41.** 25 pie-lb **43.** $\frac{5}{3}\sqrt{6}$ pie-lb **45.** $\frac{2}{5}$
59. $\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}}{\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}}\mathbf{H}$; $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}}{\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}}\mathbf{H}$

EJERCICIOS 10.4 (página 832)

1. $x + 2y - 3z + 1 = 0$ **3.** $y - z + 3 = 0$ **5.** $x - 3y - 4z - 3 = 0$ **7.** $3x + 2y + 6z = 23$
9. $\langle \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$; $\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\rangle$ **11.** $\langle \frac{4}{13}, \frac{3}{13}, -\frac{12}{13}\rangle$; $\langle -\frac{4}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{12}{13}\rangle$ **13.** $\left\langle \frac{3}{\sqrt{13}}, 0, \frac{2}{\sqrt{13}}\right\rangle$, $\left\langle -\frac{3}{\sqrt{13}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right\rangle$
15. $5x - 3y + 7z + 14 = 0$ **17.** $2x - y - z + 1 = 0$ **19.** $4y - 3z - 1 = 0$ y $z = 1$
21. 67.6° **23.** 69.2° **25.** $\frac{16}{15}\sqrt{6}$ **27.** $\frac{3}{2}$. **29.** $x = 1 + 4t, y = 2 - 3t, z = 1$; $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-3}, z = 1$
31. $x = 13t, y = -12t, z = -8t$; $\frac{x}{13} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{-8}$ **33.** $x = 2t - 2, y = -16t; z = 13t + 3$; $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-16} = \frac{z-3}{13}$
35. $x = 4 + t, y = -5 + 3t, z = 20 - 6t$; $\frac{x-4}{1} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-20}{-6}$ **37.** $\frac{x - \frac{1}{7}}{2} = \frac{y}{7} = \frac{z - \frac{10}{7}}{13}$
41. $8x - y - 66 = 0$; $13x - 5z - 102 = 0$; $13y - 40z + 42 = 0$
43. $4x + y + 3 = 0$; $3x - z + 4 = 0$; $3y + 4z - 7 = 0$ **45.** $\frac{5}{18}\sqrt{6}$ **47.** $4x + 7y - 3z + 7 = 0$
49. $4x + 2y - 3z + 5 = 0$ **51.** $(\frac{5}{3}, -\frac{17}{6}, \frac{5}{12})$ **53.** $\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-4}{1}$ **55.** $\frac{2}{5}\sqrt{70}$ **61.** $x = x_0, y = y_0$

EJERCICIOS 10.5 (página 844)

1. $\langle 7, 13, -11\rangle$ **3.** −490 **11.** $\langle 9, -1, -23\rangle$ **15.** $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ **17.** $\sqrt{89}$ unidades cuadradas **19.** $9\sqrt{29}$ unidades cuadradas
21. $5x - 2y + 7z = 0$ **23.** $x + 2y + z - 2 = 0$ **25.** $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$ **27.** $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$
29. 20 unidades cúbicas **31.** $\frac{38}{3\sqrt{78}}$ **33.** 187.9 pulg-lb

EJERCICIOS 10.6 (página 857)

13. $x^2 + z^2 = 4y$ **15.** $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$ **17.** $y^2 = 9x^2 + 9z^2$ **19.** $y^2 + z^2 = \operatorname{sen}^2 x$ **21.** $x^2 + z^2 = 16$; eje x o eje y; o $x^2 + z^2 = 16$, eje x o eje z; o $y^2 + z^2 = 16$, eje y o eje z **23.** $x^2 - z^2 = 4$, eje z; o $y^2 - z^2 = 4$, eje z
25. $x^2 = |y|$, eje y; o $z^2 = |y|$, eje y **27.** $y^2 = 9x^2$, eje y; o $y^2 = 9z^2$, eje y **29.** (i) (d): paraboloide elíptico (ii) (e): elipsoide; (iii) (b): paraboloide hiperbólico; (iv) (f): hiperboloide de 2 hojas; (v) (a): hiperboloide de 1 hoja; (vi) (c): cono elíptico **31.** elipsoide **33.** hiperboloide de 1 hoja **35.** cono elíptico **37.** paraboloide elíptico **39.** paraboloide hiperbólico **41.** hiperboloide elíptico de 2 hojas **43.** (a) $1 < |k| < \sqrt{2}$; (b) $|k| < 1$
45. vértice: $(1, -\frac{1}{3}, 0)$; foco $(1, 0, 0)$ **49.** 8π unidades cúbicas **51.** $\frac{abh^2}{2c}\pi$ unidades cúbicas

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 10 (página 861)

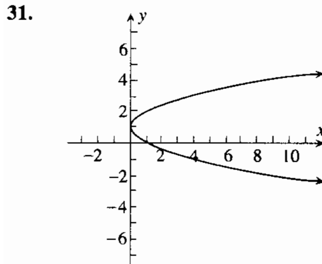
1. $-25\mathbf{i} + 63\mathbf{j}$ **3.** $\sqrt{4594}$ **5.** $15\sqrt{2} - 14\sqrt{13}$ **7.** 92 **9.** $\frac{9}{\sqrt{106}}\mathbf{i} - \frac{5}{\sqrt{106}}\mathbf{j}$ **11.** $h = -\frac{1}{2}$; $k = \frac{1}{2}$
13. $-\frac{19}{5}\sqrt{2}$ **15.** $-\frac{19}{25}\mathbf{i} - \frac{133}{25}\mathbf{j}$ **17.** $-\frac{19}{13}\sqrt{13}$ **19.** $\frac{1}{13}(80 \pm 58\sqrt{3})$ **21.** $\mathbf{i} + 26\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$ **23.** −3 **25.** $7\sqrt{1270}$
27. $-\frac{1}{3}\sqrt{21}$ **29.** $\frac{1}{9}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ **31.** $\langle 60, -40, 80\rangle$ **33.** 16 **35.** 295 **37.** Un punto del eje x en R, una recta paralela al eje y en R^2, un plano paralelo al plano yz en R^3. **39.** El eje x. **41.** La circunferencia del plano xz con centro en el origen y radio 2. **43.** El plano perpendicular al plano xy que lo intersecta en la recta $y = x$. **45.** El paraboloide de revolución generado al girar $y^2 = 9z$ alrededor del eje z. **47.** El cono circular recto generado al girar $y = x$ alrededor del eje x.

49. (a) 104.4 lb; (b) 35.5° **51.** 127.28 pie-lb **53.** $(-3, \sqrt{167}, 1), (-3, -\sqrt{167}, 1)$
55. $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 17$ **57.** $z^2 = e^{4y}$ o $x^2 = e^{4y}$; el eje y **59.** 3
61. (a) $\cos\alpha = -\dfrac{7}{\sqrt{78}}, \cos\beta = -\dfrac{5}{\sqrt{78}}, \cos\gamma = -\dfrac{2}{\sqrt{78}}$; (b) $-\dfrac{7}{\sqrt{78}}\mathbf{i} - \dfrac{5}{\sqrt{78}}\mathbf{j} - \dfrac{2}{\sqrt{78}}\mathbf{k}$
63. (a) $-\frac{4}{5}\sqrt{3}$; (b) $-\frac{28}{25}\mathbf{i} + \frac{4}{25}\mathbf{j} - \frac{4}{5}\mathbf{k}$ **65.** $x - 6y - 10z + 23 = 0$ **67.** $\frac{47}{10}\sqrt{2}$ **69.** 3 **71.** $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
73. $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{1}, x = 4t, y = -3t, z = t$ **77.** $\frac{54}{25}\pi$ unidades cuadradas **79.** 24 unidades cúbicas

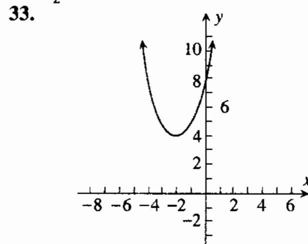
EJERCICIOS 11.1 (página 870)

1. $(-\infty, 0) \cup (0, 4]$ **3.** $(-1, 1]$ **5.** $[-2, 0) \cup (0, \pi) \cup (\pi, 4]$ **7.** $(-4, -\pi) \cup (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \cup (\pi, 4]$
9. (a) $2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$; (b) $2\mathbf{i} + (t^2 - 2)\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$; (c) $3t^2 - 3$; (d) $(t^3 + t^2 - 2t)\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} + (2t - t^3 + t^2)\mathbf{k}$
11. (a) $(\cos t + \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$; (b) $(\cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} - (\cos t + \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$;
(c) $-t^2$; (d) $t(\operatorname{sen} t - \cos t)\mathbf{i} + t(\operatorname{sen} t + \cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$
13. (a) $(t^2 - 1)\mathbf{i} + (t^3 - t^2 - t + 1)\mathbf{j} + (t^2 - 2t + 1)\mathbf{k}$; (b) $(t^2 - 2t + 1)\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j} + (t^2 - 1)\mathbf{k}$;
(c) $(2 + t)\mathbf{i} + (t^2 + 2t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; (d) $t\mathbf{i} + \mathbf{j} + (t + 2)\mathbf{k}$
15. (a) $\operatorname{sen} t \cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen}^2 t\,\mathbf{j} + t \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$; (b) $\operatorname{sen}^2 t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t \cos t\,\mathbf{j} - t \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$; (c) $\sqrt{1 - t^2}\,\mathbf{i} - t\mathbf{j} + \operatorname{sen}^{-1} t\,\mathbf{k}$;
(d) $t\mathbf{i} + \sqrt{1 - t^2}\,\mathbf{j} - \operatorname{sen}^{-1} t\,\mathbf{k}$
17. $4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ **19.** $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ **21.** $-\mathbf{i} - \frac{1}{2}\pi\mathbf{j} + \pi\mathbf{k}$ **23.** $e(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ **25.** $(1, 2) \cup (2, +\infty)$
27. Todos los números reales distintos de $(k + \frac{1}{2})\pi$, donde k es cualquier entero **29.** Todos los números reales

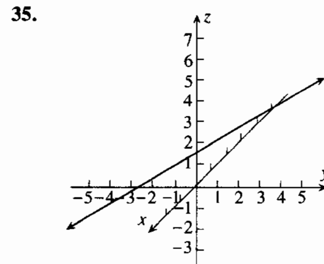
31.



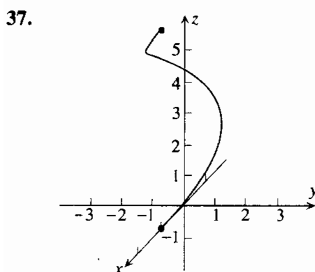
33.



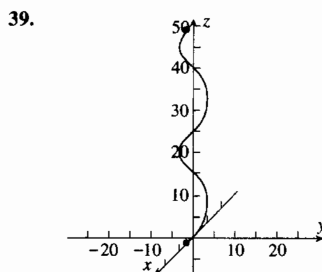
35.



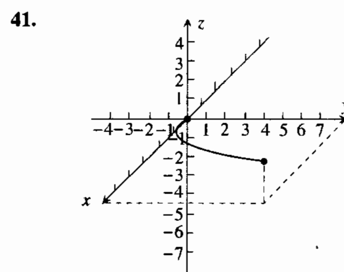
37.



39.



41.



43. (a) $(0, 8, 0)$; (b) $(4, 8, 4)$; (c) $(0, 0, 8)$
45. (a) $(0, 0, 10)$; (b) $(-10, 0, 0)$ (c) $(10, 0, 0)$

EJERCICIOS 11.2 (página 880)

1. $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{i} - t^{-2}\mathbf{j}; \mathbf{R}''(t) = 2t^{-3}\mathbf{j}$ **3.** $\mathbf{R}'(t) = (2t + 1)^{-2}\mathbf{i} + 2t^{-2}\mathbf{j}; \mathbf{R}''(t) = -4(t + 1)^{-3}\mathbf{i} - 4t^{-3}\mathbf{j}$
5. $\mathbf{R}' = 2e^{2t}\mathbf{i} + t^{-1}\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}; \mathbf{R}''(t) = 4e^{2t}\mathbf{i} - t^{-2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
7. $\mathbf{R}'(t) = \dfrac{1}{1 + t^2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\mathbf{j} - \dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\mathbf{k}; \mathbf{R}''(t) = \dfrac{2t}{(1 + t^2)^2}\mathbf{i} + \dfrac{t}{(1 - t^2)^{3/2}}\mathbf{j} - \dfrac{t}{(1 - t^2)^{3/2}}\mathbf{k}$
9. $\mathbf{R}'(t) = 10\cos 2t\,\mathbf{i} - 4\sec 4t\tan 4t\,\mathbf{j} - 8\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}; \mathbf{R}''(t) = -20\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{i} + (16\sec 4t - 32\sec^3 4t)\mathbf{j} - 16\cos 2t\,\mathbf{k}$
11. $(2t - 3)(2t^2 - 6t + 5)^{-1/2}$ **13.** $\dfrac{12e^{6t}}{\sqrt{1 + 4e^{6t}}}$ **33.** $\ln|\sec t|\mathbf{i} - \ln|t|\mathbf{j} + \mathbf{C}$
35. $(t\ln t - t)\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j} + \mathbf{C}$ **37.** $\frac{1}{3}e^{3t}\mathbf{i} - \frac{1}{3}e^{-3t}\mathbf{j} + (\frac{1}{9}e^{3t} - \frac{1}{3}te^{3t})\mathbf{k} + \mathbf{C}$ **39.** $\ln|\sec t|\mathbf{i} + \ln|\sec t + \tan t|\mathbf{j} + \ln|t|\mathbf{k} + \mathbf{C}$
41. $(\frac{1}{3}t^3 - 7)\mathbf{i} + (\ln|t - 2| - 5)\mathbf{j}$ **43.** $[\frac{1}{2}e^t(\operatorname{sen} t - \cos t) + \frac{3}{2}]\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - 1)\mathbf{j} + (2 - e^t)\mathbf{k}$ **45.** $x^2 + y^2 = 1; 0$
47. 0 **49.** $\sqrt{21} + \frac{3}{2} + \frac{5}{4}\ln(4 + \sqrt{21})$ **51.** 13 **53.** 9.571 **55.** 3.096

EJERCICIOS 11.3 (página 888)

1. $\mathbf{T}(t) = -\text{sen}\, t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}; \mathbf{T}(\frac{1}{2}\pi) = -\mathbf{i}; \mathbf{N}(t) = -\cos t\mathbf{i} - \text{sen}\, t\mathbf{j}; \mathbf{N}(\frac{1}{2}\pi) = -\mathbf{j}$

3. $\mathbf{T}(t) = \cos t\mathbf{i} + \text{sen}\, t\mathbf{j}; \mathbf{T}(\frac{1}{2}\pi) = \mathbf{j}; \mathbf{N}(t) = -\text{sen}\, t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}; \mathbf{N}(\frac{1}{2}\pi) = -\mathbf{i}$

5. $\mathbf{T}(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}\mathbf{i} + \dfrac{2t}{t^2+1}\mathbf{j}; \mathbf{T}(2) = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}; \mathbf{N}(t) = \dfrac{2t}{t^2+1}\mathbf{i} + \dfrac{1-t^2}{t^2+1}\mathbf{j}; \mathbf{N}(2) = \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$

7. $\mathbf{T}(t) = \text{sen}\, t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}; \mathbf{N}(t) = \cos t\mathbf{i} - \text{sen}\, t\mathbf{j}$ **9.** $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{j} + t\mathbf{k}}{\sqrt{1+t^2}}; \mathbf{N}(t) = \dfrac{-t\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1+t^2}}$

11. $\mathbf{T}(\frac{1}{2}\pi) = \mathbf{i}; \mathbf{N}(\frac{1}{2}\pi) = -\mathbf{j}; \mathbf{B}(\frac{1}{2}\pi) = -\mathbf{k}$ **13.** $\mathbf{T}(1) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\mathbf{j} + \mathbf{k}); \mathbf{N}(1) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(-\mathbf{j} + \mathbf{k}); \mathbf{B}(1) = \mathbf{k}$

15. $\mathbf{T}(t) = -\cos t\mathbf{i} + \text{sen}\, t\mathbf{j}; \mathbf{N}(t) = \text{sen}\, t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}; \mathbf{B}(t) = -\mathbf{k}$ **17.** osculador: $z = 2$; rectificador: $y = \frac{1}{2}\pi$; normal: $x = 1$

19. osculador: $x = 1$; rectificador: $-(y - \frac{1}{2}) + (z - \frac{1}{3}) = 0$; normal: $(y - \frac{1}{2}) + (z - \frac{1}{3}) = 0$

21. osculador: $z = 2$; rectificador: $(x - \frac{1}{4}\sqrt{2}) + (y - \frac{1}{4}\sqrt{2}) = 0$; normal: $-(x - \frac{1}{4}\sqrt{2}) + (y - \frac{1}{4}\sqrt{2}) = 0$

23. $\mathbf{T}(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{5}\sqrt{5}(-2\mathbf{i} + \mathbf{k}); \mathbf{N}(\frac{1}{2}\pi) = -\mathbf{j}; \mathbf{B}(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{5}\sqrt{5}(\mathbf{i} + 2\mathbf{k})$; osculador: $x + 2z - 4 = 0$; rectificador: $y = 1$; normal: $2x - z + 2 = 0$

25. $\frac{3}{91}\sqrt{273}$ **27.** $\frac{1}{4}\pi$ **29.** $s = \frac{1}{27}[(4 + 9t)^{3/2} - 8]$

31. $\mathbf{R}(s) = (\text{sen}\sqrt{2s} - \sqrt{2s}\cos\sqrt{2s})\mathbf{i} + (\cos\sqrt{2s} + \sqrt{2s}\,\text{sen}\sqrt{2s})\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

33. $\mathbf{R}(s) = \mathbf{i} + \frac{1}{2}[(3s+1)^{2/3} - 1]\mathbf{j} + \frac{1}{3}[(3s+1)^{2/3} - 1]^{3/2}\mathbf{k}$ **35.** $\mathbf{R}(s) = (1 - \frac{2}{3}s)^{3/2}\mathbf{i} + (\frac{2}{3}s)^{3/2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

EJERCICIOS 11.4 (página 896)

1. $K = \frac{1}{3}; \rho = 3$ **3.** $K = 1; \rho = 1$ **5.** $K = \frac{2}{25}; \rho = \frac{25}{2}$ **7.** $\dfrac{1}{|t|}$ **9.** $\dfrac{1}{t(1+t^2)^{3/2}}$ **15.** 2

17. $K(t) = \dfrac{\sqrt{2}|1-t^2|^3}{(1 + 6t^2 + t^4)^{3/2}}; K(0) = \sqrt{2}; \rho(0) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ **19.** $K = \frac{1}{2}; \rho = 2$ **21.** $K = \frac{1}{4}\sqrt{2}; \rho = 2\sqrt{2}$

23. $K = \frac{4}{49}\sqrt{7}; \rho = \frac{7}{4}\sqrt{7}$ **25.** $K = \frac{2}{289}\sqrt{17}; \rho = \frac{17}{2}\sqrt{17}$ **27.** $\dfrac{(2-x^2)^{3/2}}{|x|}$ **29.** $\frac{1}{576}(16x^2 + 81y^2)^{3/2}$

31. $\dfrac{2(x+y)^{3/2}}{a^{1/2}}$ **33.** $4|a\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t|$ **35.** $(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ **37.** $(-3, -1)$ **41.** $K = 2; \rho = \frac{1}{2}; (0, -\frac{1}{2})$

43. $\left(3x + 2p, -\dfrac{y^3}{4p^2}\right)$ **45.** $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t, \dfrac{b^2-a^2}{b}\text{sen}^3 t\right)$ **47.** $C = (\frac{2}{9}, \frac{37}{12}), \rho = \frac{125}{36}$ **49.** $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 8$

51. $K = \frac{23}{98}\sqrt{7}; \rho = \frac{14}{23}\sqrt{7}$ **53.** $K = \dfrac{1}{16|a|}; \rho = 16|a|$ **59.** $\dfrac{1}{2b}$

EJERCICIOS 11.5 (página 907)

1. **(a)** $\mathbf{V}(t) = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j}; \mathbf{A}(t) = 2\mathbf{i}; \|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{4t^2+1}; \|\mathbf{A}(t)\| = 2$; **(b)** $\mathbf{V}(3) = 6\mathbf{i} + \mathbf{j}; \mathbf{A}(3) = 2\mathbf{i}$

3. **(a)** $\mathbf{V}(t) = -10\,\text{sen}\,2t\mathbf{i} + 6\cos 2t\mathbf{j}; \mathbf{A}(t) = -20\cos 2t\mathbf{i} - 12\,\text{sen}\,2t\mathbf{j}; \|\mathbf{V}(t)\| = 2\sqrt{25\,\text{sen}^2 2t + 9\cos^2 2t}$; $\|\mathbf{A}(t)\| = 4\sqrt{25\cos^2 t + 9\,\text{sen}^2 2t}$; **(b)** $\mathbf{V}(\frac{1}{4}\pi) = -10\mathbf{i}; \mathbf{A}(\frac{1}{4}\pi) = -12\mathbf{j}$

5. **(a)** $\mathbf{V}(t) = e^t\mathbf{i} + 2e^{2t}\mathbf{j}; \mathbf{A}(t) = e^t + 4e^{2t}\mathbf{j}; \|\mathbf{V}(t)\| = e^t\sqrt{1+4e^{2t}}; \|\mathbf{A}(t)\| = e^t\sqrt{1+16e^{2t}}$;
(b) $\mathbf{V}(\ln 2) = 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j}; \mathbf{A}(\ln 2) = 2\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$

7. **(a)** $\mathbf{V}(t) = \mathbf{i} + \tan t\mathbf{j}; \mathbf{A}(t) = \sec^2 t\mathbf{j}; \|\mathbf{V}(t)\| = |\sec t|; \|\mathbf{A}(t)\| = \sec^2 t$; **(b)** $\mathbf{V}(\frac{1}{4}\pi) = \mathbf{i} + \mathbf{j}; \mathbf{A}(\frac{1}{4}\pi) = 2\mathbf{j}$

9. **(a)** $\mathbf{V}(t) = (2t+3)\mathbf{i} - 6t\mathbf{j}; \mathbf{A}(t) = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}; \|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{40t^2 + 12t + 9}; \|\mathbf{A}(t)\| = 2\sqrt{10}$; **(b)** $\mathbf{V}(\frac{1}{2}) = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; $\mathbf{A}(\frac{1}{2}) = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ **11.** $\mathbf{V}(\frac{1}{2}\pi) = -2\mathbf{i} + \mathbf{k}; \mathbf{A}(\frac{1}{2}\pi) = -2\mathbf{j}; \|\mathbf{V}(\frac{1}{2}\pi)\| = \sqrt{5}$ **13.** $\mathbf{V}(2) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}; \mathbf{A}(2) = 2\mathbf{j}; \|\mathbf{V}(2)\| = 3$

15. $\mathbf{V}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}; \mathbf{A}(0) = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}; \|\mathbf{V}(0)\| = \sqrt{3}$ **17.** $(4 - \frac{1}{t+1})\mathbf{i} + (\frac{1}{2}t^2 + t + 2)\mathbf{j}$

19. $(e^{-t} + 3t - 1)\mathbf{i} + (\frac{2}{9}e^{3t} + \frac{1}{3}t + \frac{25}{9})\mathbf{j}$ **21.** $(t+1)\mathbf{i} + (t+2)\mathbf{j} - 16t^2\mathbf{k}$ **23.** $(t^3 + 2t)\mathbf{i} + (t^4 + 3t)\mathbf{j} + (\frac{1}{2}t^2 + 4)\mathbf{k}$

25. $\mathbf{V}(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}; \mathbf{A}(t) = 2\mathbf{j}; \mathbf{T}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i} + \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}; \mathbf{N}(t) = \dfrac{-t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}; \|\mathbf{V}(t)\| = 2\sqrt{1+t^2}$;
$A_T(t) = \dfrac{2t}{\sqrt{1+t^2}}; A_N(t) = \dfrac{2}{\sqrt{1+t^2}}; K(t) = \dfrac{1}{2(1+t^2)^{3/2}}; \mathbf{V}(2) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}; \mathbf{T}(2) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}; \mathbf{A}(2) = 2\mathbf{j}$;
$\mathbf{N}(2) = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}, \|\mathbf{V}(2)\| = 2\sqrt{5}; A_T(2) = \dfrac{4}{\sqrt{5}}; A_N(2) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}; K(2) = \dfrac{1}{10\sqrt{5}}$

27. $\mathbf{V}(t) = -15\,\text{sen}\,3t\mathbf{i} + 15\cos 3t\mathbf{j}; \mathbf{A}(t) = -45\cos 3t\mathbf{i} - 45\,\text{sen}\,3t\mathbf{j}; \mathbf{T}(t) = -\text{sen}\,3t\mathbf{i} + \cos 3t\mathbf{j}; \mathbf{N}(t) = -\cos 3t\mathbf{i} - \text{sen}\,3t\mathbf{j}$;
$\|\mathbf{V}(t)\| = 15; A_T(t) = 0; A_N(t) = 45; K(t) = \frac{1}{5}; \mathbf{V}(\frac{1}{3}\pi) = -15\mathbf{j}; \mathbf{A}(\frac{1}{3}\pi) = 45\mathbf{i}; \mathbf{T}(\frac{1}{3}\pi) = -\mathbf{j}; \mathbf{N}(\frac{1}{3}\pi) = \mathbf{i}; \|\mathbf{V}(\frac{1}{3}\pi)\| = 15$
$A_T(\frac{1}{3}\pi) = 0; A_N(\frac{1}{3}\pi) = 45; K(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{5}$

29. $\mathbf{V}(t) = e^t\mathbf{i} - e^{-1}\mathbf{j}; \mathbf{A}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-1}\mathbf{j}; \mathbf{T}(t) = \dfrac{e^{2t}}{\sqrt{e^{4t}+1}}\mathbf{i} - \dfrac{1}{\sqrt{e^{4t}+1}}\mathbf{j}; \mathbf{N}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{e^{4t}+1}}\mathbf{i} - \dfrac{e^{2t}}{e^{4t}+1}\mathbf{j};$
$\|\mathbf{V}(t)\| = \dfrac{\sqrt{e^{4t}+1}}{e^t}; A_T(t) = \dfrac{e^{4t}-1}{e^t\sqrt{e^{4t}+1}}; A_N(t) = \dfrac{2e^t}{\sqrt{e^{4t}+1}}; K(t) = \dfrac{2e^{3t}}{(e^{4t}+1)^{3/2}}; \mathbf{V}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}; \mathbf{A}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j};$
$\mathbf{T}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}; \mathbf{N}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}; \|\mathbf{V}(0)\| = \sqrt{2}; A_T(0) = 0; A_N(0) = \sqrt{2}; K(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

31. $\dfrac{4t}{\sqrt{4t^2+2}}\mathbf{T}(t) + \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4t^2+2}}\mathbf{N}(t)$ **33.** $1\mathbf{T}(t) + t\mathbf{N}(t)$ **35.** $2\sqrt{2t}\,\mathbf{T}(t) + 2\mathbf{N}(t)$ **39.** $3(x-1) - 3(y-1) + (z-1) = 0$

41. **(a)** $160\sqrt{2}\mathbf{i} + 160\sqrt{2}\mathbf{j}$; **(b)** $x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = 160\sqrt{2}t\mathbf{i} + (160\sqrt{2}t - 16t^2)\mathbf{j}$; **(c)** $10\sqrt{2}$ s; **(d)** 3 200 pie;
(e) 800 pie; **(f)** $160\sqrt{2}\mathbf{i} - 160\sqrt{2}\mathbf{j}$; 320 pie/s;
(g) $\mathbf{R}(6) = 960\sqrt{2}\mathbf{i} + (960\sqrt{2} - 576)\mathbf{j}; \mathbf{V}(6) = 160\sqrt{2}\mathbf{i} + (160\sqrt{2} - 192)\mathbf{j}; 64\sqrt{34 - 15\sqrt{2}} \approx 229$ pie/s;
(h) $y = x - \dfrac{x^2}{3\,200}$ **45.** $(25 + \sqrt{631})$ s; $(20\,000\sqrt{3} + 800\sqrt{1893})$ pie **47.** 283 m/s

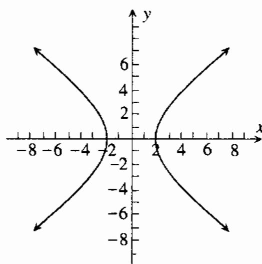
49. Caerá en el agua a 24.3 pie del barco. **51.** 40°8′ **53.** Pasará 5 pie por arriba del árbol y caerá a 25 pie del banderín.

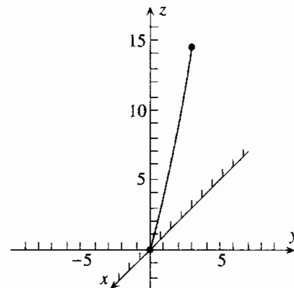
55. **(c)** $\mathbf{T}(t) = -\text{sen}\,\omega t\mathbf{i} + \cos\omega t\mathbf{j}; \mathbf{N}(t) = -\cos\omega t\mathbf{i} - \text{sen}\,\omega t\mathbf{j}; A_T(t) = 0; A_N(t) = r\omega^2$; **(d)** se cuadriplicará

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 11 (página 910)

1. $[0, 3) \cup (3, +\infty)$ **3.** $[-2, -\frac{1}{2}\pi) \cup (-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\pi) \cup (\frac{1}{2}\pi, 2]$ **5.** $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$

7. $\mathbf{k}$ **9.** $(0, 4)$ **11.** Todos los números reales **13.** **15.**





17. $\mathbf{R}'(t) = \dfrac{-2t}{(t^2+9)^2}\mathbf{i} - \dfrac{1}{t^2}\mathbf{j} - \dfrac{1}{t}\mathbf{k}; \mathbf{R}''(t) = 6\dfrac{t^2-3}{(t^2+9)^3}\mathbf{i} + \dfrac{2}{t^3}\mathbf{j} - \dfrac{1}{t^2}\mathbf{k}$

19. $D_t\|\mathbf{R}(t)\| = \dfrac{9e^{2t}}{\sqrt{9e^{2t}+8}}; \|D_t\mathbf{R}(t)\| = 3e^t$ **21.** $[\ln(t+2) - \ln 2]\mathbf{i} + (\tan^{-1}t + 1)\mathbf{j}$

23. $(4e^{t/2} - 2e)\mathbf{i} + (4e^{-t/2} - 6e^{-1})\mathbf{j} + (4\,\text{senh}\,\frac{1}{2}t - 4\,\text{senh}\,1 + 1)\mathbf{k}$ **25.** $\frac{1}{8}\pi\sqrt{8+\pi^2} + \text{senh}^{-1}\frac{1}{4}\sqrt{2}\pi$ **27.** 0.9950

29. $\mathbf{T}(t) = \dfrac{e^{2t}\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{e^{4t}+1}}; \mathbf{N}(t) = \dfrac{\mathbf{i} - e^{2t}\mathbf{j}}{\sqrt{e^{4t}+1}}; \mathbf{T}(\ln 2) = \dfrac{4\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{17}}; \mathbf{N}(\ln 2) = \dfrac{\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{\sqrt{17}};$

31 y 35. $\mathbf{T}(t) = \dfrac{t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{t^2+2}; \mathbf{N}(t) = \dfrac{2t\mathbf{i} + (2-t^2)\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}}{t^2+2}; \mathbf{B}(t) = \dfrac{-2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}}{t^2+2};$
osculador: $-2(x - \frac{1}{3}) + 2(y-1) - (z-2) = 0$; rectificador: $2(x - \frac{1}{3}) + (y-1) - 2(z-2) = 0$;
normal: $(x - \frac{1}{3}) + 2(y-1) + 2(z-2) = 0$

33 y 37. $\mathbf{T}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(3\cos 2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\,\text{sen}\,2t\mathbf{k}); \mathbf{N}(t) = -\text{sen}\,2t\mathbf{i} - \cos 2t\mathbf{k}; \mathbf{B}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(-2\cos 2t\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\,2t\mathbf{k});$
osculador: $-2x + 3y = 0$; rectificador: $z = 3$; normal: $3x + 2y = 0$ **39.** $\frac{1}{3}t^3 + 2t$

41. $\mathbf{R}(s) = [2(3s + 17^{3/2})^{2/3} - 34]\mathbf{i} + \frac{1}{3}[(3s + 17^{3/2})^{2/3} - 16]^{3/2}\mathbf{j}$ **43.** $\mathbf{R}(s) = 3\,\text{sen}(s/\sqrt{13})\mathbf{i} + 2s/\sqrt{13}\mathbf{j} + 3\cos(s/\sqrt{13})\mathbf{k}$

45. $K = \dfrac{8}{17^{3/2}}; \rho = \dfrac{17^{3/2}}{8}$ **47.** $K = \dfrac{2}{(t^2+2)^2}$ **49.** $K = \frac{3}{13}$

53. $K = \frac{2}{75}; \rho = \frac{75}{2}$ **55.** $(-\frac{21}{2}, 32)$

57. **(a)** $\mathbf{V}(t) = 3\mathbf{i} + (4-2t)\mathbf{j}; \mathbf{A}(t) = -2\mathbf{j}; \|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{4t^2 - 16t + 25}; \|\mathbf{A}(t)\| = 2$; **(b)** $\mathbf{V}(1) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}; \mathbf{A}(1) = -2\mathbf{j}$

59. $\mathbf{V}(\frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{2}\pi\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}; \mathbf{A}(\frac{1}{2}\pi) = -2\mathbf{i} - \frac{1}{2}\pi\mathbf{j}$; rapidez: $\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2 + 2}$ **61.** $\mathbf{R}(t) = (\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{2})\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j}$

63. $\mathbf{R}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + (2\,\text{sen}\,t + 2)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; **65.** $(t+1)\mathbf{i} + (\frac{3}{2}t^2 - 3t + \frac{11}{2})\mathbf{j} + (3t - t^2 - 2)\mathbf{k}$

67. $\mathbf{V}(t) = 3\mathbf{i} + (4-2t)\mathbf{j}; \mathbf{A}(t) = -2\mathbf{j}; \mathbf{T}(t) = \dfrac{3\mathbf{i} + (4-2t)\mathbf{j}}{\sqrt{4t^2-16t+25}}; \mathbf{N}(t) = \dfrac{(4-2t)\mathbf{i} - 3\mathbf{j}}{\sqrt{4t^2-16t+25}}; \|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{4t^2-16t+25};$
$A_T(t) = \dfrac{4t-8}{\sqrt{4t^2-16t+25}}; A_N(t) = \dfrac{6}{\sqrt{4t^2-16t+25}}; K(t) = \dfrac{6}{(4t^2-16t+25)^{3/2}}; \mathbf{V}(1) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}; \mathbf{A}(1) = -2\mathbf{j};$
$\mathbf{T}(1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}); \mathbf{N}(1) = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}); \|\mathbf{V}(1)\| = \sqrt{13}; A_T(1) = \dfrac{-4}{\sqrt{13}}; A_N(1) = \dfrac{6}{\sqrt{13}}; K(1) = \dfrac{6}{13^{3/2}}$

69. $\mathbf{A}(t) = \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{\sqrt{4 + e^{2t} + e^{-2t}}}\mathbf{T}(t) + \sqrt{\dfrac{4 + 4e^{2t} + 4e^{-2t}}{4 + e^{2t} + e^{-2t}}}\mathbf{N}(t)$

71. **(a)** $\mathbf{V}(t) = 2\operatorname{senh} 2t\mathbf{i} + 2\cosh 2t\mathbf{j}$; $\mathbf{A}(t) = 4\cosh 2t\mathbf{i} + 4\operatorname{senh} 2t\mathbf{j}$;
(b) $\|\mathbf{V}(t)\| = 2\sqrt{\cosh 4t}$; **(c)** $A_T(t) = \dfrac{4\operatorname{senh} 4t}{\sqrt{\cosh 4t}}$; $A_N(t) = \dfrac{4}{\sqrt{\cosh 4t}}$

73. **(a)** $75\sqrt{3}t\mathbf{i} + (75t - 16t^2)\mathbf{j}$; **(b)** $\frac{5625}{16}\sqrt{3}$ pie; **(c)** $\frac{5625}{64}$ pie; **(d)** 150 pie/s **75.** 98.73 pie/s

77. **(a)** 0.85 s; **(b)** 18.38 pie

EJERCICIOS 12.1 (página 923)

1. **(a)** $-\frac{1}{7}$; **(b)** 5; **(c)** $\dfrac{x + y}{x - y + 2}$; **(d)** 0 **3.** **(a)** 1; **(b)** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; **(c)** $\frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$; **(d)** $4x + 4y + 8$

5. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$ **7.** $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ **9.** $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 \geq 1\}$ **11.** $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$

13. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ **15.** $\{(x, y) \mid y \neq \pm x\}$ **17.** $\{(x, y) \mid -1 \leq x - y \leq 1\}$ **19.** $\{(x, y) \mid xy > 1\}$

21. $\{(x, y, z) \mid x - y - z \neq 0\}$ **23.** $\{(x, y, z) \mid x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 16\}$ **25.** $\{(x, y, z) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$

27. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < 4\}$ **29.** $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$ **31.** R^2 **33.** R^2 **35.** R^2

37. Circunferencias centradas en el origen de radio $\sqrt{16 - k^2}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$

39. Circunferencias centradas en el origen de radio $\sqrt{16 - k}$, $k = 16, 12, 7, 0, -9, -20$

41. Hipérbolas $x^2 - y^2 = k$, $k = 16, 9, 4, 0^*, -4, -9, -16$ (*las rectas $y = \pm x$) **43.** Circunferencias de radio $\sqrt{2k}$, $k = 8, 6, 4, 2, 0$

45. Hipérbolas $xy = k$, $k = 0^*, \ln 2, 1, \ln 4, \ln\frac{1}{2}, -1, \ln\frac{1}{4}$ (*los ejes x y y)

47. **(a)** 2; **(b)** 6; **(c)** $\sqrt{x} - y^2$; **(d)** $|x - y|$; **(e)** $|x - y|$

49. $h(x, y) = \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{1 - x^2 - y^2}$; dominio: $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ **51.** **(b)** (iii) **53.** **(a)** (iv)

55. **(a)** x pies es el ancho, y pies es la altura, $\$C$ es el costo. $C(x, y) = .32\left[xy + \dfrac{12}{x} + \dfrac{18}{y}\right]$, $x > 0, y > 0$; **(b)** \$5.92

57. **(a)** $\mathbf{V} = \frac{1}{2}xy(6 - x - 3y)$, $x \geq 0, y \geq 0, x + 3y \leq 6$; **(b)** 0.78125 unidades cúbicas

59. Circunferencias centradas en el origen de radio $\sqrt{9 - 16/V^2}$, $V = 16, 12, 8, 4$

61. Ramas en el primer cuadrante de las hipérbolas $xy = f$, $f = 5, 4, 3, 2, 1$

63. Esferas centradas en el origen de radio $\sqrt{\ln(4/P)}$, $P = 4, 2, 1, \frac{1}{2}$

EJERCICIOS 12.2 (página 940)

1. 0 **3.** -4 **5.** 0 **7.** $\delta = \frac{1}{7}\epsilon$

21. El límite existe y es 0; tome $\delta = \sqrt{\epsilon}$ **23.** El límite no existe **25.** $\frac{1}{4}\pi$ **27.** $\frac{1}{2}$

29. Continua en todo punto (x, y) de R^2 que no este sobre la recta $y = 1$

31. Continua en todo punto (x, y) de R^2 que no este sobre el eje y

33. Continua en todo punto (x, y) de R^2 que no este sobre la recta $y = 2x$

35. Continua en todo punto (x, y) de R^2 que esté en el interior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ **37.** Continua en todo punto de R^2

39. Continua en todo punto $(x, y) \neq (0, 0)$ de R^2 **41.** Continua en todo punto de R^2

43. Todos los puntos (x, y) de R^2 que estén en el interior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$

45. Todos los puntos (x, y) de R^2 que estén en el exterior de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ **47.** Todos los puntos (x, y) de R^2 para los cuales $|xy| > 1$

49. Todos los puntos (x, y) de R^2 de los cuadrantes primero y tercero para los cuales $|x + y| < 1$ **51.** Todos los puntos de R^2

53. esencial **55.** eliminable; $f(0, 0) = 0$ **57.** esencial **59.** eliminable; $f(0, 0) = 0$

67. 0 **69.** continua en todo punto (x, y, z) de R^3 que esté en el exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

71. continua en todo punto de R^3

EJERCICIOS 12.3 (página 952)

1. 6 **3.** $3x - 2y$ **5.** $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ **7.** $x^2 - 6xy + 2z$ **9.** $xy + yt + zt$ **11.** 4 **13.** $\dfrac{x}{x^2 + y^2}$

15. $-2\operatorname{sen} 3\theta \operatorname{sen} 2\phi$ **17.** $\dfrac{e^{y/x}}{xy}\left(y\ln\dfrac{x^2}{y} - x\right)$ **19.** $\dfrac{-z}{(x^2 + y^2 + z)^{3/2}}$ **21.** $4xy + \dfrac{1}{z}$ **23.** $xze^{xyz} + \dfrac{exz^2}{z^4 + 9x^2y^2}$

25. **(a)** -1; **(b)** 12 **27.** $-\ln \operatorname{sen} x$; $\ln \operatorname{sen} y$ **29.** **(a)** $\dfrac{2}{y} - \dfrac{6y}{x^4}$; **(b)** $\dfrac{2x^2}{y^3}$ **31.** **(a)** $4e^{2x}\operatorname{sen} y$; **(b)** $-e^{2x}\operatorname{sen} y$

33. **(a)** $2\tan^{-1}\dfrac{y}{x} - \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$; **(b)** $2\tan^{-1}\dfrac{y}{x} + \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ **35.** **(a)** $3y\cosh x$; **(b)** $4x\operatorname{senh} y$

37. **(a)** $e^x\cos y - \dfrac{2x\ln y}{(1 + x^2)^2}$; **(b)** $-e^x\cos y - \dfrac{\tan^{-1}x}{y^2}$ **39.** **(a)** $12x + 20y$; **(b)** $12x + 20y$ **41.** **(a)** 0; **(b)** e^y

43. **(a)** $-2e^z \operatorname{sen} e^z$; **(b)** $-2we^z(\operatorname{sen} e^z + e^z \cos e^z)$ **45.** **(a)** $\dfrac{-320rst}{(r^2 + 4s^2 - 5t^2)^3}$; **(b)** $\dfrac{16r(5t^2 + 12s^2 - r^2)}{(r^2 + 4s^2 - 5t^2)^3}$ **55.** 4

57. -4 grados/cm; -8 grados/cm **59.** **(a)** $\dfrac{100}{i^2}\left[\dfrac{9i + 1}{(1 + i)^9} - 1\right]$; **(b)** $\dfrac{1}{0.0036}\left[\dfrac{1.54}{(1.06)^9} - 1\right] \approx -24.4$; **(c)** $-\dfrac{5\,000 \ln 1.06}{3(1.06)^t}$; **(d)** $-\dfrac{5\,000 \ln 1.06}{3(1.06)^8} \approx -61$ **61.** **(a)** 1; **(b)** 1 **63.** **(a)** -2; **(b)** 0 **65.** ninguna existe

67. $f_{12}(0, 0) = -1$; $f_{21}(0, 0) = 1$ **69.** 0.0943 m²/kg; 6.42 m²/m

EJERCICIOS 12.4 (página 964)

1. **(a)** $3(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)(\Delta y) - (\Delta y)^2 + 14\Delta x - 6\Delta y$; **(b)** 0.5411; **(c)** $14\Delta x - 6\Delta y$; **(d)** 0.54

3. **(a)** $(2 + \Delta x)(-4 + \Delta y)e^{(2 + \Delta x)(-4 + \Delta y)} + 8e^{-8}$; **(b)** -0.0026; **(c)** $28e^{-8}\Delta x - 14e^{-8}\Delta y$; **(d)** -0.0019

5. **(a)** $\Delta x + 4\Delta y + (\Delta x)(\Delta y) + \ln(5 + \Delta z) - \ln 5$; **(b)** 0.2141; **(c)** $\Delta x + 5\,\Delta y + \frac{1}{5}\Delta z$; **(d)** 0.214

7. $(12x^2 - y^2)\,dx + (3 - 2xy)\,dy$ **9.** $(\cos y - y\cos x)\,dx + (-x \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x)\,dy$

11. $\dfrac{2x\,dx - 2y\,dy + 2z\,dz}{x^2 + y^2 + z^2}$ **13.** $\tan^{-1}z\,dx - \dfrac{2y}{z^2}dy + \left(\dfrac{x}{1 + z^2} + \dfrac{y^2}{z^2}\right)dz$

15. **(a)** $2(x_0y_0 - y_0)\,\Delta x + (x_0^2 - 2x_0)\,\Delta y + (y_0\Delta x + \Delta x\Delta y)\Delta x + 2(x_0\Delta x - \Delta x)\Delta y$;
(b) $\epsilon_1 = y_0\,\Delta x + \Delta x\Delta y$; $\epsilon_2 = 2(x_0\Delta x - \Delta x)$

17. **(a)** $\dfrac{2x_0y_0\Delta x + y_0(\Delta x)^2 - x_0^2\Delta y}{y_0^2 + y_0\Delta y}$; **(b)** $\epsilon_1 = \dfrac{y_0^2\Delta x - 2x_0y_0\Delta y}{y_0^3 + y_0^2\Delta y}$; $\epsilon_2 = \dfrac{x_0^3\Delta y}{y_0^3 + y_0^2\Delta y}$

31. **(a)** $(y_0 - z_0)\,\Delta x + x_0\,\Delta y + (2z_0 - x_0)\,\Delta z - (\Delta z)(\Delta x) + \Delta x\,\Delta y + (\Delta z)(\Delta z)$; **(b)** $\epsilon_1 = -\Delta z$, $\epsilon_2 = \Delta x$, $\epsilon_3 = \Delta z$

35. 7.36 m³ **37.** 0.14 cm; 1.4% **39.** $\dfrac{13}{1600}$; 0.325% **41.** $7 200

43. $$D_1f(x, y) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

$$D_2f(x, y) = \begin{cases} 2y \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

EJERCICIOS 12.5 (página 973)

1. $\dfrac{\partial u}{\partial r}$: **(a)** $6x - 2y$; **(b)** $16r - 10s$; $\dfrac{\partial u}{\partial s}$: **(a)** $-2x - 4y$; **(b)** $-10r - 6s$

3. $\dfrac{\partial u}{\partial r}$: **(a)** $13x - 2y + 5$; **(b)** $24r - 41s + 5$; $\dfrac{\partial u}{\partial s}$: **(a)** $-17x - 7y - 10$; **(b)** $-41r + 44s - 10$

5. $\dfrac{\partial u}{\partial r}$: **(a)** $\dfrac{2e^{y/x}}{x^2}(2x \operatorname{sen} t - y\cos t)$; **(b)** 0; $\dfrac{\partial u}{\partial t}$: **(a)** $\dfrac{2re^{y/x}}{x^2}(y \operatorname{sen} t + 2x\cos t)$; **(b)** $2e^{2\tan t}\sec^2 t$

7. $\dfrac{\partial u}{\partial r} = 2r(x + y) + 3x$; $\dfrac{\partial u}{\partial s} = 2s(x + y) - 2x$ **9.** $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{6re^s - s\cos rs}{\sqrt{1 - (3x + y)^2}}$; $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{3e^2e^s + r\cos rs}{\sqrt{1 - (3x + y)^2}}$

11. $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{6s}{x^2}\operatorname{senh}\dfrac{y}{x}(xe^r - ry)$; $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{3}{x^2}\operatorname{senh}\dfrac{y}{x}(2xe^r - yr^2) = 0$

13. $\dfrac{\partial u}{\partial r} = 2x \operatorname{sen}\phi\cos\theta + 2y\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta + 2z\cos\phi$; $\dfrac{\partial u}{\partial \phi} = 2xr\cos\phi\cos\theta + 2yr\cos\phi\operatorname{sen}\theta - 2zr\operatorname{sen}\phi$;
$\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -2xr\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta + 2yr\operatorname{sen}\phi\cos\theta$

15. **(a)** $e^x(\cos t - y\operatorname{sen} t) + e^y(x\cos t - \operatorname{sen} t)$; **(b)** $e^{\cos t}(\cos t - \operatorname{sen}^2 t) + e^{\operatorname{sen} t}(\cos^2 t - \operatorname{sen} t)$

17. **(a)** $\dfrac{x\sec^2 t - y\operatorname{sen} t + z\cos t}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; **(b)** $\tan t\sec t$ **19.** $\dfrac{txe^t - y}{t(x^2 + y^2)}, t > 0$ **21.** $\dfrac{x + y + 2t + ty - tx}{t(y + t)^2}, t > 0$

23. $-\dfrac{3x^2 - 8y}{3y^2 - 8x}$ **25.** $-\dfrac{\operatorname{sen} y - y\cos x}{x\cos y + \cos x}$ **27.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{3y - 6x - 4z}{2z + 4x}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{3x - 2y}{2z + 4x}$

29. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{z}{x}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{xyz + 1}{3xy\tan 3xz - xy^2}$ **35.** $6se^{r-s}(2 + r) - 8e^{-2s}$ **37.** $10\cos^2\theta + 8$ **39.** $-10r\operatorname{sen} 2\theta$

43. decrece a la tasa de $\frac{8}{61}$ rad/min **45.** crece a la tasa de $3\,840\pi$ cm³/min **47.** crece a la tasa de 1.6 litros/min

EJERCICIOS 12.6 (página 983)

1. $2\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y$ **3.** $3x + \sqrt{2}y + 4z$ **5.** $\dfrac{17}{13(x-y)^2}$ **7.** $(8x - 3y)\mathbf{i} + (2y - 3x)\mathbf{j}$ **9.** $\dfrac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$
11. $\dfrac{y+z}{(x+z)^2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{x+z}\mathbf{j} - \dfrac{x-y}{(x+z)^2}\mathbf{k}$ **13.** $e^{-2y}\sec z(\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + x\tan z\mathbf{k})$ **15.** 6 **17.** −42 **19.** −2
21. $-3e^{\pi/4}\cos\frac{1}{12}\pi$ **23.** **(a)** $\langle -4, -4\rangle$; **(b)** $-2 - 2\sqrt{3}$ **25.** **(a)** $\langle -12, 2, 14\rangle$; **(b)** $\frac{6}{7}$ **29.** $\frac{3}{20}\pi + \frac{2}{5}$; $\frac{1}{4}\sqrt{\pi^2 + 4}$
31. $-\frac{29}{11}$; $\sqrt{2}$ **33.** $\theta = \tan^{-1}\dfrac{3}{3\pi+1}$ y $\theta = \tan^{-1}\dfrac{3}{3\pi+1} - \pi$
35. **(a)** $6\sqrt{2}$ grados por metro; **(b)** en la dirección del vector $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$
37. **(a)** −1 volt por pie; **(b)** en la dirección del vector $-\mathbf{j}$ e intensidad de 2 volts por pie

EJERCICIOS 12.7 (página 989)

1. $2x - 2y + 3z = 17$; $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-3}{3}$ **3.** $4x + 8y + 3z + 22 = 0$; $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y+4}{8} = \dfrac{z-6}{3}$
5. $ex - y = 0$; $\dfrac{x-1}{-e} = \dfrac{y-e}{1}, z = 0$ **7.** $x - y - 3 = 0$; $\dfrac{x-6}{1} = \dfrac{y-3}{-1}, z = 3$
9. $x + 2y + 2z - 8 = 0$; $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{2}$ **11.** $3x - 2y - 6z - 84 = 0$; $\dfrac{x-8}{-3} = \dfrac{y-27}{2} = \dfrac{z-1}{6}$
13. $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{20}$ **15.** $x = 4, y = 16$ **17.** $\dfrac{x}{1-8\pi} = \dfrac{y-2}{-2\pi} = \dfrac{z-1}{-1}$ **19.** las superficies son tangentes
21. $9x - 4y - 1 = 0$ **23.** $4x - 5y + 6 = 0$

EJERCICIOS 12.8 (página 1001)

1. $f(0, 0) = 4$, máx. abs. **3.** $f(2, 4) = -4$, mín. abs. **5.** $f(1, 0) = 9$, máx. abs.
7. $f(4, -\frac{1}{2}) = -\frac{133}{4}$, mín. rel.; $f(0, -\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4}$, punto silla **9.** $f(1, 2) = 0$, punto silla **11.** $f(-\frac{1}{4}, 16) = -12$, máx. rel.
13. $f(0, \pm\frac{1}{2}) = 0$, puntos silla **15.** $f(1, 1) = 5$, mín. rel.; $f(-1, -3) = 31$, máx. rel.; $f(1, -3) = 27$, $f(-1, 1) = -1$, puntos silla **17.** $f(0, 0) = 1$, punto silla **19.** $f(2, 4) = -4$, mín. abs.; $f(0, 0) = f(2, 0) = 16$, máx. abs.
21. $f(-\frac{2}{3}, 4) = -\frac{4}{3}$, mín. abs.; $f(2, 4) = 20$, máx. abs. **23.** $f(0, 1) = -2$, mín. abs.; $f(0, 2) = 2$, máx. abs. **25.** 8, 8, 8
27. $(\frac{41}{14}, -\frac{5}{7}, \frac{33}{14})$; $\frac{9}{14}\sqrt{14}$ **29.** $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{17}}, -\dfrac{4}{\sqrt{17}}\right)$ y $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{17}}, \dfrac{4}{\sqrt{17}}\right)$; 1 **31.** $\frac{1}{3}c$ mg de droga A y $\frac{1}{2}c$ mg de droga B
33. $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ unidades cúbicas **35.** la longitud de la base es $2\frac{2}{3}$ pie; el ancho de la base es 2 pie; la profundidad es 3 pie
37. 3 horas–maquina y 9 horas-persona **39.** \$25 400 **41.** **(a)** 3 120; **(b)** 9 **43.** **(a)** $y = 534.7 - 0.423x$ **(b)** 390.6 mililitros por minuto por kilogramo **45.** **(a)** $y = 0.8329x - 25.13$; **(b)** \$62 320
47. 12 del tipo 1; 10 del tipo 2; la utilidad total es \$1064 **49.** largo, 1; ancho, 1; altura, $\frac{1}{2}$

EJERCICIOS 12.9 (página 1012)

1. (0, 0) y (0, 4) **3.** $(\frac{6}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{2}{7})$ **5.** $f(\pm\frac{1}{2}\sqrt{35}, \frac{1}{2}) = \frac{37}{4}$, máx. rel.; $f(0, 3) = 3$, mín. rel.; $f(0, -3) = -3$, mín. rel.
7. $f(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}) = -\frac{2}{9}\sqrt{6}$, mín. rel.; $f(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{6}) = f(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{2}{9}\sqrt{6}$, máx. rel.
9. $f(\pm\frac{1}{2}\sqrt{35}, \frac{1}{2}) = \frac{37}{4}$, máx. abs.; $f(0, -3) = -3$, mín. abs. **11.** Todos los extremos del ejercicio 7 son absolutos
13. 3 **15.** $3\sqrt{3}$ **17.** **(a)** 12; **(b)** 4; **(c)** 1 **19.** $\frac{4}{13}\sqrt{26}$ **21.** 2, 6 **23.** $\frac{37}{13}$ **25.** $\frac{7}{32}$ **37.** 22.5, 7.5, 3.625
39. $T(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$; $T(0, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$ **41.** 15, 10, 7.5, 30, 6

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 12 (página 1015)

1. $\{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \geq 16\}$ **3.** $\{(x, y) \mid y > x^2\}$
5. $\{(x, y, z) \mid y \neq \pm z\}$; el conjunto de todos los puntos de R^3 excepto aquellos en los planos $y = \pm z$
7. $\{(x, y) \mid 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}$; la mitad superior del elipsoide $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{36} = 1$ **9.** $y = \dfrac{k}{4x^{1/2}}, k = 16, 8, 4, 2$
11. **(a)** $4xy - 3y^2 + 4$; **(b)** $2x^2 - 6xy - 2$; **(c)** $4y$; **(d)** $-6x$; **(e)** $4x - 6y$; **(f)** $4x - 6y$

13. **(a)** $\frac{2x}{3y^2}$; **(b)** $\frac{y - 2x^2}{3y^3}$; **(c)** $-\frac{4x}{3y^3}$; **(d)** $-\frac{4x}{3y^3}$
15. **(a)** $t^2 \cos st^2 + te^s$; **(b)** $2st \cos st^2 + e^s$; **(c)** $2t(\cos st^2 - st^2 \operatorname{sen} st^2) + e^s$; **(d)** $2t(\cos st^2 - st^2 \operatorname{sen} st^2) + e^s$
17. **(a)** $\frac{1}{y}e^{x/y} + \frac{1}{x}$; **(b)** $-\frac{x}{y^2}e^{x/y} - \frac{1}{y}$; **(c)** $\frac{1}{y^2}e^{x/y} - \frac{1}{x^2}$; **(d)** $\frac{2x}{y^3}e^{x/y} + \frac{x^2}{y^4}e^{x/y} + \frac{1}{y^2}$
19. **(a)** $\frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$; **(b)** $\frac{-2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$; **(c)** $\frac{-2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$
21. **(a)** $\frac{-320uvw}{(u^2 + 4v^2 - 5w^2)^3}$; **(b)** $\frac{16u(12v^2 + 5w^2 - u^2)}{(u^2 + 4v^2 - 5w^2)^3}$ **23.** **(a)** $\frac{1}{rt^2}$; **(b)** $\frac{-2}{rt^3}$; **(c)** $\frac{2}{r^2t^3}$
27. **(a)** $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{6y(x + y)}{x^2 + y^2} + 3 \ln(x^2 + y^2)$; $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{4y(x - y)}{x^2 + y^2} - 2 \ln(x^2 + y^2)$;
(b) $\frac{\partial u}{\partial t} = (3t - 2s)\frac{18t}{4s^2 + 9t^2} + 3 \ln(8s^2 + 18t^2)$; $\frac{\partial u}{\partial s} = (3t - 2s)\frac{8s}{4s^2 + 9t^2} - 2 \ln(8s^2 + 18t^2)$
29. **(a)** $18xyse^{3rs} + 6yse^{3rs} + 9x^2r^2s^2 + 6xr^2s^2 - 9zr^2s^2$; **(b)** $[9(1 + 2rs)e^{6rs} + 6(1 + rs)e^{3rs} - 9 \ln 4]r^2s^2$
31. **(a)** $3x \cos t - 4(y + 2x) \operatorname{sen} t$; **(b)** $12 \cos 2t - 16 \operatorname{sen} 2t$; $\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=\pi/4} = -16$
33. **(a)** $3(-1 + \Delta x)(3 + \Delta y)^2 - 5(-1 + \Delta x)(2 + \Delta z)^2 - 2(-1 + \Delta x)(3 + \Delta y)(2 + \Delta z) - 5$; **(b)** -0.48;
(c) $-5\,\Delta x - 14\,\Delta y + 26\,\Delta z$; **(d)** -0.48 **35.** 2 **37.** $\frac{1}{6}\pi$ **39.** $\delta = \text{mín}(1, \frac{1}{35}\epsilon)$
41. El límite existe y es 0; tome $\delta = \sqrt[4]{\epsilon}$ **43.** El límite no existe
45. Continua en todos los puntos (x, y) de R^2 que no estén en las rectas $x = \pm 2y$ **47.** Continua en todos los puntos de R^2
49. 14 **51.** $-\frac{5}{2}\sqrt{2}$ **53.** $-\frac{3}{8}$ **55.** **(a)** $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$; **(b)** $\frac{1}{4}(1 + \sqrt{3})$ **59.** $f(-1, 1) = 1$, máx. rel.
63. 39¢ **65.** -3200π cm³/min **67.** decrece a la tasa de 0.44 atm/min
69. $4x + 2y + z - 12 = 0$; $\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 2}{1}$ **71.** $\frac{x - 1}{17} = \frac{y + 2}{20} = \frac{z - 11}{-4}$
73. **(a)** la dirección del vector $-12\mathbf{i} - 150\mathbf{j}$; **(b)** asciende;
(c) en la dirección de alguno de los vectores: $\frac{25}{\sqrt{629}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{629}}\mathbf{j}$ o $-\frac{25}{\sqrt{629}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{629}}\mathbf{j}$
75. $f(\pm\sqrt{5}, 0) = 10$, mín. rel **77.** $f(9, 11, 15) = -362$, máx. rel. **79.** $\frac{7}{6}\sqrt{6}$
81. $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}$ **83.** $2\sqrt{3}$ por $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ por $2\sqrt{3}$
85. **(a)** $-\frac{3\sqrt{3} + 2}{11}$ grados por cm; **(b)** $\frac{2}{11}\sqrt{13}$ grados por cm en la dirección del vector $-\frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$
87. 18 pie por 18 pie por 18 pie **89.** base cuadrada y una profundidad igual a la mitad de la longitud del lado de la base
91. **(a)** $y = 0.285x - 0.951$; **(b)** 11 días **93.** **(a)** $y = 9.628x - 1488.2$; **(b)** 2740 kilogramos por hectárea
95. **(a)** 12; **(b)** -3

EJERCICIOS 13.1 (página 1025)

1. **(a)** $(0, 3, 5)$; **(b)** $(-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\sqrt{3}, -4)$; **(c)** $(\cos 1, \operatorname{sen} 1, 1)$ **3.** **(a)** $(\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$; **(b)** $(0, 2\sqrt{3}, 2)$; **(c)** $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2}, -\sqrt{3})$
5. **(a)** $(2, \frac{2}{3}\pi, -2\sqrt{3})$; **(b)** $(0, \frac{3}{4}\pi, -\sqrt{2})$; **(c)** $(\sqrt{6}, \frac{1}{3}\pi, \sqrt{6})$ **7.** elipsoide; $r^2 + 4z^2 = 16$ **9.** paraboloide elíptico $r^2 = 3z$
11. cono elíptico; $r^2 \cos 2\theta = 3z^2$ **13.** esfera; $\rho = 9 \cos \phi$ **15.** cilindro circular recto; $\rho \operatorname{sen} \phi = 3$
17. esfera; $\rho = 8 \operatorname{sen} \phi \cos \theta$ **19.** **(a)** cilindro circular recto; $x^2 + y^2 = 16$; **(b)** plano que pasa por el eje z; $y = x$
21. $x^2 - y^2 = z^3$ **23.** **(a)** esfera; $x^2 + y^2 + z^2 = 81$; **(b)** semiplano que pasa por el eje z; $y = x$, donde x y y son no negativos; **(c)** la mitad de un cono con vertice en el origen; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ **25.** cilindro circular recto; $x^2 + y^2 = 36$
27. $x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2y$ **29.** **(a)** (iii); **(b)** (vi); **(c)** (viii) **31.** **(a)** (ix); **(b)** (v) **35.** **(b)** $2\pi\sqrt{a^2 + 1}$

EJERCICIOS 13.2 (página 1039)

1. 45 **3.** 50 **5.** 1368 **7.** 704 **9.** 50.75 **11.** 1376 **13.** 68.6 **15.** 38.2 **17.** $[0, 24]$ **19.** $[1, e]$
21. 42 **23.** $\frac{98}{3}$ **25.** $-\frac{49}{5}$ **27.** $\frac{1}{3}$ **29.** $\frac{1}{3}$ **31.** 45 **33.** $\frac{152}{3}$ **35.** $\frac{3}{2}\pi$ **37.** $\frac{864}{5}$ **39.** $\frac{512}{3}$ unidades cúbicas
41. $\frac{16}{3}$ unidades cúbicas **43.** $\frac{15\pi - 32}{120}$ unidades cúbicas **45.** $\frac{1}{12}$ unidades cuadradas **47.** 72 unidades cuadradas

49. $2c\int_{-a}^{a}\int_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\,dx$ **51.** $\frac{337}{30}$ unidades cúbicas **53.** **(a)** $\frac{2}{3}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(2x+y)\,dx\,dy$ **55.** 0

EJERCICIOS 13.3 (página 1050)

1. 12 kg; $(2, \frac{3}{2})$ **3.** $\frac{27}{2}$ kg; $(\frac{6}{5}, \frac{9}{5})$ **5.** $\frac{176}{5}k$ kg; $(\frac{35}{22}, \frac{102}{77})$ **7.** $\frac{2}{3}ka^3$ kg; $(\frac{3}{32}a(2+\pi), \frac{3}{32}a(2+\pi))$ **9.** $\frac{1}{4}k\pi$ kg; $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{16}{9\pi}\right)$
11. $\frac{4}{3}$ kg; $(\frac{6}{5}, \frac{6}{5})$ **13.** $9k$ kg-m^2 **15.** $\frac{1}{2}\pi ka^4$ kg-m^2 **17.** $\frac{96}{35}k$ kg-m^2 **19.** **(a)** $\frac{144}{5}$ kg-m^2; **(b)** 54 kg-m^2; **(c)** $\frac{2}{5}\sqrt{15}$ m; **(d)** $\frac{414}{5}$ kg-m^2 **21.** **(a)** $\frac{3}{32}\pi k$ kg-m^2; **(b)** $\frac{1}{24}\pi(2\pi^2-3)k$ kg-m^2; **(c)** $\frac{1}{4}\sqrt{6}$ m; **(d)** $(\frac{1}{12}\pi^3-\frac{1}{32}\pi)k$ kg-m^2
23. $\frac{19\,904}{315}k$ kg-m^2 **25.** $\sqrt{6}$ unidades cuadradas **27.** $2\sqrt{1633}$ unidades cuadradas **29.** 9 unidades cuadradas
31. $\frac{1}{12}(135\sqrt{10}-13\sqrt{26})$ unidades cuadradas **33.** 32 unidades cuadradas **35.** $9\sqrt{2}$ unidades cuadradas
37. $\pi b\sqrt{a^2+b^2}$ unidades cuadradas **39.** $2\pi a^2(1-e^{-1})$ unidades cuadradas **41.** 12π unidades cuadradas **43.** $\frac{1}{12}b\sqrt{6}$ pies

EJERCICIOS 13.4 (página 1059)

1. 6π unidades cuadradas **3.** $\frac{1}{4}a^2(8+\pi)$ unidades cuadradas **5.** $(4\pi+12\sqrt{3})$ unidades cuadradas **7.** 4π unidades cúbicas
9. $\frac{128}{9}(3\pi-4)$ unidades cúbicas **11.** $\frac{7}{2}\pi$ unidades cúbicas **13.** $\frac{40}{3}\pi k$ kg; $(0, \frac{21}{10})$ **15.** $\frac{22}{3}k\pi$ kg; $(-\frac{57}{44}, 0)$ **17.** $\frac{20}{3}k$ kg; $(\frac{23}{25}, \frac{531}{1280}\pi)$
19. $\frac{8}{9}(27\sqrt{3}-14\pi)k$ kg; $\left(0, \frac{3}{10}\cdot\frac{297\sqrt{3}-160\pi}{27\sqrt{3}-14\pi}\right)$ **21.** $\frac{5}{64}k\pi$ kg-m^2 **23.** $\frac{11}{16}k\pi a^4$ kg-m^2 **25.** $\frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$ m
27. $\pi e(e^8-1)$ **29.** 8π unidades cuadradas **31.** 12π unidades cuadradas **33.** $\frac{1}{6}\pi(2\sqrt{2}-1)a^2$

EJERCICIOS 13.5 (página 1065)

1. $\frac{1}{10}$ **3.** $\frac{7}{8}$ **5.** $-e(\ln 2)^2$ **7.** $\frac{1}{2}\pi-1$ **9.** $\frac{15}{2}$ **11.** $\frac{1}{24}-$ **13.** 36 **15.** $\frac{243}{2}\pi$ **17.** $\frac{648}{5}$ **19.** $\frac{1}{4}$ unidades cúbicas
21. $\frac{3}{2}\pi$ unidades cúbicas **23.** 4π unidades cúbicas **25.** $\frac{4}{3}\pi abc$ unidades cúbicas **27.** $\frac{80}{3}k$ kg **29.** $\frac{1}{28}k$ kg **31.** $\frac{2}{5}(2\sqrt{2}-1)$ kg

EJERCICIOS 13.6 (página 1072)

1. $\frac{1}{3}a^3$ **3.** $6\pi(e-1)$ **5.** πa^3 **7.** $\frac{4}{3}a^3$ **9.** $\frac{1}{3}$ **11.** 8π **13.** $\frac{4}{5}a^5\pi k$ kg **15.** $1250\pi k$ slug-pie^2 **17.** $\frac{4}{5}a^5\pi k$ kg
19. 8π **21.** $\frac{512}{75}k$ kg-m^2 **23.** $8k\pi$ kg **25.** $\frac{56}{9}\pi a^3k$ slug-pie^2 **27.** $(0, 0, \frac{1}{2})$ **29.** 18π **31.** $\frac{1}{15}\pi(2\sqrt{2}-1)$

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 13 (página 1075)

1. $(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \pi, \frac{3}{2})$ **3.** **(a)** $z = r^2(1+\text{sen}\,2\theta)+1$; **(b)** $r^2(25\cos^2\theta+4\,\text{sen}^2\theta) = 100$ **5.** $\frac{1}{40}$ **7.** $\frac{1}{8}\pi$
9. $\frac{1}{8}e^4-\frac{3}{4}e^2+e-\frac{3}{8}$ **11.** $\frac{3}{4}\pi$ **13.** $\frac{1}{8}$ **15.** $\frac{1}{3}$ **17.** $\frac{1}{2}\pi\ln 2$ **19.** $\frac{1}{2}(1-\cos 1)$ **21.** $\frac{4}{15}$ unidades cuadradas **23.** 9π
25. $\frac{8}{3}$ unidades cuadradas **27.** $\frac{8}{3}$ unidades cuadradas **29.** $\frac{1}{2}$ unidades cúbicas **31.** $\frac{1}{2}$ unidades cúbicas **33.** $\frac{1104}{35}$ unidades cúbicas
35. 18 unidades cuadradas **37.** $(\frac{1}{2}\pi-\frac{2}{3})$ unidades cuadradas **39.** $(2, \frac{3}{2})$ **41.** $\frac{1}{108}(3\pi-7)$ kg **43.** $6\pi a^4$ unidades cúbicas
45. $\frac{5}{3}\pi$ unidades cúbicas **47.** $\frac{1}{64}(7e^8+1)$ kg-m^2 **49.** $k(\pi+\frac{8}{3})$ kg-m^2 **51.** $2k\pi$ kg-m^2; $\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$ m
53. $65k\pi$ kg **55.** $\frac{32}{5}k\pi$ kg-m^2

EJERCICIOS 14.1 (página 1088)

7. $6x\mathbf{i}+6y^2\mathbf{j}$ **9.** $\frac{2xy}{1+x^4y^2}\mathbf{i}+\frac{x^2}{1+x^4y^2}\mathbf{j}$ **11.** $(6x^2-6xy+y^2)\mathbf{i}+(-3x^2+2xy-12y^2)\mathbf{j}$
13. $2xye^{-4z}\mathbf{i}+e^{-4z}\mathbf{j}-4x^2ye^{-4z}\mathbf{k}$ **15.** conservador **17.** no conservador **19.** conservador

21. $\phi(x, y) = xy + C$ **23.** $\phi(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + C$ **25.** $\phi(x, y) = x^2y^2 - xy^3 + 2y + C$
27. $\phi(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}z^2 - xy + C$ **29.** $\phi(x, y, z) = ze^x + xe^y - ye^z + C$
31. $\phi(x, y, z) = x^2 \cos y - yz^2 - 3x + 2z + C$ **33.** **0**; 5 **35.** $2e^x \operatorname{sen} y\mathbf{k}; 2e^x \cos y$ **37.** **0**; $2x + 2y + 2z$
39. $\operatorname{sen} z\mathbf{i} + \operatorname{sen} x\mathbf{j} + \operatorname{sen} y\mathbf{k}; 0$ **41.** $\dfrac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}\mathbf{k}; \dfrac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} + 2z$

EJERCICIOS 14.2 (página 1097)

1. 1 **3.** $\pi - \frac{8}{3}$ **5.** 8π **7.** 1 **9.** $\frac{16}{3}$ **11.** $\frac{4}{3}$ **13.** $-\frac{5}{12}$ **15.** $\frac{1477}{2}$ **17.** $\frac{35}{2}$ **19.** $\pi(a^2 + 2a)$ **21.** 8
23. $\frac{4}{3}$ joules **25.** $20\frac{3}{4}$ joules **27.** $27\frac{3}{4}$ joules **29.** $(\frac{1}{16}\pi a^4 + a^2)$ joules **31.** 3 joules
33. $(e^2 + e^4 + e^8 - 3)$ joules **35.** $2\frac{1}{2}$ joules

EJERCICIOS 14.3 (página 1107)

1. 2 **3.** e^2 **5.** -4 **7.** 15 **9.** $-4e$ **11.** -14 **13.** 18 **15.** $2e^2 - 3e^3 + e^4$ **17.** $\frac{3}{4}$ **19.** 11 **21.** $\frac{13}{2}$
23. 4 **25.** 0 **27.** 3 **29.** 4 **31.** -13 **33.** 216 joules **35.** 32 766 joules **37.** $\frac{2}{15}k$ joules

EJERCICIOS 14.4 (página 1119)

1. -1 **3.** $-\frac{5}{12}$ **5.** $-\frac{1}{2}\pi$ **7.** $-\frac{32}{15}$ **9.** $-\frac{3}{7}$ **11.** $\frac{1}{5}$ **13.** $\frac{1}{24}(5 - 4\sqrt{2})\pi$ **15.** 0 **17.** -10π **19.** $\frac{41}{70}$
21. $\frac{9}{2}$ unidades cuadradas **23.** $\frac{1}{3}$ unidades cuadradas **25.** $\frac{3}{8}\pi a^2$ **31.** 24π joules **33.** 0 **35.** 8π cm²/s **37.** $\frac{3}{2}\pi$ cm²/s
39. 15; (i) **41.** 0; (iii)

EJERCICIOS 14.5 (página 1127)

1. 8π **3.** $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ **5.** $\frac{9}{5}\sqrt{14}$ **7.** $\frac{1}{6}(5\sqrt{2} - 1)$ **9.** $\frac{15}{2}\sqrt{2}\pi$ **11.** $\frac{7}{3}\sqrt{61}$ **13.** 0 **15.** $8k\pi$ kg **17.** 9π kg
19. $\frac{665}{6}\sqrt{2}\pi$ kg **21.** 18 **23.** 45π **25.** $\frac{7}{2}$

EJERCICIOS 14.6 (página 1134)

1. $\frac{8}{3}\pi$ **3.** 1 **5.** 18 **7.** $\frac{7}{2}$ **9.** 27 **11.** 32π **13.** 144π **15.** $\frac{11}{12}$ **17.** 0 **19.** π **21.** 54π **23.** -1
25. 8π **27.** -2

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 14 (página 1135)

1. $f(x, y) = e^{x^2} \ln y + C$ **3.** $f(x, y, z) = \dfrac{y}{x + z} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{z} + C$
5. **(a)** $(4xy + 3y^3)\mathbf{i} + (2x^2 + 9xy^2)\mathbf{j}$; **(b)** $e^y\mathbf{i} + (xe^y - yze^y - ze^y)\mathbf{j} - ye^y\mathbf{k}$ **7.** $\phi(x, y) = \tan^{-1} 2xy^2 + C$
9. $\phi(x, y, z) = z^2 \tan x + y^2e^{3z} + C$ **11.** $x(e^{xy} - e^{xz})\mathbf{i} + y(e^{xz} - e^{yz})\mathbf{k}; 0$ **13.** $\dfrac{1 - 2y}{y^2}\mathbf{k}; \dfrac{2x}{y^2}$
15. $-\frac{4}{3}$ **17.** $\frac{44}{3} - 3\pi$ **19.** $\frac{27}{10}$ **21.** $\frac{19}{4}$ **23.** $9e^2 - 1$ **25.** π **27.** 13 **29.** 4
31. 12π **33.** 0 **35.** $\frac{9}{2}$ unidades cuadradas **37.** $\frac{1568}{15}$ joules **39.** $\frac{23}{6}$ joules **43.** 0 **45.** 54 cm²/s **47.** $\frac{1}{2}\pi$
49. $\frac{3}{2}\sqrt{14}$ **51.** $\frac{1}{6}(37\sqrt{37} - 1)$ **53.** $\frac{8}{3}k\pi$ kg **55.** $108\sqrt{2}\pi$ kg **57.** 56π **59.** 160π **63.** 0

EJERCICIOS A.1 (página 1148)

1. $\{-10, -7, -\sqrt{5}, -2, -\frac{7}{4}, -\frac{5}{3}, -1, 0, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \sqrt{2}, 3, 5, 21\}$ **3.** **(a)** $\{x \mid -9 < x < 8\}$; **(b)** $\{y \mid -12 < y < -3\}$;
(c) $\{z \mid 4z - 5 < 0\}$ **5.** **(a)** $\{x \mid 2x + 4 \geq 0\}$; **(b)** $\{r \mid 2 \leq r < 8\}$; **(c)** $\{a \mid -5 < a - 2 \leq 7\}$
7. **(a)** $(2, +\infty)$; **(b)** $(-4, 4]$ **9.** **(a)** $(2, 12)$; **(b)** $(-\infty, -4] \cup (4, +\infty)$ **11.** **(a)** $(2, 12)$; **(b)** $(-\infty, -4] \cup (4, +\infty)$
13. **(a)** $(-4, 0]$; **(b)** $(-\infty, 7]$ **15.** **(a)** $\{x \mid 2 < x < 7\}$; **(b)** $\{x \mid -3 \leq x \leq 6\}$; **(c)** $\{x \mid -5 < x \leq 4\}$;
(d) $\{x \mid -10 \leq x < -2\}$ **17.** **(a)** $\{x \mid x \geq 3\}$; **(b)** $\{x \mid x < 0\}$; **(c)** $\{x \mid x > -4\}$;
(d) el conjunto R de los números reales
19. **(a)** 7; **(b)** $\frac{3}{4}$; **(c)** $3 - \sqrt{3}$; **(d)** $3 - \sqrt{3}$ **21.** **(a)** 6; **(b)** 10; **(c)** 10; **(d)** 6 **23.** **(a)** t; **(b)** $-t$

EJERCICIOS A.2 (página 1157)

1. **(a)** primer cuadrante; **(b)** tercer cuadrante; **(c)** cuarto cuadrante; **(d)** segundo cuadrante **3.** **(a)** $(1, 2)$; **(b)** $(-1, -2)$; **(c)** $(-1, 2)$; **(d)** $(-2, 1)$ **5.** **(a)** $(2, -2)$; **(b)** $(-2, 2)$; **(c)** $(-2, -2)$; **(d)** no es posible

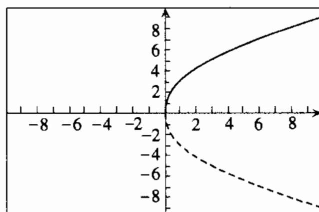
7. **(a)** $(-1, 3)$; **(b)** $(1, -3)$; **(c)** $(1, 3)$; **(d)** $(-3, -1)$ **9.** **(a)** $(-\frac{3}{2}, 2)$ **11.** $|\overline{AB}| = 10$; $|\overline{BC}| = \sqrt{17}$; $|\overline{CA}| = 13$

13. $\sqrt{26}$; $\frac{1}{2}\sqrt{89}$; $\frac{1}{2}\sqrt{53}$ **15.** $|\overline{AB}| = \sqrt{41}$, $|\overline{AC}| = \sqrt{41}$, $|\overline{BC}| = \sqrt{82}$, y $|\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = |\overline{BC}|^2$ **21.** $17\sqrt{2}$

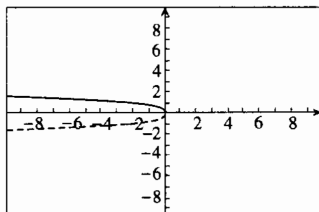
23. -2 u 8

En los ejercicios 25–31, se muestra la gráfica de (i). La parte continua es la gráfica de (ii) y la parte punteada es la de (iii).

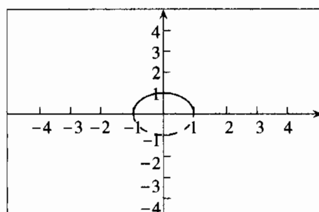
25. Simétrica con respecto al eje x.



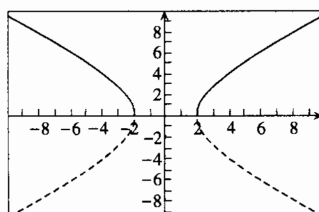
27. Simétrica con respecto al eje x.



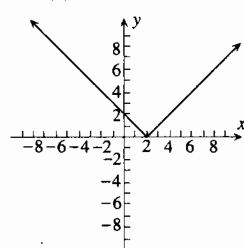
29. Simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen.



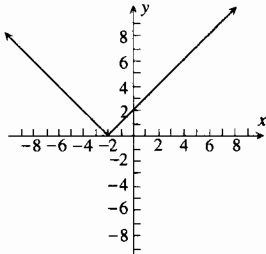
31. Simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen.



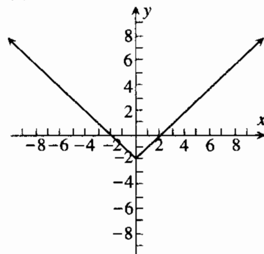
33. **(a)**



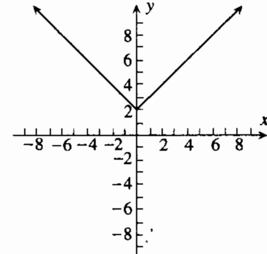
(b)



(c)



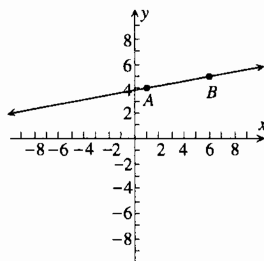
(d)



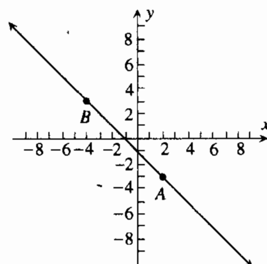
35. Todos son simétricos con respecto al origen. **37.** Todos son simétricos con respecto al eje y.

EJERCICIOS A.3 (página 1166)

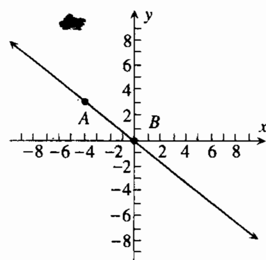
1. **(a)** La pendiente es $\frac{1}{5}$.



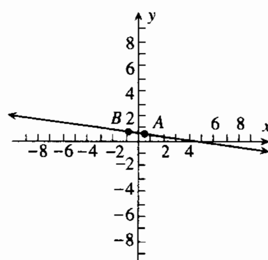
(b) La pendiente es -1.



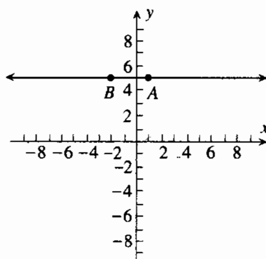
3. **(a)** La pendiente es $-\frac{3}{4}$.



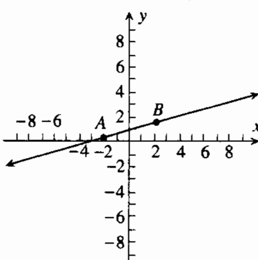
(b) La pendiente es $-\frac{1}{7}$.



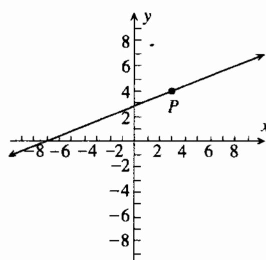
5. **(a)** La pendiente es 0.



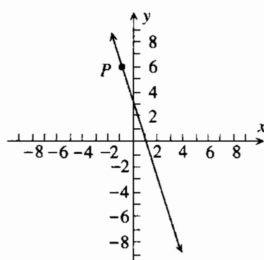
(b) La pendiente es $\frac{1}{4}$.



7. **(a)**

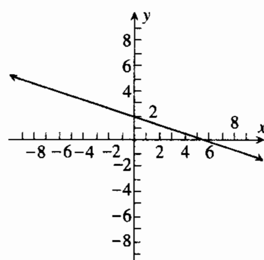


(b)

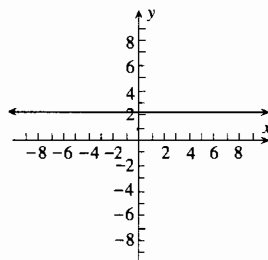


9. **(a)** $4x - y - 11 = 0$; **(b)** $11x - 4y - 9 = 0$ **11.** **(a)** $2x + 3y - 3 = 0$; **(b)** $6x - 3y + 8 = 0$
13. **(a)** $y = -7$; **(b)** $x = 2$ **15.** **(a)** $4x - 3y + 12 = 0$; **(b)** $x - y = 0$ **17.** $2x - y + 7 = 0$
19. $5x + y - 14 = 0$

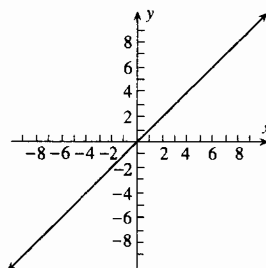
21. **(a)** La pendiente es $-\frac{1}{3}$, la intercepción y es 2.



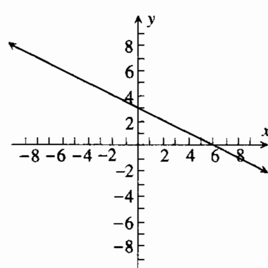
(b) La pendiente es 0, la intercepción y es $\frac{9}{4}$.



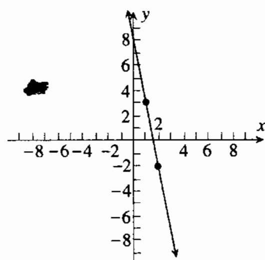
23. **(a)** La pendiente es $\frac{7}{8}$, la intercepción y es 0.



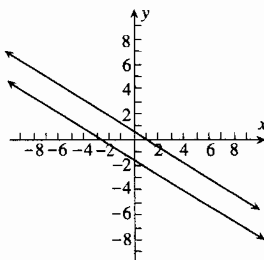
(b) La pendiente es $-\frac{1}{2}$, la intercepción y es 3.



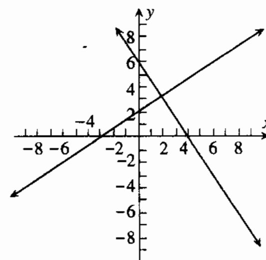
25. $y = -5x + 8$



27. La pendiente de cada recta es $-\frac{3}{5}$.



29. Las pendientes de las rectas son $\frac{2}{3}$ y $-\frac{3}{2}$.



31. $\pm\frac{2}{3}$ **33.** **(a)** colineales; **(b)** no colineales **35.** **(a)** no colineales; **(b)** colineales

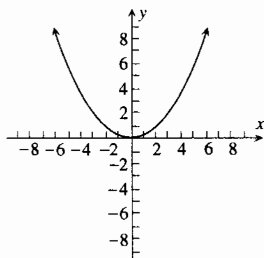
37. Las pendientes de dos lados son $-\frac{1}{2}$; las pendientes de los otros dos lados son $\frac{3}{5}$. **39.** El área es de 5 unidades cuadradas.

41. **(a)** $y = 25x + 3000$ **43.** **(a)** \$600; **(b)** $y = 30x + 600$ **45.** 8

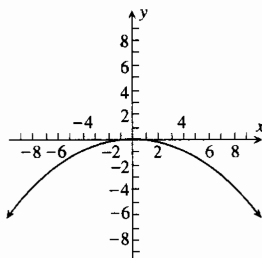
49. desde $(3, -2)$: $y = -\frac{9}{5}(x - 3) - 2$; desde $(2, 4)$: $y = \frac{9}{2}(x - 2) + 4$; desde $(-1, 1)$: $y = 1$

EJERCICIOS A.4 (página 1171)

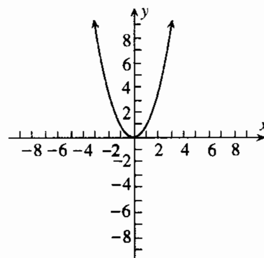
1. **(a)** $(0, 0)$; **(b)** $x = 0$;
(c) $(0, 1)$; **(d)** $y = -1$;
(e) $(-2, 1), (2, 1)$



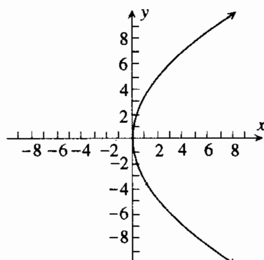
3. **(a)** $(0, 0)$; **(b)** $x = 0$;
(c) $(0, -4)$; **(d)** $y = 4$;
(e) $(-8, -4), (8, -4)$



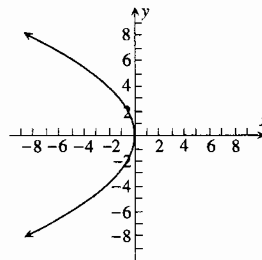
5. **(a)** $(0, 0)$; **(b)** $x = 0$;
(c) $(0, \frac{1}{4})$; **(d)** $y = -\frac{1}{4}$;
(e) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$



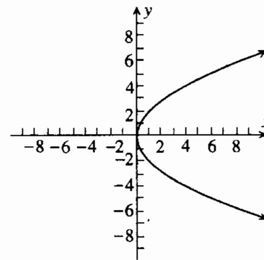
7. **(a)** $(0, 0)$; **(b)** $y = 0$;
(c) $(3, 0)$; **(d)** $x = -3$;
(e) $(3, -6), (3, 6)$



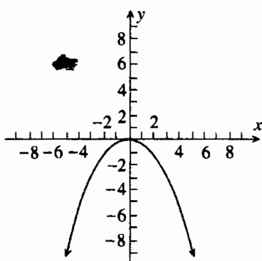
9. **(a)** $(0, 0)$; **(b)** $y = 0$;
(c) $(-2, 0)$; **(d)** $x = 2$;
(e) $(-2, -4), (-2, 4)$



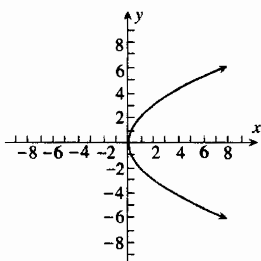
11. **(a)** $(0, 0)$; **(b)** $y = 0$;
(c) $(\frac{5}{4}, 0)$; **(d)** $x = -\frac{5}{4}$
(e) $(\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}), (\frac{5}{4}, \frac{5}{2})$



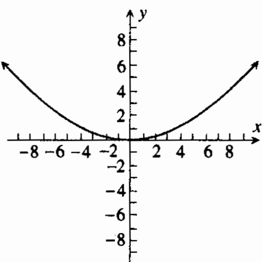
13. (a) $(0, 0)$; (b) $x = 0$; (c) $(0, -\frac{2}{3})$; (d) $y = \frac{2}{3}$; (e) $(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$, $(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$



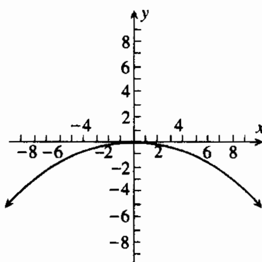
15. (a) $(0, 0)$; (b) $y = 0$; (c) $(\frac{9}{8}, 0)$; (d) $x = -\frac{9}{8}$; (e) $(\frac{9}{8}, -\frac{9}{4})$, $(\frac{9}{8}, \frac{9}{4})$



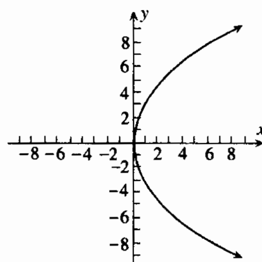
23. $x^2 = 16y$



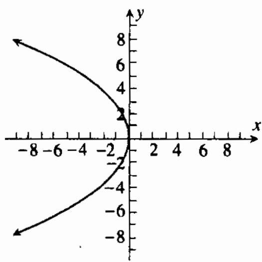
25. $x^2 = -20y$



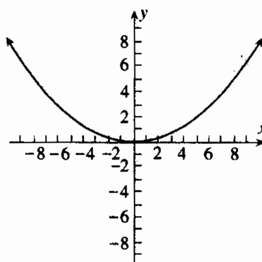
27. $y^2 = 8x$



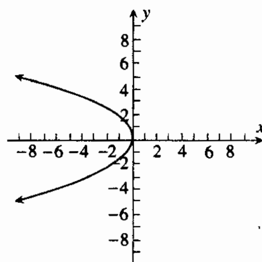
29. $3y^2 = -20x$



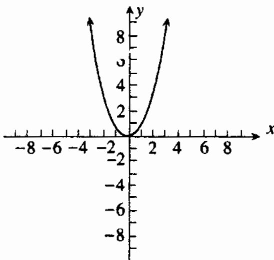
31. $x^2 = 12y$



33. $3y^2 = -8x$



35. $x^2 = y$



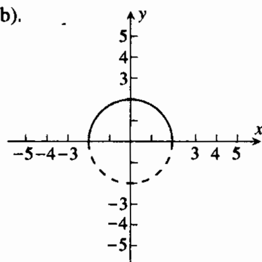
37. $\frac{32}{45}$ pulg

39. 16.6 m

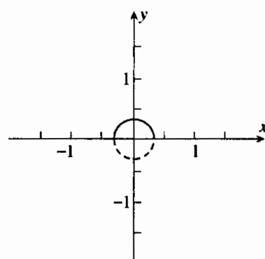
43. (a) $-\frac{5}{2}$; (b) $x^2 = -10y$

EJERCICIOS A.5 (página 1176)

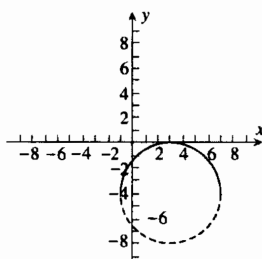
1. Se muestra la gráfica de (c). La parte continua es la gráfica de (a) y la parte punteada es la de (b).



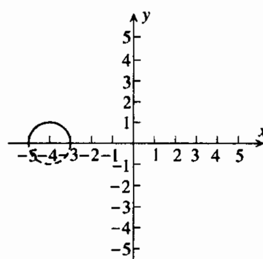
3.



5.



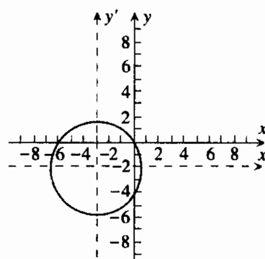
7.

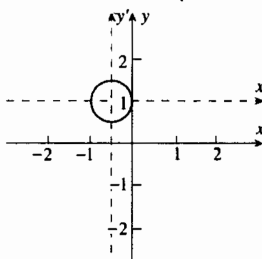


15. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$; $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ **17.** $(x + 5)^2 + (y + 12)^2 = 9$; $x^2 + y^2 + 10x + 24y + 160 = 0$
19. $x^2 + (y - 7)^2 = 1$; $x^2 + y^2 - 14y + 48 = 0$ **21.** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$ **23.** $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 13$
25. (3, 4); 4 **27.** (−1, −5); $2\sqrt{2}$ **29.** $(0, -\frac{2}{3})$; $\frac{5}{3}$ **33.** circunferencia **35.** el conjunto vacío **37.** el punto $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$
39. $y = \frac{4}{3}(x + 4) + 3$ **41.** $y = -\frac{3}{4}(x - 5) + 1$ **39.** $D^2 + E^2 > 4F$
49. Si O es la circunferencia unitaria centrada en el origen y P es la circunferencia de radio 2, también centrada en el origen, entonces el conjunto consiste de los puntos que: **(a)** están dentro o sobre la circunferencia O; **(b)** fuera de la circunferencia O y dentro de la circunferencia P o sobre ella; **(c)** fuera de la circunferencia P.

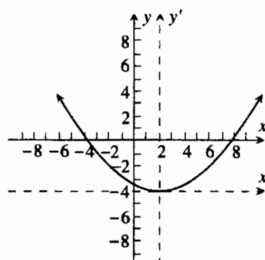
EJERCICIOS A.6 (página 1182)

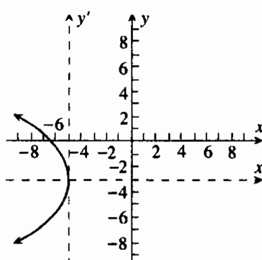
1. $x'^2 + y'^2 = 13$; $x' = x + 3$, $y' = y + 2$ **3.** $x'^2 + y'^2 = \frac{1}{4}$; $x' = x + \frac{1}{2}$, $y' = y - 1$



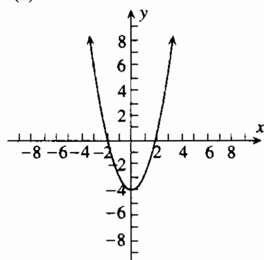


5. $x'^2 = 8y'$; $x' = x - 2$, $y' = y + 4$ **7.** $y'^2 = -6x'$; $x' = x + 5$, $y' = y + 3$

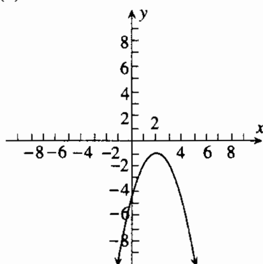




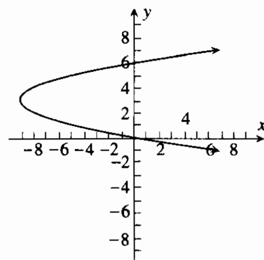
9. **(a)** $(0, -4)$; **(b)** $x = 0$; **(c)** $(0, -\frac{15}{4})$; **(d)** $y = -\frac{17}{4}$; **(e)** $(\frac{1}{2}, -\frac{15}{4}), (-\frac{1}{2}, -\frac{15}{4})$; **(f)**



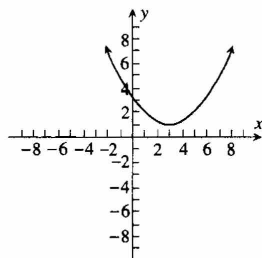
11. **(a)** $(2, -1)$; **(b)** $x = 2$; **(c)** $(2, -\frac{5}{4})$; **(d)** $y = -\frac{3}{4}$; **(e)** $(\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}), (-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$; **(f)**



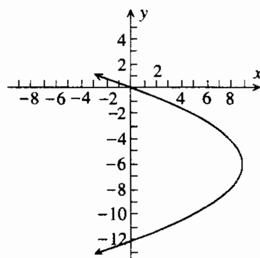
13. **(a)** $(-9, 3)$; **(b)** $y = 3$; **(c)** $(-\frac{35}{4}, 3)$; **(d)** $x = -\frac{37}{4}$; **(e)** $(-\frac{35}{4}, \frac{7}{2}), (-\frac{35}{4}, \frac{5}{4})$; **(f)**



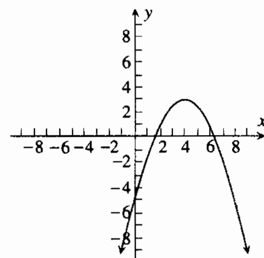
15. **(a)** $(3, 1)$; **(b)** $x = 3$; **(c)** $(3, 2)$; **(d)** $y = 0$; **(e)** $(5, 2), (1, 2)$; **(f)**



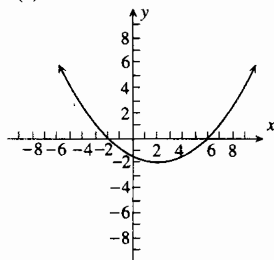
17. **(a)** $(9, -6)$; **(b)** $y = -6$; **(c)** $(8, -6)$; **(d)** $x = 10$; **(e)** $(8, -4), (8, -8)$; **(f)**



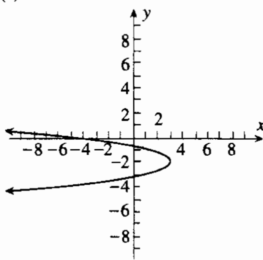
19. **(a)** $(4, 3)$; **(b)** $x = 4$; **(c)** $(4, \frac{5}{2})$; **(d)** $y = \frac{7}{2}$; **(e)** $(5, \frac{5}{2}), (3, \frac{5}{2})$; **(f)**



21. **(a)** $(2, -2)$; **(b)** $x = 2$; **(c)** $(2, 0)$; **(d)** $y = -4$; **(e)** $(6, 0), (-2, 0)$; **(f)**

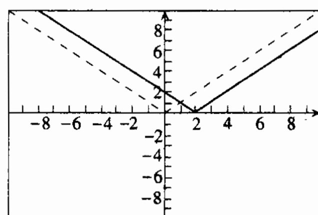


23. **(a)** $(3, -2)$; **(b)** $y = -2$; **(c)** $(\frac{23}{8}, -2)$; **(d)** $x = \frac{25}{8}$; **(e)** $(\frac{23}{8}, -\frac{7}{4}), (\frac{23}{8}, -\frac{9}{4})$; **(f)**

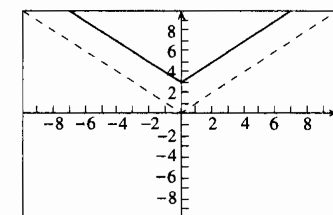


En los ejercicios 29–45, la gráfica de la primera ecuación se presenta punteada; la de la segunda se muestra en forma continua.

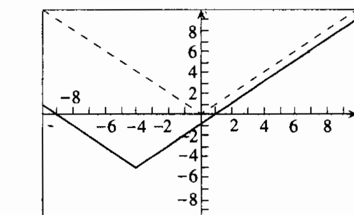
29.

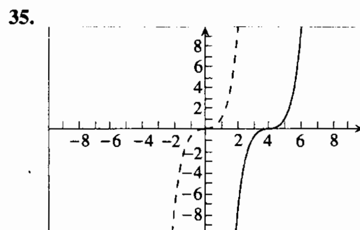


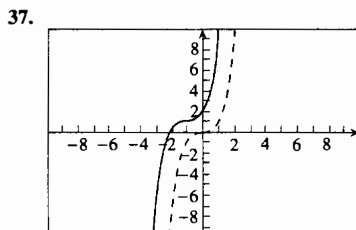
31.

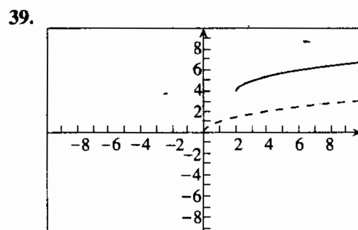


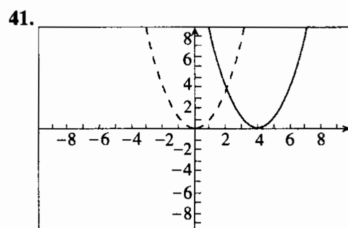
33.

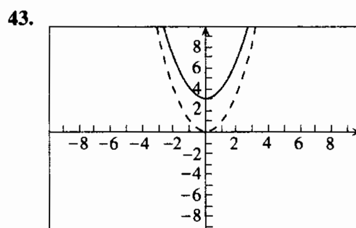


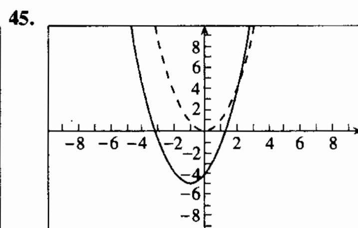
35.


37.


39.


41.


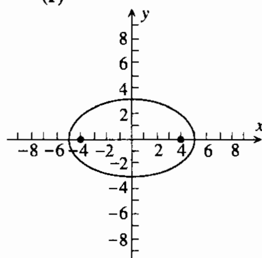
43.


45.


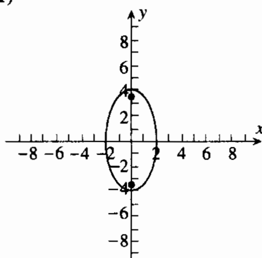
47. $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

EJERCICIOS A.7 (página 1191)

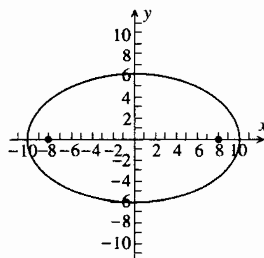
1. **(a)** (0, 0); **(b)** eje x; **(c)** (−5, 0), (5, 0); **(d)** (0, −3), (0, 3); **(e)** (−4, 0), (4, 0); **(f)**



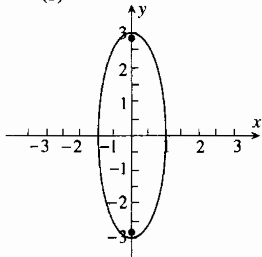
3. **(a)** (0, 0); **(b)** eje y; **(c)** (0, −4), (0, 4); **(d)** (−2, 0), (2, 0); **(e)** $(0, -2\sqrt{3})$, $(0, 2\sqrt{3})$; **(f)**



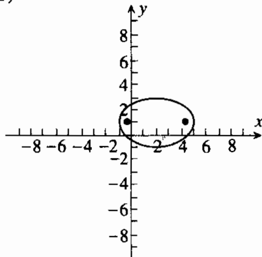
5. **(a)** (0, 0); **(b)** eje x; **(c)** (−10, 0), (10, 0); **(d)** (0, −6), (0, 6); **(e)** (−8, 0), (8, 0); **(f)**



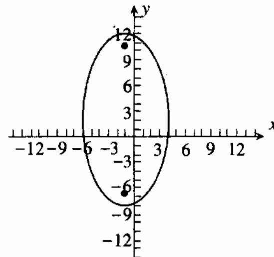
7. **(a)** (0, 0); **(b)** eje y; **(c)** (0, −3), (0, 3); **(d)** (−1, 0), (1, 0); **(e)** $(0, -2\sqrt{2})$, $(0, 2\sqrt{2})$; **(f)**



9. **(a)** (2, 1); **(b)** $y = 1$; **(c)** (−1, 1), (5, 1); **(d)** (2, −1), (2, 3); **(e)** $(2 - \sqrt{5}, 1)$, $(2 + \sqrt{5}, 1)$; **(f)**

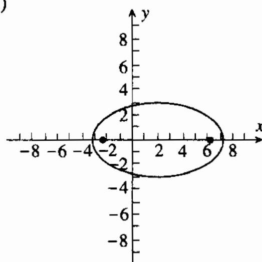


11. **(a)** (−1, 2); **(b)** $x = -1$; **(c)** (−1, −8), (−1, 12); **(d)** (−6, 2), (4, 2); **(e)** $(-1, 2 - 5\sqrt{3})$, $(-1, 2 + 5\sqrt{3})$; **(f)**



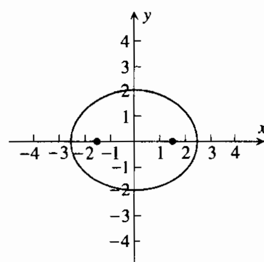
13. el punto $(-\frac{5}{2}, 4)$

15. **(a)** $(2, 0)$; **(b)** eje x;
(c) $(2 - 3\sqrt{3}, 0)$, $(2 + 3\sqrt{3}, 0)$;
(d) $(2, -3)$, $(2, 3)$;
(e) $(2 - 3\sqrt{2}, 0)$, $(2 + 3\sqrt{2}, 0)$;
(f)

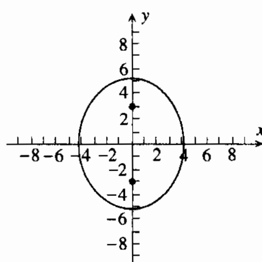


17. el punto $(1, -1)$

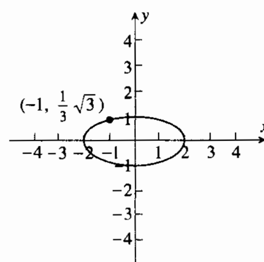
19. $16x^2 + 25y^2 = 100$



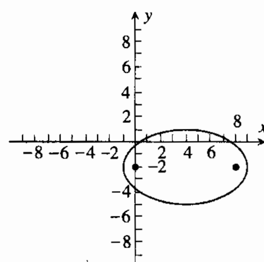
21. $3x^2 + 2y^2 = 54$



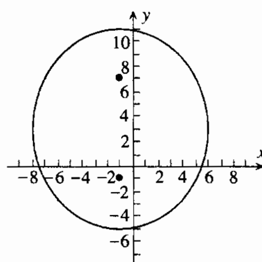
23. $x^2 + 4y^2 = 4$



25. $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$



27. $\frac{(x+1)^2}{48} + \frac{(y-3)^2}{64} = 1$

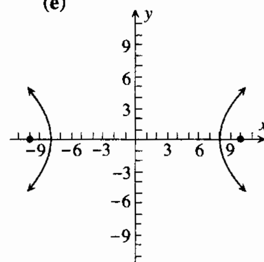


29. 8.4 m

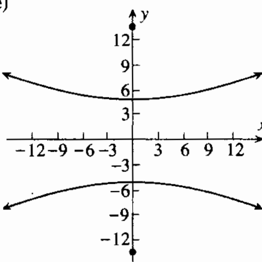
31. $9x^2 + 25y^2 = 562{,}500$, donde la unidad es 1 millón de kilómetros

EJERCICIOS A.8 (página 1200)

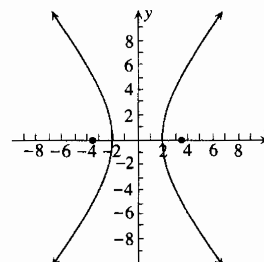
1. **(a)** $(0, 0)$; **(b)** eje x;
(c) $(-8, 0)$, $(8, 0)$;
(d) $(-10, 0)$, $(10, 0)$;
(e)



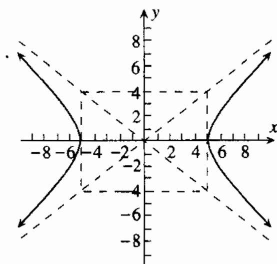
3. **(a)** $(0, 0)$; **(b)** eje y;
(c) $(0, -5)$, $(0, 5)$;
(d) $(0, -13)$, $(0, 13)$;
(e)



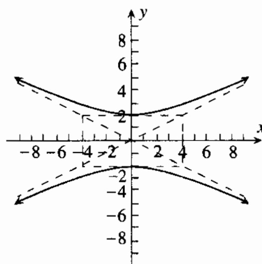
5. **(a)** $(0, 0)$; **(b)** eje x;
(c) $(-2, 0)$, $(2, 0)$;
(d) $(-\sqrt{13}, 0)$, $(\sqrt{13}, 0)$;
(e)



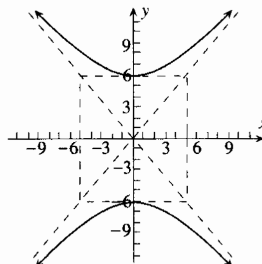
7. **(a)** $(0, 0)$; **(b)** eje x;
(c) $(-5, 0)$, $(5, 0)$;
(d)



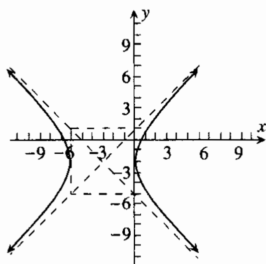
9. **(a)** $(0, 0)$; **(b)** eje y;
(c) $(0, -2)$, $(0, 2)$;
(d)



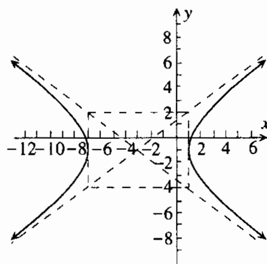
11. **(a)** $(0, 0)$; **(b)** eje y;
(c) $(0, -6)$, $(0, 6)$;
(d)



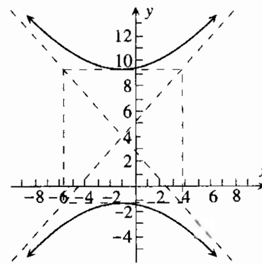
13. **(a)** $(-3, -2)$; **(b)** $y = -2$;
(c) $(-6, -2)$, $(0, -2)$;
(d)



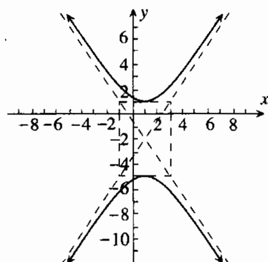
15. **(a)** $(-3, -1)$; **(b)** $y = -1$;
(c) $(-7, -1)$, $(1, -1)$;
(d)



17. **(a)** $(-1, 4)$; **(b)** $x = -1$;
(c) $(-1, 4 - 2\sqrt{7})$,
$(-1, 4 + 2\sqrt{7})$;
(d)



19. **(a)** $(1, -2)$; **(b)** $x = 1$;
(c) $(1, -5)$, $(1, 1)$;
(d)

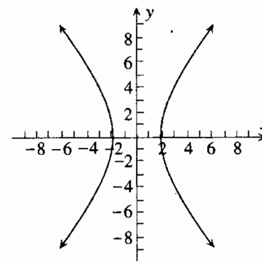


21. $y = -\frac{4}{5}x$, $y = \frac{4}{5}x$

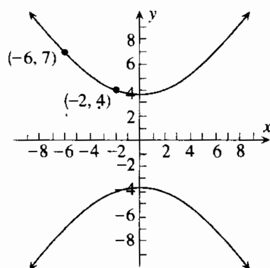
23. $y = -x + 5$, $y = x + 1$

25. $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$

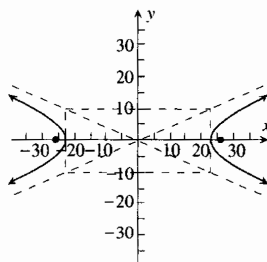
27. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$



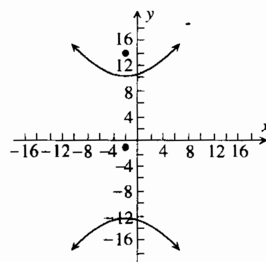
29. $32y^2 - 33x^2 = 380$



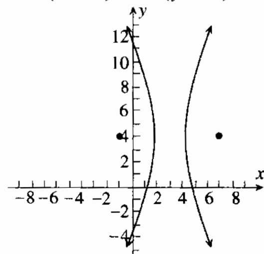
31. $\dfrac{x^2}{576} - \dfrac{y^2}{100} = 1$



33. $\dfrac{(y+1)^2}{144} - \dfrac{(x+2)^2}{81} = 1$



35. $72(x-3)^2 - 9(y-4)^2 = 128$



37. **(a)** $\dfrac{(x+2)^2}{1} - \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$; **(b)** $y = 2x + 3, y = -2x - 5$

39. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{7} = 1$ **41.** La rama derecha de la hipérbola $\dfrac{x^2}{900} - \dfrac{y^2}{1600} = 1$.

EJERCICIOS A.9 (página 1207)

1. **(a)** $\frac{1}{3}\pi$; **(b)** $\frac{3}{4}\pi$; **(c)** $\frac{7}{6}\pi$; **(d)** $-\frac{5}{6}\pi$; **(e)** $\frac{1}{9}\pi$; **(f)** $\frac{5}{2}\pi$; **(g)** $-\frac{5}{12}\pi$; **(h)** $\frac{5}{9}\pi$

3. **(a)** 45°; **(b)** 120°; **(c)** 330°; **(d)** −90°; **(e)** 28°39′ **(f)** 540°; **(g)** −114°36′; **(h)** 15°

5. **(a)** $\frac{1}{2}$; **(b)** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; **(c)** 1; **(d)** $\frac{1}{2}$ **7.** **(a)** $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$; **(b)** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; **(c)** −1; **(d)** 0 **9.** **(a)** $\sqrt{3}$; **(b)** 1; **(c)** −1; **(d)** 1

11. **(a)** $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; **(b)** $\sqrt{2}$; **(c)** $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$; **(d)** 1 **13.** **(a)** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; **(b)** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; **(c)** $\sqrt{2}$; **(d)** $\sqrt{2}$

15. **(a)** $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$; **(b)** $-\frac{1}{2}$; **(c)** −2; **(d)** $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$ **17.** **(a)** 0; **(b)** 1; **(c)** −1; **(d)** indefinido

19. **(a)** 1; **(b)** 0; **(c)** indefinido; **(d)** 1 **21.** **(a)** −1; **(b)** −1; **(c)** $\frac{1}{3}\sqrt{3}$; **(d)** $\sqrt{3}$

23. **(a)** $-\sqrt{3}$; **(b)** $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$; **(c)** 0; **(d)** 0 **25.** **(a)** $\frac{1}{2}\pi$; **(b)** π; **(c)** $\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$; **(d)** 0

27. **(a)** $0, \pi$; **(b)** $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$; **(c)** $0, \pi$; **(d)** $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ **29.** **(a)** $\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$; **(b)** $\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$ **(c)** $\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$; **(d)** $\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi$

31. **(a)** $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$; **(b)** $0, \pi$ **33.** **(a)** π; **(b)** $\frac{3}{2}\pi$ **35.** $x = 5\cos t, y = 3\operatorname{sen} t$ **37.** $x = 2\cos t, y = 4\operatorname{sen} t$

39. $x = 3\cos t + 2, y = 2\operatorname{sen} t + 1$ **41.** $x = 5\cos t - 1, y = 10\operatorname{sen} t + 2$ **45.** $x = 8\sec t = 8/\cos t, y = 6\tan t$

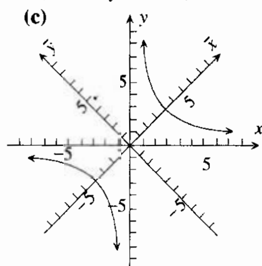
47. $x = 12\tan t, y = 5\sec t = 5/\cos t$ **49.** $x = 3\sec t - 3 = 3/\cos t - 3, y = 3\tan t - 2$

51. $x = \sqrt{21}\tan t - 1, y = 2\sqrt{7}\sec t + 4 = 2\sqrt{7}/\cos t + 4$

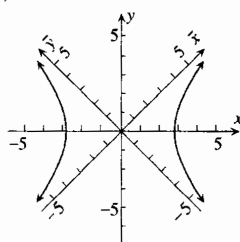
EJERCICIOS A.10 (página 1215)

1. **(a)** hipérbola; **(b)** elipse; **(c)** parábola; **(d)** dos rectas que se intersectan **3.** **(a)** un punto; **(b)** hipérbola; **(c)** parábola; **(d)** el conjunto vacío

5. **(a)** hipérbola;
(b) $\bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 16$;
(c)



7. **(a)** hipérbola;
(b) $\bar{x}\bar{y} = -4$;
(c)



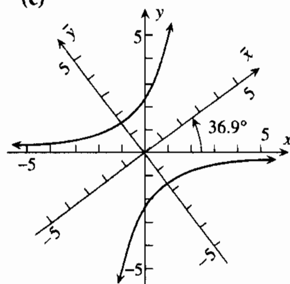
En los ejercicios 9–25, los ejes $\overline{x}\overline{y}$ se han rotado un ángulo de medida α.

9. (**a**) hipérbola;

(**b**) $\alpha \approx 36.9°$,

$16\overline{y}^2 - 9\overline{x}^2 = 36$;

(**c**)

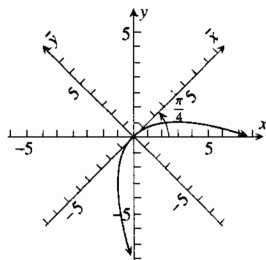


11. (**a**) parábola;

(**b**) $\alpha = \frac{1}{4}\pi$,

$\overline{x}^2 + 4\sqrt{2}\overline{y} = 0$;

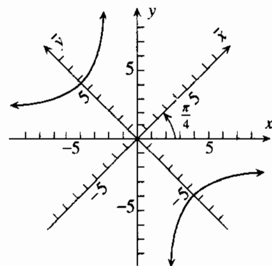
(**c**)



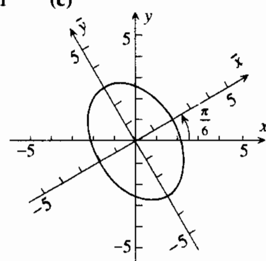
13. (**a**) hipérbola;

(**b**) $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, $\overline{y}^2 - \overline{x}^2 = 32$;

(**c**)



15. (**a**) elipse; (**b**) $\alpha \approx \frac{1}{6}\pi$; + $\dfrac{\overline{x}^2}{4} + \dfrac{\overline{y}^2}{9} = 1$ (**c**)

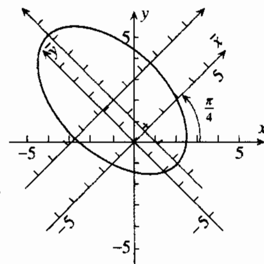


En los ejercicios 17–25, los ejes $x'y'$ también se han trasladado de modo que $x' = \overline{x} - h$, $y' = \overline{y} - k$.

17. (**a**) elipse; (**b**) $\alpha = \frac{1}{4}\pi$,

$h = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $k = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, $\dfrac{x'^2}{6} + \dfrac{y'^2}{18} + = 1$;

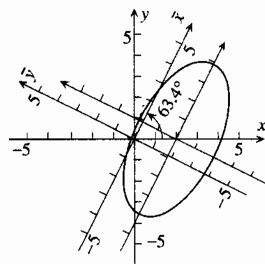
(**c**)



19. (**a**) elipse; (**b**) $\alpha \approx 63.4°$,

$h = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $k = -\dfrac{4}{\sqrt{5}}$, $\dfrac{x'^2}{16} + \dfrac{y'^2}{4} = 1$;

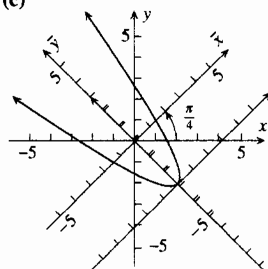
(**c**)



21. (**a**) parábola; (**b**) $\alpha = \frac{1}{4}\pi$,

$h = 0$, $k = -2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}x'^2 = y'$;

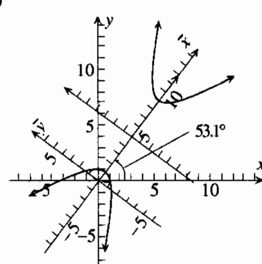
(**c**)



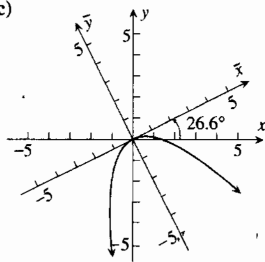
23. (**a**) hipérbola; (**b**) $\alpha \approx 53.1°$,

$h = 5$, $k = 0$, $\dfrac{x'^2}{16} - \dfrac{y'^2}{4} = 1$;

(**c**)



25. (a) parábola; (b) $\alpha \approx 26.6°$, $\sqrt{5}\bar{x}^2 + 6\sqrt{5}\bar{y} = 0$;
(c)



27. Refiérase a la figura del ejercicio 9(c).
29. Refiérase a la figura del ejercicio 11(c).
31. Refiérase a la figura del ejercicio 17(c).
33. Refiérase a la figura del ejercicio 21(c).

EJERCICIOS A.11 (página 1222)

1. $\frac{3}{x-2} - \frac{3}{x+2}$ 3. $-\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}$ 5. $\frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-1}$ 7. $\frac{-5}{3x+1} + \frac{2}{x-2}$ 9. $\frac{2}{x} - \frac{3}{3x-2} - \frac{1}{2x+3}$

11. $2x + \frac{5}{x-2} + \frac{3}{x+2}$ 13. $2x - 5 + \frac{3}{2x-3} + \frac{2}{x+2}$ 15. $\frac{5}{x^2} - \frac{4}{x} + \frac{7}{x-2}$ 17. $\frac{2}{x+2} - \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2}$

19. $\frac{6}{(2x+1)^2} + \frac{\frac{14}{3}}{2x+1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{\frac{7}{3}}{x-1}$ 21. $1 + \frac{16}{(x-2)^3} + \frac{18}{(x-2)^2} + \frac{6}{x-2}$ 23. $\frac{4}{x} - \frac{x+5}{x^2+x+1}$

25. $\frac{1}{x-2} + \frac{2x+4}{x^2+2x+4}$ 27. $-\frac{2}{x-1} + \frac{4x-3}{x^2+1}$ 29. $\frac{4}{x+4} + \frac{3x-1}{2x^2+3}$ 31. $\frac{x+2}{x^2+2} - \frac{x-2}{x^2-x-1}$

33. $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+2x+3}$ 35. $\frac{x-1}{x^2+1} - \frac{x-1}{(x^2+1)^2}$ 37. $\frac{x-15}{(x^2+2)^2} + \frac{3x+4}{x^2+2} - \frac{2}{x-1}$

ÍNDICE